অধ্যায় ৯

অনুক্ৰম আৰু শ্ৰেণী
(SEQUENCES AND SERIES)

❖ ***Natural numbers are the product of human spirit– DEDEKIND*** ❖

9.1 অৱতাৰণা (Introduction)

Fibonacci
(1175-1250)

গণিত-শাস্ত্ৰত 'অনুক্ৰম' (Sequence) শব্দটো সাধাৰণ ইংৰাজী ভাষাত ব্যৱহৃত অৰ্থতেই ব্যৱহাৰ কৰা হয়। আমি কিছুমান বস্তুৰ সংগ্ৰহ এটাক অনুক্ৰমত তালিকাভুক্ত কৰাৰ অৰ্থ এইটোকে বুজোঁ যে বস্তুবোৰ এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমত থাকে আৰু এইবোৰক উক্ত ক্ৰমটোৰ প্ৰথম পদ, দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় পদ ইত্যাদিকৈ চিনাক্ত কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, বিভিন্ন সময়ৰ জনসংখ্যা বা বেক্টেৰিয়াই অনুক্ৰম গঠন কৰে। কিছু বছৰ ধৰি বেংকত জমা থোৱা ধনৰ পৰিমাণেও এটা অনুক্ৰম গঠন কৰে। কোনো বস্তুৰ বাৰ্ষিক মূল্য-হ্ৰাসৰ পৰিমাণেও এটা অনুক্ৰম গঠন কৰে। মানৱ জীৱনৰ কৰ্মৰাজিৰ বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত অনুক্ৰমৰ ব্যাৱহাৰিক গুৰুত্ব আছে। এক বিশেষ ধৰণৰ অনুক্ৰমক **প্ৰগতি** (Progression) বুলি কোৱা হয়। আগৰ শ্ৰেণীত আমি **সমান্তৰ প্ৰগতি** (AP) পাই আহিছোঁ। এই অধ্যায়ত সমান্তৰ প্ৰগতিৰ বিষয়ে আৰু কিছু আলোচনা কৰাৰ উপৰিও সমান্তৰ মাধ্য, গুণোত্তৰ মাধ্য, সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুণোত্তৰ মাধ্যৰ মাজৰ সম্পৰ্ক, ক্ৰমিক স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰৰ প্ৰথম n টা পদলৈ যোগফল, স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গ আৰু ঘনৰ n টা পদলৈ যোগফল আদি আলোচনা কৰা হ'ব।

9.2 অনুক্ৰম (Sequences)

আমি এটা উদাহৰণেৰে আৰম্ভ কৰোঁ।

ধৰা হ'ল বংশানুক্ৰমৰ ব্যৱধান (generation gap) 30 বছৰ আৰু আমাক এজন ব্যক্তিৰ পূৰ্বপুৰুষৰ, অৰ্থাৎ পিতৃ-মাতৃ, ককাদেউতা-আইতা, আজো ককাদেউতা-আজো আইতা, ইত্যাদিসকলৰ সংখ্যা উলিয়াবলৈ কোৱা হ'ল। হিচাপটো 300 বছৰৰ কালছোৱাৰ বাবে উলিয়াব লাগে।

ইয়াত মুঠ বংশানুক্ৰমৰ সংখ্যা $=\dfrac{300}{30}=10$। প্ৰথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., দশম বংশানুক্ৰমত মানুহজনৰ পূৰ্বপুৰুষৰ সংখ্যা 2, 4, 8,16,32......,1024 পোৱা গ'ল। এই সংখ্যাবোৰে আমি উল্লেখ কৰা অনুক্ৰম এটা গঠন কৰে।

ধৰা হ'ল 10 সংখ্যটোক 3 ৰে ভাগ কৰা হৈছে। হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বিভিন্ন স্তৰত পোৱা ক্ৰমিক ভাগফলবোৰ হ'ব 3, 3.3, 3.33, 3.333,..... ইত্যাদি। এই ভাগফলবোৰেও এটা অনুক্ৰম গঠন কৰে। অনুক্ৰম গঠন কৰা সংখ্যাবোৰক অনুক্ৰমটোৰ **পদ** (terms) বোলা হয়। এটা অনুক্ৰমৰ পদবোৰ $a_1, a_2, a_3,......., a_n,....$ ইত্যাদি প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। প্ৰতিটো পদ বুজোৱা আখৰটোৰ লগত সংযুক্ত অধোলিখিত সংখ্যাটোৱে পদটোৰ স্থানৰ সংখ্যা বুজায়। n তম পদটোক অনুক্ৰমটোৰ **সাধাৰণ পদ** (general term) বোলা হয়। এই পদটো হ'ল a_n.

গতিকে, ওপৰত আলোচনা কৰা ব্যক্তি এজনৰ পূৰ্বপুৰুষৰ অনুক্ৰমটোৰ পদবোৰ হ'ল

$$a_1=2,\ a_2=4.\ a_3=2,........,\ a_{10}=1024$$

সেইদৰে ক্ৰমিক ভাগফলৰ অনুক্ৰমটোৰ পদবোৰ হ'ল

$$a_1=3,\ a_2=3.3,\ a_3=3.33,\ ....,\ a_6=3.33333,$$ ইত্যাদি।

এটা অনুক্ৰমৰ পদৰ সংখ্যা সীমিত হ'লে, অনুক্ৰমটোক **সসীম অনুক্ৰম** (finite sequence) বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, পূৰ্বপুৰুষৰ অনুক্ৰমটো এটা সসীম অনুক্ৰম, কাৰণ ইয়াত মাত্ৰ 10 টা পদ (এটা নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা) আছে।

অনুক্ৰম এটা সসীম নহ'লে **অসীম অনুক্ৰম** (infinite sequence) বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, ভাগফলৰ অনুক্ৰমটো এটা অসীম অনুক্ৰম, এই অৰ্থত অসীম যে ইয়াৰ পদবোৰ কেতিয়াও শেষ হৈ নাযায়।

সাধাৰণতে কোনো এটা অনুক্ৰমৰ পদবোৰ নিৰ্ধাৰণ কৰা নিয়মটোক এটা বীজগণিতীয় সূত্ৰ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ অনুক্ৰম 2, 4, 6,....টো লোৱা হওক। ইয়াত,

$a_1=2=2\times 1$ $\quad$ $a_2=4=2\times 2$

$a_3=6=2\times 3$ $\quad$ $a_4=8=2\times 4$

------------ $\quad$ ------------

------------ $\quad$ ------------

$a_{23}=46=2\times 23,$ $\quad$ $a_{24}=48=2\times 24$ ইত্যাদি।

দৰাচলতে, এই অনুক্ৰমটোৰ n তম পদটো $a_n=2n$, n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা বুলি লিখিব পাৰি। সেইদৰে, অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ অনুক্ৰম 1, 3, 5,.....,ইত্যাদিৰ n-তম পদটো $a_n=2n-1$, n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা বুলি লিখিব পাৰি।

কোনো কোনো ক্ষেত্ৰত অনুক্ৰমৰ পদবোৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বীজগণিতীয় সূত্ৰৰে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. ৰে গঠিত অনুক্ৰমটোৰ n তম পদটো এটা সূত্ৰৰে লিখিব নোৱাৰি। কিন্তু অনুক্ৰমটোৰ পদসমূহ নিম্নলিখিত সম্পৰ্ককেইটাৰ সহায়ত লিখিব পাৰি

$$a_1=a_2=1$$

$$a_3=a_1+a_2$$

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1},\ n>2$$

এই অনুক্ৰমটোক **ফিব'নাচ্চি অনুক্ৰম** (Fibonacci sequence) বোলা হয়।

সেইদৰে 2, 3, 5, 7, 11,.. ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যাৰে গঠিত অনুক্ৰমটোৰ n তম পদৰ কোনো সূত্ৰ নাই। এনেধৰণৰ অনুক্ৰমবোৰ অকল মৌখিক বৰ্ণনাৰেহে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

প্ৰতিটো অনুক্ৰমৰ পদসমূহ এটা নিৰ্দিষ্ট সূত্ৰেৰে প্ৰকাশ কৰিব পৰাটো আমি আশা কৰিব নোৱাৰোঁ। তথাপিও অনুক্ৰমটোৰ ক্ৰমিক পদসমূহ $a_1,\ a_2,.....,a_n,....$ নিৰ্ধাৰণ কৰা এটা তত্ত্বগত যোজনা বা নিয়ম আশা কৰিব পাৰি।

ওপৰৰ মন্তব্য সাপেক্ষে, অনুক্ৰম এটাক এটা ফলন বুলি ক'ব পাৰি, যাৰ আদিক্ষেত্ৰটো হ'ল স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি **N** বা {1,2,3,...,k} ধৰণৰ এটা উপসংহতি। কেতিয়াবা কেতিয়াবা a_n ৰ বাবে ফলনীয় প্ৰতীক $a(n)$ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

9.3 শ্ৰেণী (Series)

