অধ্যায় ২

সম্বন্ধ আৰু ফলন
(RELATIONS AND FUNCTIONS)

❖ ***Mathematics is the indispensable instrument of all physical research – BERTHELOT*** ❖

2.1 অৱতাৰণা (Introduction)

G. W. Leibnitz (1646–1716)

গণিতৰ বহু কথাতে একোটাইঁত পেটাৰ্ণ—এটা লক্ষণীয় সম্পৰ্ক উলিওৱাৰ চেষ্টা কৰা হয়। দৈনন্দিন জীৱনত আমি এনেধৰণৰ কিছুমান সম্পৰ্ক যেনে— ভাই-ভনী, পিতা-পুত্ৰ, শিক্ষক-ছাত্ৰ আদি, দেখিবলৈ পাওঁ। গণিততো আমি এনেধৰণৰ বহু সম্পৰ্ক দেখিবলৈ পাওঁ, যথা ঃ m সংখ্যাটো n সংখ্যাটোতকৈ সৰু, l ৰেখাডাল m ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল, সংহতি A সংহতি B ৰ উপসংহতি। এই সকলোবোৰতে আমি দেখিছোঁ যে সম্পৰ্ক হ'বলৈ এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমত এযোৰ বস্তুৰ প্ৰয়োজন। এই অধ্যায়ত আমি দুটা সংহতিৰ পৰা এযোৰ 'বস্তু' লৈ সিহঁতৰ মাজত কেনেদৰে সম্পৰ্ক স্থাপন কৰিব লাগে, সেই বিষয়ে শিকিম। পিছত ফলন নামেৰে এক বিশেষ ধৰণৰ সম্পৰ্কৰ বিষয়ে শিকিম। ফলনৰ ধাৰণা গণিতত অতি প্ৰয়োজন। ফলনে এটা ৰাশিৰ লগত আন এটা ৰাশিৰ এক গাণিতিকভাৱে সূক্ষ্ম সম্পৰ্ক স্থাপন কৰে।

2.2 সংহতিৰ কাৰ্টেজীয় পূৰণফল (Cartesian Products of Sets)

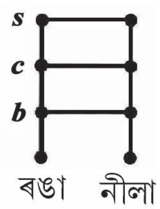
ধৰা হ'ল A দুটা ৰঙৰ সংহতি আৰু B তিনিটা বস্তুৰ সংহতি।

উদাহৰণস্বৰূপে A= {ৰঙা, নীলা} আৰু B= $\{b, c, s\}$ য'ত b, c, s য়ে ক্ৰমে এখন নিৰ্দিষ্ট মোনা (bag), এটা কোট (coat) আৰু এটা কামিজ (shirt) বুজাইছে।

এই দুটা সংহতিৰপৰা কিমানযোৰ ৰঙীণ বস্তু পোৱা যাব?

আমি যদি এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমেৰে আগ বাঢ়োঁ, তেনেহ'লে তলত দেখুওৱাৰ দৰে ছয়টা পৃথক যোৰ পাম ঃ (ৰঙা, b) (ৰঙা, c), (ৰঙা, s) , (নীলা, b), (নীলা c), (নীলা s)

এইদৰে, আমি ছটা পৃথক বস্তু পাওঁ। (চিত্ৰ 2.1)



চিত্ৰ 2.1

আগৰ পাঠত আমি পাই আহিছোঁ যে দুটা সংহতি P আৰু Q ৰ পৰা লোৱা উপাদানৰ ক্ৰমিতযোৰ (ordered pair) হ'ল এযোৰ উপাদান, যাক চন্দ্ৰ বন্ধনীৰ ভিতৰত লিখা হয় আৰু এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমত লগ লগোৱা হয়, অৰ্থাৎ (p, q), $p \in P$, $q \in Q$. ইয়াৰপৰা তলৰ সংজ্ঞাটো পোৱা যাব।

সংজ্ঞা 1 দুটা অৰিক্ত সংহতি P আৰু Q দিয়া আছে। P আৰু Q ৰ উপাদানেৰে গঠিত সকলো ক্ৰমিতযোৰৰ সংহতি $P \times Q$ ক সংহতি দুটাৰ কাৰ্টেজীয় পূৰণফল বুলি কোৱা হয়। অৰ্থাৎ

$$P \times Q = \{(p, q) : p \in P, \ q \in Q\}$$

যদি P বা Q ৰিক্ত সংহতি হয়, তেনেহ'লে $P \times Q$ ও ৰিক্ত সংহতি হ'ব, অৰ্থাৎ $P \times Q = \phi$

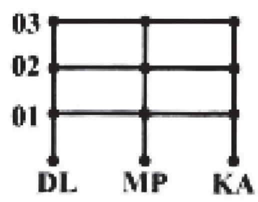
ওপৰৰ উদাহৰণটোৰপৰা আমি পালোঁ

A × B = {(ৰঙা, b), (ৰঙা, c), (ৰঙা , s), (নীলা, b), (নীলা, c) (নীলা, s)}

আকৌ, তলৰ সংহতি দুটা লোৱা হ'ল

A= {DL, MP, KA}য'ত DL, MP, KA-এ ক্ৰমে দিল্লী, মধ্য প্ৰদেশ আৰু কৰ্ণাটক বুজাইছে আৰু B= {01,02, 03}, য'ত 01,02,03 হ'ল DL, MP আৰু KA এ যান-বাহনৰ বাবে দিয়া অনুজ্ঞা-ফলকৰ ক'ড।

যদি দিল্লী, মধ্যপ্ৰদেশ আৰু কৰ্ণাটক -এই ৰাজ্যকেইখনে যান-বাহনৰ অনুজ্ঞা-ফলকৰ বাবে ক'ড প্ৰস্তুত কৰে আৰু ক'ডটো সংহতি A ৰ উপাদানেৰে আৰম্ভ হয়, তেনেহ'লে এই সংহতিবোৰৰ পৰা পোৱা যোৰবোৰ কি আৰু এনে কিমানটা যোৰ পোৱা যাব? (চিত্ৰ 2.2)



চিত্ৰ 2.2

প্ৰাপ্ত যোৰকেইটা হ'ল ঃ

(DL, 01), (DL, 02), (DL, 03), (MP, 01), (MP, 02), (MP, 03), (KA, 01), (KA, 02), (KA, 03).

আৰু সংহতি A আৰু সংহতি B ৰ কাৰ্টেজীয় পূৰণফল হ'ল

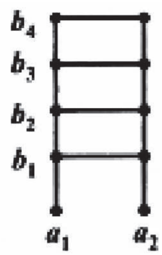
A×B = {(DL, 01), (DL, 02), (DL, 03), (MP, 01), (MP, 02,), (MP, 03) (KA, 01), (KA, 02), (KA, 03)}

স্পষ্টত ঃ কাৰ্টেজীয় পূৰণফলত 9 টা যোৰ থাকিব, কিয়নো A আৰু B সংহতি দুটাৰ প্ৰতিটোতে 3 টাকৈ উপাদান আছে। ইয়াৰ পৰা পোৱা গ'ল যে সম্ভাব্য ক'ড নটা। আকৌ যোৰবোৰৰ ক্ৰমটো মন কৰিব লগীয়া। উদাহৰণস্বৰূপে (DL, 01) ক'ডটো (01, DL) ক'ডৰ সৈতে একে নহয়।

শেষত আন এটা উদাহৰণ দিয়া হ'ল। A= $\{a_1, a_2\}$আৰু B= $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ সংহতি দুটা লোৱা হ'ল, (চিত্ৰ 2.3)। এতিয়া

$A \times B = \{(a_1, b_1) (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$

