باب : 8

قوت نما (Power)

8.1: تمہید

آپ سبھی جانتے ہیں کہ شطرنج کے کھیل کی ایجاد ہندوستان میں ہوئی تھی۔ اس سے جڑی ایک دلچسپ کہانی اس طرح ہے۔ جب یہاں کے راجا کو معلوم ہوا کہ اس دانشمندانہ کھیل کا موجد انھیں کی ریاست کا ایک دانشور ہے۔ تو موجد کو بلا کر راجا نے کہا۔ میں تمھارے اس انوکھے ایجاد کے لیے تمھیں انعام دینا چاہتا ہوں۔ اسے سن کر اس دانشور نے اپنا سر جھکا دیا۔

راجا نے کہا۔ میرے پاس بے پناہ دولت ہے۔ میں تمھاری کوئی بھی خواہش پوری کر سکتا ہوں۔ مانگو جو تمھاری خواہش ہو۔ ڈرومت۔

دانشور نے کہا۔ بادشاہ سلامت آپ کی فیاضی عظیم ہے۔ آپ مجھے شطرنج کے پہلے خانہ کے لیے گیہوں کا ایک دانہ دینے کا حکم صادر کیجئے۔ دوسرے خانہ کے لیے دو دانہ دینے، تیسرے خانہ کے لیے 4، چوتھے خانہ کے لیے 8، پانچویں خانہ کے لیے 16، آٹھویں گھر کے لیے 32 ..... بس کرو ..... راجا نے غصہ ہو کر اسے بیچ میں روک دیا۔ تمھیں شطرنج کے پورے 64 خانے کے لیے دانہ مل جائیں گے۔ ہر گھر میں دانے کی تعداد پچھلے گھر سے دوگنی ہونی چاہیے۔ یہی تمھاری شرط ہے نا۔ پھر بھی یہ جان لو کہ اتنا چھوٹا انعام مانگ کر تم ہماری فیاضی وسخاوت کی توہین کر رہے ہو۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 64 ویں خانے میں راجا کے کتنے دانے دینے پڑیں گے؟

گنتی بہت بڑی ہوتی جا رہی ہے۔ لیکن دلچسپ بات یہ ہے کہ یہاں 2 کا 2 کے ساتھ بار بار ضرب کرنا پڑ رہا ہے۔ جیسے:

پہلے خانہ میں دانہ	:	1
دوسرے خانہ میں دانہ	:	2
تیسرے خانہ میں دانہ	:	2×2

چوتھے خانہ میں دانہ	:	$2\times2\times2$
پانچویں خانہ میں دانہ	:	$2\times2\times2\times2$
چھٹے خانہ میں دانہ	:	$2\times2\times$ .... 5 بار
....	:	....
....	:	....

اسی طرح

چوسٹھویں خانہ میں دانہ : $2\times2\times$ .... 63 بار

یقیناً یہ عدد بہت بڑا ہوگا۔ لیکن کیا آپ کہانی کا اختتام جاننا نہیں چاہیں گے؟ کیا راجا موجد کو یہ انعام و اکرام دے سکا؟ موجد کو 9223372036854775808 دانے گیہوں کے دینے پڑیں گے اور پوری زمین پر اگر گیہوں کی کھیتی کی جائے تب بھی اتنا گیہوں نہیں ملے گا۔ اب آپ ہی سوچئے کہ یہ ہے نا ایک بہت بڑا عدد۔

$2\times2\times$ .... 63 بار کرنے پر کتنا بڑا عدد حاصل ہوگا؟ تو کیا کسی عدد میں اُسی عدد سے بار بار ضرب کرنے کے عمل کو لکھنے کا کوئی اور طریقہ نہیں ہے؟

8.2 - قوت نما یا قوت (Exponent or Power)

جماعت کے سبھی طلبا یہی سوچ رہے تھے کہ کسی عدد کا اس عدد کے ساتھ ضرب کرنے کے عمل کا استعمال ریاضی میں اور کہاں کیا گیا ہے؟

تبھی رسیدہ نے ہمانشو سے کہا۔ ''ہم رقبہ نکالنے میں اکائی کو سیمی × سیمی = سیمی^2 لکھتے ہیں۔ اسی طرح حجم نکالتے وقت بھی اکائی کو سیمی × سیمی × سیمی = سیمی^3 لکھتے ہیں۔ کیا اسی طرح $2\times2\times2$ کو 2^3 نہیں لکھا جا سکتا؟

رسیدہ نے کسی عدد کو اُسی عدد سے بار بار ضرب کرنے کو مختصر صورت میں لکھنے کا ٹھیک طریقہ بتایا۔ کیا آپ $5\times5\times5\times5\times5\times5$ کو اختصار میں لکھ سکتے ہیں؟

جس طرح $5\times5\times5\times5\times5\times5 = 5^6$ ہے۔

اسی طرح $a\times a\times a\times a\times a\times a = a$

اور $x\times x\times x\times x = x^4$ ہوتا ہے۔

آپ بھی کسی عدد کا اُسی عدد کے ساتھ بار بار ضرب کو اختصار میں لکھئے :

(i) $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ = ...

(ii) $r \times r \times r \times r \times r$ = ...

(iii) $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ = ...

(iv) $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$ = ...