ধৰা হ'ল $a_1, a_2, a_3..., a_n,...$ এটা অনুক্ৰম। এই অনুক্ৰমটোৰ ক্ৰমিক পদবোৰৰ সমষ্টি $a_1+a_2+a_3+.....+a_n+.......$,ক এটা শ্ৰেণী (series) বুলি কোৱা হয়। শ্ৰেণীটো এটা সসীম বা অসীম শ্ৰেণী হ'ব যদিহে প্ৰদত্ত অনুক্ৰমটো সসীম বা অসীম হয়। শ্ৰেণী এটা সংক্ষিপ্ত আকাৰত লিখিবলৈ গ্ৰীক বৰ্ণমলাৰ $\sum$(sigma) বৰ্ণটো সমষ্টিৰ প্ৰতীক হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই প্ৰতীকটোৰ সহায়ত $a_1+a_2+a_3+.....+a_n$ শ্ৰেণীটো $\sum_{k=1}^{n} a_k$ বুলি লিখা হয়।

মন্তব্য শ্ৰেণী এটাই প্ৰদৰ্শিত সমষ্টিটো বুজায়, পদবোৰৰ যোগ ফলৰ মানটো নুবুজায়। উদাহৰণস্বপে, 1+3+5+7 এটা 4 টা পদৰ সসীম শ্ৰেণী। 'শ্ৰেণীটোৰ যোগফল' বুলিলে, পদবোৰ যোগ কৰি পোৱা 16 সংখ্যাটো বুজাব। এতিয়া আমি কেইটামান উদাহৰণ দিওঁ।

উদাহৰণ 1 নিম্নলিখিত ধৰণে সংজ্ঞা দিয়া প্ৰতিটো অনুক্ৰমৰ প্ৰথম তিনিটা পদ লিখা।

(i) $a_n=2n+5$, (ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$

সমাধান (i) $a_n=2n+5$

$n=1, 2, 3$ বহুৱাই পোৱা যাব

$$a_1=2(1)+5=7, \quad a_2=9, \quad a_3=11$$

গতিকে উলিয়াব লগা পদ তিনিটা হ'ল 7, 9, 11

(ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$. গতিকে, $a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$, $a_3 = 0$

সেয়েহে, প্ৰথম তিনিটা পদ হ'ল $-\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{4}, \; 0$

উদাহৰণ 2 $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা অনুক্ৰমটোৰ 20 তম পদটো কি হ'ব?

সমাধান $n=20$ বহুৱাই পোৱা যাব

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$
$$= 19 \times (-18) \times (23)$$
$$= -7866$$

উদাহৰণ 3 a_n অনুক্ৰমটোৰ সংজ্ঞা তলত দিয়া হৈছে ঃ

$$a_1 = 1, \; a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$$

প্ৰথম 5 টা পদ উলিওৱা আৰু উক্ত অনুক্ৰম সাপেক্ষে শ্ৰেণীটো লিখা।

সমাধান প্ৰথম 5 টা পদ হ'ব

$$a_1 = 1, \; a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, \; a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5+2 = 7, \; a_5 = a_4+2 = 7 + 2 = 9$$

গতিকে অনুক্ৰমটোৰ প্ৰথম 5 টা পদ হ'ল 1, 3, 5, 7, 9 আৰু নিৰ্ণেয় শ্ৰেণীটো হ'ল $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...$

অনুশীলনী 9.1

অনুশীলনী 1 ৰ পৰা 6 লৈ অনুক্ৰমৰ n তম পদ দিয়া আছে। প্ৰতিটোৰ প্ৰথম 5 টা পদ লিখা

1. $a_n=n(n+2)$
2. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$
3. $a_n=2^n$
4. $a_n=\dfrac{2n-3}{6}$
5. $a_n=(-1)^{n-1}5^{n+1}$
6. $a_n=n\dfrac{n^2+5}{4}$

n তম পদ প্ৰদত্ত অনুশীলনী 7 ৰ পৰা 10 লৈ অনুক্ৰমবোৰৰ নিৰ্দেশিত পদবোৰ উলিওৱা ঃ

7. $a_n=4n-3; a_{17},\ a_{24}$
8. $a_n=\dfrac{n^2}{2^n}; a_7$
9. $a_n=(-1)^{n-1}n^3; a_9$
10. $a_n=\dfrac{n(n-2)}{n+3}; a_{20}$

অনুশীলনী 11 ৰ পৰা 13 লৈ প্ৰদত্ত অনুক্ৰমবোৰৰ প্ৰথম 5 টা পদ লিখা আৰু উক্ত অনুক্ৰমবোৰ সাপেক্ষে শ্ৰেণীবোৰ লিখাঁ ঃ

11. $a_1=3, a_n=3a_{n-1}+2, n>1$
12. $a_1=-1, a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n}, n\geq 2$
13. $a_1=a_2=2, a_n=a_{n-1}-1, n>2$
14. ফিব'নাচ্চি অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা হ'ল

    $a_1=a_2=1$ আৰু $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, n>2.$

    $n=1, 2, 3, 4, 5$ ৰ বাবে $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ নিৰ্ণয় কৰা।

9.4 সমান্তৰ প্ৰগতি (স. প্ৰ.) [Arithmetic Progression (A.P.)]

আমি এতিয়া আগত পাই অহা কিছুমান সূত্ৰ আৰু ধৰ্ম আলোচনা কৰিম।

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ অনুক্ৰম এটাক **সমান্তৰ অনুক্ৰম** (arithmetic sequence) **অথবা সমান্তৰ প্ৰগতি** (arithmetic progression) বোলা হয় যদিহে $a_{n+1}=a_n+d,\ n\in\mathbf{N}$. ইয়াত a_1 ক **প্ৰথম পদ** আৰু ধ্ৰুৱক d ক **সাধাৰণ অন্তৰ** বোলা হয়।

এতিয়া, a প্ৰথম পদ আৰু d সাধাৰণ অন্তৰ বিশিষ্ট (প্ৰামাণিক আকাৰৰ) এটা সমান্তৰ প্ৰগতি $a, a+d, a+2d, \ldots\ldots\ldots\ldots$ লোৱা হওক। এই স.প্ৰ.টোৰ n – তম পদ (সাধাৰণ পদ) হ'ল $a_n=a+(n-1)d$ এটা স. প্ৰ. ৰ নিম্নলিখিত ধৰ্মসমূহৰ সত্যতা সহজে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰি ঃ

(i) এটা স.প্ৰ. ৰ প্ৰতিটো পদৰ লগত এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা যোগ দি পোৱা নতুন অনুক্ৰমটো আকৌ স.প্ৰ. ত থাকে।

(ii) এটা স.প্ৰ. ৰ প্ৰতিটো পদৰ পৰা এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা বিয়োগ কৰি পোৱা অনুক্ৰমটো আকৌ স.প্ৰ.ত থাকে।

(iii) এটা স.প্ৰ. ৰ প্ৰতিটো পদক এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যাৰে পূৰণ কৰি পোৱা অনুক্ৰমটো আকৌ স.প্ৰ.ত থাকে।

(iv) এটা স.প্ৰ.ৰ প্ৰতিটো পদক এটা অশূন্য ধ্ৰুৱকেৰে হৰণ কৰি পোৱা অনুক্ৰমটো আকৌ স.প্ৰ.ত থাকে।

এটা স.প্ৰ. ৰ বাবে নিম্নলিখিত প্ৰতীকবোৰ ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব।

a = প্ৰথম পদ, l = অন্তিম পদ, d = সাধাৰণ অন্তৰ

n = পদৰ সংখ্যা,

$s_n = n$ তম পদলৈ যোগফল।

ধৰাহ'ল $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$ এটা স.প্ৰ.। এইক্ষেত্ৰত,

$$l = a+(n-1)d,$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l]$$ বুলিও লিখিব পাৰি।

এতিয়া, উদাহৰণ কেইটামান আলোচনা কৰা হ'ব।

উদাহৰণ 4 এটা স.প্ৰ.ৰ m – তম পদ n আৰু n – তম পদ m, $m \neq n$ । p তম পদটো উলিওৱাঁ।

সমাধান দিয়া মতে,

$$a_m = a+(m-1)d = n \; .....(1)$$
$$a_n = a+(n-1)d = m \; .....(2)$$

(1) আৰু (2) সমাধা কৰি পোৱা যাব

$(m-n)\,d = n\text{-}m$ বা $d = -1$,

আৰু $a = n+m-1$

গতিকে, $a_p = a+(p-1)d$

$= n+m-1+(p-1)(-1)$

$= m+n-p$

অৰ্থাৎ, p – তম পদটো হ'ল $n+m-p$.

