11

समाकलन के अनुप्रयोग : क्षेत्रकलन
(Application of integral : Quadrature)

11.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व अध्यायों में हमने पढ़ा कि समाकलन गणित के अध्ययन की शुरूआत समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ऐसी अनन्त श्रेणी का योग ज्ञात करने में हुई जिसका प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर था तथा यह योगफल निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा दिया गया। वास्तव में हमने योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलों का परिकलन करते समय वक्र $y = f(x)$ कोटियों $x = a, x = b$ व x-अक्ष से घिरे क्षेत्रफल $\int_a^b f(x)dx$ को ज्ञात करने का अध्ययन किया।

किसी समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया क्षेत्रकलन (Quadrature) कहलाती है। इस अध्याय में हम साधारण वक्रों के अन्तर्गत सरल रेखाओं व वृत्तों, परवलयों व दीर्घवृत्तों (केवल मानक रूप) के मध्य घिरे समतलीय क्षेत्रफलों (Plane area) को ज्ञात करने के लिये समाकलन के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे।

11.02 साधारण वक्रों के अन्तर्गत क्षेत्रफल (Area under simple curves)

प्रमेय: वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ व $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल, निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, अर्थात क्षेत्रफल $= \int_a^b y\,dx$

प्रमाण: माना वक्र PQ का समीकरण $y = f(x)$ है, जहाँ $f(x)$ प्रान्त $[a, b]$ में x का एकमानीय वास्तविक व संतत फलन है। आकृतिानुसार हमें क्षेत्र $PRSQP$ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

माना $E(x, y)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा $F(x+\delta x, y+\delta y)$ इसका समीपवर्ती बिन्दु है। EA व FB क्रमशः E व F की कोटियाँ हैं।

E से FB पर लम्ब EC डाला तथा F से बढ़ी हुई AE पर लम्ब FD डाला।

$$AB = OB - OA = (x+\delta x) - x = \delta x$$

$$FC = FB - CB = (y+\delta y) - y = \delta y$$

माना, क्षेत्रफल $RAEPR = A$

अब यदि x में वृद्धि δx के संगत क्षेत्रफल में वृद्धि δA हो, तो $\delta A =$ क्षेत्रफल $ABFEA$

तब आकृतिानुसार, (आयत $ABCE$ का क्षेत्रफल) < (क्षेत्रफल $ABFEA$) < (आयत $ABFD$ का क्षेत्रफल)

$\Rightarrow \quad y\delta x < \delta A < (y+\delta y).\delta x$

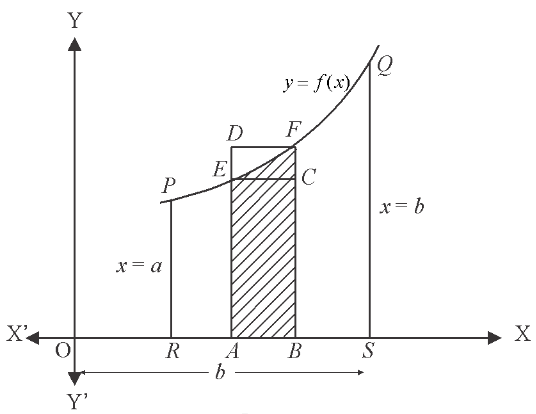
$\Rightarrow \quad y < \dfrac{\delta A}{\delta x} < y+\delta y$

जब $F \to E$ तब $\delta x \to o$ तथा $y+\delta y \to y$

$\Rightarrow \quad \lim_{\delta x \to 0} y \le \lim_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta A}{\delta x} \le \lim_{\delta x \to 0} (y+\delta y)$

$\Rightarrow \quad y \le \dfrac{dA}{dx} \le y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dA}{dx} = y \Rightarrow dA = ydx \Rightarrow dA = f(x)dx$



आकृति 11.01

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष $x=a$ तथा $x=b$ सीमाओं के अन्तर्गत समाकलन करने पर

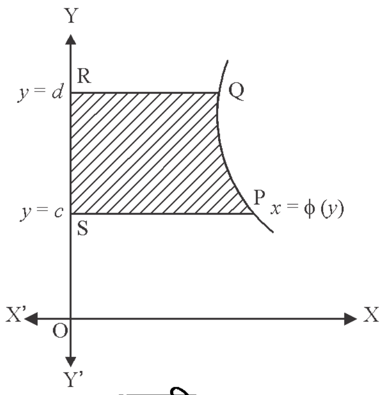
$$\int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$$

या $$[A]_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

या (क्षेत्रफल A जब $x=b$)$-$(क्षेत्रफल A जब $x=a$)$=\int_a^b f(x)dx$

या क्षेत्रफल $PRSQP - 0 = \int_a^b f(x)dx$

या क्षेत्रफल $PRSQP = \int_a^b f(x)dx$ या $\int_a^b y\,dx$



आकृति 11.02

इस प्रकार, वक्र $y=f(x)$, कोटियों $x=a$ व $x=b$

तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_a^b f(x)dx$ या $\int_a^b y\,dx$

इसी प्रकार "वक्र $x=\phi(y)$, भुजों $y=c$ व $y=d$

और y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_c^d \phi(y)dy$ या $=\int_c^d x\,dy$

टिप्पणी: (i) क्षेत्रकलन को सरलता से ज्ञात करने के लिये क्षेत्र का कच्चा आकृति (rough sketch) बना लेना चाहिए जिससे समाकलन की सीमाओं व अक्षों के सापेक्ष वक्र की सममिति का निर्धारण करने में सुविधा रहती है। वक्रों से परिबद्ध क्षेत्र का कच्चा आकृति बनाने के लिये वक्रों की पहचान एवं उनका अनुरेखण करना आवश्यक होता है।

11.03 सममित क्षेत्रफल (Symmetrical area)

यदि वक्र किसी निर्देशी अक्ष या किसी रेखा के प्रति सममित हो, तो किसी एक सममित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसको सममित भागों की कुल संख्या से गुणा करके अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

उदाहरणार्थ: वृत्त $x^2+y^2=a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टतः वृत्त का केन्द्र (o, o) तथा त्रिज्या a है एवं यह दोनों अक्षों के प्रति सममित है अतः

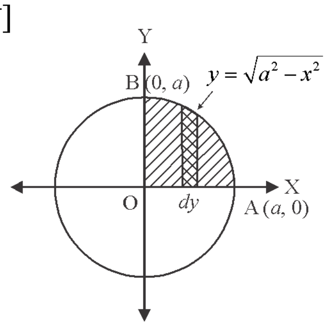
वृत्त का सम्पूर्ण क्षेत्रफल $=4\times$[प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल $OABO$]

$= 4\times$[वृत्त $y=\sqrt{a^2-x^2}$, x-अक्ष, $x=0$ व $x=a$ से परिबद्ध क्षेत्रफल]

$$=4\int_a^b y\,dx = 4\int_a^b \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=4\left[\left(o+\frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}\right)-(o+o)\right]=\pi a^2$$



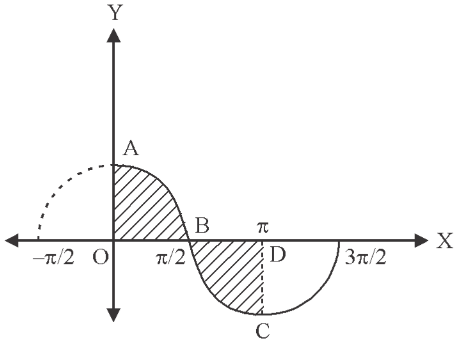
आकृति 11.03

11.04 x-अक्ष के परित वक्र का क्षेत्रफल (Area of a curve around x-axis)

क्षेत्रफल सदैव धनात्मक माना जाता है। अतः यदि क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर (जो कि धनात्मक होगा) तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे (जो कि ऋणात्मक होगा) हो, तो दोनों भागों के क्षेत्रफल की अलग-अलग गणना करके उनके संख्यात्मक मानों (numerical values) का योग करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ: वक्र $y=\cos x$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए; जबकि $o \le x \le \pi$.