যদি A আৰু B বাস্তৱ সংখ্যাৰ উপসংহতি হয়, তেনেহ'লে এই 8 টা ক্ৰমিত যোৰে সমতলখনত 8 টা বিন্দু বুজাব। এইটো স্পষ্ট যে (a_1, b_2) অৱস্থানত থকা বিন্দুটো আৰু (b_2, a_1) অৱস্থানত থকা বিন্দুটোৰপৰা পৃথক হ'ব।



চিত্ৰ 2.3

মন্তব্য

(i) দুটা ক্ৰমিত যোৰ সমান বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে অনুৰূপ প্ৰথম উপাদানবোৰ সমান আৰু অনুৰূপ দ্বিতীয় উপাদানবোৰো সমান।

(ii) যদি A ত p টা উপাদান থাকে আৰু B ত q টা উপাদান থাকে, তেনেহ'লে $A \times B$ ত pq টা উপাদান থাকিব অৰ্থাৎ যদি $n(A)=p$ আৰু $n(B)=q$, তেনেহ'লে $n(A \times B)=pq$

(iii) যদি A আৰু B অৰিক্ত সংহতি হয় আৰু A বা B অসীম সংহতি হয়, তেনেহ'লে $A \times B$ ও অসীম সংহতি হ'ব।

(iv) $A \times A \times A = \{(a,b,c) : a, b, c \in A\}$

ইয়াত (a, b, c) ক ক্ৰমিত ত্ৰয়ী (ordered triplet) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1 যদি $(x+1, y-2) = (3, 1)$, x আৰু y ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু ক্ৰমিতযোৰ দুটা সমান, গতিকে অনুৰূপ উপাদানবোৰ সমান।

গতিকে $x+1=3$ আৰু $y-2=1$

সমাধান কৰি, আমি পালোঁ $x=2$ আৰু $y=3$.

উদাহৰণ 2 যদি P= $\{a,b,c\}$ আৰু Q= $\{r\}$, $P \times Q$ আৰু $Q \times P$ সংহতি দুটা গঠন কৰাঁ। এই দুয়োটা পূৰণফল সমাননে?

সমাধান কাৰ্টেজীয় পূৰণফলৰ সংজ্ঞা অনুযায়ী

$P \times Q = \{(a,r), (b,r), (c,r)\}$ আৰু $Q \times P = \{(r,a), (r,b), (r,c)\}$

যিহেতু ক্ৰমিতযোৰৰ সংজ্ঞা মতে, (a, r) যোৰটো (r, a) যোৰৰ সমান নহয়, গতিকে $P \times Q \neq Q \times P$. অৱশ্যে, প্ৰতিটো সংহতিতে উপাদানৰ সংখ্যা সমান।

উদাহৰণ 3 ধৰা হ'ল $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4\}$,আৰু $C=\{4, 5, 6\}$

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$ উলিওৱা।

সমাধান (i) দুটা সংহতিৰ ছেদনৰ সংজ্ঞাৰপৰা, $B \cap C=\{4\}$,

গতিকে $A \times (B \cap C)=\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(ii) $A \times B=\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$

আৰু $A \times C=\{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

গতিকে $(A \times B) \cap (A \times C)=\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) যিহেতু, $B \cup C =\{3, 4, 5, 6\}$, গতিকে

$A \times (B \cup C)=\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

(iv) ওপৰৰ (ii) ত $A \times B$ আৰু $A \times C$ উলিওৱা হৈছে।

গতিকে, আমি পালোঁ $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

উদাহৰণ 4 যদি $P=\{1, 2\}$, $P \times P \times P$ সংহতিটো গঠন কৰাঁ।

সমাধান আমি পালোঁ $P \times P \times P=\{(1, 1,1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$

উদাহৰণ 5 **R** বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ আৰু $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ কাৰ্টেজীয় পূৰণফলে কি বুজায়?

সমাধান কাৰ্টেজীয় পূৰণফল $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}=\{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$ সংহতি বুজায়। ইয়ে দ্বিমাত্ৰিক অন্তৰীক্ষত

সকলো বিন্দুৰ স্থানাংক বুজায়। কাৰ্টেজীয় পূৰণফল $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}=(x,y,z): x,y,z \in \mathbf{R}\}$ সংহতি বুজায়। ইয়ে ত্ৰিমাত্ৰিক অন্তৰীক্ষত সকলো বিন্দুৰ স্থানাংক বুজায়।

উদাহৰণ 6 যদি $A \times B=\{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, A আৰু B উলিওৱাঁ।

সমাধান A= প্ৰথম উপাদানবোৰৰ সংহতি $=\{p, m\}$

B= দ্বিতীয় উপাদানবোৰৰ সংহতি $= \{q, r\}$

অনুশীলনী 2.1

1. যদি $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$, x আৰু y ৰ মান উলিওৱাঁ।
2. যদি A সংহতিটোত তিনিটা উপাদান থাকে আৰু B={3, 4, 5}, $(A \times B)$ ৰ উপাদানৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।
3. যদি G={7, 8,}আৰু H={5, 4, 2}, $G \times H$ আৰু $H \times G$ উলিওৱাঁ।
4. তলৰ প্ৰতিটো উক্তি সঁচা নে মিছা কোৱাঁ। যদি উক্তিটো মিছা, উক্তিটো পুনৰায় শুদ্ধকৈ লিখা।
   (i) যদি $P=\{m, n\}$ আৰু $Q=\{n, m\}$, তেনেহ'লে $P \times Q=\{(m, n), (n, m)\}$.
   (ii) যদি A আৰু B অৰিক্ত সংহতি হয়, তেনেহ'লে $A \times B$ ক্ৰমিতযোৰ (x, y) বোৰৰ সংহতি য'ত $x \in A$ আৰু $y \in B$.
   (iii) যদি A={1, 2}, B={3, 4}, তেনেহ'লে $A \times \{B \cap \phi) = \phi$.
5. যদি A={– 1,1}, $A \times A \times A$ উলিওৱাঁ।
6. যদি $A \times B=\{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, A আৰু B উলিওৱা।
7. ধৰা হ'ল A={1, 2}, B={1, 2, 3, 4}, C={5, 6} আৰু D={5, 6, 7, 8}, সত্যাপন কৰা
   (i) $A \times (B \cap C)=(A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times C$, $B \times D$ ৰ এটা উপসংহতি।
8. ধৰা হ'ল A={1,2} আৰু B={3,4}. $A \times B$ লিখাঁ। $A \times B$ ৰ উপসংহতি কিমান? আটাইকেইটা লিখাঁ।
9. A আৰু B দুটা সংহতি আৰু n (A)=3 আৰু n (B)=2. $(x,1)$, $(y, 2)$, $(z,1)$, $A \times B$ ৰ উপাদান। A আৰু B উলিওৱাঁ। (x, y আৰু z পৃথক উপাদান।)
10. কাৰ্টেজীয় পূৰণফল $A \times A$ ৰ উপাদানৰ সংখ্যা নটা। ইয়াৰ ভিতৰৰ (– 1, 0) আৰু (0,1) উপাদান দুটা জনা গ'ল। A সংহতিটো আৰু $A \times A$ৰ বাকীকেইটা উপাদান উলিওৱাঁ।

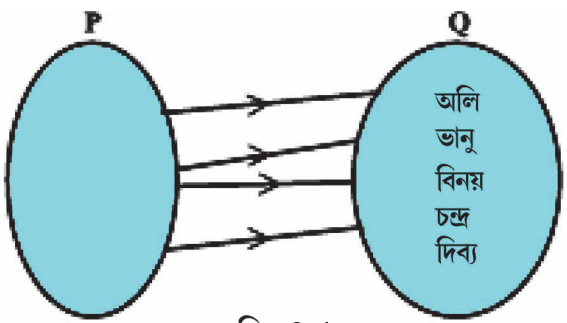
2.3 সম্বন্ধ (Relations)

