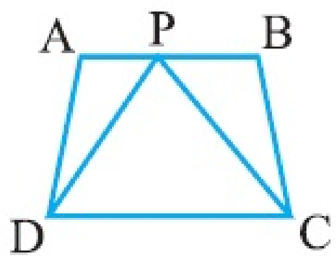
पाठ 9. समान्तर चतुर्भुज और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

प्रश्नावली 9.1

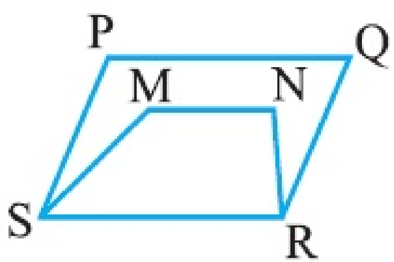
Q1. निम्नलिखित आकृतियों में से कौन-सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं? ऐसी स्थिति में, उभयनिष्ठ आधार और दोनों समांतर रेखाएँ लिखिए।

(i)



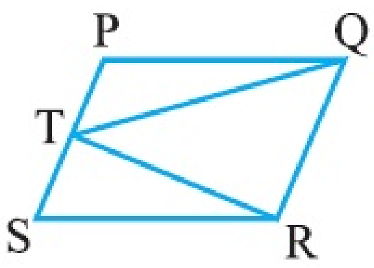
हल : यह आकृति एक ही आधार CD और एक ही समान्तर रेखाओं AB || CD के मध्य स्थित है |

(ii)



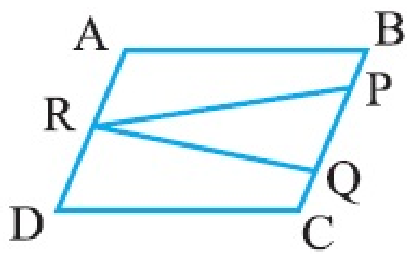
हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

(iii)



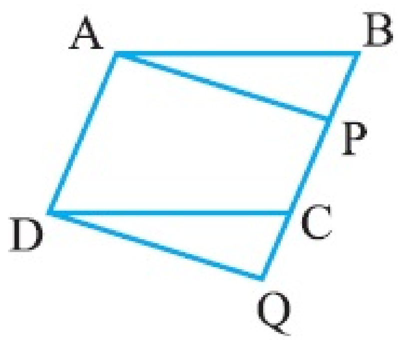
हल : यह आकृति एक ही आधार QR और एक ही समान्तर रेखाओं PS || QR के मध्य स्थित है |

(iv)



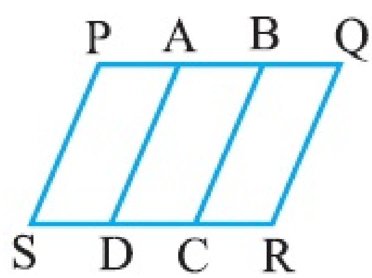
हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

(v)



हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

(vi)

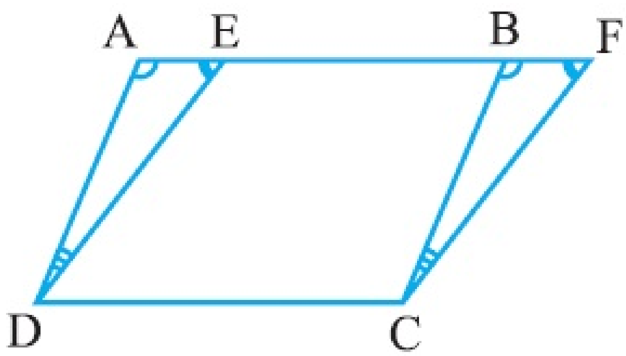


हल : यह आकृति एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित नहीं हैं|

प्रश्नावली 9.2

प्रमेय :

प्रमेय 9.1 : सिद्ध कीजिए कि एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बिच स्थित समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |



हल :

दिया है : ||gm ABCD और ||gm EFCD

एक ही आधार CD और AB || CD के मध्य स्थित है |

सिद्ध करना है :

ar(ABCD) = ar(EFCD)

उपपति :

ΔADE तथा ΔBCF में

AD = BC (||gm के सम्मुख भुजा बराबर होते हैं)

∠DAE = ∠CBF (संगत कोण)