हल: ग्राफ से स्पष्ट है कि अभीष्ट क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर व कुछ भाग x-अक्ष के नीचे है



आकृति 11.04

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx+\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx\right|$

$$=[\sin x]_o^{\pi/2}+\left|[\sin x]_{\pi/2}^{\pi}\right|=(1-0)+|0-1|$$

$=1+1=2$ वर्ग इकाई।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. परवलय $y^2=4x$ तथा रेखा $x=3$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए परवलय व रेखा का अनुरेखण करने पर

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र AOBMA

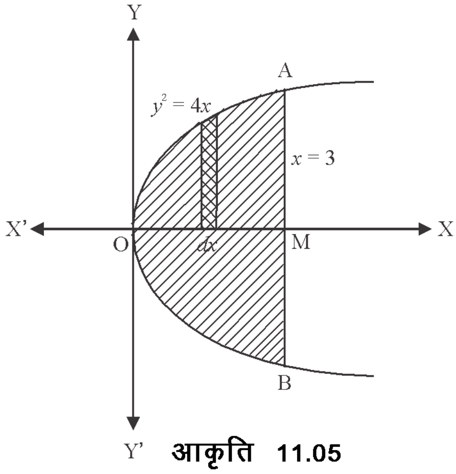
= 2 × क्षेत्र AOMA ($\because$ परवलय x-अक्ष के परित सममित है)

$$=2\int_0^3 y\,dx$$

$$=2\int_0^3\sqrt{4x}\,dx=2\times2\int_0^3\sqrt{x}\,dx$$

$$=4\times\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^3=\frac{8}{3}\left[3^{3/2}-0\right]$$

$=\frac{8}{3}\times3\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.05

उदाहरण-2. वक्र $y=2\sqrt{1-x^2}$ तथा x-अक्ष के ऊपर परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: $y=2\sqrt{1-x^2}$ को सरल करने पर

$$y^2=4(1-x^2) \text{ या } \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad (1)$$

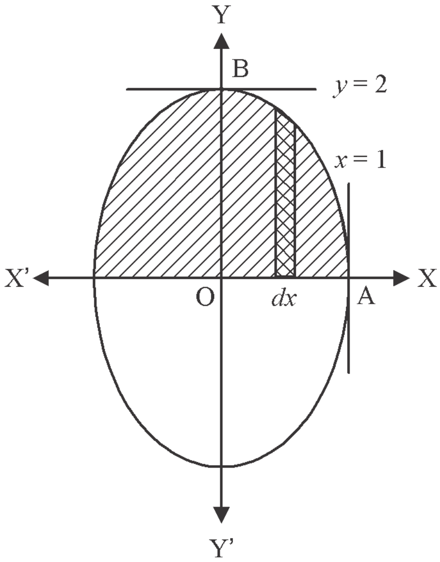
स्पष्टतः वक्र $y=2\sqrt{1-x^2}$ दीर्घवृत्त (1) का ऊपरी भाग है। अतः हमें आकृतिानुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 × क्षेत्र OABO

$$=2\int_0^1 y\,dx=2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=4\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1$$

$=4\left[\left(0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-(o+o)\right]=\pi$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.06

उदाहरण-3. परवलय $y^2 = 4ax$, x-अक्ष, रेखा $x = 2a$ तथा नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभिलम्ब का समीकरण $x = a$ है। आकृति में यह LSL' द्वारा प्रकट है तथा PMQ कोटि $x = 2a$ है।

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $SMPL$

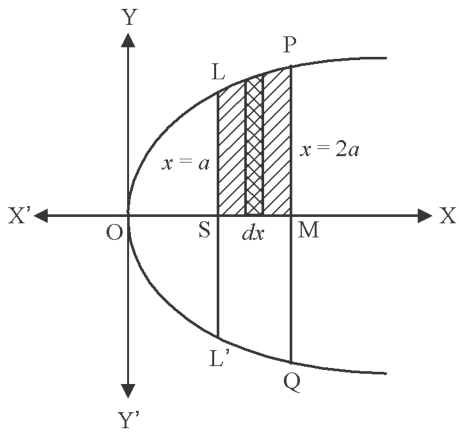
$$= \int_a^{2a} y\, dx = \int_a^{2a} \sqrt{4ax}\, dx$$

$$= 2\sqrt{a}\int_a^{2a} \sqrt{x}\, dx = 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_a^{2a}$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}\times(2a)^{3/2} - \frac{2}{3}a^{3/2}\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{4\sqrt{2}}{2}a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}\right]$$

$$= \frac{4a^2}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right].$$



आकृति 11.07

उदाहरण-4. परवलय $y = 4x^2$ व रेखाओं $y = 1$ व $y = 4$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: परवलय $y = 4x^2$ अर्थात् $x^2 = \frac{1}{4}y$ तथा रेखाओं $y = 1$ व $y = 4$ का अनुरेखण आकृतिानुसार होगा।

अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र $PQRSP$

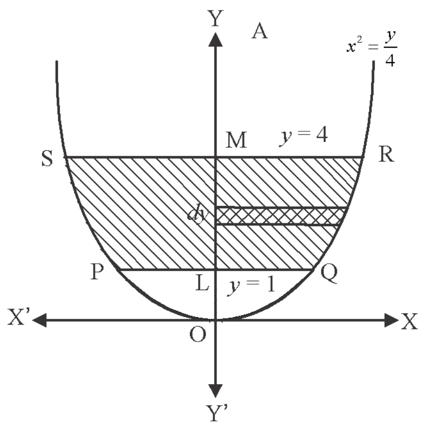
$= 2 \times$ क्षेत्र $RQLM$

$$= 2\int_1^4 x\, dy$$

$$= 2\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{y}\, dy = \int_1^4 \sqrt{y}\, dy$$

$$= \frac{2}{3}\left[(y)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3}$$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.08

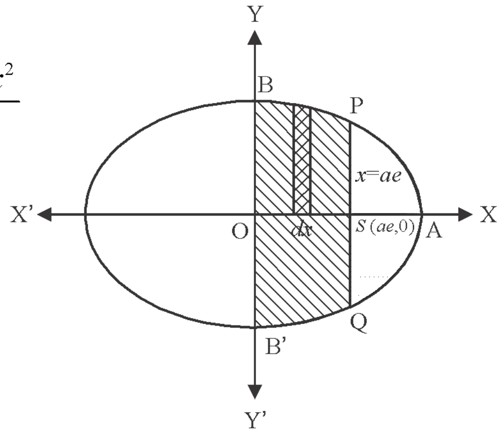
उदाहरण-5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा कोटियों $x = ae$ व $x = o$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए,

जहाँ, $b^2 = a^2(1-e^2), e < 1$.