তলৰ সংহতি দুটা লোৱাঁ।

P={a,b,c} আৰু Q={অলি, ভানু, বিনয়, চন্দ্ৰ, দিব্য}

P আৰু Q ৰ কাৰ্টেজীয় পূৰণফলত 15 টা ক্ৰমিত যোৰ আছে আৰু সেইবোৰ হ'ল $P \times Q$={(a,অলি), (a, ভানু), (a, বিনয়),....,(c, দিব্য)}

প্ৰতিটো ক্ৰমিত যোৰ (x, y)ৰ প্ৰথম উপাদান x আৰু দ্বিতীয় উপাদান y ৰ মাজত এটা সম্বন্ধ R স্থাপন কৰি আমি $P \times Q$ ৰ এটা উপসংহতি এনেদৰে পাব পাৰোঁ



চিত্ৰ 2.4

$R = \{(x, y) : x$ হ'ল y নামটোৰ ইংৰাজীত প্ৰথম আখৰ, $x \in P, y \in Q\}$

অৰ্থাৎ R={(a, অলি), (b, ভানু), (b, বিনয়) (c, চন্দ্ৰ)}

চিত্ৰ 2.4ত সম্বন্ধ R আৰু এটা প্ৰদৰ্শন (কাঁড় চিত্ৰ, arrow diagram, বুলি কোৱা হয়) দেখুওৱা হ'ল।

সংজ্ঞা 2 কাৰ্টেজীয় পূৰণফল $A \times B$ ৰ এটা উপসংহতিক অৰিক্ত সংহতি Aৰ পৰা অৰিক্ত সংহতি B লৈ এটা সম্বন্ধ R বুলি কোৱা হয়। $A \times B$ ৰ ক্ৰমিতযোৰৰ প্ৰথম উপাদান আৰু দ্বিতীয় উপাদানবোৰৰ মাজত সম্পৰ্ক স্থাপন কৰি এই উপসংহতিটো উলিওৱা হয়। দ্বিতীয় উপাদানটোক প্ৰথম উপাদানটোৰ প্ৰতিচ্ছায়া (image) বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা 3 সংহতি A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ R ৰ ক্ৰমিতযোৰবোৰৰ প্ৰথম উপাদানবোৰৰ সংহতিটোক সম্বন্ধ R অৰ আদিক্ষেত্ৰ (domain)বোলা হয়।

সংজ্ঞা 4 সংহতি A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ R ৰ ক্ৰমিতযোৰবোৰৰ দ্বিতীয় উপাদানবোৰৰ সংহতিটোক সম্বন্ধ R অৰ **পৰিসৰ** (range) বোলা হয়। সংহতি B ক সম্বন্ধ R অৰ সহক্ষেত্ৰ (codomain)_বোলা হয়। মন কৰিবা পৰিসৰ $\subseteq$ সহক্ষেত্ৰ।

মন্তব্য (i) সম্বন্ধ এটাক বীজগণিতীয়ভাৱে ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতি বা সংহতি গঠন পদ্ধতিৰে দেখুৱাব পাৰি।

(ii) কাঁড় চিত্ৰ (arrow diagram) সম্বন্ধ এটাৰ চাক্ষুষ প্ৰদৰ্শন।

উদাহৰণ 7 ধৰা হ'ল A= {1, 2, 3, 4, 5, 6}। A ৰ পৰা A লৈ এটা সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $R = \{(x, y) : y = x+1\}$

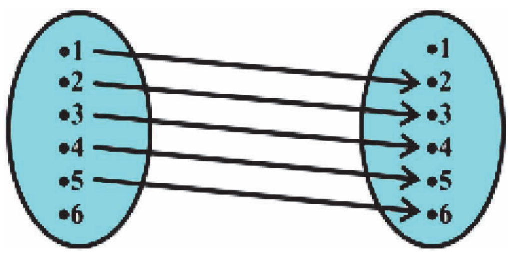
(i) কাঁড়-চিত্ৰৰ সহায়েৰে এই সম্বন্ধটো দেখুওৱাঁ।

(ii) R অৰ আদিক্ষেত্ৰ, সহক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ লিখা।

সমাধান (i) সম্বন্ধৰ সংজ্ঞাৰপৰা আমি পালোঁ

$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

অনুৰূপ কাঁড়-চিত্ৰটো (চিত্ৰ-2.5)অত দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 2.5

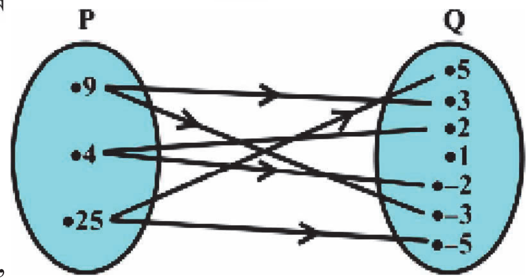
(ii) স্পষ্টতঃ

আদিক্ষেত্ৰ = {1, 2, 3, 4, 5}

সেইদৰে, পৰিসৰ ={2, 3, 4, 5, 6}

আৰু সহক্ষেত্ৰ ={1,2,3,4,5,6}

উদাহৰণ 8 চিত্ৰ 2-6 এ সংহতি P আৰু Q ৰ মাজৰ এটা সম্বন্ধ দেখুৱাইছে। এই সম্বন্ধটো (i) সংহতি-গঠন পদ্ধতিত, (ii) ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতিত লিখাঁ। ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ কি?



চিত্ৰ 2.6

সমাধান স্পষ্টতঃ R সম্বন্ধটো হ'ল 'x, y ৰ বৰ্গ'।

(i) সংহতি-গঠন পদ্ধতিত,

$R = \{(x, y) : x, y$ ৰ বৰ্গ, $x \in P, y \in Q\}$

(ii) ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতিত, $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

এই সম্বন্ধটোৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $\{4, 9, 25\}$

এই সম্বন্ধটোৰ পৰিসৰ হ'ল $\{-2, 2, -3, 3, -5, 5\}$

মন কৰিবা যে 1 উপাদানটোৰ লগত P সংহতিটোৰ কোনো উপাদানৰ সম্বন্ধ স্থাপন হোৱা নাই।

Q সংহতিটো হ'ল এই সম্বন্ধটোৰ সহক্ষেত্ৰ।

> ☛ **টোকা** A সংহতিৰপৰা B সংহতিলৈ মুঠ সম্বন্ধৰ সংখ্যা হ'ল $A \times B$ সংহতিৰ মুঠ উপসংহতিৰ সংখ্যা। যদি $n(A) = p$ আৰু $n(B) = q$, তেনেহ'লে $n(A \times B) = pq$ আৰু মুঠ সম্বন্ধৰ সংখ্যা হ'ল 2^{pq}

উদাহৰণ 9 ধৰা হ'ল $A = \{1, 2\}$ আৰু $B = \{3, 4\}$। Aৰ পৰা B লৈ মুঠ সম্বন্ধৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।

সমাধান $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$, যিহেতু $n(A \times B) = 4$, $A \times B$ৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা হ'ল 2^4.
গতিকে, Aৰ পৰা B লৈ মুঠ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^4