کسی عدد کا اُسی عدد کے ساتھ بار بار ضرب کرنے کو آپ اختصار میں لکھنا سیکھ چکے ہیں۔ اس مختصر صورت کو ہم قوت نمائی علامت بھی کہتے ہیں۔ آیئے دیکھیں کہ انھیں کس طرح سے پڑھا جاتا ہے۔

یہاں 10^3 میں 10 قاعدہ Base اور '3' قوت نما (Exponent Index) کہلاتا ہے

10^3 اسے 10 کے اوپر قوت نما 3 پڑھا جاتا ہے۔ ساتھ ہی "10 کی تیسری قوت نما" بھی کہتے ہیں۔

10^3 کو 1000 کا قوت نمائی صورت (Exponential Form) کہا جاتا ہے۔ یعنی 1000 کو قوت نما کا استعمال کر کے مختصر شکل (10^3) میں لکھ سکتے ہیں۔

کچھ قوت نما کے خاص نام بھی ہیں :

جیسے : 5^2 جو 5 کے اوپر قوت نما ہے، اسے 5 کا مربع (5 Squared) بھی پڑھا جاتا ہے۔

5^3 جو 5 کے اوپر قوت نما ہے، اسے 5 کا مکعب (5 Cubed) بھی پڑھا جاتا ہے۔

خود کر کے دیکھئے :

نیچے لکھے عبارتوں کی بنیاد اور قوت نما کو ان کے سامنے دیئے گئے جگہوں میں لکھئے :

3^5 میں قاعدہ = 3 اور قوت نما = ۵

7^{19} میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

x^a میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

p^q میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

x^y میں قاعدہ = ... اور قوت نما = ...

اب آپ سمجھ چکے ہوں گے کہ قوت نمائی صورت میں لکھنے کا خاص طور سے مقصد کسی بہت بڑے عدد کو مختصر صورت میں لکھنا ہے۔

جیسے سورج سے زمین کی دوری 150000000 کیلو میٹر ہے جو ایک بہت بڑا عدد ہے۔ اسے ذیل کے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں:

150000000 کیلو میٹر $= 15\times10\times10\times10\times10\times10\times10 = 15\times10^7$ کیلو میٹر

بڑی شکل کو چھوٹی شکل یعنی اختصار میں لکھنا تو آپ سیکھ چکے ہیں۔ اب کچھ قوت نمائی صورت کو پہلی شکل طویل شکل میں لکھیے:

1. $a^5 \quad = \quad a\times a\times a\times a\times a$
2. $3^6 \quad =$
3. $5^5 \quad =$
4. $r^7 \quad =$
5. $2^m \quad =$

رحیم کو یہ سمجھ میں نہیں آرہا تھا کہ وہ 2^m کو طویل شکل میں کیسے لکھیں؟ کیوں کہ m کی کوئی طے شدہ قیمت نہیں ہے۔ کیا آپ کے پاس رحیم کے مسئلہ کا جواب ہے؟

پہلے بھی آپ نے دیکھا ہے کہ شطرنج کے 64 ویں خانہ میں راجا کو $2\times2\times2\times$...... ، 63 بار یعنی 2^{63} دانے گیہوں کے دانے دینے تھے۔

$2^m = 2\times2\times2\times......m$ بار لکھ سکتے ہیں۔

اسی طرح ہم x^m اور y^n کو درج ذیل طریقوں سے لکھ سکتے ہیں۔

$y^m = x\times x\times x\times......m$ بار اور

$y^n = y\times y\times......n$ بار لکھ سکتے ہیں۔

کسی عدد کی قوت نمائی صورت اس کے غیر منقسم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $1000 = 2\times2\times2\times5\times5\times5$...... (غیر منقسم اجزائے ضربی) $= 2^3\times5^3$

(غیر مقسوم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب والی شکل)

مثال: 1- 64 کو 2 کی قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

حل: $64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $64 = 2^6$

مثال:2- 8^2 اور 2^8 میں کون بڑا ہے؟

حل: $8^2 = 8\times8 = 64$

$2^8 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 256$ ہے۔ظاہراً $2^8 > 8^2$

مثال:3- (1^6) کی قیمت معلوم کیجئے۔

$(1^6) = 1\times1\times1\times1\times1 = 1$ (حقیقت میں 1 کا کوئی بھی قوت نما 1 کے برابر ہوتا ہے)

مثال:4- مندرجہ ذیل اعداد کو غیر مقسوم اجزائے ضربی کی قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے:

(i) 144 (ii) 216

(i) $144 = 72\times2$
$= 36\times2\times2$
$= 18\times2\times2\times2$
$= 9\times2\times2\times2\times2$
$= 3\times2\times2\times2\times2\times2$
$= 3^2\times2^4$ (مطلوب شکل)

(ii) $216 = 108\times2$
$= 54\times2\times2$
$= 27\times2\times2\times2$
$= 9\times3\times2\times2\times2$
$= 3\times3\times3\times2\times2\times2$
$= 3^3\times2^3$ (مطلوب شکل)

بنیاد منفی عدد صحیح بھی ہو سکتا ہے۔

جیسے: $-8 = (-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^3$ ہے۔

$16 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = (-2)^4$ ہے۔

ظاہر ہے کہ قاعدہ منفی عدد صحیح ہونے پر جب قوت نما طاق عدد ہو تو قیمت منفی عدد صحیح حاصل ہوتا ہے اور جب قوت نما جفت عدد ہو تو قیمت مثبت عدد صحیح حاصل عدد ہوتا ہے۔