हल: अभीष्ट क्षेत्रफल $BPSQB'OB$ दिए गए दीर्घवृत्त व रेखाओं $x = o$ और $x = ae$ से घिरा हुआ है जैसा कि आकृति 11.09 में प्रकट है। चूंकि क्षेत्र x-अक्ष के प्रति सममित है अतः

अभीष्ट क्षेत्रफल $BPSQB'OB = 2\int_o^{ae} y\, dx$

अब दीर्घवृत्त की समीकरण से,



आकृति 11.09

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \text{ या } \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

या $$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \text{ या } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\int_o^{ae}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=\frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_o^{ae}$$

$$=\frac{2b}{a}\left[\left(\frac{ae}{2}\sqrt{a^2-a^2e^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{ae}{a}\right)-(o+o)\right]$$

$$=\frac{2b}{a}\left[\frac{ae}{2}.a\sqrt{1-e^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(e)\right]$$

$$=\frac{2a^2b}{2a}\left[e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right]$$

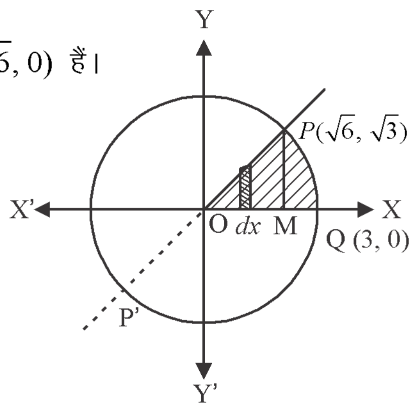
$$=ab\left[e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right] \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-6. वृत्त $x^2+y^2=9$ व रेखा $x=\sqrt{2}y$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का प्रथम पाद में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः वृत्त $x^2+y^2=9$ का केन्द्र (o, o) व त्रिज्या 3 इकाई है। सरल रेखा $x=\sqrt{2}y$ मूल बिन्दु से गुजरती है व वृत्त को बिन्दु P पर काटती है। वृत्त व रेखा की समीकरण को हल करने पर–

$$x^2+\frac{x^2}{2}=9 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \text{ तब } y=\pm\sqrt{3}$$

$\therefore$ P के निर्देशांक $(\sqrt{6}, \sqrt{3})$ Q के निर्देशांक (3, 0) तथा M के निर्देशांक $(\sqrt{6}, 0)$ हैं।



आकृति 11.10

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OMPO + क्षेत्र PMQP

$$=\int_{0\,(y \text{ रेखा द्वारा})}^{\sqrt{6}} y\,dx+\int_{\sqrt{6}\,(y \text{ वृत्त द्वारा})}^{3} y\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{6}}\frac{x}{\sqrt{2}}dx+\int_{\sqrt{6}}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{6}}+\left[\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_{\sqrt{6}}^{3}$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+0\right)+\left[\left(0+\frac{9}{2}\sin^{-1}(1)\right)-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{3}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right]$$

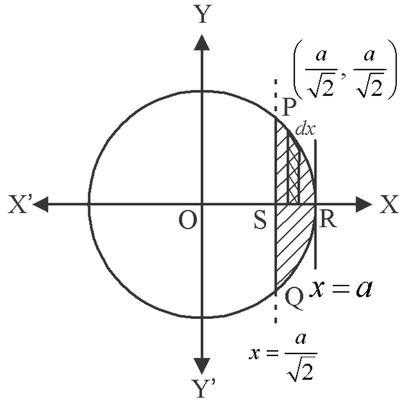
$$=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{9\pi}{4}-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{9}{4}\left(\pi-2\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-7. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ एवं रेखा $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः वृत्त व रेखा की समीकरणों को हल करने पर–

$$\frac{a^2}{2}+y^2=a^2 \Rightarrow y^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow y=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ P के निर्देशांक $\left(a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2}\right)$



आकृति 11.11

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र $PSQRP$

$= 2 \times$ क्षेत्र PSRP

$$=2\int_{a/\sqrt{2}}^{a} y\,dx=2\int_{a/\sqrt{2}}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/\sqrt{2}}^{a}$$

$$=2\left[\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a}\right)-\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=2\left[o+\frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=2\left(\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{8}\right)=2\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{2}$$

$=\frac{a^2}{4}(\pi-2)$ वर्ग इकाई।

उदाहरण-8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ व रेखा $y=c$ के मध्य छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि $c<b$.

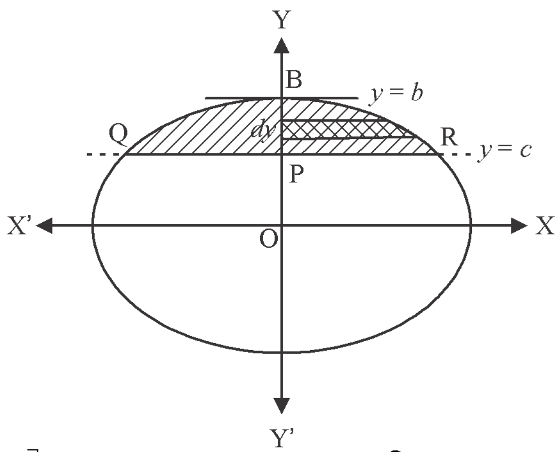
हलः आकृतिानुसार दीर्घवृत्त व रेखा के मध्य छोटे भाग का क्षेत्रफल छायांकित किया गया है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र $BQPRB$

$= 2 \times$ क्षेत्र $BQPRB$

$$=2\int_c^b x\,dy$$

$$=2\int_c^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$



आकृति 11.12

$$=2\frac{a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_c^b$$

$=\frac{2a}{b}\left[0+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}(1)-\frac{c}{2}\sqrt{a^2-c^2}-\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)\right]$ वर्ग इकाई।

उदाहरण-9. रेखा $2x+y=4$, x-अक्ष एवं कोटियों $x=0$ एवं $x=3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: जैसा कि आकृति में प्रकट है रेखा $2x+y=4$, x-अक्ष को $x=2$ पर मिलती है और y-अक्ष को $y=4$ पर मिलती है। जब x का मान 0 से 2 के मध्य है तो आलेख x-अक्ष के ऊपर व जब x, 2 व 3 के मध्य है तो आलेख x-अक्ष के नीचे है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र OABO + क्षेत्र ALMA