মন্তব্য A ৰ পৰা A লৈ সম্বন্ধ R অক 'A ত এটা সম্বন্ধ' বুলিও কোৱা হয়।

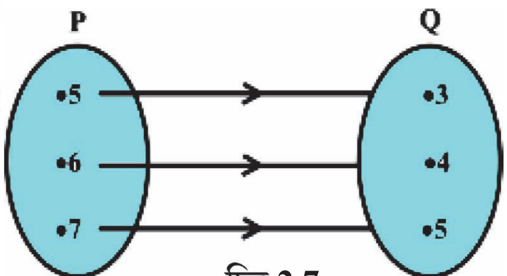
অনুশীলনী 2.2

1. ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$। Aৰ পৰা A লৈ এটা সম্বন্ধ Rঅৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $R = \{(x, y) : 3x - y = 0, x, y \in A\}$। ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ, সহক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ লিখাঁ।

2. স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি **N** ত সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $R = \{(x, y) : y = x+5; x$, 4 তকৈ সৰু এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা; $x, y \in \mathbf{N}\}$। এই সম্বন্ধটো ৰ'ষ্টাৰ আকৃতিত প্ৰকাশ কৰাঁ। আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰটো লিখাঁ।

3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ আৰু $B = \{4, 6, 9\}$। Aৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $R = \{(x, y)$: x আৰু y ৰ অন্তৰ অযুগ্ম সংখ্যা; $x \in A, y \in B\}$। R অক ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতিত লিখাঁ।

4. চিত্ৰ 2.7 এ P আৰু Q সংহতি দুটাৰ মাজৰ এটা সম্বন্ধ বুজাইছে। এই সম্বন্ধটো
(i) সংহতি-গঠন পদ্ধতিত,
(ii) ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতিত লিখাঁ।
ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ কি?



চিত্ৰ 2.7

5. ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$। A ত সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে
$R = \{(a, b) : a, b \in A$, b, a ৰে সম্পূৰ্ণৰূপে বিভাজ্য$\}$
(i) R অক ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতিত লিখাঁ।
(ii) R অৰ আদিক্ষেত্ৰ উলিওৱাঁ।
(iii) R অৰ পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

6. সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে
$R = \{(x, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$
ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

7. R= $\{(x, x^3) : x$, 10 অতকৈ সৰু এটা মৌলিক সংখ্যা$\}$। সম্বন্ধটো ৰ'ষ্টাৰ পদ্ধতিত লিখাঁ।

8. ধৰা হ'ল A= $\{x, y, z\}$ আৰু B=$\{1, 2\}$। A ৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা উলিওৱাঁ।

9. **Z** অত সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে
   R= $\{(a, b) : a, b \in \mathbf{Z}, a - b$ এটা অখণ্ড সংখ্যা$\}$
   R অৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱাঁ

2.4 ফলন (Functions)

এই অনুচ্ছেদত আমি **ফলন** নামেৰে এক বিশেষ ধৰণৰ সম্বন্ধৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। ই গণিতৰ অন্যতম আৱশ্যকীয় ধাৰণা। ফলনক কিছুমান প্ৰদত্ত উপাদানৰপৰা নতুন উপাদান উলিওৱাৰ এটা নিয়ম বুলি ক'ব পাৰি। ফলন বুজাবলৈ মানচিত্ৰণ (map বা mapping) আদি বিভিন্ন শব্দও ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

সংজ্ঞা 5 f, সংহতি A ৰ পৰা সংহতি B লৈ এটা সম্বন্ধ। f সম্বন্ধটোক ফলন বুলি কোৱা হয় যদি সংহতি A ৰ প্ৰত্যেক উপাদানৰ B সংহতিত এটাহে মাত্ৰ প্ৰতিচ্ছায়া থাকে।

আন কথাত, এটা অৰিক্ত সংহতি A ৰপৰা এটা অৰিক্ত সংহতি B লৈ ফলন f এনে এটা সম্বন্ধ যাতে f অৰ আদিক্ষেত্ৰ A আৰু f অৰ যিকোনো দুটা পৃথক ক্ৰমিতযোৰৰ একে প্ৰথম উপাদান নাই।

যদি A ৰ পৰা B লৈ f এটা ফলন হয় আৰু $(a, b) \in f$ তেনেহ'লে $f(a)=b$ য'ত b ক f ৰ অধীনত aৰ প্ৰতিচ্ছায়া বোলে আৰু a ক f ৰ অধীনত b ৰ পূৰ্বচ্ছায়া (preimage) বোলে।

A ৰ পৰা B লৈ f ফলনটোক $f : A \rightarrow B$ ৰে বুজোৱা হয়।

আগৰ উদাহৰণকেইটা চোৱা যাওক। উদাহৰণ 7 অৰ সম্বন্ধটো ফলন নহয়, কাৰণ 6 উপাদানটোৰ প্ৰতিচ্ছায়া নাই।

আকৌ উদাহৰণ 8 অৰ সম্বন্ধটো ফলন নহয়, কাৰণ আদিক্ষেত্ৰৰ উপাদানকেইটাৰ একাধিক প্ৰতিচ্ছায়াৰ লগত সম্পৰ্ক আছে। সেইদৰে উদাহৰণ 9 অৰ সম্বন্ধটোৱো ফলন নহয় (কিয়?)। তলৰ উদাহৰণকেইটাত আমি দেখিম যে এই সম্বন্ধবোৰৰ কিছুমান ফলন, কিছুমান ফলন নহয়।

উদাহৰণ 10 ধৰা হ'ল **N** স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি আৰু **N** অত সম্বন্ধ Rঅৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে R = $\{(x,y) : y = 2x, x, y \in \mathbf{N}\}$

R = অৰ আদিক্ষেত্ৰ, সহক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ কি? এই সম্বন্ধটো ফলন হয়নে?

সমাধান R অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি **N** আৰু সহক্ষেত্ৰও **N**। পৰিসৰ হ'ল যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

যিহেতু প্ৰতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মাত্ৰ এটাহে প্ৰতিচ্ছায়া আছে, গতিকে এই সম্বন্ধটো ফলন।

উদাহৰণ 11 তলৰ সম্বন্ধবোৰ ফলন হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰাঁ। যুক্তি দিবাঁ।

(i) R = $\{(2,1), (3,1), (4,2)\}$

(ii) R = $\{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

(iii) R = $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$

সমাধান (i) যিহেতু 2, 3, 4 মৌলকেইটা **R** অৰ আদিক্ষেত্ৰৰ উপাদান আৰু প্ৰতিটোৰে অদ্বিতীয় (unique) প্ৰতিচ্ছায়া আছে, গতিকে **R** সম্বন্ধটো এটা ফলন।

(ii) একেটা প্ৰথম উপাদান 2 ৰ দুটা পৃথক প্ৰতিচ্ছায়া 2 আৰু 4 ৰ লগত সম্পৰ্ক আছে। গতিকে এই সম্বন্ধটো ফলন নহয়।

(iii) যিহেতু প্ৰতিটো উপাদানৰ মাত্ৰ এটাহে প্ৰতিচ্ছায়া আছে, এই সম্পৰ্কটো এটা ফলন।

সংজ্ঞা 6 যিবিলাক ফলনৰ পৰিসৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি **R** (বা ইয়াৰ যিকোনো উপসংহতি) তাক বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন (real valued function) বোলে। আকৌ, যদি ফলনবোৰৰ আদিক্ষেত্ৰও **R** (বা ইয়াৰ যিকোনো উপসংহতি) হয়, তাক বাস্তৱ ফলন (real function) বোলে।

উদাহৰণ 12 ধৰা হ'ল **N** স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(x) = 2x+1$. এই সংজ্ঞাৰপৰা তলৰ সাৰণীখন সম্পূৰ্ণ কৰাঁ।