مثال:5- مندرجہ ذیل کی قیمت(Value) معلوم کیجئے۔

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-1)^4$ (iii) $(-10)^4$ (iv) $(-5)^3$

حل: (i) $(-1)^5 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = -1$

(ii) $(-1)^4 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = +1$

$(-10)^4 = (-10)\times(-10)\times(-10)\times(-10) = 100\times(-10)\times(-10)$ (iii)

$= 100\times100 = 10000$

$(-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = 25\times(-5) - 125$ (iv)

سوالنامہ : 8.1

-1 مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $5\times5\times5\times5$ (ii) $c\times c\times c$ (iii) $2\times2\times3\times3\times3$

(iv) $6\times6\times b\times b$ (v) $a\times a\times b\times b\times b\times b\times b\times d$

-2 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) 3^3 (ii) 6^4 (iii) 9^3 (iv) 5^4 (v) 4^4

-3 مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک کو قوت نمائی علامتوں میں لکھئے:

(i) 343 (ii) 512 (iii) 729 (iv) 3125

-4 مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں کون بڑا ہے؟

(i) 4^3 یا 3^4 (ii) 2^5 یا 5^2 (iii) 2^8 یا 8^2 (iv) 100^2 یا 2^{100}

-5 مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو ان غیر منقسم اجزائے ضربی کی قوت نمائی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے:

(i) 1200 (ii) 720 (iii) 1080

(iv) 2250 (v) 3600

-6 سہل کیجیے:

(i) 3×10^2 (ii) $7^2\times3^2$ (iii) $(-1)^5\times7^3$

(iv) 0×10^2 (v) $3^4\times2^3$ (vi) $3^2\times10^4$

-7 سہل کیجیے:

(i) $(-3)^3$ (ii) $(-1)\times(-2)^3$ (iii) $(-4)^2\times(-3)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^4$ (v) $(-5)^2\times(-2)^4$

8- درج ذیل اعداد کا موازنہ کیجیے :

(i) $5\times10^{14};4\times10^{7}$ (ii) 2.6×10^{12} 1.6×10^{8}

(iii) $2.7\times10^{11};3.0\times10^{15}$ (iv) 1.008×10^{15} 2.009×10^{20}

9- مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھیے :

(i) $\frac{8}{729}$ (ii) $\frac{81}{343}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

8.3- قوت نما کے اصول

8.3.1- ایک ہی قاعدہ والے قوت نما

آپ جانتے ہیں کہ $2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$ ہوتا ہے۔ اس میں 2 کے مضروبوں کا الگ الگ مجموعہ بنا کر کئی طرح سے لکھ سکتے ہیں۔ جیسے :

$$2^5 = (2\times2\times2\times2) = 2^1\times2^4$$

$$2^5 = (2\times2)(2\times2\times2) = 2^2\times2^3$$

$$2^5 = (2\times2\times2)\times(2\times2) = 2^3\times2^2$$

$$2^5 = (2\times2\times2\times2)\times(\times2) = 2^4\times2^1$$

یہاں 2^5 کو 2 کے قاعدہ والی عبارتوں میں کئی طرح سے لکھا گیا ہے۔ آپ بھی نیچے دیئے گئے قوت نما عبارتوں کو یکساں بنیاد والے دو عبارتوں کے مضروبوں کی شکل میں لکھیے اور قوت نما کا حاصل جمع حاصل کیجیے :

قوت نما کا حاصل جمع	ہر مجموعہ کو قوت نما عبارت کی شکل میں لکھیے	طویل شکل میں لکھ کر دو مجموعوں میں بانٹنا (مجموعہ اپنی خواہش کے مطابق بنایئے)	قوت نما عبارت	نمبر شمار
4+3=7	$a^4\times a^3$	$\underline{a\times a\times a\times a}\times\underline{a\times a\times a}$	a^7	-1
			x^5	-2
			y^{10}	-3
			27^7	-4
			7^{12}	-5

اوپر قوت نما عبارتوں کی طویل ہوئی شکل کو دیکھئے اور نیچے دی ہوئی خالی جگہوں کو بھریئے :

$a^7 = a^5 \times \boxed{a^2}$ $\quad x^5 = x^3 \times \square$ $\quad y^{10} = y^7 \times \square$

$27^7 = 27^4 \times \square$ $\quad 7^{12} = 7^8 \times \square$

کیا دو یکساں قاعدہ والے اعداد کا ضرب کرنے پر ان اعداد کے قوت نما کا حاصل ضرب والے عدد کے قوت نما سے کوئی تعلق ہے؟

آیئے دیکھیں کہ یکساں قاعدہ والے قوت نمائی عبارتوں کا ضرب کیسے ہوتا ہے؟

$x^3 \times x^4 = \quad x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \quad = x^7 \quad = x^{(3+4)}$

$x^5 \times x^3 = \quad x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8 \quad = x^{(5+3)}$

$y^{19} \times y^{21} =$ $(y \times y \times .....$ 19 بار$) \times (y \times y \times ......$ 21 بار$)$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اوپر y کا y کے ساتھ کتنی بار ضرب ہوگا؟ حاصل ضرب میں y بنیاد لیں اس کی قوت نما کیا ہوگی؟

y کا y کے ساتھ $19+21=40$ بار ضرب ہو رہا ہے۔

اس لیے حاصل ضرب y^{40} ہوگا۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب دو یکساں بنیاد والے قوت نمائی اعداد کا ضرب ہوتا ہے تو حاصل ضرب میں بنیاد وہی رہتا ہے۔ اور قوت نما آپس میں جڑ جاتے ہیں۔