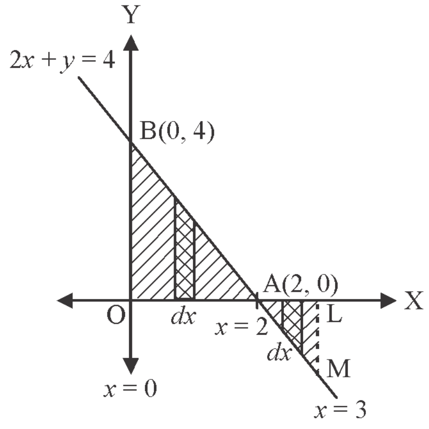
$$=\int_0^2 y\,dx+\left|\int_2^3 y\,dx\right|$$

$$=\int_0^2 (4-2x)\,dx+\left|\int_2^3 (4-2x)\,dx\right|$$

$$=\left[4x-x^2\right]_0^2+\left|\left[4x-x^2\right]_2^3\right|$$

$$=\left[(8-4)-(0-0)\right]+\left|(12-9)-(8-4)\right|$$

$$=4+|3-4|=4+1=5 \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.13

प्रश्नमाला 11.1

1. परवलय $y^2=4ax$ तथा उसके नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. वृत्त $x^2+y^2=4$ का आकृति बनाकर इसमें y-अक्ष व $x=1$ के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्र $y=\sin x$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि $0\le x\le 2\pi$.
4. वक्र $y=2\sqrt{x}$ तथा $x=0, x=1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. $y=|x|, x=-3, x=1$ व x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. वक्र $x^2=4ay$, x-अक्ष तथा रेखा $x=2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से परिबद्ध व x –अक्ष से ऊपर की ओर स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. निर्देशी अक्षों व रेखा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. रेखाओं $x+2y=8, x=2, x=4$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. वक्र $y=x^2$, कोटियों $x=1, x=2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. प्रथम चतुर्थांश में स्थित एवं $y=4x^2, x=0, y=1$ तथा $y=4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11.05 दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल (Area between two curves)

प्रमेय: दो वक्रों $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ तथा दो कोटियों $x=a$ व $x=b$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$

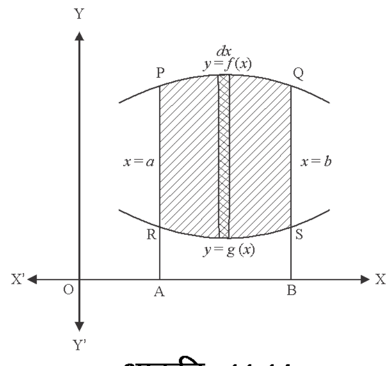
प्रमाण: संलग्न आकृति 11.14 में छायांकित भाग दो वक्रों $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ तथा दो रेखाओं $x=a$ और $x=b$ के मध्यवर्ती क्षेत्र के क्षेत्रफल को दर्शाता है।

इस, मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल= क्षेत्रफल $PQBAP$ – क्षेत्रफल $RSBAR$

$$=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

$$=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

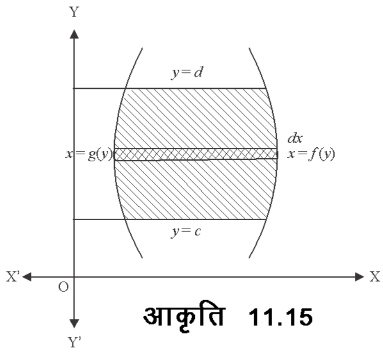
या $$\int_{a\,(\text{वक्र } y=f(x) \text{ से})}^{b} y\,dx-\int_{a\,(\text{वक्र } y=g(x) \text{ से})}^{b} y\,dx$$



आकृति 11.14

टिप्पणी: दो वक्रों $x=f(y)$ तथा $x=g(y)$ व रेखाओं $y=c$ व $y=d$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$=\int_a^b [f(y)-g(y)]dy$$

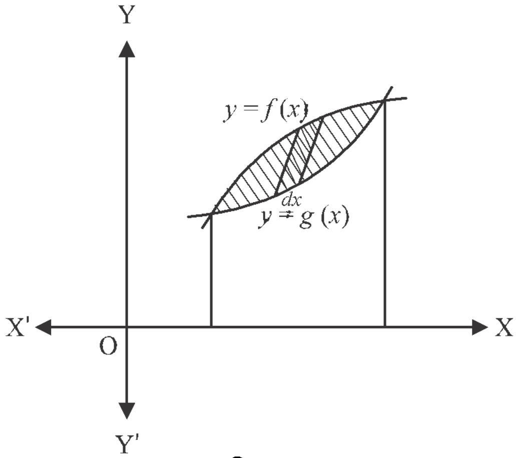


आकृति 11.15

विशेष स्थितियाँ:

स्थिति-I: जब दोनों वक्र दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हो तथा उनका उभयनिष्ठ क्षेत्रफल इन बिन्दुओं के मध्य स्थित हो तो उभयनिष्ठ क्षेत्रफल

$$=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

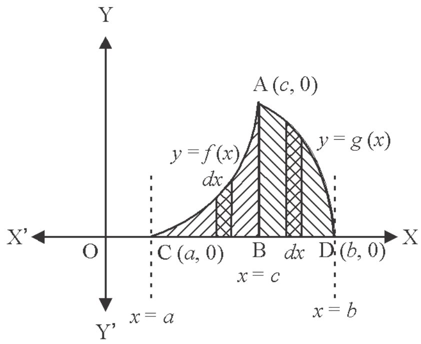


आकृति 11.16

स्थिति-II: जब दोनों वक्र एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हो तथा उनके मध्य का क्षेत्रफल x–अक्ष से परिबद्ध हो तो

अभीष्ट क्षेत्रफल $=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$

(जहाँ दोनों वक्र एक दूसरे को बिन्दु $A(C, O)$ पर प्रतिच्छेद करते है।)



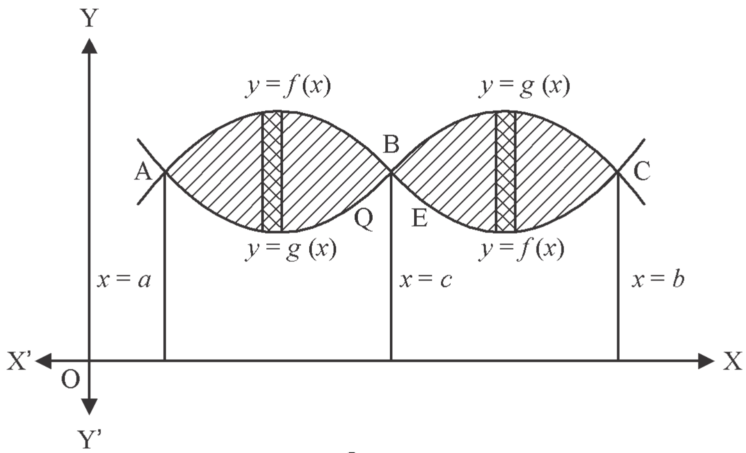
आकृति 11.17

स्थिति-III: अगर दोनों वक्र एक दूसरे को दो से अधिक बिन्दुओं पर काटे

आकृतिानुसार अन्तराल $[a, b]$ में दो वक्र $y=f(x)$ व $y=g(x)$ एक दूसरे को तीन बिन्दुओं A, B, C पर काटते हैं स्पष्टतः $[a, c]$ में $f(x)\geq g(x)$ तथा $[c, d]$ में $g(x)\geq f(x)$

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $APBQA$ + क्षेत्रफल $BECDB$

$$=\int_a^c [f(x)-g(x)]dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]dx$$