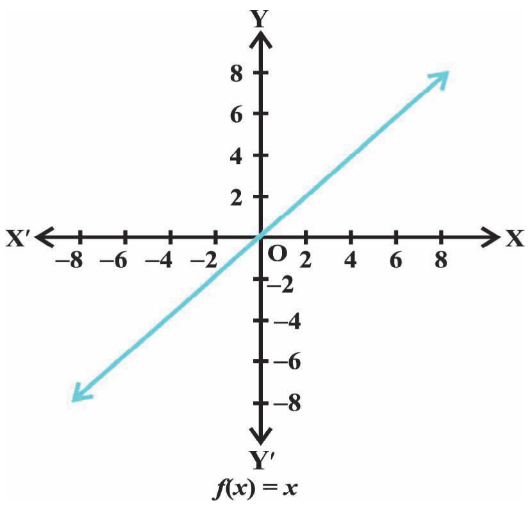
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1)=...$	$f(2)=...$	$f(3)=...$	$f(4)=...$	$f(5)=...$	$f(6)=...$	$f(7)=...$

সমাধান সম্পূৰ্ণ সাৰণীখন হ'ল

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1)=3$	$f(2)=5$	$f(3)=7$	$f(4)=9$	$f(5)=11$	$f(6)=13$	$f(7)=15$

2.4.1 কিছুমান ফলন আৰু সিহঁতৰ লেখ (Some functions and their graphs)

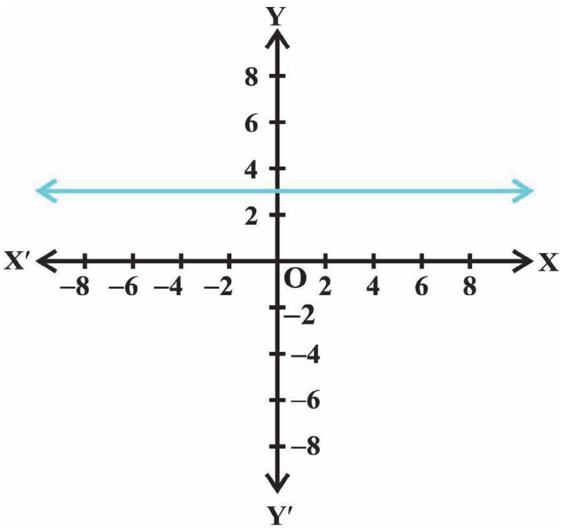
(i) **একক ফলন** (Identity function) ঃ ধৰা হ'ল R বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে, $y = f(x) = x$, প্ৰত্যেক $x \in \mathbf{R}$ ৰ বাবে।
এনে ধৰণৰ ফলনক একক ফলন বোলে। ইয়াত f অৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু সহক্ষেত্ৰ হ'ল **R**। চিত্ৰ 2.8 অত দেখুওৱাৰ দৰে লেখটো এডাল সৰলৰেখা। ৰেখাডাল মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।



চিত্ৰ 2.8

ধ্ৰুৱক ফলন (Constant function) ঃ $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ফলনটোৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $y = f(x) = c$, $x \in \mathrm{R}$ আৰু c এটা ধ্ৰুৱক আৰু প্ৰত্যেক $x \in \mathrm{R}$। ইয়াত f অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল **R** আৰু ইয়াৰ পৰিসৰ হ'ল $\{c\}$.

লেখটো x অক্ষৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখা। উদাহৰণস্বৰূপে যদি $f(x) = 3$ আৰু প্ৰত্যেক, $x \in R$, তেনেহ'লে চিত্ৰ 2.9 অত দেখুওৱাৰ দৰে লেখটো এডাল ৰেখা।



$f(x) = 3$

চিত্ৰ 2.9

(iii) **বহুপদ ফলন** (Polynomial function) ঃ ফলন $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ক বহুপদ ফলন বুলি কোৱা হয় যদি প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা x অৰ বাবে, $y = f(x) = a_0 + a_1 + x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, য'ত n এটা অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$ আৰু $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\, x$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ ফলন দুটা বহুপদ ফলনৰ উদাহৰণ। আনহাতেদি $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ h ফলনটো বহুপদ ফলন নহয়। (কিয় ?)

উদাহৰণ 13 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ফলনটোৰ সংজ্ঞা দিয়া আছে। $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$। এই সংজ্ঞাৰদ্বাৰা তলৰ সাৰণীখন সম্পূৰ্ণ কৰাঁ। এই ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ কি ? f অৰ লেখ আঁকা।

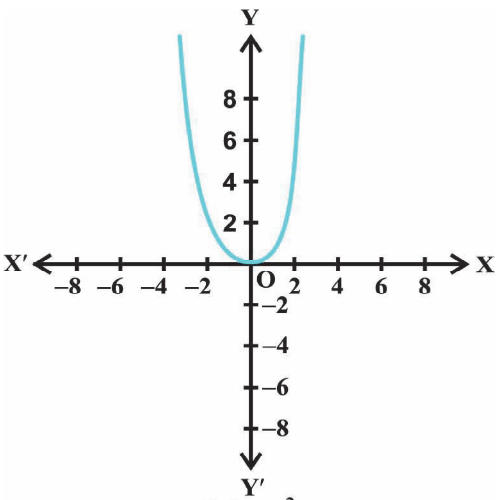
Y

x	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

সমাধান সম্পূৰ্ণ সাৰণীখন তলত দিয়া হ'ল

x	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f অৰ আদিক্ষেত্ৰ $= \{x : x \in \mathbf{R}\}$। f অৰ পৰিসৰ $= \{x : x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$। চিত্ৰ 2.10ত f অৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।



$f(x) = x^2$

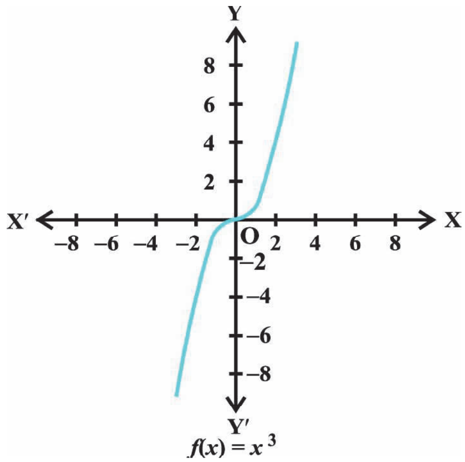
চিত্ৰ 2.10

উদাহৰণ 14 $f(x)=x^3$, $x \in \mathbf{R}$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ। $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ফলনটোৰ লেখ আকাঁ।

সমাধান $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(-1)=-1$, $f(2)=8$, $f(-2)=-8$, $f(3)=27$, $f(-3)=-27$,ইত্যাদি

গতিকে $f=\{(x, x^3) : x \in \mathrm{R}\}$

চিত্ৰ 2.11 অত f অৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 2.11

(iv) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ আৰ্হিৰ ফলনক **পৰিমেয় ফলন** বোলে (Rational functions)। ইয়াত $f(x)$ আৰু $g(x)$ দুটা (কোনো আদিক্ষেত্ৰত সংজ্ঞাৰদ্ধ) x অৰ ফলন, $g(x) \neq 0$

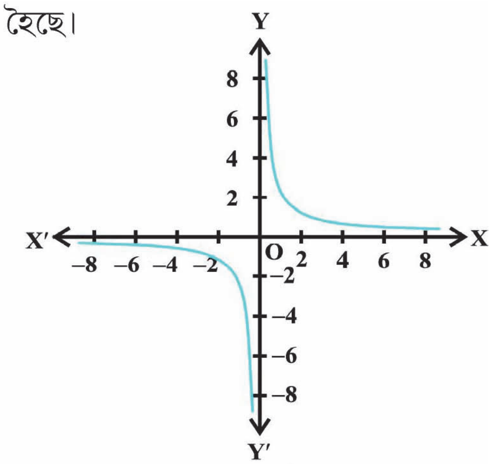
উদাহৰণ 15 বাস্তৱমান বিশিষ্ট ফলন $f:\mathbf{R}-\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}-\{0\}$। এই সংজ্ঞাৰপৰা তলৰ সাৰণীখন সম্পূৰ্ণ কৰাঁ। এই ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ কি?