جیسے : $\quad 3^{99} \times 3^{13} = 3^{(99+13)} = 3^{112}$

کیا آپ $x^m \times x^n$ کا حاصل ضرب بتا سکتے ہیں؟

$x^m \times x^n = x \times x ......m$ بار اور n بار یعنی $(m+n)$ بار ضرب ہو رہا ہے۔

اس لیے $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (اصول:1)

خود کر کے دیکھئے :

(i)	$3^3 \times 3^4 = \quad 3^{\square}$	(ii)	$(-12)^2 \times (-12)^6 = \quad -12^{\square}$
(iii)	$b^2 \times b^3 = \quad b^{\square}$	(iv)	$c^{10} \times c^{20} = \quad c^{\square}$
(v)	$p^3 \times p^2 = \quad p^{\square}$	(vi)	$a^3 \times a^2 \times a^7 = \quad a^{\square}$

8.3.2- ایک ہی قاعدہ والے قوت نما اعداد کی تقسیم

فاطمہ نے سونو سے پوچھا، یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کو ضرب کرنا تو ہم نے سیکھ لیا، یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کی تقسیم کیسے کریں گے؟

سونو نے کہا، چلو کر کے دیکھتے ہیں:

$$\frac{2^7}{2^5} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2} = 2\times2 = 2^2$$

رینا اور جمال نے بھی اسی طرح کے سوال حل کیے۔

(i) $$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3} = 3\times3\times3 = 3^3$$

(ii) $$\frac{7^9}{7^6} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7\times7} = 7\times7\times7 = 7^3$$

فاطمہ نے سبھی حلوں کو دیکھ کر ساتھیوں سے کہا کہ جس طرح دو یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد کا ضرب کرنے پر قوت نما جڑتے ہیں۔ اُسی طرح دو یکساں قاعدہ والے قوت نما اعداد میں تقسیمی عمل کرنے پر شمار کنندہ کے قوت نما میں سے نسب نما کا قوت نما گھٹا دیتے ہیں۔

جیسے:

$2^7 \div 2^5$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $2 = 5 - 7$ ہوتا ہے، $3^5 \div 3^2$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $3 = 2 - 5$ اور $7^9 \div 7^6$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $3 = 6 - 9$ ہے۔ یعنی

$a^m \div a^n$ کے حاصل تقسیم کا قوت نما $m-n$ ہوگا۔

یعنی $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (اصول 2:)

تبھی مونو نے کہا، یہ تو ٹھیک ہے لیکن اگر مقسوم اور مقسوم علیہ (تقسیم کرنے والا عدد) کے قوت نما اعداد یکساں ہو تو کیا ہوگا؟ چلو حل کر کے دیکھیں۔

جیسے:

$$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 \qquad \text{لیکن} \quad \frac{7^5}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = 1 \qquad \therefore 7^0 = 1$$

جیسے:

$\frac{p^n}{p^n}=1$ ہوگا لیکن فارمولے کے مطابق

$$\frac{p^n}{p^n}=p^{n-n}=p^0$$

$p^0=1$ (اصول: 3)

اب ذرا ذیل کے اعداد پر غور کریں:

$$\frac{1}{5^2}=\frac{5^0}{5^2}=5^{0-2}=5^{-2} \quad (5^0=1 \text{ سے})$$

$$\frac{1}{6^{35}}=\frac{6^0}{6^{35}}=6^{0-35}=6^{-35} \quad (6^0=1 \text{ سے})$$

$$\frac{1}{4^{90}}=\frac{4^0}{4^{90}}=4^{0-90}=4^{-90} \quad (4^0=1 \text{ سے})$$

ان سوالوں کو دیکھتے ہوئے فاطمہ نے غور کیا کہ اگر قوت نما اعداد میں مقسوم علیہ میں مقسوم کی جگہ پر لے جائیں تو ان کی قوت نما کی علامت منفی ہو جاتا ہے۔ یعنی اگر ہمارے پاس

$\frac{1}{a^4}$ ہوتب $\frac{1}{a^4}=\frac{a^0}{a^4}=a^{0-4}=a^{-4}$

اگر $\frac{1}{a^m}$ ہوتب $\frac{1}{a^m}=\frac{a^0}{a^m}=a^{0-m}=a^{-m}$

اس لیے $\frac{1}{a^{-m}}=a^m$

لیکن اگر مقسوم کو مقسوم علیہ میں لے جائیں تو کیا ہوگا؟ جیسا ہم نے اوپر مثالوں میں دیکھا ہے۔

$\frac{1}{7^{-3}}=7^3$ یا $\frac{1}{a^{-4}}=a^4$ یا $\frac{1}{a^{-m}}=a^m$ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب قوت نما میں مقسوم کو مقسوم علیہ میں لے جائیں گے تب بھی قوت نما کی علامت بدل جائے گی۔

خود کر کے دیکھیے:

(i)	$10^8 \div 10^3$	=	$10^{\square}$	(ii)	$9^8 \div 9^7$	=	$9^{\square}$
(iii)	$21^{15} \div 21^{13}$	=	$21^{\square}$	(iv)	$b^{10} \div b^8$	=	$b^{\square}$
(v)	$d^{100} \div d^{80}$	=	$d^{\square}$	(vi)			