উদাহৰণ 5 এটা স.প্ৰ. ৰ n তম পদলৈ যোগফল হ'ল $nP+\frac{1}{2}n(n-1)\,Q$, P আৰু Q দুটা ধ্ৰুৱক। সাধাৰণ অন্তৰ উলিওৱাঁ

সমাধান ধৰা হ'ল স.প্ৰ. টো $a_1, a_2, ...a_n$

গতিকে, $S_n = a_1+a_2+.......+a_n = nP+\frac{1}{2}n(n-1)Q$

$n = 1, 2$ বহুৱাই পোৱা যাব

$$S_1 = a_1 = P,\ S_2 = a_1+a_2 = 2P+Q$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = P+Q$$

গতিকে, সাধাৰণ অন্তৰ হ'ব $d = a_2 - a_1, = (P+Q) - P = Q$

উদাহৰণ 6 দুটা স.প্ৰ.ৰ n তম পদলৈ যোগফলৰ অনুপাত $(3n+8) : (7n+15)$ হ'লে, দ্বাদশ পদ দুটাৰ অনুপাত নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ধৰা হ'ল স.প্ৰ. দুটাৰ প্ৰথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ যথাক্ৰমে a_1, a_2 আৰু d_1, d_2. প্ৰদত্ত চৰ্তমতে,

$$\frac{\text{1 ম স.প্ৰ.ৰ } n \text{ তম পদলৈ সমষ্টি}}{\text{2 য় স.প্ৰ.ৰ } n \text{ তম পদলৈ সমষ্টি}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

বা $$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

বা $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \quad .....(1)$$

এতিয়া, $$\frac{\text{1 ম স.প্ৰ.ৰ দ্বাদশ পদ}}{\text{2 য় স.প্ৰ.ৰ দ্বাদশ পদ}} = \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$= \frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times 23+8}{7\times 23+15} \quad [(1)\text{ত } n = 23 \text{ বহুৱাই}]$$

$$\text{গতিকে } \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{\text{প্ৰথম স. প্ৰ. ৰ 12 তম পদ}}{\text{দ্বিতীয় স.প্ৰ.ৰ 12 তম পদ}} = \frac{7}{16}$$

গতিকে নিৰ্ণেয় অনুপাত হ'ল 7 : 16

উদাহৰণ 7 এজন ব্যক্তিৰ প্ৰথম বছৰৰ আয় 3,00,000 টকা। তেওঁৰ পৰবৰ্তী 19 বছৰৰ বাবে প্ৰতি বছৰে 10,000 টকাকৈ আয় বৃদ্ধি হয়। তেওঁৰ 20 বছৰৰ মুঠ আয় উলিওৱা।

সমাধান ব্যক্তিজনৰ 20 বছৰৰ আয় এটা স.প্ৰ.ত থাকে। এই প্ৰগতিটোৰ $a = 3,00,000$, $d = 10,000$, $n = 20$

গতিকে যোগফলৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি পোৱা যাব

$$S_{20} = \frac{20}{2}[6,00,000 + 19\times 10,000] = 10\times 790000 = 79,00,000$$

গতিকে ব্যক্তিজনে 20 বছৰৰ শেষত 79,00,000 টকা আয় কৰে।

9.4.1 সমান্তৰ মাধ্য (Arithmetic mean)

দুটা সংখ্যা a আৰু b দিয়া আছে। আমি সংখ্যা দুটাৰ মাজত আন এটা সংখ্যা A সোমাব পাৰোঁ যাতে a, A, b সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে। এই ক্ষেত্ৰত A সংখ্যাটোক a আৰু b ৰ **সমান্তৰ মাধ্য** (arithmetic mean, A.M.) বুলি কোৱা হয়।

ইয়াত $$A - a = b - A, \text{ অৰ্থাৎ } A = \frac{a+b}{2}$$

a আৰু b সংখ্যা দুটাৰ সমান্তৰ মাধ্যক আমি সংখ্যা দুটাৰ গড় $\frac{a+b}{2}$ বুলিও কব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে, 4 আৰু 16 সংখ্যা দুটাৰ সমান্তৰ মাধ্য হ'ল 10. গতিকে 4 আৰু 16 ৰ মাজত 10 সংখ্যাটো লিখি আমি 4,10,16

স.প্ৰ.টো পাওঁ। স্বাভাৱিকতে প্ৰশ্ন এটা মনলৈ আহে। দুটা প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ মাজত আমি দুটা বা ততোধিক সংখ্যা লিখি এটা স.প্ৰ. গঠন কৰিব পাৰোনে? নিশ্চয় পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, 4 আৰু 16 ৰ মাজত, দুটা সংখ্যা 8 আৰু 12 বহুৱাই 4, 8, 12, 16 ৰ এটা স.প্ৰ. পোৱা যায়।

সাধাৰণভাৱে, দুটা প্ৰদত্ত সংখ্যাৰ মাজত আমি বিচৰা মতে যিকোনো সংখ্যক নতুন সংখ্যা লিখি এটা স.প্ৰ. গঠন কৰিব পাৰি।

আমি a আৰু b ৰ মাজত n টা সংখ্যা $A_1, A_2, A_3,\ldots\ldots, A_n$ লওঁ আৰু ধৰি লওঁ $a, A_1, A_2,\ldots\ldots, A_n, b$ এটা স.প্ৰ। b হ'ল প্ৰগতিটোৰ $(n+2)$ তম পদ, অৰ্থাৎ, $b = a + [(n+2)-1]\, d = a + (n+1)\, d$

বা, $$d = \frac{b-a}{n+1}$$

গতিকে a আৰু b ৰ মাজত n টা সংখ্যা হ'ব ঃ

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

উদাহৰণ 8 এটা স.প্ৰ. গঠন হোৱাকৈ 3 আৰু 24 ৰ মাজত থকা 6 টা সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল সংখ্যা 6 টা $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ আৰু $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ স.প্ৰ.ত আছে। ইয়াত $a = 3, b = 24, n = 8$

$24 = 3 + (8-1)\, d$, বা $d = 3$

গতিকে, $A_1 = a+d = 3+3 = 6$; $A_2 = a+2d = 3+2\times 3 = 9$

$A_3 = a+3d = 3+3\times 3 = 12$; $A_4 = a+4d = 3+4\times 3 = 15$

$A_5 = a+5d = 3+5\times 3 = 18$; $A_6 = a+6d = 3+6\times 3 = 21$

গতিকে, 3 আৰু 24 ৰ মাজত উলিয়াব লগা সংখ্যা 6 টা হ'ল 6, 9,12,15,18, 21.

অনুশীলনী 9.2

1. 1 ৰ পৰা 2001 লৈ অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাবোৰৰ যোগফল উলিওৱা।
2. 100 আৰু 1000 ৰ মাজত থকা 5 ৰ গুণিতক স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰৰ যোগফল উলিওৱা।
3. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 2 আৰু প্ৰথম 5 টা পদৰ সমষ্টি, পিছৰ 5 টা পদৰ সমষ্টিৰ এক-চতুৰ্থাংশ। দেখুওৱাঁ যে 20 তম পদটো -112.
4. $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিমানটা পদৰ সমষ্টি -25 হ'ব?

5. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ p তম পদটো $\frac{1}{q}$ আৰু q তম পদটো $\frac{1}{p}$. দেখুওৱাঁ যে প্ৰথম pq টা পদৰ সমষ্টি হ'ব $\frac{1}{2}(pq+1), p \neq q$ ।
6. 25, 22,19,.... সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ কিছুসংখ্যক পদৰ সমষ্টি 116 হ'লে, অন্তিম পদটো উলিওৱাঁ।
7. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ k তম পদটো $5k+1$ হ'লে, n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱাঁ।
8. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ n টা পদৰ সমষ্টি $(pn+qn^2)$, p আৰু q ধ্ৰুৱক। সাধাৰণ অন্তৰটো নিৰ্ণয় কৰা।
9. দুটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ n তম পদলৈ সমষ্টি দুটাৰ অনুপাত $(5n+4) : (9n+6)$ হ'লে, 18 তম পদ দুটাৰ অনুপাত উলিওৱাঁ।
10. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম p টা পদৰ যোগফল, প্ৰথম q টা পদৰ যোগফলৰ সমান। প্ৰথম $(p+q)$ টা পদলৈ যোগফল নিৰ্ণয় কৰাঁ।
11. এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম p, q আৰু r টা পদৰ যোগফল যথাক্ৰমে a, b, c হ'লে, প্ৰমাণ কৰাঁ যে $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$
12. সমান্তৰ প্ৰগতি এটাৰ m আৰু n টা পদৰ যোগফলৰ অনুপাত $m^2 : n^2$। দেখুওৱাঁ যে m তম আৰু n তম পদৰ অনুপাত $(2m-1) : (2n-1)$।
13. সমান্তৰ প্ৰগতি এটাৰ n তম পদলৈ যোগফল $3n^2+5n$ আৰু m তম পদটো 164 হ'লে, m ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ।
14. সমান্তৰ প্ৰগতিত থকাকৈ 8 আৰু 26 ৰ মাজত থকা 5 টা সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰাঁ।
15. a আৰু b ৰ সমান্তৰ মাধ্য $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ হ'লে, n ৰ মান উলিওৱা।
16. সমান্তৰ প্ৰগতিত থকাকৈ 1 আৰু 31 ৰ মাজত m টা সংখ্যা স্থাপন কৰা হ'ল আৰু ইয়াৰ 7 তম আৰু $(m-1)$ তম পদ দুটাৰ অনুপাত 5 : 9। m ৰ মান উলিওৱাঁ।
17. প্ৰথম কিস্তিটো 100 টকাৰে আৰম্ভ কৰি এজন মানুহে ধাৰ পৰিশোধ কৰিবলৈ আৰম্ভ কৰে। যদি তেওঁ প্ৰতি মাহে পৰিশোধিত ধনৰ পৰিমাণ 5 টকাকৈ বৃদ্ধি কৰে, তেনেহ'লে 30 তম কিস্তিত কিমান টকা পৰিশোধ কৰিব?
18. এটা বহুভুজৰ যি কোনো দুটা ক্ৰমিক অন্তঃকোণৰ পাৰ্থক্য 5^0। যদি আটাইতকৈ সৰু কোণটোৰ মাপ120^0 হয়, বহুভুজটোৰ বাহুৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।

9.5 গুণোত্তৰ প্ৰগতি (গু. প্ৰ.) [Geometric Progression (G.P.)]