आकृति 11.18

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-10. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा रेखा $y = x$ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: परवलय व रेखा की समीकरणों को सरल करने पर–

$$y^2 = 4ax \text{ या } x(x-4a) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a \quad \therefore y = 0, 4a$$

अतः रेखा परवलय को O (0, 0) व $A(4a, 4a)$ पर काटती हैं। अतः परवलय व रेखा के मध्यवर्ती अभीष्ट क्षेत्रफल

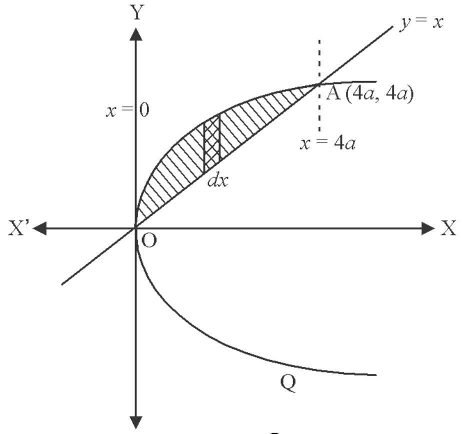
$$= \int_{0(y \text{ परवलय द्वारा})}^{4a} y\,dx - \int_{0(y \text{ रेखा द्वारा})}^{4a} y\,dx$$

$$= \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{4a} x\,dx = 2\sqrt{a}\int_0^{4a} \sqrt{x}\,dx - \int_0^{4a} x\,dx$$

$$= 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{4a} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left[(4a)^{3/2} - 0\right] - \left[\frac{(4a)^2}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{32a^2}{3} - 8a^2 = \frac{8a^2}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.19

उदाहरण-11. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा वक्र $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वक्र $y = |x|$ द्वारा प्रकट रेखाएँ $y = x$ व $y = -x$ वृत्त को क्रमशः A व B बिन्दुओं पर काटती हैं जिनके निर्देशाक क्रमशः $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ तथा $(-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ हैं।

अभीष्ट मध्यवर्ती क्षेत्रफल को आकृति 11.20 में छायांकित किया गया है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $AOBCA$

$= 2 \times$ क्षेत्रफल $AOCA$

$$= 2\int_0^{a/2} (\sqrt{a^2 - x^2} - x)\,dx$$

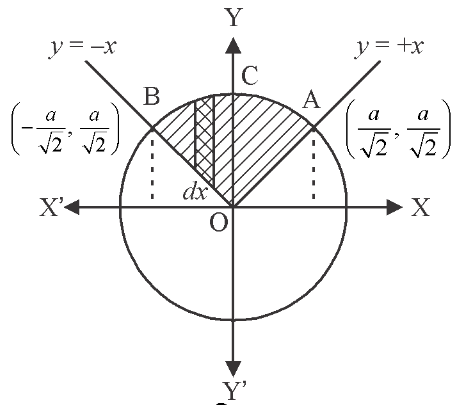
(यहाँ $f(x)$ वृत्त से व $g(x)$, $y = x$ रेखा से लिया गया है।)

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{a/\sqrt{}}$$

$$= 2\left[\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2\times 2}\right] - 2[0 + 0 - 0]$$

$$= 2\left[\frac{a}{2\sqrt{2}} \times \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{a^2}{4}\right] = 2\left[\frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.20

उदाहरण-12. परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए परवलयों के समीकरण हैं

$$y^2 = 4ax \text{ तथा } x^2 = 4by$$

दोनों समीकरणों को हल करने पर

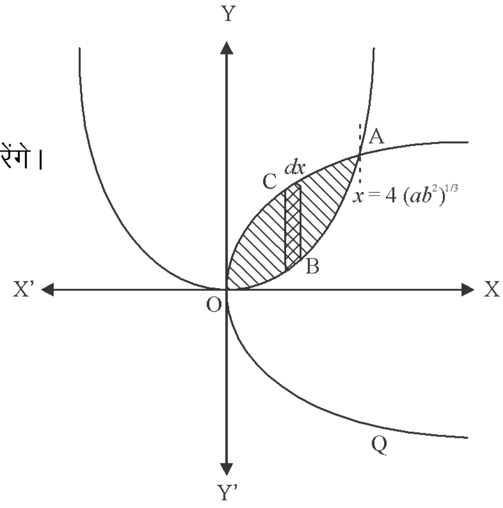
$$\left(x^2/4b\right)^2 = 4ax \text{ या } x^4 = 64ab^2x$$

या $$x(x^3 - 64ab^2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ 4(ab^2)^{1/3}$$

अतः दोनों वक्र x-अक्ष को $x = 0$ व $x = 4(ab^2)^{1/3}$ पर प्रतिच्छेद करेंगे।

अतः वक्रों का अनुरेखण करने पर आकृति 11.21 प्राप्त होता है।

अतः वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $OCABO$



आकृति 11.21

$$= \int_{0(\text{परवलय } y^2=4ax \text{ से})}^{4(ab^2)^{1/3}} y\,dx - \int_{0(\text{परवलय } x^2=4by \text{ से})}^{4(ab^2)^{1/3}} y\,dx$$

$$= \int_0^{4(ab^2)^{1/3}} \sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{4(ab^2)^{1/3}} \frac{x^2}{4b}\,dx$$

$$= 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^{4(ab^2)^{1/3}} - \frac{1}{4b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4(ab^2)^{1/3}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left[\left[4(ab^2)^{1/3}\right]^{3/2} - 0\right] - \frac{1}{12b}\left[\left\{4(ab^2)^{1/3}\right\}^3 - 0\right]$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left[8(ab^2)^{1/2}\right] - \frac{1}{12b}[64\,ab^2]$$

$$= \frac{32\sqrt{a}}{3}\sqrt{a}\,b - \frac{1}{12b} \times 64\,ab^2$$

$$= \frac{32}{3}ab - \frac{16ab}{3} = \frac{16ab}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-13. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के मध्यवर्ती लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: आकृतिानुसार (11.22) दीर्घवृत्त व रेखा के मध्यवर्ती लघु क्षेत्रफल को छायांकित भाग द्वारा दर्शाया गया है। स्पष्टतः रेखा दीर्घवृत को बिन्दुओं $A(a, 0)$ व $B(o, b)$ पर काटती है। अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $ACBDA$

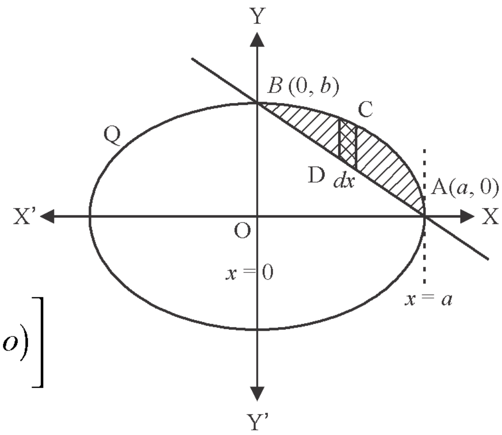
$$= \int_{0\,(y \text{ दीर्घवृत्त से})}^{a} y\,dx - \int_{0(y \text{ सरल रेखा से})}^{a} y\,dx$$

$$= \int_o^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx - \int_o^a \frac{b}{a}(a - x)\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_o^a - \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)_o^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\left(o + \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) - (o + o)\right] - \frac{b}{a}\left[\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) - (o - o)\right]$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{4}(\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई।}$$