∠AED = ∠BFC (संगत कोण)

ASA सर्वांगसमता नियम से

ΔADE ≅ ΔBCF

अत: ar(ADE) = ar(BCF) .... (i)

(सर्वांगसम त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं)

अब, दोनों तरफ ar(EBCD) जोड़ने पर

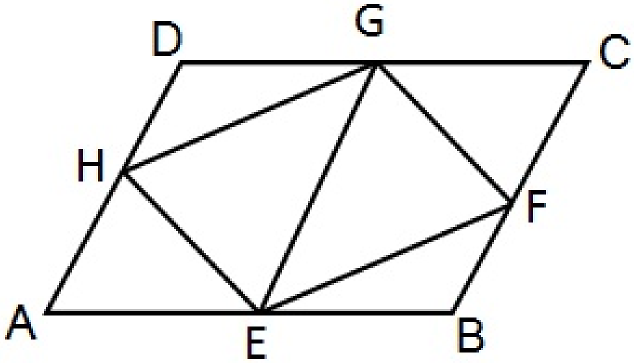
ar(ADE) + ar(EBCD) = ar(BCF) + ar(EBCD)

ar(ABCD) = ar(EFCD) Proved

प्रश्नावली 9.2

Q2. यदि E, F, G और H क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD कि भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, तो दर्शाइए कि ar(EFGH) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) है |

हल :



दिया है : E, F, G और H क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD कि भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं |

सिद्ध करना है : ar(EFGH) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD)

रचना : E को G से मिलाया |

प्रमाण : E तथा G क्रमश: AB तथा CD के मध्य बिंदु है और AB||CD है |

इसलिए AEGD और EBCG भी समांतर चतुर्भुज हैं |

अब, ΔGEH तथा ||gm AEGD एक ही आधार GE तथा AD || GE के मध्य स्थित है |

अत: ar(GEH) = $\frac{1}{2}$ ar (AEGD) .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

इसीप्रकार,

ΔGEF तथा ||gm EBCD एक ही आधार GE तथा BC || GE के मध्य स्थित है |

अत: ar(GEF) = $\frac{1}{2}$ ar(EBCD) .... (ii)

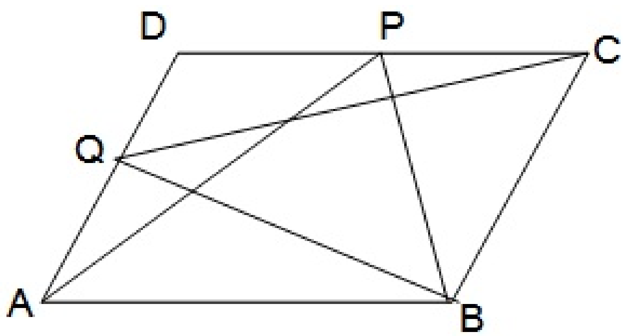
समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

$$ar(GEH) + ar(GEF) = \frac{1}{2} ar(AEGD) + \frac{1}{2} ar(EBCD)$$

या $$ar(EFGH) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$$ **Proved**

Q3. P और Q क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिंदु है | दर्शाइए ar (APB) = ar (BQC) है |

हल :



दिया है : P और Q क्रमश: समांतर चतुर्भुज ABCD

की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिंदु है |

सिद्ध करना है :

ar(APB) = ar(BQC)

प्रमाण :

ΔAPB तथा ||gm ABCD एक ही आधार AB तथा AB || CD के मध्य स्थित है |

अत: $ar(APB) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

ΔBQC तथा ||gm ABCD एक ही आधार BC तथा AD || BC के मध्य स्थित है |

अत: $ar(BQC) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

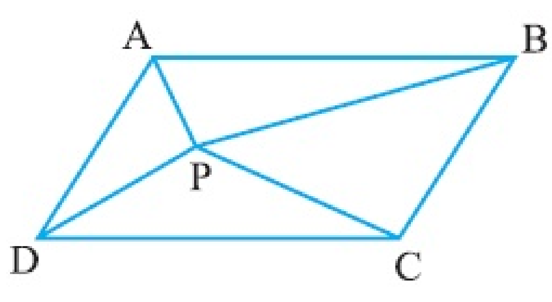
$ar(APB) = ar(BQC)$ **Proved**

Q4. P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थिति कोई बिंदु है | दर्शाइए कि