তলৰ অনুক্ৰমকেইটালৈ মনোযোগ দিওঁ ঃ

(i) 2, 4, 8, 16..., (ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}, \ldots$, (iii) .01,.0001,.000001,...

অনুক্ৰমকেইটাৰ পদবোৰ কেনেকৈ আগ বাঢ়িছে? দেখা গৈছে যে অনুক্ৰমকেইটাৰ প্ৰথম পদকেইটাৰ বাহিৰে প্ৰতিটো পদ এক বিশেষ ক্ৰমত আগবাঢ়িছে।

(i) অনুক্ৰমটোত $a_1 = 2$, $\frac{a_2}{a_1} = 2$, $\frac{a_3}{a_2} = 2$, $\frac{a_4}{a_3} = 2$ ইত্যাদি।

(ii) অনুক্ৰমটোত $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = -\frac{1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{3}$ ইত্যাদি

সেইদৰে, (iii) অনুক্ৰমটোত $a_1 = .01, \frac{a_2}{a_1} = .01, \frac{a_3}{a_2} = .01, \frac{a_4}{a_3} = .01$ ইত্যাদি।

দেখা গৈছে যে প্ৰতিটো অনুক্ৰমতে প্ৰথম পদটোৰ বাহিৰে বাকী প্ৰতিটো পদেই ঠিক আগৰ পদটোৰ সৈতে এটা ধ্ৰুৱক অনুপাতৰ সৃষ্টি কৰিছে। (i) ত এই অনুপাতটো হৈছে 2;ত (ii) অনুপাতটো $-\frac{1}{3}$ আৰু (iii) ত অনুপাতটো 0.01। এনে ধৰণৰ অনুক্ৰম এটাক **গুণোত্তৰ অনুক্ৰম** বা **গুণোত্তৰ প্ৰগতি** (geometric sequence) সংক্ষেপে, গু. প্ৰ. বোলা হয়। অৰ্থাৎ, অশূন্য পদযুক্ত $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ অনুক্ৰম এটাক গুণোত্তৰ প্ৰগতি বোলা হয় যদিহে $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ধ্ৰুৱক), $k \geq 1$

$a_1 = a$ বুলি ধৰিলে গুণোত্তৰ প্ৰগতিটো হ'ব $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ইত্যাদি। a ক প্ৰথম পদ (first term) আৰু r ক সাধাৰণ অনুপাত (common ratio) বোলা হয়। (i), (ii), (iii) গুণোত্তৰ প্ৰগতিকেইটাৰ সাধাৰণ অনুপাত যথাক্ৰমে $2, -\frac{1}{3}$ আৰু 0.01

সমান্তৰ প্ৰগতিৰ দৰে, বেছি সংখ্যক পদবিশিষ্ট গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ ক্ষেত্ৰতো সূত্ৰ অবিহনে n তম পদ নিৰ্ণয় কৰা বা n তম পদলৈ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা সম্ভৱ নহয়। পৰৱৰ্তী অনুচ্ছেদত আমি এই সূত্ৰবোৰ উলিয়াম। ইয়াৰ বাবে নিম্নলিখিত প্ৰতীকসমূহ ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব।

$a =$ প্ৰথম পদ, $r =$ সাধাৰণ অনুপাত, $l =$ অন্তিম পদ,

$n =$ পদৰ সংখ্যা,

$S_n =$ প্ৰথম n টা পদৰ সমষ্টি।

9.5.1 গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ পদ (General term of a G.P.)

a প্ৰথম পদ আৰু r সাধাৰণ অনুপাত বিশিষ্ট গুণোত্তৰ প্ৰগতি এটা লৈ কেইটামান পদ লিখা হওক। a ক r ৰে পূৰণ কৰি দ্বিতীয় পদ পোৱা যায়। গতিকে, $a_2 = ar$. সেইদৰে দ্বিতীয় পদক r ৰে পূৰণ কৰি তৃতীয় পদ পোৱা যায়। গতিকে, $a_3 = a_2 r = ar^2$ ইত্যাদি। তলত এইকেইটাৰ উপৰি আৰু কেইটামান পদ লিখা হৈছে।

1 ম পদ $= a_1 = ar^{1-1}$, 2 য় পদ $= a_2 = ar = ar^{2-1}$, 3 য় পদ $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

4 ৰ্থ পদ $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$, 5 ম পদ $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

পদবোৰৰ এটা গত বা ধাৰা দেখা পোৱা গৈছেনে? 16 তম পদটো কি হ'ব? $a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$

ওপৰৰ গতটোৱে আমাক দেখুৱাইছে যে গুণোত্তৰ প্ৰগতিটোৰ n তম পদ হ'ব $a_n = ar^{n-1}$

গতিকে এটা সসীম বা এটা অসীম গুণোত্তৰ প্ৰগতিক যথাক্ৰমে

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ অথবা $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ বুলি লিখিব পাৰি।

$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

বা $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \ldots$

শ্ৰেণী দুটাক যথাক্ৰমে সসীম বা অসীম গুণোত্তৰ শ্ৰেণী বোলা হয়।

9.5.2 গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ n তম পদলৈ সমষ্টি (Sum to n terms of a G.P.)

ধৰা হ'ল গুণোত্তৰ প্ৰগতি এটাৰ প্ৰথম পদ a আৰু সাধাৰণ অনুপাত r। ধৰা হ'ল S_n এ n তম পদলৈ যোগফল বুজায়।

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} \quad \ldots..(1)$$

ক্ষেত্ৰ (case) 1 ঃ $r = 1$ হ'লে, $Sn = a+a+a+\ldots\ldots.+a$ (n পদলৈ) $= na$

ক্ষেত্ৰ (case) 2 ঃ ধৰা হ'ল $r \neq 1$। (1) ক r ৰে পূৰণ কৰি পোৱা যাব

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots. + ar^n \ldots\ldots\ldots..(2)$$

(1) ৰ পৰা (2) বিয়োগ কৰি পোৱা যাব $(1-r)\, S_n = a - ar^n = a\,(1-r^n)$

গতিকে, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ অথবা, $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

উদাহৰণ 9 5, 25, 125,.... গুণোত্তৰ প্ৰগতিটোৰ 10 তম আৰু n তম পদ উলিওৱা

সমাধান ইয়াত $a = 5, r = 5$ গতিকে $a_{10} = 5(5)^9 = 5^{10}$

আৰু $a_n = ar^{n-1} = 5\,(5)^{n-1} = 5^n$

উদাহৰণ 10 2, 8, 32,...... গুণোত্তৰ প্ৰগতিটোৰ কোনটো পদৰ মান 131072 হ'ব?

সমাধান ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত গু. প্ৰ. এটাৰ n তম পদটো 131072। প্ৰগতিটোৰ $a=2, r=4$.

গতিকে $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ বা $65536 = 4^{n-1}$

বা $4^8 = 4^{n-1}$

সেয়েহে, $n - 1 = 8$ অৰ্থাৎ, $n = 9$। গতিকে নৱম পদটোৰ মান 131072.

উদাহৰণ 11 এটা গু. প্ৰ. ৰ তৃতীয় পদ 24 আৰু ষষ্ঠ পদ 192 হ'লে, দশম পদটো উলিওৱা।

সমাধান ইয়াত $a_3 = ar^2 = 24 \quad \ldots..(1)$

$a_6 = ar^5 = 192 \quad \ldots..(2)$

(2) ক (1) ৰে হৰণ কৰি $r = 2$ পোৱা যায়। r ৰ মান (1) ত বহুৱাই $a = 6$ পোৱা যায়।

গতিকে $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$

উদাহৰণ 12 $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots\ldots$ গু. প্ৰ. টোৰ n তম পদলৈ যোগফল আৰু প্ৰথম 5 টা পদৰ যোগফল উলিওৱা।

সমাধান ইয়াত $a = 1, r = \dfrac{2}{3}$

গতিকে
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

বিশেষতঃ,
$$S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$$

উদাহৰণ 13 $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...$ গু.প্ৰ. টোৰ কিমানটা পদৰ যোগফল $\frac{3069}{512}$ হ'ব?