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y=\dfrac{1}{x}$	...	. ..	...	...	...	...	...	...	...

সমাধান সম্পূৰ্ণ সাৰণীখন তলত দেখুওৱা হ'ল।

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y=\dfrac{1}{x}$	-0.5	-0.67	-1	-2	4	2	1	0.67	0.5

আদিক্ষেত্ৰ হ'ল 0 ৰ বাহিৰে সকলো বাস্তৱ সংখ্যা আৰু পৰিসৰো হ'ল 0 ৰ বাহিৰে সকলো বাস্তৱ সংখ্যা। চিত্ৰ 2.12 ত f অৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।



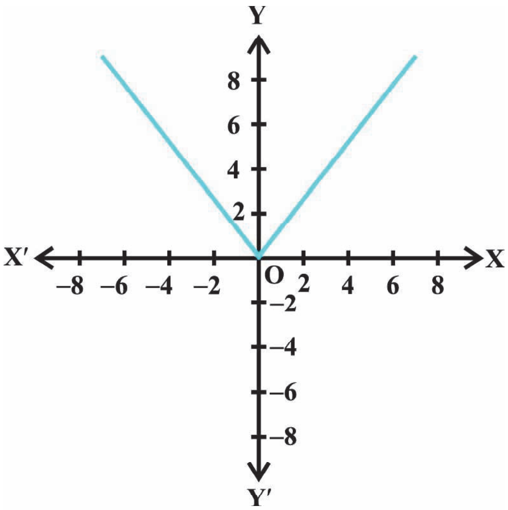
চিত্ৰ 2.12 $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(v) **মাপাংক ফলন** (The Modulus function)

প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যা x অৰ বাবে $f(x)=|x|$ অৰদ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ ফলনক মাপাংক ফলন বোলে। x অৰ প্ৰত্যেক অঋণাত্মক মানৰ বাবে, $f(x)$, x অৰ সমান। কিন্তু x ৰ ঋণাত্মক মানৰ বাবে $f(x)$ হ'ল x ৰ মানৰ ঋণাত্মক অৰ্থাৎ

$$f(x)=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

চিত্ৰ 2.13ত মাপাংক ফলনৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।



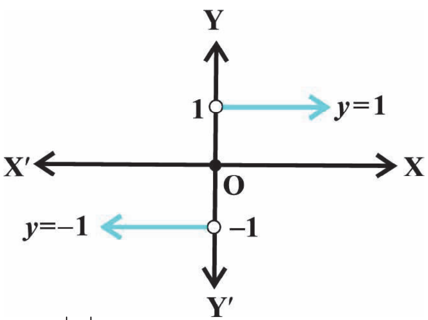
$f(x) = |x|$

চিত্ৰ 2.13

(vi) **ছিগনাম ফলন** (Signum function)

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ যদি } x>0 \\ 0, \text{ যদি } x=0 \\ -1, \text{ যদি } x<0 \end{cases}$$

ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ ফলনক ছিগনাম ফলন বোলে। ছিগনাম ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $\mathbf{R}$ আৰু পৰিসৰ হ'ল $\{-1,0,1\}$। চিত্ৰ 2.14 ত ছিগনাম ফলনৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।



$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $x\neq 0$ আৰু 0, $x=0$ ৰ বাবে

চিত্ৰ 2.14

(vii) **গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলন** (Greatest Integer function) **:**

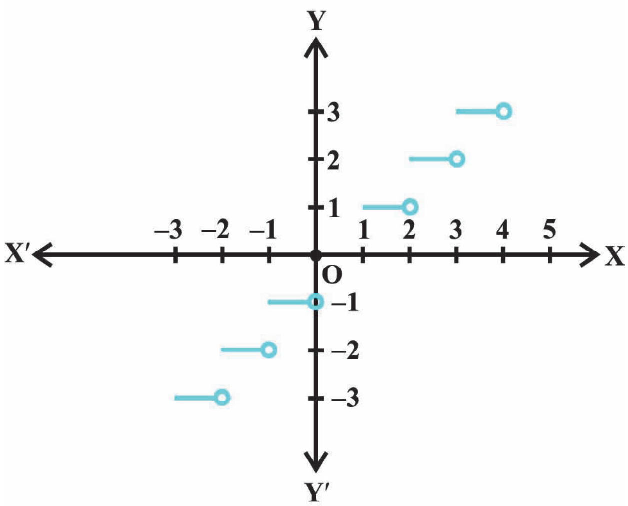
$f(x)=[x]$, $x\in\mathbf{R}$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ ফলনে x তকৈ সৰু বা সমান গৰিষ্ঠ অখণ্ড মান লয়। এনে ফলনক গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলন বোলে।

$[x]$ অৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি দেখিলো যে

$$[x]=-1,\ -1\leq x<0$$
$$[x]=\ 0,\ 0\leq x<1$$
$$[x]=\ 1,\ 1\leq x<2$$
$$[x]=\ 2,\ 2\leq x<3$$

ইত্যাদি

চিত্ৰ 2.15 অত ফলনটোৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।



$f(x) = [x]$

চিত্ৰ 2.15

2.4.2 *বাস্তৱ ফলনৰ বীজগণিত (Algebra of real functions)* ঃ এই অনুচ্ছেদত, আমি দুটা বাস্তৱ ফলন কেনেদৰে যোগ কৰিব লাগে, এটা বাস্তৱ ফলনৰপৰা আন এটা বাস্তৱ ফলন কেনেদৰে বিয়োগ কৰিব লাগে, এটা বাস্তৱ ফলনক এটা অদিশ ৰাশিৰে (অদিশ ৰাশিৰ দ্বাৰা ইয়াত বাস্তৱ সংখ্যাক বুজোৱা হৈছে) কেনেদৰে পূৰণ কৰিব লাগে, দুটা বাস্তৱ ফলন কেনেদৰে পূৰণ কৰিব লাগে আৰু এটা বাস্তৱ ফলনক আন এটাৰে কেনেদৰে হৰণ কৰিব লাগে সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

(i) **দুটা বাস্তৱ ফলনৰ যোগ** (Addition of two real functions) ঃ ধৰা হ'ল $f : X \to \mathbf{R}$ আৰু $g: X \to \mathbf{R}$ দুটা বাস্তৱ ফলন, য'ত $x \subset \mathbf{R}$। $(f + g) : X \to \mathbf{R}$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয় $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, সকলো $x \in \mathbf{R}$.

(ii) **এটা বাস্তৱ ফলনৰপৰা আন এটাৰ বিয়োগ** (Subtraction of a real function from another) ঃ ধৰা হ'ল $f : X \to \mathbf{R}$ আৰু $g: X \to \mathbf{R}$ দুটা বাস্তৱ ফলন, য'ত $X \subset \mathbf{R}$। $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, সকলো $x \in \mathbf{R}$।

(iii) **এটা বাস্তৱ ফলনক স্কেলাৰেৰে পূৰণ** (Multiplication of a real function by a scalar) ঃ ধৰা হ'ল $f : X \to \mathbf{R}$ এটা বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন আৰু α এটা আদিশ ৰাশি। অদিশ ৰাশিৰ দ্বাৰা বাস্তৱ সংখ্যাক বুজোৱা হৈছে। পূৰণফল αf হ'ল X ৰ পৰা $\mathbf{R}$ লৈ এটা ফলন আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$.