(i) $ar(APB) + ar(PCD) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

(ii) $ar(APD) + ar(PBC) = ar(APB) + ar(PCD)$

हल :

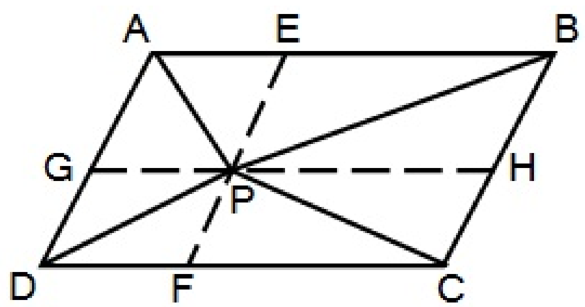


दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके अभ्यंतर P कोई बिंदु है |

सिद्ध करना है :

(i) ar (APB) + ar (PCD) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD)

(ii) ar (APD) + ar (PBC) = ar (APB) + ar (PCD)



रचना : P बिंदु से होकर AB के समांतर GH खिंचा और AD के समान्तर EF खिंचा |

प्रमाण :

AB || GH रचना से और AB = GH है इसलिए ABHG एक समांतर चतुर्भुज है |

इसी प्रकार DCHG भी एक समांतर चतुर्भुज है |

अब

ΔAPB तथा ||gm ABHG एक ही आधार AB तथा AB || GH के मध्य स्थित है |

अत: ar(APB) = $\frac{1}{2}$ ar(ABHG) .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

इसीप्रकार, ΔPCD तथा ||gm DCHG एक ही आधार DC तथा DC || GH के मध्य स्थित है |

अत: ar(PCD) = $\frac{1}{2}$ ar(DCHG) .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) जोड़ने पर

ar (APB) + ar (PCD) = $\frac{1}{2}$ ar(ABHG) + $\frac{1}{2}$ ar(DCHG)

$ar(APB) + ar(PCD) = \frac{1}{2}\ ar(ABCD)$ .... (iii)

अब ΔAPD और ||gm ADFE एक ही आधार AD तथा AD || EF के मध्य स्थित है |

इसलिए, $ar(APD) = \frac{1}{2}\ ar(ADFE)$ .... (iv)

इसीप्रकार, ΔPBC और ||gm BCFE एक ही आधार BC तथा BC || EF के मध्य स्थित है |

इसलिए, $ar(PBC) = \frac{1}{2}\ ar(BCFE)$ .... (v)

समीकरण (iv) और (v) को जोड़ने से

$$ar(APD) + ar(PBC) = \frac{1}{2}\ ar(ADFE) + \frac{1}{2}\ ar(BCFE)$$

या $ar(APD) + ar(PBC) = \frac{1}{2}\ ar(ABCD)$

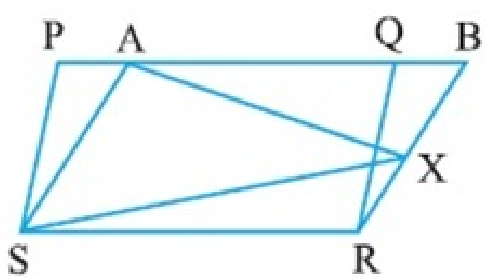
या $ar(APD) + ar(PBC) = ar(APB) + ar(PCD)$ समीकरण (iii) से

Proved

Q5. PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज है तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिंदु है | दर्शाइए कि :

(i) $ar(PQRS) = ar(ABRS)$

(ii) $ar(AXS) = \frac{1}{2}\ ar(PQRS)$



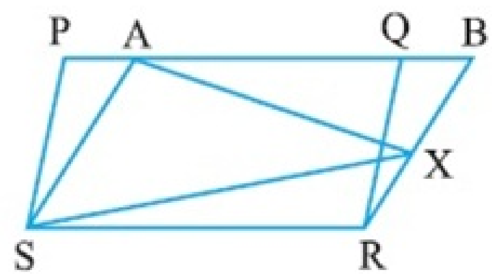
हल :

दिया है : PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज है तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिंदु है |

सिद्ध करना है :

(i) ar(PQRS) = ar(ABRS)

(ii) ar(AXS) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS)