8.3.3- ایک قوت نما عدد پر قوت نما لینا

ذیل کی مثالوں پر دھیان دیجئے:

(i) $(2^3)^2$ کو سہل کیجئے۔

حل: $(2^3)^3 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$ (چونکہ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ہے)

$= 2^6$

$= 2^{3\times 2}$

(ii) $(3^4)^2$ کو سہل کیجئے۔

$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4$

$= 3^{4+4}$

$= 3^8$

$= 3^{4\times 2}$

(iii) $(3^m)^3 = \ = a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m}$

$= a^{3m}$

$= 3^{3\times m}$

مندرجہ بالا سے ہم وسیع صورت سے کہہ سکتے ہیں کہ کسی غیر صفر عدد صحیح 'a' کے لیے $(a^m)^n = a^{m\times n}$ ہوتا ہے جہاں m اور n مکمل اعداد ہیں۔

> **خود کر کے دیکھیے:**
>
> سہل کر کے جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھیے:
>
> (i) $(7^2)^3$ (ii) $(2^2)^{50}$ (iii) $(7^{50})^3$
>
> (iv) $(a^3)^2$ (v) (4^3) (vi) $(d^4)^8$

8.3.4- یکساں قوت نما والی قوت نما اعداد کا ضرب

ذیل کی مثالوں کو دیکھئے:

(i) $2^4 \times 3^4$ کو سہل کیجئے۔

$2^4 \times 3^4 = (2\times 2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3\times 3)$

$= (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)$

$= 6\times 6\times 6\times 6$

$= 6^4$

یہاں قاعدہ 6 قاعدہ 2 اور 3 کا حاصل ضرب ہے۔

(ii) $4^3 \times 3^3$ کو سہل کیجیے۔

$$4^3 \times 3^3 = (4\times4\times4)\times(3\times3\times3)$$
$$= (4\times3)\times(4\times3)\times(4\times3)$$
$$= 12\times12\times12$$
$$= 12^3$$ یہاں 12 قاعدہ 4 اور 3 کا حاصل ضرب ہے۔

(iii) $3^3 \times a^3$ کو سہل کیجیے۔

$$3^3 \times a^3 = (3\times3\times3)\times(a\times a\times a)$$
$$= (3\times a)\times(3\times a)\times(3\times a)$$
$$= (3a)^3$$

یہاں $(3\times a = (3a)^3)$

(iv) $(a^3 \times b^3)$ کو سہل کیجیے۔

$$a^3 \times b^3 = (a\times a\times a)\times(b\times b\times b)$$
$$= (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$$
$$= (a\times b)^3$$
$$= (ab)^3$$ (یہاں $a\times b = ab$ ہے)۔

وسیع حالت میں کسی غیر صفر (Non-Zero) عدد صحیح کے لیے $a^m \times b^m = (ab)^m$ ہوتا ہے۔ جہاں m ایک عدد صحیح ہے۔

مثال: 6 ۔ ذیل کے ارکان کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $(5\times4)^3$ (ii) $(4a)^5$ (iii) $(-3n)^3$

حل:

(i) $(5\times4)^3 = (5\times4)\times(5\times4)\times(5\times4)$
$$= (5\times5\times5)\times(4\times4\times4)$$
$$= 5^3 \times 4^3$$

(ii) $(4a)^5 = 4a\times4a\times4a\times4a\times4a$
$$= (4\times4\times4\times4\times4)\times(a\times a\times a\times a\times a) \qquad = 4^5 \times 4^5$$

(iii) $(-3n)^3 = (-3 \times n)^3$

$= (-3 \times n)(-3 \times n)(-3 \times n)$

$= (-3 \times -3 \times -3) \times (n \times n \times n)$

$= -3^3 \times n^3$

خود کر کے دیکھئے:

$a^m \times b^m = (ab)^m$ کا استعمال کر کے شکل بدلئے۔

(i)	$5^3 \times 2^3$	(ii)	$3^2 \times b^2$	(iii)	$a^2 \times c^2$
(iv)	$4^6 \times (-2)^6$	(v)	$(-2^4) \times (-3)^4$	(vi)	$(ab)^3$
(vii)	$(-2p)^3$	(viii)	$(2c)^4$	(ix)	$(2 \times 3)^5$

8.3.5- قابل پیمائش اعداد کے قوت نما

قابل پیمائش اعداد کے کچھ قوت نما پر غور کیجئے:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}$$

$$= \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5^4}{7^7}$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right)^5 = (-1)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^5$$

$$= -1 \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} = -1 \times \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11}$$

$$= -1 \times \frac{3^5}{11^5} \qquad = -\frac{3^5}{11^5}$$

8.3.6- یکساں قوت نما والے قوت نما اعداد کی تقسیم

ذیل کی مثالوں پر غور کیجئے:

(i) $\frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$

(ii) $\frac{a^5}{b^5}=\frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^5$

وسیع شکل میں $a^m\div b^m=\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$ جہاں a اور b کوئی دو غیر صفر(Non-Zero) عدد صحیح ہیں۔

اور m اور n ایک مکمل عدد ہے۔

مثال: 7 درج ذیل کو وسیع شکل میں لکھیے :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5$

حل:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$

(ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4=\frac{(-2)^4}{5^4}=\frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5\times5}$

(iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5=\frac{p^5}{q^5}=\frac{p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q}$

8.4- مثال......