(iv) **দুটা বাস্তৱ ফলনৰ পূৰণফল** (Multiplication of two real functions) ঃ দুটা বাস্তৱ ফলন $f : X \to \mathbf{R}$ আৰু $g : X \to \mathbf{R}$ অৰ পূৰণফল fg হ'ল x অৰ পৰা $\mathbf{R}$ অলৈ এটা ফলন আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$, সকলো $x \in X$

ইয়াক বিন্দুক্ৰমে পূৰণ (pointwise multiplication) বুলি কোৱা হয়।

(v) **দুটা বাস্তৱ ফলনৰ ভাগফল** (Quotient of two real functions) ঃ ধৰাহ'ল f আৰু g, X অৰ পৰা $\mathbf{R}$ লৈ সংজ্ঞাৱদ্ধ দুটা বাস্তৱ ফলন, য'ত $X \subset \mathbf{R}$। g ৰ দ্বাৰা f অৰ ভাগফলক $\frac{f}{g}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0, x \in X$$

উদাহৰণ 16 ধৰা হ'ল $f(x) = x^2$ আৰু $g(x) = 2x+1$ দুটা বাস্তৱ ফলন। $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ উলিওৱাঁ।

সমাধান $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1$, $(f-g)(x) = x^2 - 2x - 1$,

$$(fg)(x) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1},\ x \neq -\tfrac{1}{2}$$

উদাহৰণ 17 ধৰা হ'ল অঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাত সংজ্ঞাবদ্ধ $f(x) = \sqrt{x}$ আৰু $g(x) = x$ দুটা ফলন। $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ আৰু $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ উলিওৱাঁ।

সমাধান $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x$, $(f-g)(x) = \sqrt{x} - x$,

$$(fg)\,x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ আৰু } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}},\ x \neq 0$$

অনুশীলনী 2.3

1. তলৰ সম্বন্ধবোৰৰ কোনকেইটা ফলন? যুক্তি দিয়াঁ। ফলন হ'লে তাৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

   (i) $\{(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)\}$

   (ii) $\{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)\}$

   (iii) $\{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$

2. তলৰ বাস্তৱ ফলন দুটাৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

   (i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

3. এটা ফলন অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে— $f(x)=2x-5$

   (i) $f(0)$, (ii) $f(7)$, (iii) $f(-3)$ ৰ মান উলিওৱাঁ।

4. ডিগ্ৰি ছেলছিয়াছত থকা তাপমানক ডিগ্ৰি ফাৰেনহাইটত থকা তাপমানৰ লগত 't' ফলনে $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ সংজ্ঞাৰদ্বাৰা সংযোগ স্থাপন কৰে।

   (i) $t(0)$, (ii) $t(28)$, (iii) $t(-10)$ ৰ মান উলিওৱাঁ

   (iv) $t(C) = 212$ হ'লে C ৰ মান উলিওৱাঁ।

5. তলৰ প্ৰতিটো ফলনৰ পৰিসৰ উলিওৱাঁ

   (i) $f(x) = 2-3x,\ x \in \mathbf{R},\ x > 0$

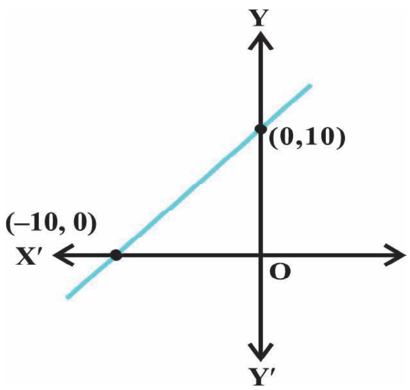
   (ii) $f(x) = x^2+2$, x এটা বাস্তৱ সংখ্যা

   (iii) $f(x) = x$, x এটা বাস্তৱ সংখ্যা

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 18 ধৰা হ'ল **R** বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $f(x)=x+10$ অৰ দ্বাৰা বাস্তৱ ফলন $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ৰ সংজ্ঞা দিয়া আছে। এই ফলনটোৰ মোটামুটি লেখ আকাঁ।

সমাধান ইয়াত $f(0)=10,\ f(1)=11,\ f(2)=12, ...,\ f(10)=20$, ইত্যাদি আৰু $f(-1)=9,\ f(-2)=8, ...,\ f(-10)=0$, ইত্যাদি গতিকে, প্ৰদত্ত ফলনটোৰ লেখ চিত্ৰ 2.16ত দেখুওৱাৰ দৰে হ'ব।



$f(x) = x+10$

চিত্ৰ 2.16

মন্তব্য $f(x)=mx+c,\ x \in \mathbf{R}$ অৰদ্বাৰা সংজ্ঞাৰদ্ধ f ফলনটোক ৰৈখিক ফলন (linear function) বোলে, য'ত m আৰু c ধ্ৰুৱক। ওপৰৰ ফলনটো এটা ৰৈখিক ফলনৰ উদাহৰণ।

উদাহৰণ 19 **Q** ৰ পৰা **Q** লৈ সংজ্ঞাৱদ্ধ সম্বন্ধ R অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে
$R = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{Q}$ আৰু $a - b \in \mathbf{Z}\}$ দেখুওৱাঁ যে

(i) $(a, a) \in R$, সকলো $a \in \mathbf{Q}$ ৰ বাবে

(ii) $(a, b) \in R$, এ $(b, a) \in R$ সূচায়

(iii) $(a, b) \in R$, আৰু $(b, c) \in R$ এ $(a, c) \in R$ সূচায় ।

সমাধান (i) যিহেতু $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$। গতিকে $(a, a) \in R$

(ii) $(a, b) \in R$ এ $a - b \in Z$ সূচায়। সেয়ে $b - a \in \mathbf{Z}$ গতিকে $(b, a) \in R$.

(iii) (a, b) আৰু $(b,c) \in R$ এ $a - b \in Z$, $b - c \in \mathbf{Z}$ সূচায়। গতিকে $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$।
এতেকে $(a, c) \in R$

উদাহৰণ 20 **Z** অৰ পৰা **Z** লৈ $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ এটা ফলন।
$f(x)$ উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু f এটা ৰৈখিক ফলন, গতিকে $f(x) = mx + c$। আকৌ, যিহেতু $(1, 1), (0, -1) \in R$, সেয়ে $f(1) = m + c = 1$ আৰু $f(0) = c = -1$। ইয়াৰপৰা m=2 পোৱা গ'ল। গতিকে $f(x) = 2x - 1$.