प्रमाण :

||gm PQRS तथा ||gm ABRS एक ही आधार SR तथा SR|| PB के मध्य स्थित हैं |

इसलिए प्रमेय 9.1 से

ar(PQRS) = ar(ABRS) .... (i) **Proved**

अब, ΔAXS तथा ||gm ABRS एक ही आधार AS तथा AS || BR के मध्य स्थित है |

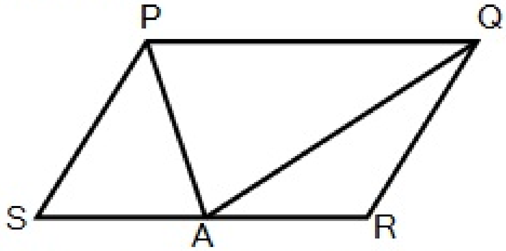
$\therefore$ ar(AXS) = $\frac{1}{2}$ ar(ABRS)

या ar(AXS) = $\frac{1}{2}$ ar(PQRS) समी० (i) से **Proved**

Q6. एक किसान के पास समांतर चतुर्भुज (PQRS) के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या हैं? वह किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर-बराबर भागों में अलग-अलग बोना चाहती है। वह ऐसा कैसे करे?

हल :

दिया है : PQRS एक ||gm है और RS पर एक बिंदु A है |



सिद्ध करना है :

ar(PAQ) = ar(PAS) + ar(QAR)

प्रमाण : ΔPAQ तथा ||gm PQRS एक ही आधार PQ तथा PQ || SR के मध्य स्थित है |

$\therefore$ ar(PAQ) = $\frac{1}{2}$ ar(PQRS) .... (i)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित त्रिभुज समांतर चतुर्भुज का आधा होता है |)

इसलिए ar(PAS) + ar(QAR) = $\frac{1}{2}$ ar(PQRS) .... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

ar(PAQ) = ar(PAS) + ar(QAR)

अर्थात किसान चाहे तो ar(PAQ) में गेंहू बो सकता है अथवा ar(PAS) + ar(QAR) में चना बो सकता है | क्योंकि ये क्षेत्रफल में बराबर हैं |

प्रश्नावली 9.3

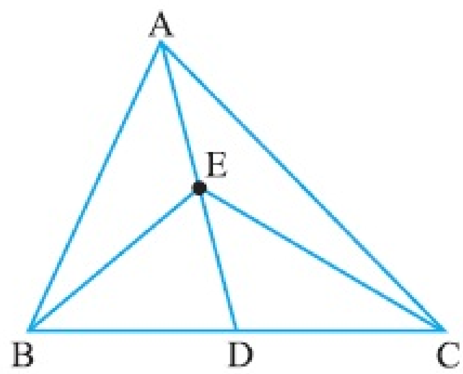
Q1. ΔABC की एक मध्यिका AD पर स्थित E कोई बिंदु है | दर्शाइए कि ar(ABE) = ar(ACE) है |

हल :

दिया है : ΔABC की एक मध्यिका AD पर स्थित E कोई बिंदु है |

सिद्ध करना है : ar(ABE) = ar(ACE)

रचना : B तथा C E को मिलाया |



प्रमाण : ΔABC में,

AD ΔABC कि एक माध्यिका है |

इसलिए ar(ABD) = ar(ACD) .... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

अब, ΔBEC में,

ED भी ΔBEC कि एक माध्यिका है |

इसलिए ar(BED) = ar(CED) .... (ii)

समीकरण (i) में से (ii) घटाने पर

ar(ABD) - ar(BED) = ar(ACD) - ar(CED)

या ar(ABE) = ar(ACE) **Proved**

Q2. ΔABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है | दर्शाइए कि

ar(BED) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC) है |

हल:

दिया है : ΔABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिंदु है |

सिद्ध करना है :

ar(BED) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC)

रचना : B तथा C को बिंदु E से मिलाया |

प्रमाण :

ΔABC में,

AD ΔABC कि एक माध्यिका है |

इसलिए, ar(ABD) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC) .... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

अब, बिंदु E Δ ABD कि भुजा AD का मध्य-बिंदु है (दिया है)