সমাধান ধৰা হ'ল প্ৰয়োজনীয় পদৰ সংখ্যা n . দিয়া আছে $a = 3, r = \frac{1}{2}, S_n = \frac{3069}{512}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি পোৱা যাব

$$\frac{3069}{512} = \frac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 6(1-\frac{1}{2^n})$$

বা $$\frac{3069}{3072} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

বা $$\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

বা $2^n = 1024 = 2^{10}$, গতিকে, $n=10$

উদাহৰণ 14 এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম তিনিটা পদৰ যোগফল $\frac{13}{12}$ আৰু পূৰণফল – 1 হ'লে, সাধাৰণ অনুপাত আৰু পদকেইটা উলিওৱাঁ

সমাধান ধৰা হ'ল গু. প্ৰ.টোৰ প্ৰথম পদ তিনিটা $\frac{a}{r}$, a, ar . প্ৰদত্ত চৰ্তমতে,

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12} \qquad ....(1)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)\ (ar) = -1 \qquad .....(2)$$

(2) ৰ পৰা পোৱা যায় $a^3=-1$ অৰ্থাৎ, $a=-1$(অকল বাস্তৱ মূল বিবেচনা কৰি)।

(1) ত $a=-1$ বহুৱাই পোৱা যায়

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12} \quad \text{বা} \quad 12r^2+25r+12=0$$

এই দ্বিঘাত সমীকৰণটো সমাধা কৰি পোৱা যায় $r = -\frac{3}{4}$ বা $-\frac{4}{3}$.

$r = -\frac{3}{4}$ হ'লে, পদকেইটা হ'ব $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ আৰু $r = -\frac{4}{3}$ হ'লে, পদকেইটা হ'ব $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

উদাহৰণ 15 তলৰ অনুক্ৰমটোৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱা ঃ

7, 77, 777, 7777,........

সমাধান প্ৰদত্ত অনুক্ৰমটো গু. প্ৰ.ত নাই। কিন্তু নিম্নলিখিত ধৰণে গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ লগত সম্পৰ্ক স্থাপন কৰি যোগফলটো উলিয়াব পাৰি।

$S_n = 7+77+777+7777+\ldots\ldots\ldots n$ তম পদলৈ

$$= \frac{7}{9}[9+99+999+9999+\ldots\ldots\ldots n \text{ তম পদলৈ }]$$

$$= \frac{7}{9}[10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots\ldots\ldots n \text{ তম পদলৈ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10+10^2+10^3+\ldots\ldots\ldots n \text{ তম পদলৈ}) - (1+1+1+\ldots\ldots\ldots n \text{ তম পদলৈ }]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]$$

উদাহৰণ 16 এজন ব্যক্তিৰ 2 জন পিতৃ-মাতৃ, 4 জন ককা-আইতা, 8 জন আজোককা-আজো আইতা, ইত্যাদিকৈ আছে। ব্যক্তিজনৰ আগৰ দহটা বংশানুক্ৰমলৈ পূৰ্বপুৰুষৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।

সমাধান ইয়াত $a=2$, $r=2$, $n=10$

গতিকে $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰি পোৱা যাব

$$S_{10} = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2046$$

গতিকে মানুহজনৰ দহটা বংশানুক্ৰমৰ পূৰ্বপুৰুষৰ সংখ্যা হ'ল 2046.

9.5.3 গুণোত্তৰ মাধ্য [Geometric Mean (G.M.)]

দুটা ধনাত্মক সংখ্যা a আৰু b ৰ গুণোত্তৰ মাধ্যটো হ'ল $\sqrt{ab}$. গতিকে, 2 আৰু 8 ৰ গুণোত্তৰ মাধ্য হ'ব 4. স্পষ্টত ঃ 2, 4, 8 সংখ্যা তিনিটা এটা গু.প্ৰৰ ক্ৰমিক পদ। এইটোৱে আমাক দুটা সংখ্যাৰ মাজৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ ধাৰণাটো সম্প্ৰসাৰিত কৰাত সহায় কৰে।

দুটা প্ৰদত্ত ধনাত্মক সংখ্যাৰ মাজত যিকোনো সংখ্যক নতুন সংখ্যা এনেকৈ স্থাপন কৰিব পাৰি যে এইদৰে পোৱা অনুক্ৰমটো এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতি হয়।

গতিকে, দুটা ধনাত্মক সংখ্যা a আৰু b ৰ মাজত $G_1, G_2 \ldots G_n$ সংখ্যাকেইটা বহুৱাই এটা গু. প্ৰ. $a, G_1, G_2 \ldots . G_n, b$ গঠন কৰিলে, উক্ত প্ৰগতিটোৰ $(n+2)$ তম পদটো হ'ব b। গতিকে,

$$b=ar^{n+1}, \text{ বা } r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

সেয়েহে,

$$G_1=ar=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},\ G_2=ar^2=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}},\quad G_3=ar^3=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n=ar^n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

উদাহৰণ 17 1 আৰু 256 ৰ মাজত 3 টা সংখ্যা বহুৱাই এটা গু. প্ৰ. গঠন কৰা।

সমাধান ধৰা হ'ল সংখ্যা 3 টা G_1, G_2, G_3।

গতিকে 1, G_1, G_2, G_3, 256 এটা গু. প্ৰ.।

$256=1.r^{5-1}=r^4$ বা, $r=\pm 4$ [বাস্তৱ মূলহে লোৱা হৈছে]।

$r=4$ ৰ বাবে; $G_1=ar=4,\ G_2=ar^2=16,\ G_3=ar^3=64$

সেইদৰে $r=-4$ ৰ বাবে $G_1=-4,\ G_2=16,\ G_3=-64$

গতিকে নিৰ্ণেয় সংখ্যা কেইটা হ'ল 4, 16, 64 বা −4, 16, −64

9.6 সমান্তৰ আৰু গুণোত্তৰ মাধ্যৰ সম্পৰ্ক (Relation between A.M.and G.M.)

ধৰা হ'ল দুটা প্ৰদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা a আৰু b ৰ সমান্তৰ মাধ্য A আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য G.

$$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab}$$

গতিকে,
$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0 \quad \ldots(1)$$

(1) ৰ পৰা আমি পাওঁ $A\geq G$

উদাহৰণ 18 দুটা ধনাত্মক সংখ্যা a আৰু b ৰ সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য যথাক্ৰমে 10 আৰু 8 হ'লে, সংখ্যা দুটা উলিওৱা।

সমাধান
$$A.M.=\frac{a+b}{2}=10 \quad \ldots(1)$$

$$G.M.=\sqrt{ab}=8 \quad \ldots(2)$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা পোৱা যায়

$$a+b=20 \quad \ldots(3)$$

$$ab=64 \quad \ldots(4)$$

(3) আৰু (4) ৰ পৰা $a+b$ আৰু ab ৰ মান $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ অভেদটোত বহুৱাই পোৱা যাব,

$$(a-b)^2=400-256=144$$

বা, $a-b=\pm 12$ ...(5)

(3) আৰু (5) সমাধা কৰি পোৱা যায়

$$a=4, b=16, \text{ বা } a=16, b=4$$

গতিকে সংখ্যা দুটা যথাক্ৰমে 4, 16 বা 16, 4 ।

অনুশীলনী 9.3

1. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ গু. প্ৰ. টোৰ 20 তম আৰু n তম পদ উলিওৱাঁ
2. এটা গু. প্ৰ.ৰ অষ্টম পদটো 192 আৰু সাধাৰণ অনুপাত 2 হ'লে, দ্বাদশ পদটো উলিওৱাঁ।
3. এটা গু. প্ৰ.ৰ পঞ্চম, অষ্টম আৰু একাদশ পদ যথাক্ৰমে p, q আৰু s হ'লে, দেখুওৱাঁ যে $q^2=ps$।
4. এটা গু. প্ৰ.ৰ চতুৰ্থ পদটো দ্বিতীয় পদৰ বৰ্গ আৰু প্ৰথম পদটো –3। সপ্তম পদটো উলিওৱাঁ।
5. (a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ অনুক্ৰমৰ কোনটো পদ 128 হ'ব?

   (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ অনুক্ৰমৰ কোনটো পদ 729 হ'ব?

   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ অনুক্ৰমৰ কোনটো পদ $\frac{1}{19683}$ হ'ব?
6. $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ গু. প্ৰ. ত থাকিলে x ৰ মান উলিওৱা।

   প্ৰদত্ত সংখ্যক পদলৈ তলৰ গু. প্ৰ.বোৰৰ যোগফল উলিওৱাঁ (7 ৰ পৰা10 লৈ)।
7. 0.15, 0.015, 0.0015, ..., 20 তম পদলৈ
8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots n$ তম পদলৈ
9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots, n$ তম পদলৈ (যদি $a \neq -1$)
10. $x^3, x^5, x^7, \ldots, n$ তম পদলৈ (যদি $x \neq \pm 1$)
11. মান উলিওৱাঁ ঃ $\sum_{k=1}^{10} (2+3^k)$
12. এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম তিনিটা পদৰ যোগফল $\frac{39}{10}$ আৰু পূৰণফল 1। সাধাৰণ অনুপাত আৰু পদকেইটা উলিওৱাঁ।
13. $3, 3^2, 3^3, \ldots$ গু. প্ৰ. টোৰ যোগফল 120 হ'বলৈ কিমানটা পদৰ প্ৰয়োজন?
14. এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম তিনিটা পদৰ যোগফল 16 আৰু ইয়াৰ পিছৰ তিনিটা পদৰ যোগফল 128। প্ৰথম পদ, সাধাৰণ অনুপাত আৰু n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱাঁ।
15. এটা গু. প্ৰ.ৰ $a=729$ আৰু সপ্তম পদ 64 হ'লে S_7 নিৰ্ণয় কৰা।
16. এটা গু. প্ৰ.ৰ প্ৰথম দুটা পদৰ যোগফল –4আৰু পঞ্চম পদৰ মান তৃতীয় পদৰ চাৰিগুণ। গু. প্ৰ.টো উলিওৱাঁ।