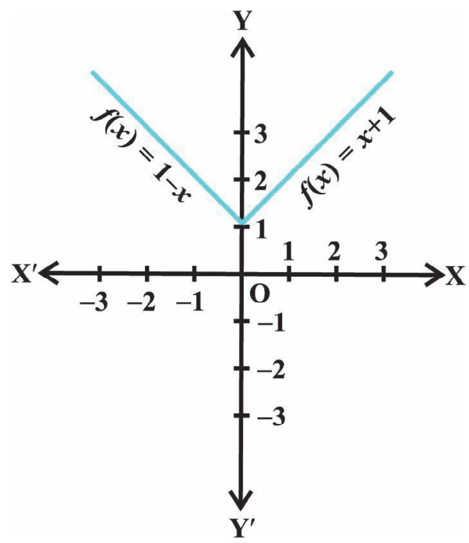
উদাহৰণ 21 $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ উলিওৱাঁ।

সমাধান যিহেতু $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, গতিকে $x = 4$ আৰু $x = 1$অৰ বাহিৰে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে ফলন f সংজ্ঞাৱদ্ধ। গতিকে f অৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $\mathbf{R} - \{1, 4\}$

উদাহৰণ 22 f ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ অৰ লেখ আকাঁ।



চিত্ৰ 2.17

সমাধান ইয়াত $f(x) = 1 - x, x < 0$ ৰ পৰা

$f(-4) = 1 - (-4) = 5.$

$f(-3) = 1 - (-3) = 4.$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3.$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2.$ ইত্যাদি

আৰু $f(x) = x + 1, x > 0$.ৰ পৰা

$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 5$ ইত্যাদি

চিত্ৰ 2.17 অত ফলন f অৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।

দ্বিতীয় অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. সম্বন্ধ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 3 \\ 3x, & 3\le x\le 10 \end{cases}$

   সম্বন্ধ g ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $g(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 2 \\ 3x, & 2\le x\le 10 \end{cases}$

   দেখুওৱা যে f এটা ফলন আৰু g এটা ফলন নহয়।

2. যদি $f(x)=x^2$, $\dfrac{f(1.1)-f(1)}{(1.1-1)}$ উলিওৱাঁ

3. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ উলিওৱাঁ।

4. $f(x)=\sqrt{(x-1)}$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ বাস্তৱ ফলন f অৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

5. $f(x)=|x-1|$ ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ বাস্তৱ ফলন f অৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওৱাঁ

6. **R** অৰ পৰা **R** অলৈ $f=\left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right): x\in \mathbf{R}\right\}$ এটা ফলন। f অৰ পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

7. ক্ৰমে $f(x)=x+1$, $g(x)=2x-3$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ $f, g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ দুটা ফলন। $f+g$, $f-g$ আৰু $\dfrac{f}{g}$ উলিওৱাঁ

8. $f(x)=ax+b$, (a, b অখণ্ড সংখ্যা) অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ $f=\{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ এটা **Z** ৰ পৰা **Z** লৈ ফলন। a, b উলিওৱাঁ।

9. $R=\{(a, b): a, b\in \mathbf{N}$ আৰু $a=b^2\}$ অৰদ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ R এটা **N** অৰ পৰা **N** অলৈ সম্বন্ধ। তলৰ উক্তিবোৰ সত্য হয়নে?

   (i) সকলো $a\in\mathbf{N}$ ৰ বাবে $(a, a)\in R$ (ii) $(a, b)\in R$ এ $(b, a)\in R$ সূচায়

   (iii) $(a, b)\in R$, $(b, c)\in R$এ $(a, c)\in R$ সূচায়।

10. ধৰা হ'ল $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$আৰু $f=\{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$। তলৰ উক্তিবোৰ সত্যনে?

    (i) A ৰ পৰা B লৈ f এটা সম্বন্ধ

    (ii) A ৰ পৰা B লৈ f এটা ফলন

    প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিবা।

11. $f = \{(ab, a+b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ f, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ৰ এটা উপসংহতি। $\mathbf{Z}$ ৰ পৰা $\mathbf{Z}$ লৈ f এটা ফলন হয়নে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰাঁ।

12. ধৰা হ'ল A= {9, 10, 11, 12, 13} আৰু $f : A \rightarrow \mathbf{N}$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(n) = n$ অৰ গৰিষ্ঠ মৌলিক উৎপাদক। f অৰ পৰিসৰ উলিওৱাঁ।

সাৰাংশ

এই অধ্যায়ত আমি সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলোঁ। এই অধ্যায়ৰ মূল কথাবোৰ হ'ল ঃ

- **ক্ৰমিত যোৰ** এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমত একেলগে সজোৱা এযোৰ উপাদান।
- দুটা সংহতি A আৰু B ৰ **কাৰ্টেজীয় পূৰণফল** $A \times B$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

  বিশেষভাৱে $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$

  আৰু $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- যদি $(a, b) = (x, y)$, তেনেহ'লে $a=x$ আৰু $b=y$
- যদি $n(A) = p$ আৰু $n(B) = q$, তেনেহ'লে $n(A \times B) = pq$
- $A \times \phi = \phi$
- সাধাৰণতে, $A \times B \neq B \times A$
- $A \times B$ ৰ ক্ৰমিত যোৰবোৰৰ প্ৰথম উপাদান x আৰু দ্বিতীয় উপাদান y ৰ মাজত সম্পৰ্ক স্থাপন কৰি পোৱা কাৰ্টেজীয় পূৰণফল $A \times B$ ৰ এটা উপসংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা **সম্বন্ধ** R বুলি কোৱা হয়।
- সম্বন্ধ R অৰ অধীনত এটা উপাদান x অৰ **প্ৰতিচ্ছায়া** হ'ল y, য'ত $(x, y) \in R$.
- এটা সম্বন্ধ R অৰ ক্ৰমিত যোৰবোৰৰ প্ৰথম উপাদানবোৰৰে গঠিত সংহতিটোক R অৰ আদিক্ষেত্ৰ বোলে।
- এটা সম্বন্ধ R অৰ ক্ৰমিত যোৰবোৰৰ দ্বিতীয় উপাদানবোৰৰে গঠিত সংহতিটোক R অৰ পৰিসৰ বোলে।
- **ফলন** A সংহতিৰপৰা B সংহতিলৈ ফলন f হ'ল এক বিশেষ ধৰণৰ সম্বন্ধ য'ত A সংহতিৰ প্ৰত্যেক উপাদান x অৰ মাত্ৰ এটাহে প্ৰতিচ্ছায়া y, সংহতি B ত থাকে।
- A হ'ল ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু B হ'ল ফলনটোৰ সহক্ষেত্ৰ।
- প্ৰতিচ্ছায়াবোৰৰ সংহতি হ'ল ফলনটোৰ পৰিসৰ।
- যিবোৰ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি (বা ইয়াৰ যিকোনো উপসংহতি) তাক বাস্তৱ ফলন বোলে।
- **ফলনৰ বীজগণিত** ফলন $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ আৰু $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ ৰ বাবে

  $$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in X$$

  $$(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in X$$

  $$(f.g)(x) = f(x) . g(x), x \in X$$

$(kf)(x) = kf(x),\ x \in X$, য'ত k এটা বাস্তৱ সংখ্যা

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in X, g(x) \neq 0$$

ঐতিহাসিক টোকা

গট্‌ফ্রিড উইলহেল্ম লাইবনিৎজে (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646-1716) তেখেতৰ এখন লেটিন পাণ্ডুলিপিত (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus) পোনপ্ৰথমবাৰৰ বাবে FUNCTION শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰে। লাইবনিৎজে অনা-বিশ্লেষণাত্মক অৰ্থত শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰে। তেওঁ 'mathematical job' অৰ বাবে ফলন বিবেচনা কৰিছিল, — 'employee' হ'ল মাথোঁ এটা বক্ৰ।

1698 খ্ৰীষ্টাব্দৰ 5 জুলাইত জ'হান বাৰ্ণ'লিয়ে লাইবনিৎজলৈ লিখা এখন চিঠিত বিশ্লেষণাত্মক অৰ্থত 'function' শব্দটো স্বইচ্ছাই ব্যৱহাৰ কৰে। সেই মাহৰ শেহৰ পিনে, লাইবনিৎজে সন্মতি দি উত্তৰ দিয়ে।

1779 খ্ৰীষ্টাব্দত প্ৰকাশিত Chambers' Cyclopaedia ত function শব্দটো পোৱা যায়,—'The term function is used in algebra, for an analytical expression anyway compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities.'

— ❖ —