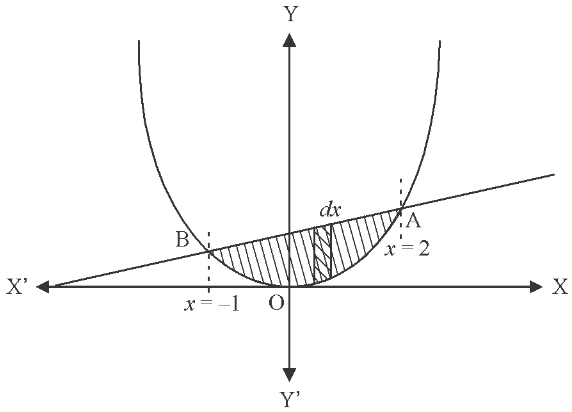
आकृति 11.22

उदाहरण-14. परवलय $x^2 = 4y$ व रेखा $x = 4y - 2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: परवलय व सरल रेखा की समीकरणों को हल करने पर–

$$x = x^2 - 2 \text{ या } x - x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$$

स्पष्टत: रेखा, परवलय को बिन्दुओं $x = 2$ तथा $x = -1$ पर काटती हैं।



आकृति 11.23

अत: अभीष्ट क्षेत्रफल $ABOA = \int_{-1(y, \text{ रेखा से})}^{2} y\,dx - \int_{-1(y, \text{ परवलय से})}^{2} y\,dx$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{x+2}{4} dx - \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{2}+4\right) - \left(\frac{1}{2}-2\right)\right] - \left[\frac{8}{12} - \left(\frac{-1}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[6 + \frac{3}{2}\right] - \frac{9}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{15}{2} - \frac{9}{12} = \frac{15}{8} - \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-15. वक्र $x^2 + y^2 = 2$ व $x = y^2$ के मध्य छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ व परवलय $x = y^2$ के मध्यवर्ती छोटे भाग का क्षेत्रफल छायांकित भाग द्वारा प्रकट है प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने हेतु समीकरणों को सरल करने पर

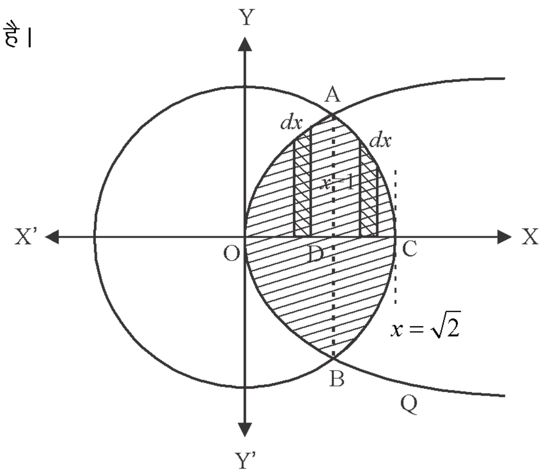
$$x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, 1 \text{ जब } x = 1 \text{ तो } y = \pm 1$$

अत: दोनों वक्र बिन्दु $A(1, 1)$ व बिन्दु $B(1, -1)$ पर एक दूसरे को काटते है।

फलत: अभीष्ट क्षेत्रफल= क्षेत्रफल $AOBCO = 2 \times$ क्षेत्रफल $AODCA$



आकृति 11.24

$$= 2[\text{क्षेत्र } AODA + \text{क्षेत्र } ADCA]$$

$$= 2\left[\int_{0(y \text{ परवलय से})}^{1} y\,dx + \int_{1(y \text{ वृत्त से})}^{\sqrt{2}} y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}\left\{x^{3/2}\right\}_0^1 + \left\{\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \frac{2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right\}_1^{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{3} \times (1-0) + (0 + \sin^{-1} 1) - \left(\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = 2\left[\frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}\right] \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-16. समाकलन का उपयोग करते हुए उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–1, 1), (0, 5) व (3, 2) हैं।

हल: माना $A(-1, 1)$, $B(0, 5)$ व $C(3, 2)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं।

रेखा AB का समीकरण

$$y-1=\frac{5-1}{0+1}(x+1)$$

या $$y-1=4x+4$$

या $$4x-y+5=0 \qquad (1)$$

रेखा BC का समीकरण

$$y-5=\frac{2-5}{3-0}(x-0)$$

या $$3y-15=-3x$$

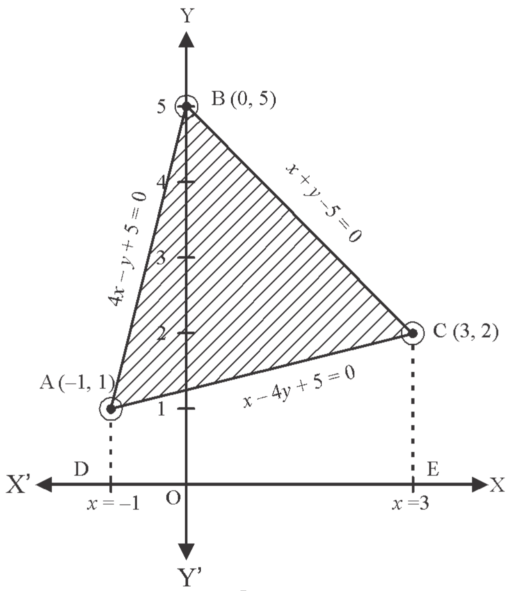
या $$x+y-5=0 \qquad (2)$$

रेखा CA का समीकरण

$$y-1=\frac{2-1}{3+1}(x+1)$$

या $$4y-4=x+1$$

या $$x-4y+5=0 \qquad (3)$$



आकृति 11.25

अतः ΔABC का क्षेत्रफल = समलम्ब $ABOD$ का क्षेत्र + समलम्ब $BOEC$ का क्षेत्र – समलम्ब $ACED$ का क्षेत्र

$$=\int_{-1(\text{रेखा } AB \text{ से})}^{0} y\,dx+\int_{0(\text{रेखा } BC \text{ से})}^{3} y\,dx-\int_{-1(\text{रेखा } CA \text{ से})}^{3} y\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(4x+5)\,dx+\int_{0}^{3}(5-x)\,dx-\int_{-1}^{3}\frac{x+5}{4}\,dx$$

$$=\left[2x^2+5x\right]_{-1}^{0}+\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\left[(0+0)-(2-5)\right]+\left[(15-9/2)-(0-0)\right]-\frac{1}{4}\left[(9/2+15)-(1/2-5)\right]$$

$$=[3]+[21/2]-\frac{1}{4}(39/2+9/2)$$

$$=3+\frac{21}{2}-6=\frac{21}{2}-3=\frac{15}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्नमाला 11.3