17. এটা গু. প্ৰ. ৰ 4-তম, 10 -তম আৰু 16 –তম পদ যথাক্ৰমে x, y আৰু z হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে x, y, z ও গু. প্ৰ.ত থাকে।
18. 8, 88, 888, 8888,...অনুক্ৰমটোৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱা।
19. 2, 4, 8, 16, 32 আৰু 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ অনুক্ৰম দুটাৰ অনুৰূপ পদবোৰৰ পূৰণফলৰ সমষ্টি উলিওৱাঁ
20. দেখুওৱাঁ যে $a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}$ আৰু $A, AR, AR^2, ..., AR^{n-1}$ অনুক্ৰম দুটাৰ অনুৰূপ পদৰ পূৰণফলবোৰে এটা গু. প্ৰ. গঠন কৰে।
21. এটা গু . প্ৰ. ৰ তৃতীয় পদটো প্ৰথম পদতকৈ 9 বেছি আৰু দ্বিতীয় পদটো চতুৰ্থ পদতকৈ 18 বেছি। প্ৰগতিটোৰ প্ৰথম চাৰিটা পদ নিৰ্ণয় কৰাঁ।
22. এটা গু. প্ৰ.ৰ p তম, q তম আৰু r তম পদকেইটা যথাক্ৰমে a, b, c। প্ৰমাণ কৰাঁ যে $a^{q-r}\, b^{r-p}\, c^{p-q}=1$
23. এটা গু. প্ৰ.ৰ প্ৰথম আৰু n তম পদ যথাক্ৰমে a আৰু b, আৰু প্ৰথম n টা পদৰ পূৰণফল P. প্ৰমাণ কৰাঁ যে $P^2=(ab)^n$।
24. দেখুওৱা যে এটা গু. প্ৰ.ৰ প্ৰথম n টা পদৰ যোগফল আৰু $(n+1)$তম পদৰ পৰা $(2n)$ তম পদলৈ যোগফলৰ অনুপাত $\frac{1}{r^n}$.
25. a, b, c আৰু d গু. প্ৰ.ত থাকিলে, দেখুওৱাঁ যে $(a^2+b^2+c^2)\,(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$
26. গু. প্ৰ.ত থকাকৈ 3 আৰু 81 ৰ মাজত দুটা সংখ্যা স্থাপন কৰাঁ।
27. a আৰু b ৰ গুণোত্তৰ মাধ্য $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ হ'লে, n ৰ মান উলিওৱাঁ।
28. দুটা সংখ্যাৰ পূৰণফল সংখ্যা দুটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ ছয় গুণ। দেখুওৱাঁ যে সংখ্যা দুটাৰ অনুপাত $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ।
29. যদি দুটা ধনাত্মক সংখ্যাৰ সমান্তৰ আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য A আৰু G, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰাঁ যে সংখ্যা দুটা হ'ব $A \pm \sqrt{(A+G)\,(A-G)}$
30. এটা বিশেষ বেক্টেৰিয়া সংবৰ্ধন (bacteria culture) পৰীক্ষাত, বেক্টেৰিয়াৰ সংখ্যা প্ৰতি ঘণ্টাত দুগুণ হয়। যদি আৰম্ভণিতে 30 টা বেক্টেৰিয়া আছিল তেনেহ'লে দ্বিতীয় ঘণ্টা, চতুৰ্থ ঘণ্টা আৰু n তম ঘণ্টাত বেক্টেৰিয়াৰ সংখ্য কিমান হ'ব?
31. বছৰি 10% চক্ৰবৃদ্ধি সুতৰ হাৰত 500 টকা বেংক এটাত জমা ৰাখিলে, 10 বছৰত কিমান টকা হ'বগৈ?
32. এটা দ্বিঘাত সমীকৰণৰ মূল দুটাৰ সমান্তৰ আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য যথাক্ৰমে 8 আৰু 5 হ'লে, দ্বিঘাত সমীকৰণটো উলিওৱাঁ।

9.7 কেইটামান বিশেষ শ্ৰেণীৰ n তম পদলৈ সমষ্টি (Sum to n terms of special series)

আমি এতিয়া নিম্নলিখিত বিশেষ শ্ৰেণীকেইটাৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিয়াম।

(i) $1+2+3+...+n$ (স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ প্ৰথম n টা পদৰ যোগফল)

(ii) $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ (স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ প্ৰথম n টা পদৰ বৰ্গৰ যোগফল)

(iii) $1^3+2^3+3^3+...+n^3$ (স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ প্ৰথম n টা পদৰ ঘনৰ যোগফল)

উক্ত যোগফলকেইটা এটা এটাকৈ উলিওৱা হ'ব।

(i) $S_n=1+2+3+.....+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ [অনুচ্ছেদ 9.4 দ্ৰষ্টব্য]

(ii) $S_n=1^2+2^2+3^2+.....+n^2$

তলৰ অভেদটো লোৱা হওক।

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$$

অভেদটোত যথাক্ৰমে $k=1, 2, 3,..., n$ বহুৱাই পোৱা যাব,

$$1^3-0^3=3(1)^2-3(1)+1$$

$$2^3-1^3=3(2)^2-3(2)+1$$

$$3^3-2^3=3(3)^2-3(3)+1$$

$$n^3-(n-1)^3=3(n)^3-3(n)+1$$

দুয়োটা ফাল যোগ কৰি,

$$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+......+n^2)-3(1+2+3+...+n)+n$$

বা $$n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+n$$

(i) ৰ পৰা আমি জানো $\sum_{k=1}^{n}=1+2+3+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

গতিকে, $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{3}\left[n^3+\dfrac{3n(n+1)}{2}-n\right]=\dfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$

$$=\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

(iii) $S_n=1^3+2^3+3^3+.....+n^3$

তলৰ অভেদটো লোৱা হওক।

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

অভেদটোত k=1, 2, 3, ..., n বহুৱাই পোৱা যাব,

$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$

$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$

$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$

$(n-1)^4 - (n-2) = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$

$n^2 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$

$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

দুয়োটা ফাল যোগ কৰি,

$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$

$+4(1+2+3+.....+n) + n$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \qquad .....(1)$$

(i) আৰু (ii) ৰ পৰা আমি পাওঁ

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ আৰু } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

এই দুটাৰ মান (1) ত বহুৱাই পোৱা যাব

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{4n\,(n+1)}{2} - n$$

বা $$4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n\,(n+1) - n$$
$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$
$$= n^2\,(n+1)^2$$

গতিকে, $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

উদাহৰণ 19 5+11+19+29+41+....... শ্ৰেণীটোৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱাঁ।

সমাধান আমি লিখি লওঁ

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + ... + a_{n-1} + a_n$$

বা $$S_n = \quad 5 + 11 + 19 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

বিয়োগ কৰি পোৱা যাব

$$0 = 5+[6+8+10+12+........(n-1) \text{ পদলৈ}]-a_n$$

বা, $$a_n = 5+\frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5+(n-1)(n+4)$$

$$= n^2+3n+1$$

গতিকে, $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+3k+1\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

উদাহৰণ 20 এটা শ্ৰেণীৰ n তম পদটো $n(n+3)$ হ'লে, শ্ৰেণীটোৰ n তম পদলৈ যোগফল নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান দিয়া আছে $a_n = n(n+3) = n^2+3n$

গতিকে n তম পদলৈ যোগফল হ'ব

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

অনুশীলনী 9.4

1 ৰ পৰা 7 লৈ অনুশীলনীবোৰত দিয়া প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱাঁঃ

1. $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+......$
2. $1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+......$
3. $3\times 1^2+5\times 2^2+7\times 3^2+......$
4. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+.....$
5. $5^2+6^2+7^2+..........+20^2$
6. $3\times 8+6\times 11+9\times 14+......$
7. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)......$

8 ৰ পৰা 10 লৈ প্ৰদত্ত n তম পদ সাপেক্ষে, শ্ৰেণীবোৰৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱাঁ

8. $n(n+1)(n+4)$
9. n^2+2^n
10. $(2n-1)^2$

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 21 এটা স. প্ৰ.ৰ p তম, q তম, r তম আৰু s তম পদকেইটা গু. প্ৰ.ত থাকিলে, দেখুওৱাঁ যে $(p-q)$, $(q-r)$, $(r-s)$ গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকে।

সমাধান ইয়াত

$$a_p = a+(p-1)d \qquad ...(1)$$

$$a_q = a+(q-1)d \qquad ...(2)$$

$a_r = a + (r-1)\, d$ ...(3)

$a_s = a + (s-1)\, d$ ...(4)

দিয়া আছে যে $a_p,\ a_q, a_r, a_s$, গু.প্ৰ.ত আছে।

গতিকে,

$$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \quad \text{(কিয় ?)} \qquad ...(5)$$

সেইদৰে, $$\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r} \quad \text{(কিয় ?)} \qquad ...(6)$$