इसलिए, BE ΔABD की एक माध्यिका है |

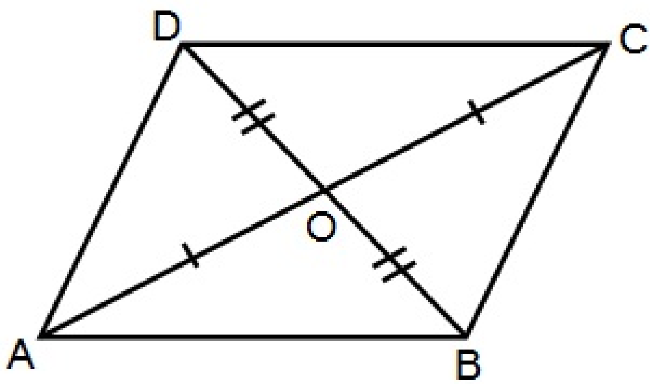
अत: ar(BED) = $\frac{1}{2}$ ar(ABD)

या ar(BED) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ar(ABC) समी० (i) से

या ar(BED) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC) **Proved**

Q3. दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

हल :



दिया है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके दो विकर्ण AC तथा BD हैं | जो एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है |

सिद्ध करना है :

ar(AOB) = ar(BOC) = ar(COD) = ar(AOD)

प्रमाण :

ΔABC की भुजा AC का O मध्य-बिंदु है |

इसलिए OB एक माध्यिका है |

अत: ar(AOB) = ar(BOC) .... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

इसीप्रकार, ΔACD की भुजा AC का O मध्य-बिंदु है |

इसलिए OD एक माध्यिका है |

अत: ar(AOD) = ar(COD) .... (ii)

अब और ΔBCD में

भुजा BD की मध्य-बिंदु O है अत: OC एक माध्यिका है |

अत : ar(BOC) = ar(COD) .... (iii)

समीकरण (i), (ii) तथा (iii) से हमें प्राप्त होता है |

ar(AOB) = ar(BOC) = ar(COD) = ar(AOD) **Proved**

Q4. ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं | यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि ar(ABC) = ar(ABD)

हल :

दिया है : ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं और रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिंदु O पर समद्विभाजित होता है |

सिद्ध करना है : ar(ABC) = ar(ABD)

प्रमाण : DACD में भुजा CD को AB समद्विभाजित करता है जिसका मध्य-बिंदु O है |

अत: AO त्रिभुज कि एक माध्यिका है |

इसलिए ar(AOC) = ar(AOD) ...... (i)

(त्रिभुज कि माध्यिका उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बाँटता है)

इसीप्रकार, DBCD में OB एक माध्यिका है |

अत: ar(BOC) = ar(BOD) .... (ii)

समी॰ (i) तथा (ii) जोड़ने पर

ar(AOC) + ar(BOC) = ar(AOD) + ar(BOD)

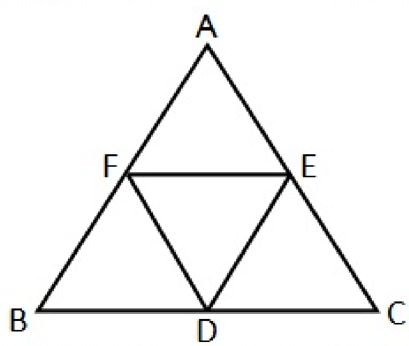
या ar(ABC) = ar(ABD) **Proved**

Q5. D, E और F क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं | दर्शाइए कि

(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है |

(ii) ar(DEF) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC)

(iii) ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC)



हल :

दिया है : D, E और F क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं |

सिद्ध करना है :

(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है |

(ii) ar(DEF) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC)

(iii) ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC)

प्रमाण : (i) ΔABC में F तथा E भुजाएँ AB तथा AC के क्रमशः मध्य-बिंदु है

|

अतः मध्य-बिंदु प्रमेय से

$$FE \parallel BC \text{ तथा } FE = \frac{1}{2} BC$$

या FE || BC तथा FE = BD [चूँकि D BC का मध्य-बिंदु है]

अतः BDEF एक समांतर चतुर्भुज है | **Proved** (i)

(यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है |)

(ii) DF समांतर चतुर्भुज BDEF का विकर्ण है इसलिए

ar(BDF) = ar(DEF) .... (i)

इसीप्रकार, DCEF भी समान्तर चतुर्भुज है और DE इसका विकर्ण है |

ar(CED) = ar(DEF) .... (ii)

और AEDF भी समान्तर चतुर्भुज है और FE इसका विकर्ण है |

तो ar(AEF) = ar(DEF) .... (iii)