1. परवलय $y^2=2x$ तथा वृत्त $x^2+y^2=8$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. परवलय $4y=3x^2$ तथा रेखा $3x-2y+12=0$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्र $y=\sqrt{4-x^2}$, $x=\sqrt{3}y$ तथा x-अक्ष के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. वृत्त $x^2+y^2=16$ व रेखा $y=x$ तथा x-अक्ष के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. परवलयों $y^2=4x$ व $x^2=4y$ के मध्यवर्ती उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. वक्र $x^2+y^2=1$ व $x+y=1$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. वक्र $y^2=4ax$ रेखा $y=2a$ एवं y–अक्ष के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. वृत्त $x^2+y^2=16$ के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $y^2=6x$ के बाहर हो।

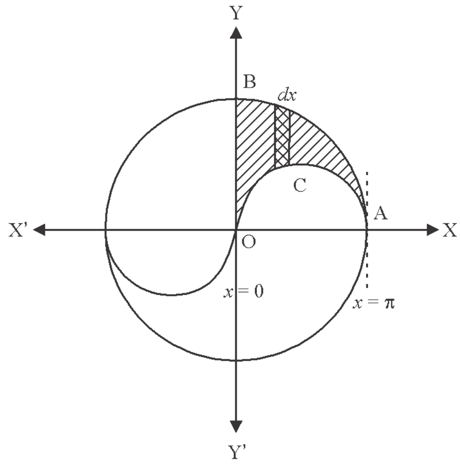
9. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसके शीर्षो के निर्देशांक $A(2, 0), B(4, 5), C(6, 3)$ हैं।

10. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण $3x-2y+3=0, x+2y-7=0$ एवं $x-2y+1=0$ है।

विविध उदाहरण

उदाहरण-17. वक्र $x^2+y^2=\pi^2$ तथा $y=\sin x$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: आकृतिानुसार वृत्त $x^2+y^2=\pi^2$ तथा वक्र $y=\sin x$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश के क्षेत्रफल को छायांकित भाग द्वारा प्रकट किया गया है।



आकृति 11.26

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $OCABO$

$$=\int_{0\,(y\text{ वृत्त से})}^{\pi} y\,dx-\int_{0\,(y,\text{ वक्र } y=\sin x\text{ से})}^{\pi} y\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{\pi^2-x^2}+\frac{\pi^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\pi}\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[\left\{0+\frac{\pi^2}{2}\sin^{-1}(1)\right\}-\{0+0\}\right]+\left[\cos\pi-\cos 0\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\times\frac{\pi}{2}+(-1)-1=\frac{\pi^3}{4}-2=\frac{\pi^3-8}{4}\text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण-18. वृत्तों $x^2+y^2=1$ व $(x-1)^2+y^2=1$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए वृत्त हैं:

$$x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

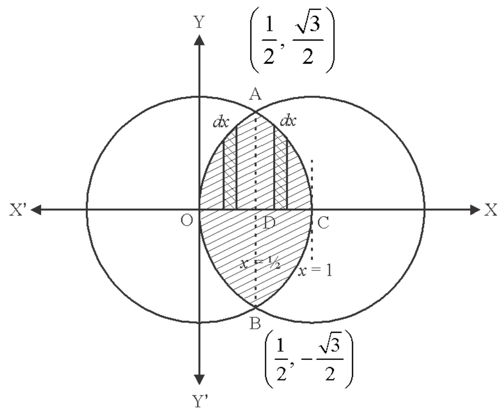
$$(x-1)^2+y^2=1 \qquad (2)$$

वृत्त (1) व (2) के केन्द्र क्रमश: (0, 0) व (1, 0) हैं तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ 1 हैं। वृत्त (1) व (2) की समीकरणों को सरल करने पर

$$x^2-(x-1)^2=0$$

या $\quad x^2-x^2+2x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=1/2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{3}/2$



आकृति 11.27

$\therefore$ A के निर्देशांक $=(1/2, \sqrt{3}/2)$ तथा B के निर्देशांक $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

जहाँ A व B दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $OACBO$

$=2\times$ क्षेत्रफल $OACDO$

$= 2$ [क्षेत्र $OADO +$ क्षेत्र $ADCA$]

$$= 2\left[\int_{0\,(y,\text{ वृत्त }(2)\text{ से})}^{1/2} y\,dx + \int_{1/2\,(y,\text{ वृत्त }(1)\text{ से})}^{1} y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^{1/2} \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)\right]_0^{1/2} + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= 2\left[\left\{-\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right\} - \left\{\frac{-1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right\}\right]$$

$$+2\left[\left\{0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}(1)\right\} - \left\{\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + 2\left[\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ वर्ग इकाई।}$$

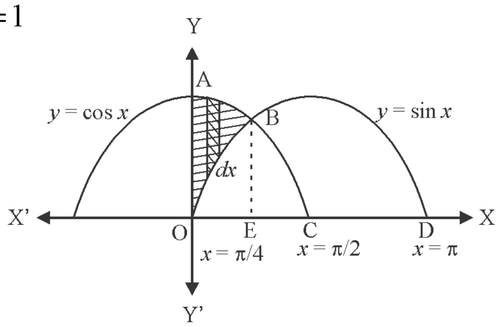
उदाहरण-19. वक्रों $y = \sin x$, $y = \cos x$, y-अक्ष व $0 \le x \le \pi/2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: $y = \sin x$ व $y = \cos x$ को हल करने पर $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow \qquad x = \pi/4$

अतः दोनों $x = \pi/4$ पर कटते हैं।

अतः B पर $x = \pi/4$ है। फलतः



आकृति 11.28

अभीष्ट क्षेत्रफल $= AOBA$ का क्षेत्रफल

$=$ क्षेत्रफल $ABEO -$ क्षेत्रफल $OBEO$

$$= \int_{0\,(y=\cos x\text{ से})}^{\pi/4} y \cdot dx - \int_{0\,(y=\sin x\text{ से})}^{\pi/4} y \cdot dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/4} - [\cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} - 0 + \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = (\sqrt{2} - 1) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-20. $\{(x, y) | x^2 \le y \le x\}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, दिए गए समीकरण

$$y = x^2 \quad (1)$$

या $$y = x \quad (2)$$

में वक्र (1) उपरी मुखी परवलय हैं तथा रेखा $y = x$ मूलबिन्दु से जाती है। परवलय व रेखा के मध्य अभीष्ट क्षेत्रफल को छायांकित किया गया है। समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1$$

$\therefore$ $$y = 0, 1$$

अतः परवलय व रेखा एक दूसरे को (0, 0) व (1, 1) पर काटते है।

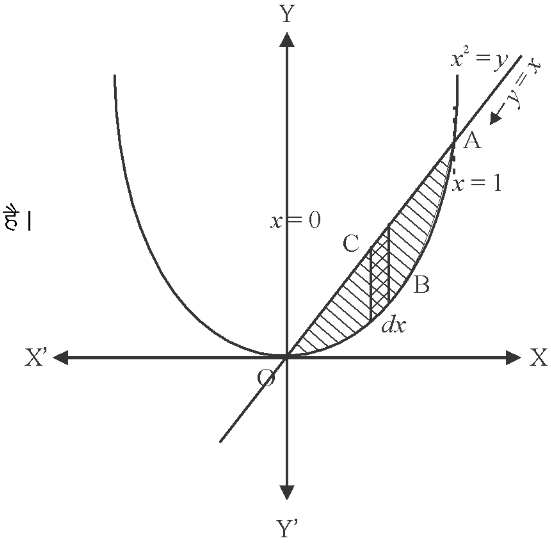
$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल $OCABO$

$$= \int_{0(y \text{ रेखा से})}^{1} y\,dx - \int_{0(y \text{ परवलय से})}^{1} y\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[x^2/2\right]_0^1 - \left[x^3/3\right]_0^1$$

$$= (1/2-0) - (1/3-0) = 1/6$$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.28