(5) আৰু (6) ৰ পৰা পোৱা যায়

$\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$ অৰ্থাৎ $p-q,\ q-r,\ r-s$ গু. প্ৰ. ত আছে।

উদাহৰণ 22 যদি a, b, c গু. প্ৰ. ত থাকে আৰু $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰাঁ যে x, y, z স. প্ৰ.ত থাকে।

সমাধান ধৰা হ'ল $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

গতিকে $a = k^x,\ b = k^y, c = k^z$ ...(1)

যিহেতু a, b, c গু. প্ৰ. ত আছে, গতিকে

$b^2 = ac$ ...(2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা পোৱা যায়

$k^{2y} = k^{x+z}$ অৰ্থাৎ, $2y = x+z$

গতিকে x, y, z স. প্ৰ. ত আছে।

উদাহৰণ 23 a, b, c, d আৰু p ভিন্ন বাস্তৱ সংখ্যা আৰু

$(a^2+b^2+c^2)\, p^2 - 2\,(ab+bc+cd)\, p + (b^2+c^2+d^2) \le 0$, দেখুওৱাঁ যে a, b, c, d গু. প্ৰ.ত থাকে।

সমাধান দিয়া আছে

$(a^2+b^2+c^2)\, p^2 - 2\,(ab+bc+cd)\, p + (b^2+c^2+d^2) \le 0$ ...(1)

কিন্তু বাওঁফাল $= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2)$

$= (ap-b)^2 + (bp-c)^2 + (cp-d)^2 \ge 0$ ...(2)

যিহেতু বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গৰ যোগফল অঋণাত্মক, গতিকে (1)আৰু (2) ৰ পৰা পোৱা যায়

$(ap-b)^2 + (bp-c)^2 + (cp-d)^2 = 0$

বা $ap-b = 0,\ bp-c = 0,\ cp-d = 0$

বা $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$

গতিকে a, b, c, d গু. প্ৰ. ত আছে।

উদাহৰণ 24 যদি p, q, r গু. প্ৰ.ত থাকে আৰু $px^2 + 2qx + r = 0$, $dx^2 + 2ex + f = 0$ সমীকৰণ দুটাৰ এটা মূল সমান, তেনেহ'লে দেখুওৱাঁ যে $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ সমান্তৰ প্ৰগতি থাকে।

সমাধান $px^2 + 2qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল দুটা হ'ল

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4pr}}{2p}$$

যিহেতু p, q, r গুণোত্তৰ প্ৰগতিত আছে, গতিকে $q^2 = pr$ গতিকে $x = \frac{-q}{p}$। কিন্তু $-\frac{q}{p}$ টো $dx^2 + 2ex + f = 0$ সমীকৰণটোৰো মূল (কিয়?)। গতিকে,

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0$$

বা $$dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad ...(1)$$

(1) ক pq^2ৰে হৰণ কৰি আৰু $q^2 = pr$ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0 \text{ বা } \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

গতিকে $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ স. প্ৰ. ত আছে।

নৱম অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. দেখুওৱাঁ যে এটা স. প্ৰ. ত $(m+n)$তম আৰু $(m-n)$ তম পদৰ যোগফল m তম পদৰ দুগুণ।
2. স. প্ৰ.ত থকা তিনিটা সংখ্যাৰ সমষ্টি 24 আৰু গুণফল 440, সংখ্যাকেইটা উলিওৱাঁ।
3. ধৰা হ'ল এটা স. প্ৰ.ৰ n টা; $2n$ টা; $3n$ টা পদৰ যোগফল যথাক্ৰমে S_1, S_2, S_3 দেখুওৱা যে $S_3 = 3(S_2 - S_1)$.
4. 200 আৰু 400 ৰ মাজত থকা আৰু 7 ৰে বিভাজ্য আটাইবোৰ সংখ্যাৰ যোগফল উলিওৱাঁ।
5. 2 বা 5 ৰে বিভাজ্য 1 ৰ পৰা 100 লৈ সংখ্যাবোৰৰ যোগফল উলিওৱাঁ।
6. 4 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ 1 হোৱা, দুটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাবোৰৰ যোগফল উলিওৱাঁ।
7. f এটা ফলন আৰু $x, y \in \mathrm{N}$ ৰ বাবে $f(x+y) = f(x) f(y)$। যদি $f(1) = 3$ আৰু $\sum_{k=1}^{n} f(x) = 120$, তেনেহ'লে n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ।
8. প্ৰথম পদ 5 আৰু সাধাৰণ অনুপাত 2 বিশিষ্ট এটা গু. প্ৰ.ৰ কিছু সংখ্যক পদৰ সমষ্টি 315।অন্তিম পদটো আৰু পদৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰাঁ।
9. এটা গু.প্ৰ.ৰ প্ৰথম পদ 1, তৃতীয় আৰু পঞ্চম পদৰ সমষ্টি 90; সাধাৰণ অনুপাতটো উলিওৱাঁ।
10. গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থকা তিনিটা সংখ্যাৰ যোগফল 56। সংখ্যা তিনিটাৰপৰা যথাক্ৰমে 1,7, 21 বিয়োগ কৰি

পোৰা সংখ্যা তিনিটা স. প্ৰ.ত তাকে। সংখ্যাকেইটা উলিওৱাঁ।

11. এটা গুণোত্তৰ প্ৰগতি যুগ্ম সংখ্যক পদেৰে গঠিত। যদি আটাইবোৰ পদৰ যোগফল অযুগ্ম স্থানত থকা সংখ্যাবোৰৰ যোগফলৰ 5 গুণ হয়, তেনেহ'লে সাধাৰণ অনুপাতটো উলিওৱাঁ।

12. এটা স. প্ৰ. ৰ প্ৰথম চাৰিটা পদৰ যোগফল 56 আৰু শেষৰ চাৰিটা পদৰ যোগফল 112। প্ৰথম পদটো 11 হ'লে, মুঠ পদৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।

13. যদি $\dfrac{a+bx}{a-bx}=\dfrac{b+cx}{b-cx}=\dfrac{c+dx}{c-dx}(x\neq 0)$, দেখুওৱাঁ যে a, b, c, d গু. প্ৰ. ত থাকে।

14. এটা গু. প্ৰ.ৰ n টা পদৰ যোগফল S, পূৰণফল P আৰু পদবোৰৰ প্ৰতিক্ৰমৰ যোগফল R। প্ৰমাণ কৰা যে $P^2 R^n = S^n$

15. এটা স. প্ৰ. ৰ p তম, q তম আৰু r তম পদ যথাক্ৰমে a,b,c হ'লে, দেখুওৱাঁ যে,

$$(q-r)\,a+(r-p)\,b+(p-q)\,c=0$$

16. যদি $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right), c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ স. প্ৰ. ত থাকে, প্ৰমাণ কৰাঁ যে a, b, c ও স. প্ৰ.ত থাকে।

17. a, b, c, d গু. প্ৰ.ত থাকিলে, প্ৰমাণ কৰাঁ যে $(a^n+b^n), (b^n+c^n), (c^n+d^n)$ গু. প্ৰ.ত থাকে।

18. $x^2-3x+p=0$ ৰ মূল দুটা a, b আৰু $x^2-12x+q=0$ ৰ মূল দুটা c, d আৰু লগতে a, b, c, d গু. প্ৰ.ত আছে। প্ৰমাণ কৰাঁ যে $(q+p):(q-p)=17:15$।

19. দুটা ধনাত্মক সংখ্যা a আৰু b ৰ সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুণোত্তৰ মাধ্যৰ অনুপাত $m{:}n$ হ'লে, দেখুওৱাঁ যে $a{:}b=(m+\sqrt{m^2-n^2}){:}(m-\sqrt{m^2-n^2})$

20. যদি a, b, c স. প্ৰ. ত; b, c, d গু. প্ৰ.ত আৰু $\dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{d}, \dfrac{1}{e}$ স. প্ৰ. ত থাকে, প্ৰমাণ কৰাঁ যে a, c, e গু. প্ৰ. ত থাকে।

21. তলৰ শ্ৰেণী দুটাৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱাঁ

(i) 5+55+555+...... (ii) .6+.66+.666+....

22. $2\times 4+4\times 6+6\times 8$......শ্ৰেণীটোৰ 20 তম পদটো উলিওৱাঁ

23. 3+7+13+21+31+......শ্ৰেণীটোৰ প্ৰথম n টা পদৰ যোগফল উলিওৱাঁ।

24. প্ৰথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ, সংখ্যাবোৰৰ বৰ্গৰ আৰু ঘনৰ যোগফল যথাক্ৰমে S_1, S_2, S_3 হ'লে, দেখুওৱাঁ যে $9S_2^2=S_3(1+8S_1)$

25. তলৰ শ্ৰেণীটোৰ n তম পদলৈ যোগফল উলিওৱা ঃ

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots\ldots..$$

26. দেখুওৱাঁ যে $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+\ldots\ldots..+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+\ldots\ldots\ldots..+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$

27. এজন খেতিয়কে এখন ব্যৱহৃত ট্ৰেক্টৰ 12000টকাত কিনে। তেওঁ নগদ 6000 টকা দিয়ে আৰু বাকী টকা, আদায় নিদিয়া টকাৰ ওপৰত 12% সুতসহ বাৰ্ষিক 500 টকাৰ কিস্তিত দিবলৈ মান্তি হয়। ট্ৰেক্টৰখনৰ বাবে তেওঁৰ কিমান টকা খৰচ হ'ব?