समीकरण (i), (ii) और (iii) से

ar(AEF) = ar(BDF) = ar(DEF) = ar(CED) ..... (vi)

अब ar(AEF) + ar(BDF) + ar(DEF) + ar(CED) = ar(ABC)

या ar(DEF) + ar(DEF) + ar(DEF) + ar(DEF) = ar(ABC) समी० (vi)

या 4 ar(DEF) = ar(ABC)

या ar(DEF) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC) **Proved** (ii)

(iii) ar(BDF) + ar(DEF) + ar(AEF) + ar(CED) = ar(ABC)

या ar(BDF) + ar(DEF) + ar(BDF) + ar(DEF) = ar(ABC)

या ar(BDEF) + ar(BDEF) = ar(ABC)

या 2 ar(BDEF) = ar(ABC)

या ar(BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar(ABC) **Proved** (iii)

Q6. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है | यदि AB = CD है, तो दर्शाइए कि

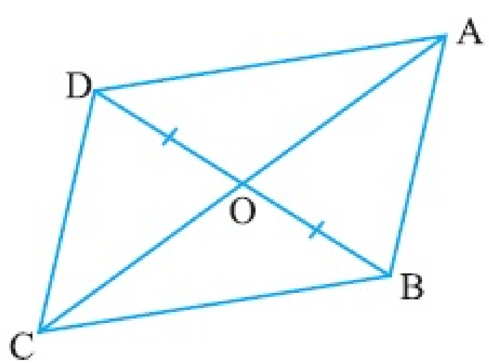
(i) ar (DOC) = ar (AOB)

(ii) ar (DCB) = ar (ACB)

(iii) DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

हल :

दिया है : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है | यदि AB = CD है |



सिद्ध करना है :

(i) ar (DOC) = ar (AOB)

(ii) ar (DCB) = ar (ACB)

(iii) DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

प्रमाण : ΔDOC तथा ΔAOB में

CD = AB (दिया है)

OD = OB (दिया है)

∠COD = ∠AOB (शीर्षाभिमुख कोण)

इसलिए, SAS सर्वांगसमता नियम से

ΔDOC ≅ ΔAOB

∠DCO = ∠BAO ...... (i) BY CPCT

चूँकि ΔDOC ≅ ΔAOB इसलिए

ar (DOC) = ar (AOB) ....(ii) Proved

(सर्वांगसम त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते है)

समी० (ii) दोनों तरफ ar(BOC) जोड़ने पर

ar (DOC) + ar(BOC) = ar (AOB) + ar(BOC)

या ar(DCB) = ar (ACB) **Proved**

समी० (i) से

∠DCO = ∠BAO ...... (एकांतर कोण)

इसलिए, CD || AB और CD = AB दिया है |

अत: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है |

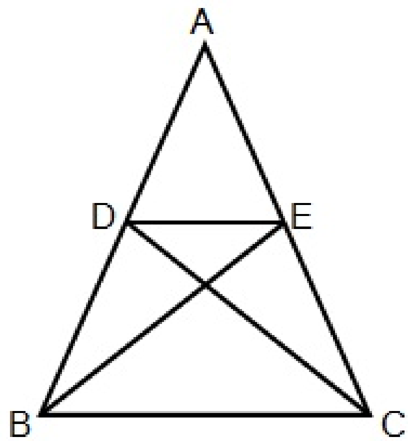
(सम्मुख भुजाओं के एक युग्म बराबर और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होता है)

इसलिए DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है | **Proved**

Q7. बिंदु D और E क्रमश: DABC कि भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar(DBC) = ar(EBC) है | दर्शाइए कि DE || BC है |

हल :

दिया है : बिंदु D और E क्रमश: DABC कि भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar(DBC) = ar(EBC) है |



सिद्ध करना है :

DE || BC

प्रमाण :