उदाहरण-21. वक्र $y = x^2 + 2$ रेखा $y = x, x = 0$ एवं $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वक्र $y = x^2 + 2$ एक ऐसा परवलय है जिसका शीर्ष $(0, 2)$ y–अक्ष पर स्थित है। $y = x$ मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा है। अभीष्ट क्षेत्र वक्र $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ तथा $x = 3$ से घिरा हुआ है जिसे आकृति में छायांकित किया गया है। आकृति में बिन्दु Q जो $x = 3$ व वक्र $y = x^2 + 2$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है, के निर्देशांक (3, 11) है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल $OPQRO$

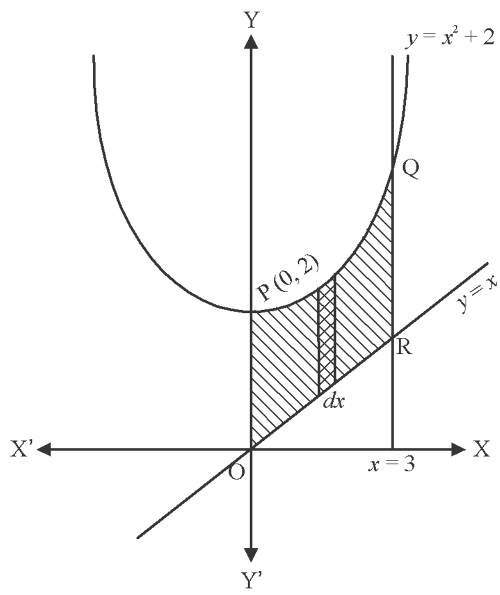
$$= \int_{0(y \text{ परवलय से})}^{3} y\,dx - \int_{0(y \text{ रेखा से})}^{3} y\,dx$$

$$= \int_0^3 (x^2+2)dx - \int_0^3 x\,dx$$

$$= \left[x^3/3 + 2x\right]_0^3 - \left[x^2/2\right]_0^3$$

$$= (27/3+6) - (0+0) - [9/2-0]$$

$$= 9 + 6 - 9/2 = 21/2$$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.29

विविध प्रश्नमाला–11

1. वक्र $y=\sqrt{x}$ तथा $y=x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है

(क) 1 (ख) $1/9$ (ग) $1/6$ (घ) $2/3$

2. वक्र $y^2=x$ तथा $x^2=y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है

(क) $1/3$ (ख) 1 (ग) $1/2$ (घ) 2

3. परवलय $x^2=4y$ तथा इसकी नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है

(क) $5/3$ (ख) $2/3$ (ग) $4/3$ (घ) $8/3$

4. $y=\sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है

(क) 1 (ख) 2 (ग) $1/2$ (घ) 4

5. $y^2=2x$ तथा वृत्त $x^2+y^2=8$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है

(क) $(2\pi+4/3)$ (ख) $(\pi+2/3)$ (ग) $(4\pi+4/3)$ (घ) $(\pi+4/3)$

6. परवलय $y^2=x$ तथा रेखा $x+y=2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y^2=2ax-x^2$ व $y^2=ax$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. परवलय $y=x^2$ तथा $y=|x|$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. वृत्त $x^2+y^2=16$ तथा परवलय $y^2=6x$ के मध्यवर्ती उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. वक्र $x^2+y^2=1$ व $x+y\ge 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. समाकलन का उपयोग कर ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(-1, 0), (1, 3)$ एवं $(3, 2)$ हैं।

12. रेखा $y=3x+2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x=-1$ तथा $x=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. $y^2=2x$, $y=4x-1$ व $y\ge o$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. वक्र $y^2=4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y=3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. दो वृत्तों $x^2+y^2=4$ एवं $(x-2)^2+y^2=4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. वक्र $y=f(x)$, x-अक्ष कोटियों $x=a$ व $x=b$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ या $\int_a^b y\,dx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है अर्थात् क्षेत्रफल $=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$.

2. वक्र $x=\phi(y)$, y-अक्ष और भुजों $y=c$ व $y=d$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_c^d \phi(y)\,dy=\int_c^d x\,dy$.

3. यदि वक्र किसी निर्देशी अक्ष या किसी रेखा के परित सममित हो तो किसी एक सममित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसे सममित भागों की संख्या से गुणा कर अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

4. क्षेत्रकलन सदैव धनात्मक माना जाता है अतः यदि क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के उपर (जो $\oplus$ माना जाता है) तथा भाग x-अक्ष के नीचे है। (जो-माना जाता है) तो दोनों भागों के क्षेत्रफलों की अलग-अलग गणनाकर उनके संख्यात्मक मान का योग करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

5. दो वक्रों $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ तथा दो कोटियों $x=a$ व $x=b$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ जहाँ $f(x)\geq g(x)$

6. दो वक्रों $x=\phi(y)$ व $x=\psi(y)$ तथा भुजों $y=c$ व $y=d$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_c^d [\phi(y)-\psi(y)]dy$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1. $8/3\,a^2$ वर्ग इकाई 2. $(\sqrt{3}+2\pi/3)$ वर्ग इकाई 3. 4 वर्ग इकाई
4. $4/3$ वर्ग इकाई 5. $5/2$ वर्ग इकाई 6. $2/a$ वर्ग इकाई 7. 3π वर्ग इकाई
8. πab वर्ग इकाई 9. $2ab$ वर्ग इकाई 10. 5 वर्ग इकाई 11. $7/3$वर्ग इकाई
12. $7/3$ वर्ग इकाई

प्रश्नमाला 11.2

1. $(2\pi+4/3)$ वर्ग इकाई 2. 27 वर्ग इकाई 3. $(\pi/3-\sqrt{3}/6)$ वर्ग इकाई
4. 2π वर्ग इकाई 5. $16/3$ वर्ग इकाई 6. $\pi-2/4$ वर्ग इकाई 7. $2\,a^2/3$ वर्ग इकाई
8. $9/2$ वर्ग इकाई 9. 7 वर्ग इकाई 10. 4 वर्ग इकाई

विविध प्रश्नमाला—11

1. (ग) 2. (क) 3. (घ) 4. (ख) 5. (क)
6. $9/2$ वर्ग इकाई 7. $a^2(\pi/4-2/3)$ वर्ग इकाई 8. $1/3$ वर्ग इकाई
9. $4/3(\sqrt{3}+4\pi)$ वर्ग इकाई 10. $\pi-2/4$ वर्ग इकाई 11. 4 वर्ग इकाई
12. $13/3$ वर्ग इकाई 13. $1/3$ वर्ग इकाई 14. $9/4$ वर्ग इकाई
15. $(8\pi/3-2\sqrt{3})$ वर्ग इकाई