28. চামচাদ আলীয়ে 22000 টকাত স্কুটাৰ (Scooter) এখন কিনে। তেওঁ 4000 টকা নগদ দিয়ে আৰু বাকী টকা, আদায় নিদিয়া টকাৰ ওপৰত 10% সুতৰ হাৰত বাৰ্ষিক 1000 টকাৰ কিস্তিত দিবলৈ মান্তি হয়। স্কুটাৰখনৰ বাবে তেওঁৰ কিমান টকা খৰচ হ'ব?

29. এজন ব্যক্তিয়ে তেওঁৰ চাৰিজন বন্ধুলৈ চিঠি লিখে। তেওঁ প্ৰত্যেককে চিঠিখনৰ প্ৰতিলিপি কৰিবলৈ কয় আৰু চিঠিৰ শৃংখলটোৰ ধাৰাবাহিকতা অক্ষুণ্ণ ৰখাৰ পৰামৰ্শসহ প্ৰতিজন বন্ধুকেই চিঠিৰ প্ৰতিলিপি আৰু চাৰিজনলৈ পঠাবলৈ নিৰ্দেশ দিয়ে। শৃংখলটো ভংগ নহয় বুলি ধৰিলৈ আৰু প্ৰতিখন চিঠি পঠোৱাৰ খৰচ 50 পইচাকৈ ধৰি, চিঠিৰ অষ্টম সংহতিটো পঠোৱালৈ ডাক খৰচ কিমান হ'ব, নিৰ্ণয় কৰাঁ।

30. এজন মানুহে বাৰ্ষিক 5% সৰল সুতৰ হাৰত বেংকত 10000 টকা জমা থয়। জমা থোৱা বছৰৰ পৰা হিচাপ কৰি পঞ্চদশ বছৰটোত ধনৰ পৰিমাণ কিমান হ'ব আৰু 20 বছৰৰ পিছত মুঠ ধন কিমান হ'ব, নিৰ্ণয় কৰাঁ।

31. এজন ব্যক্তিৰ মেচিন (machine) এটাত খৰচ হ'ল 15,625 টকা। যদি মেচিনটোৰ 20% হাৰত বাৰ্ষিক মূল্য কমি যায়, তেনেহ'লে 5 বছৰৰ শেষত মেচিনটোৰ মূল্য কিমান হ'বগৈ?

32. এটা কাম এক নিৰ্দিষ্ট সংখ্যক দিনত সমাধা কৰিবলৈ 150 জন কৰ্মীক লগোৱা হ'ল। দ্বিতীয় দিনা 4 জন কৰ্মী কামটো বাদ দি গুচি গ'ল, তৃতীয় দিনত আৰু 4 জন গুচি গ'ল, এনেকৈ কৰ্মী কমি গৈ থাকিল। কামটো শেষ কৰিবলৈ 8 দিন সময় বেছি লাগিল। কিমান দিনত কামটো শেষ হ'ল, নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সাৰাংশ

- কোনো নিয়ম সাপেক্ষে এক নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমৰ সংখ্যাৰ সজ্জাক **অনুক্ৰম** বোলা হয়। অনুক্ৰমক এটা ফলন হিচাপেও সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়, যিটো ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিটো, অথবা $\{1, 2, 3,..., k\}$ ধৰণৰ এটা উপসংহতি। সসীম সংখ্যক পদেৰে গঠিত অনুক্ৰমক **সসীম অনুক্ৰম** বোলা হয়। অনুক্ৰম এটা সসীম নহ'লে, **অসীম অনুক্ৰম** বোলা হয়।
- ধৰা হ'ল $a_1, a_2, a_3,....$ এটা অনুক্ৰম। অনুক্ৰমটোৰ পদবোৰৰ যোগ $a_1+a_2+a_3+...$ক এটা **শ্ৰেণী** বোলা হয়। শ্ৰেণী এটাক **সসীম শ্ৰেণী** বোলা হয় যদিহে শ্ৰেণীটোত সসীম সংখ্যক পদ থাকে।
- এটা নিৰ্দিষ্ট ধ্ৰুৱকৰ যোগেৰে ক্ৰমান্বয়ে বৰ্ধিত হোৱা পদেৰে গঠিত অনুক্ৰমক, বা এটা নিৰ্দিষ্ট ধ্ৰুৱকৰ বিয়োগেৰে ক্ৰমান্বয়ে হ্ৰাস হোৱা পদেৰে গঠিত অনুক্ৰমক **সমান্তৰ প্ৰগতি** বোলা হয়। উক্ত ধ্ৰুৱক ৰাশিটোক **সাধাৰণ অন্তৰ** বোলা হয়। সাধাৰণতে সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদটো a ৰে, সাধাৰণ অন্তৰ d ৰে আৰু অন্তিম পদ l ৰে বুজোৱা হয়। **সাধাৰণ পদটো** বা n **তম পদটো** হয় $a_n = a + (n-1)d$. প্ৰথম n টা পদৰ যোগফলৰ মান হ'ল

$$\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}(a+l)$$

- দুটা সংখ্যা a আৰু b ৰ সমান্তৰ মাধ্য A ৰ মান হ'ল $\frac{a+b}{2}$; অৰ্থাৎ a, A, b সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকে।
- এটা অনুক্ৰমক **গুণোত্তৰ প্ৰগতি** বোলা হয় যদিহে অনুক্ৰমটোৰ যিকোনো পদৰ, সেই পদটোৰ আগৰ

পদটোৰ লগত অনুপাত সদায়ে এটা ধ্ৰুৱক সংখ্যা হয়। এই ধ্ৰুৱকটোক **সাধাৰণ অনুপাত** বোলা হয়। সাধাৰণতে গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ প্ৰথম পদ 'a'ৰে আৰু সাধাৰণ অনুপাত 'r' ৰে বুজোৱা হয়। গুণোত্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ পদ বা n তম পদটো হয় $a_n = ar^{n-1}$ । প্ৰথম n টা পদৰ যোগফল S_n ৰ মান হয়

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$, বা $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, যদিহে $r \neq 1$ ।

- দুটা সংখ্যা a আৰু b ৰ গুণোত্তৰ মাধ্য G ৰ মান হ'ল $\sqrt{ab}$; অৰ্থাৎ a, G, b গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকে।

ঐতিহাসিক টোকা

প্ৰায় 4000 বছৰ আগত বেবিলনিয়ান (Babylonians)সকলে সমান্তৰ আৰু গুণোত্তৰ অনুক্ৰম জানিছিল বুলি কিছু তথ্য পোৱা যায়। বিয়োথিয়াছ (Beothius,510) ৰ মতে আগছোৱাৰ গ্ৰীক লিখকসকলেও সমান্তৰ আৰু গুণোত্তৰ অনুক্ৰম জানিছিল। ভাৰতীয় গণিতজ্ঞসকলৰ ভিতৰত আৰ্যভটে (Aryabhatta,476) তেওঁৰ বিখ্যাত গ্ৰন্থ আৰ্যভটীয়ম (Aryabhatiyam) ত স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বৰ্গ আৰু ঘনৰ যোগফলৰ সূত্ৰ প্ৰকাশ কৰিছিল। এই গ্ৰন্থখন 499 চন মানত লিখা হৈছিল। তেওঁ এটা সমান্তৰ শ্ৰেণীৰ p তম পদৰ পৰা n টা পদলৈ যোগফলৰ সূত্ৰও উলিয়াইছিল। লেখত ল'বলগা ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ ব্ৰহ্মগুপ্ত (Brahmagupta, 598), মহাবীৰ (Mahavira, 850) আৰু ভাস্কৰে (Bhaskara, 1114 – 1185) বৰ্গ আৰু ঘনৰ যোগফল অধ্যয়ন কৰিছিল। অংক শাস্ত্ৰৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ প্ৰয়োগ থকা আন এবিধ অনুক্ৰম ইটালীয় গণিতজ্ঞ লিঅ'নাৰ্ড' ফিব'নাচ্ছি (Leonardo Fibonacci, 1170 – 1250) য়ে গঠন কৰিছিল। এইবিধ অনুক্ৰমক ফিব'নাচ্ছি অনুক্ৰম (Fibonacci sequence) বোলা হয়। সোতৰ শতিকাত অনুক্ৰমবোৰক নিৰ্দিষ্ট আকাৰত শ্ৰেণী বিভক্ত কৰা দেখা যায়। 1671 চনত জেমছ গ্ৰেগৰী (James Gregory) -এ অসীম অনুক্ৰম সাপেক্ষে 'অসীম শ্ৰেণী' পদটো ব্যৱহাৰ কৰে। বীজগণিত আৰু সংহতি তত্ত্বৰ আহিলাৰ প্ৰয়োগেৰেহে অনুক্ৰম আৰু শ্ৰেণীৰ ধাৰণাৰ সুবিধাজনক তথা ব্যাৱহাৰিক ৰূপ প্ৰদান কৰা হয়।

— ❖ —