مثال: 8 $3\times(5^2)$ اور $(5^2)^3$ میں بڑا کون ہے؟

حل: $(5^2)\times3=5\times5\times3$ (5^2 کو 3 سے ضرب)

$=75$

$(5^2)^3=5^2\times5^2\times5^2$ (5^2 کو خود سے 3 بار ضرب)

$=15625$

اس لیے $(5^2)^3>(5^2)\times3$

مثال: 9 $9\times9\times9$ کے لیے قاعدہ 3 لیتے ہوئے اسے قوت نمائی شکل میں لکھیے :

سوال سے :
$9\times9\times9=9^3 \qquad =3^{2\times3}\left(\because (a^m)^n=a^{mn}\right)$

$=\left(3^2\right)^3$ (کیوں کہ $9=3\times3=3^2$) $\qquad =3^6$

مثال : 10- حل کیجئے اور جواب کو قوت نمائی شکل میں لکھئے :

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^4$ (ii) $2^3\times2^2\times5^5$ (iii) $\left\{\left(2^3\right)^2\times5^6\right\}\times3^6$

(iv) $8^2\div2^3$ (v) $\left(3^2\times3^4\right)\div3^3$

حل :

(i) $\left(\dfrac{3^7}{3^2}\right)\times3^4=\left(3^{7-2}\right)\times3^4\left(\because\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\right)$

$=3^5\times3^4$

$=3^{5+4}\left(\because a^m\times a^n=a^{m+n}\right)$

$=3^9$

(ii) $2^3\times2^2\times5^5=\left(2^3\times2^2\right)\times5^5$

$=2^5\times5^5\left(\because a^m\times a^m=a^{m+n}\right)$

$=(2\times5)^5\left(\therefore a^m\times b^m=(ab)^m\right)$

$=10^5$

(iii) $\left\{\left(2^3\right)^2\times5^6\right\}\times3^6$

$=\left(2^6\times5^6\right)\times3^6\left(\because\left(a^m\right)^n=a^{mn}\right)$

$\left\{(10)^6\times3^6\right\}\quad\left(\because a^m\times b^m=(ab)^m\right)$

$=\left(10^3\times3\right)^6$

$=(30)^6$

(iv) $8^2 \div 2^3$

$8 = 2\times2\times2 = 2^3$

$\therefore 8^2 = \left(2^3\right)^2$

$\therefore 8^2 \div 2^3 = \left(2^3\right)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{6-3} = 2^3$

(v) $= \left(3^2 \times 3^4\right) \div 3^3$

$= \left(3^{2+4}\right) \div 3^3 \quad \left(a^m \times a^n = a^{m+n}\right)$

$= 3^6 \div 3^3 \quad \left(a^m \div a^n = a^{m-n}\right)$

$= 3^{6-3} = 3^3$

مثال:11- سہل کیجیے:

(i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32}$ (ii) $\dfrac{2\times3^4\times2^5}{9\times4^2}$ (iii) $\dfrac{12^4\times9^3\times4}{6^3\times8^2\times27}$

(iv) $2^3\times a^3\times5a^4$ (v) $\dfrac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$ (vi) $\dfrac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

حل:

(i) $\dfrac{2^3\times3^4\times4}{3\times32} = \dfrac{2^3\times3^4\times2^2}{3\times2^5} \quad \left(\because 4=2^2, 32=2^5\right)$

$= \dfrac{2^{3+2}\times3^4}{3\times2^5} = \dfrac{2^5\times3^4}{3\times2^5}$

$= 2^{5-5}\times3^{4-1} = 2^0\times3^3$

$= 1\times27 = 27$

(ii) $= \dfrac{2\times3^4\times2^5}{9\times4^2} = \dfrac{2\times3^4\times2^5}{3^2\times\left(2^2\right)^2} = \dfrac{2\times2^5\times3^4}{3^2\times2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5}\times3^4}{2^4\times3^2} = \dfrac{2^6\times3^4}{2^4\times3^2}$

$= 2^{6-4}\times3^{4-2} = 2^2\times3^2 = 4\times9 = 36$

(iii) $= \dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \dfrac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3} = \dfrac{(2^2)^4 \times 3^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{3\times2} \times 3^3}$

$= \dfrac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3} = \dfrac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} \quad = 2^1 \times 3^4 \quad = 2 \times 81 \quad = 162$

(iv) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$

$= 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4$

$= 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40a^7$

(v) $= \dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$

$= 4^{5-5} \times a^{8-5} \times b^{3-2}$

$= 4^0 \times a^3 \times b^1$

$= 1a^3 b$

$= a^3 b$

(vi) $= \dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3} = \dfrac{2^8 \times a^5}{(2^2)^3 \times a^3} = \dfrac{2^8 \times a^5}{2^6 \times a^3}$

$= 2^{8-6} \times a^{5-3} \quad = 2^2 a^2 \quad = 4a^2$

سوالنامہ : 8.2

1- سہل کیجیے اور واب کو قوت نمائی شکل میں لکھیے :

(i) $7^2 \times 7^4 \times 7^8$ (ii) $3^{10} \div 3^6$ (iii) $d^2 \times d^3$

(iv) $5^x \times 5^2$ (v) $(5^3)^2 \div 5^3$ (vi) $3^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(2^{20} \div 2^{10}) \times 2^3$ (ix) $9^p \div 9^3$