ΔDBC और ΔEBC एक ही आधार BC और क्षेत्रफल में बराबर है क्योंकि

ar(DBC) = ar(EBC) दिया है |

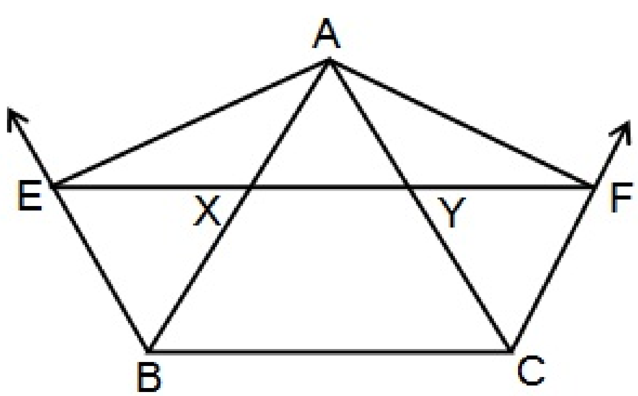
अत: प्रमेय 9.3 से

DE || BC **Proved**

Q8. XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है | यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमश: E और F पर मिलती है, तो दर्शाइए कि:

ar(ABE) = ar(ACF)

हल :



दिया है : XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है | यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमश : E और F पर मिलती है |

सिद्ध करना है :

ar(ABE) = ar(ACF)

रचना : E तथा F को A से मिलाया |

प्रमाण : BC || XY और BE || AC दिया है, इसलिए BCYE एक समांतर चतुर्भुज है |

इसीप्रकार BC || XY और CE || AB दिया है अत: BCFX भी समांतर चतुर्भुज है |

अब समांतर चतुर्भुज BCYE तथा BCFX एक ही आधार BC और BC||XY के मध्य-स्थित है |

इसलिए प्रमेय 9.1 से

ar(BCYE) = ar(BCFX) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते है |)

ΔABE और ||gm BCYE एक ही आधार BE और BE || AC के मध्य-स्थित है |

इसलिए, $ar(ABE) = \frac{1}{2}\, ar(BCYE)$ .... (2)

इसीप्रकार,

ΔACF और ||gm BCFX एक ही आधार CF और CF || AB के मध्य-स्थित है |

इसलिए, $ar(ACF) = \frac{1}{2}\, ar(BCFX)$

अथवा $ar(ACF) = \frac{1}{2}\, ar(BCYE)$ समी० (1) से ..... (3)

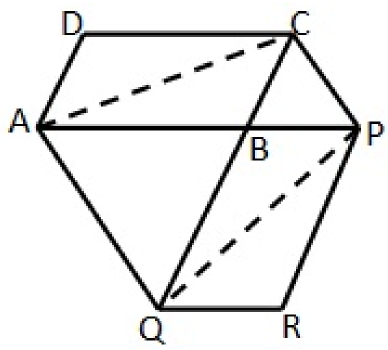
समीकरण (2) तथा (3) से

ar(ABE) = ar(ACF) **proved**

Q9. समान्तर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को एक बिंदु P तक बढाया गया है | A से होकर CP के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई CB को Q पर मिलती है और फिर समांतर चतुर्भुज PBQR को पूरा किया गया है | दर्शाइए कि ar(ABCD) = ar(PBQR) है |

[संकेत: AC और PQ को मिलाइए | अब ar(ACQ) और ar(APQ) कि तुलना कीजिये |]

हल :



दिया है : ABCD तथा PBQR समांतर चतुर्भुज है |

जहाँ AQ || CP है |

सिद्ध करना है : ar(ABCD) = ar(PBQR)

प्रमाण : ||gm ABCD का AC एक विकर्ण है |

अत: ar(ABC) = $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) .... (1)

||gm PBQR का PQ भी एक विकर्ण है |

इसलिए ar(PBQ) = $\frac{1}{2}$ ar(PBQR) .... (2)

ΔACQ तथा ΔAPQ एक ही आधार AQ तथा CP || AQ के मध्य स्थित है |

अत: ar(ACQ) = ar(APQ) .... (3)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

समीकरण (3) में दोनों तरफ ar(ABQ) घटाने पर

ar(ACQ) - ar(ABQ) = ar(APQ) - ar(ABQ)

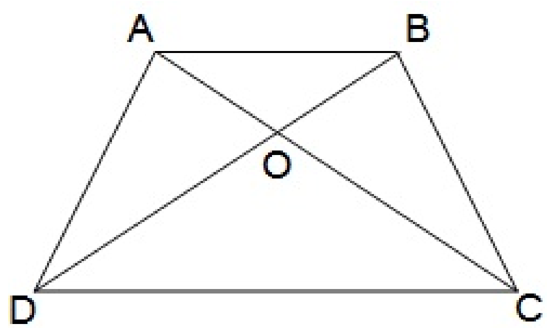
या ar(ABC) = ar(PBQ)