2- سہل کیجیے اور قوت نمائی شکل میں جواب دیجیے :

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3^2 \times 32}$ (ii) $\left[(5^3)^2 \times 5^3\right] \div 5^6$ (iii) $25^5 \div 5^4$

(iv) $3^0+4^0+5^0$ (v) $3^0\times4^0\times5^0$ (vi) $\left(4^0+5^0\right)\times2^0$

(vii) $\frac{11^6\times13^3\times3}{39\times11^2}$ (viii) $\frac{5^7}{5^4\times5^3}$ (ix) $\left(3^3\times3\right)^3$

(x) $\frac{5^8\times a^5}{25^3\times a^3}$

3- غیر مقسوم اجزائے ضربی کے قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے :

(i) 1152 (ii) 64×81 (iii) 540

(iv) $27\times48\times72$ (v) $9\times6\times15\times4$

4- نیچے دیے گئے اقوال میں صحیح اور غلط کو الگ کیجیے اور اپنے جواب کی وجوہات بتایئے :

(i) $10^0=(1000)^8$ (ii) $4^3\times3^2\times12^5$ (iii) $2^5=5^2$

(iv) $10\times10^6=100^6$

5- سہل کیجیے :

(i) $\frac{\left(3^2\right)^5\times5^3}{9^4\times5^2}$ (ii) $\frac{9^2\times3^2\times a^8}{3^7\times a^3}$ (iii) $\frac{3^5\times10^5\times25}{5^7\times6^5}$

8.5- اعشاریہ اعداد کا طریقہ (Decimal Number System)

ہم جانتے ہیں کہ

$$56832=5\times10000+6\times1000+8\times100+3\times10+2\times$$

ہم اسے 10 کے قوت نما کا استعمال کرتے ہوئے قوت نمائی شکل میں ذیل کے طریقوں سے لکھ سکتے ہیں:

$$56832=5\times10^4+6\times10^3+8\times10^2+3\times10^1+2\times10^0$$

دھیان دیجیے، $10000=10^4, 1000=10^3, 100=10^2, 10=10^1$ اور $1=10^0$ ہے۔

یہاں 10 کا قوت نما 4 سے ایک ایک گھٹتے ہوئے 0 تک آ جاتے ہیں۔

3.6- بڑے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کرنا

مندرجہ ذیل پیٹرن(Pattern) کو دیکھئے :

1. $14335 = 1433.5 \times 10 = 1433.5 \times 10^1$
2. $14335 = 143.35 \times 100 = 143.35 \times 10^2$
3. $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$
4. $14335 = 1.4335 \times 10000 = 1.4335 \times 10^4$
5. $14335 = .14335 \times 100000 = .14335 \times 10^6$

مندرجہ بالا سبھی اعداد میں چوتھی شکل عدد کا معیاری شکل(Standard Form) ہے۔ جب کسی عدد کو 1.0 اور 9.9 یا اُس کے بیچ کے ایک اعشاریہ عدد اور 10 کے قوت نما کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ تو عدد کی اس شکل کو معیاری شکل کہتے ہیں۔

اوپر کی تیسری شکل کا عدد $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$ معیاری شکل میں ہے؟ نہیں، کیوں کہ $1.0 < 14.335$ اور 9.9 سے اور اس کے بیچ کی کسی بھی اعشاریہ عدد سے اب کیا عدد 14335×10^6. معیاری شکل میں ہے؟ نہیں، کیوں کہ $1.0 < 14335$. اور 9.9 اور اس کے بیچ کے کسی بھی اعشاریہ عدد سے۔

دھیان دیجئے 14335 کو 14.335×1000 یا 14335×100000. اور 14.335×10^3 یا $\times 10^5$ $\times 10$ 14335. کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہ 14335 کی معیاری شکل نہیں ہے۔

ہمارے نظام قمری یا گلیکسی کے مرکز سے سورج کی دوری یعنی :

300,000,000,000,000,000,000, میٹر کو 3.0×10^{20} میٹر کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح زمین کا وزن

$= 5,976,000,000,000,000,000,000,000$ کیلوگرام

$= 5.976 \times 10^{24}$

کیا آپ اس بات سے اتفاق رکھتے ہیں کہ پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے کے نقطہ سے معیاری شکل میں لکھا یہ عدد اس 25 ہندسوں والے عدد کے مقابلے میں بہت زیادہ سہل اور آسان ہے۔

اب یورینس سیارے کا وزن

© copyright reserved to BSTBPC, Government of BIHAR (www.bstbpc.gov.in).
Publishing web/app/books will be a crime. Published by Abdiel Solutions (www.absol.in)

$=86,000,000,000,000,000,000,000$ کیلوگرام

$= 8.68\times10^{25}$ کیلوگرام ہے

اب مندرجہ بالا دونوں عبارتوں میں صرف 10 کی قوتوں کا موازنہ کر کے ہی آپ یہ کہہ سکتے ہیں کہ یورینس سیارے کا وزن زمین سے زیادہ ہے۔

مثال: 12- مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجئے:

(i) 725.34 (ii) 956.230 (iii) 434.000 (iv) 800.403.000

حل:

(i) $725.34 = 7/2534\times 100 = 7.2534\times 102$

(ii) $956230 = 9.56230\times 100000 = 9.5623\times 10^5$

(iii) $434000 = 4.34000\times 100000 = 4.34\times 10^5$

(iv) $800403000 = 8.00403\times 100000000 = 8.00403\times 10^8$

اوپر کی مثال سے ظاہر ہے کہ کسی عدد کو معیاری شکل میں بدلتے وقت 10 کا قوت ذیل کی طرح سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

سب سے پہلے اعشاریہ نقطہ سے بائیں طرف کے اعداد کو ہندسوں کو گنتے ہیں۔ اعشاریہ نقطہ نہیں رہنے پر نقطہ کا قیاس دائیں طرف کر لیتے ہیں۔ پھر حاصل عدد میں سے 1 گھٹا کر جو حاصل ہوتا ہے۔ وہی 10 کی قوت ہوتی ہے۔ مثال (1) میں عدد 725.34 ہے۔ اس میں اعشاریہ کے بائیں طرف تین عدد ہیں۔ اس لیے 10 کی قوت = 3-1=2 ہوگا۔

اس لیے $725.34 = 7.2534\times 10^2$

اسی طرح مثال (2) میں عدد 956230 میں دائیں سرے پر نقطہ کا قیاس کرنے پر نقطہ کے بائیں طرف کل 6 ہندسے ہیں۔ اس لیے 10 کی قوت 5=1-6 = ہوگا۔

اس لیے $956230 = 9.5623\times 10^5$

سوالنامہ

-1 مندرجہ ذیل اعداد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھئے:

(i) 389505 (ii) 2005183 (iii) 230829 (iv) 30079 (v) 8324750

© copyright reserved to BSTBPC, Government of BIHAR (www.bstbpc.gov.in).
Publishing web/app/books will be a crime. Published by Abdiel Solutions (www.absol.in)

-2 مندرجہ ذیل پھیلی ہوئی شکل میں سے ہر ایک کے لیے عدد معلوم کیجئے:

(i) $9 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

(ii) $7 \times 10^5 + 8 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

(iii) $6 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

(iv) $8 \times 10^5 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1$

-3 مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجئے:

(i) 7,00,00,000 (ii) 8,000,000 (iii) 416,000,000

(iv) 456,234 (v) 9634.21 (vi) 72439.62

-4 مندرجہ ذیل اقوال میں ظاہر ہونے والے اعداد کو معیاری شکل میں لکھئے:

(i) زمین کا قطر 12756000 میٹر ہے۔

(ii) مارچ 2001 میں ہندوستان کی آبادی 1.27.000,000 تھی۔

(iii) سورج کا قطر 1,400,000,000 میٹر ہے۔

(iv) وہ مقام جہاں ہوا کا گذر نہ ہو، میں روشنی کی رفتار 300,000,000 میٹر/سکنڈ ہے۔

(v) نظام شمسی 12,000,000,000 سال پرانا تحقیق کیا گیا ہے۔

(vi) ایک نظام قمری میں اوسط 100,000,000,000 تارے ہیں۔

(vii) نظام قمری کے وسط سے سورج کی دوری 300,000,000,000,000,000,000 میٹر تحقیق کی گئی ہے۔

(viii) 1.8 گرام وزن والے پانی کی ایک بوند میں 60,230,000,000,000,000,000,000 جراثیم ہوتے ہیں۔

(ix) زمین میں 1,353,000,000 کیلومیٹر^3 سمندر کا پانی ہے۔

-5 مندرجہ ذیل اقوال میں ظاہر ہونے والی دوریوں کو معیاری شکل میں ظاہر کرتے ہوئے گھٹتی ترتیب میں لکھئے:

(i) سورج اور ستارۂ زحل کے بیچ کی دوری 1,433,500,000,000 میٹر ہے۔

(ii) ستارۂ زحل اور یورینس کے بیچ کی دوری 1,439,000,000,000 میٹر ہے۔

(iii) سورج اور زمین کے بیچ کی دوری 149,600,000,000 میٹر ہے۔

(iv) زمین اور چاند کے بیچ کی دوری 384,000,000 میٹر ہے۔

© copyright reserved to BSTBPC, Government of BIHAR (www.bstbpc.gov.in).
Publishing web/app/books will be a crime. Published by Abdiel Solutions (www.absol.in)

ہم نے سیکھا

-1 بڑے عددوں کو قوتوں کا استعمال کر کے مختصر شکل میں لکھتے ہیں۔ جس سے بڑے عددوں کو پڑھنے، سمجھنے، موازنہ کرنے اور ان پر عملیات کرنے میں آسانی اور سہولت ہوتی ہیں۔

-2 عدد $10^5 = 100000$ اسے 10 کے اوپر قوت نما 5 پڑھا جاتا ہے۔ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ 10 کی پانچویں قوت نما 100000 ہے۔ یہاں 10 قاعدہ ہے اور 5 اس کا قوت نما ہے۔

-3 قوت نمائی شکل میں اعداد کچھ اصولوں کی تعمیل کرتے ہیں، جو اس طرح ہیں:

کسی غیر صفر (Non-Zero) اعداد صحیح a اور b اور مکمل اعداد m اور n کے لیے

(i) $a^m \times a^n = a^{mn}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{mn}, m > n$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

(vii) (-1) جفت عدد $= 1$

(-1) جفت عدد $= -1$

© copyright reserved to BSTBPC, Government of BIHAR (www.bstbpc.gov.in).
Publishing web/app/books will be a crime. Published by Abdiel Solutions (www.absol.in)