या $\frac{1}{2}$ ar(ABCD) = $\frac{1}{2}$ ar(PBQR) समी० (1) तथा (2)

या ar(ABCD) = ar(PBQR)

Q10. एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं | दर्शाइए कि ar(AOD) = ar(BOC) है |

हल :



दिया है : एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : ar(AOD) = ar(BOC)

प्रमाण : ΔACD तथा ΔBCD एक ही आधार DC तथा AB || DC

के बीच स्थित है | अत:

ar(ACD) = ar(BCD) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

दोनों तरफ ar(COD) घटाने पर

ar(ACD) - ar(COD) = ar(BCD) - ar(COD)

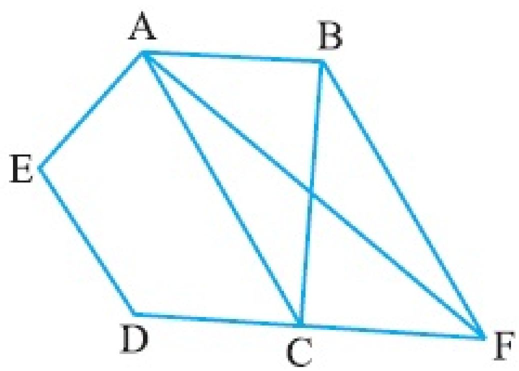
या ar(AOD) = ar(BOC) **Proved**

Q11. ABCDE एक पंचभुज है| B से होकर AC के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई DC को F पर मिलती है | दर्शाइए कि

(i) ar(ACB) = ar(ACF)

(ii) ar(AEDF) = ar(ABCDE)

हल :



दिया है : ABCDE एक पंचभुज है| B से होकर AC के समांतर खिंची गई रेखा बढाई गई DC को F पर मिलती है |

सिद्ध करना है :

(i) ar(ACB) = ar(ACF)

(ii) ar(AEDF) = ar(ABCDE)

प्रमाण : AC || BF दिया है |

ΔACB और ΔACF एक ही आधार AC तथा AC || BF के बीच स्थित है |

अत: ar(ACB) = ar(ACF) .... (1) **Proved**

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

अब दोनों तरफ ar(ACDE) जोड़ने पर

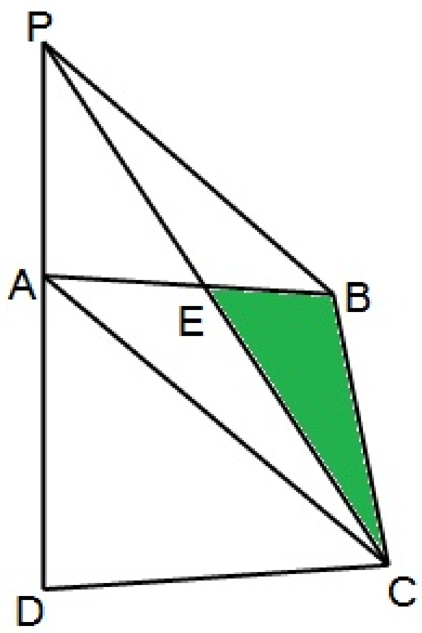
ar(ACB) + ar(ACDE) = ar(ACF) + ar(ACDE)

या ar(ABCDE) = ar(AEDF)

या ar(AEDF) = ar(ABCDE) **Proved**

Q12. गाँव के एक निवासी इतवारी के पास एक चतुर्भुजाकार भूखंड था। उस गाँव की ग्राम पंचायत ने उसके भूखंड के एक कोने से उसका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया ताकि वहाँ एक स्वास्थ्य केन्द्र का निर्माण कराया जा सके। इतवारी इस प्रस्ताव को इस प्रतिबन्ध् के साथ स्वीकार कर लेता है कि उसे इस भाग के बदले उसी भूखंड के संलग्न एक भाग ऐसा दे दिया जाए कि उसका भूखंड त्रिभुजाकार हो जाए। स्पष्ट कीजिए कि इस प्रस्ताव को किस प्रकार कार्यान्वित किया जा सकता है।

हल :



दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है | ar(BEC) स्वास्थ्य केंद्र के लिए भूखंड है |

सिद्ध करना है :

ar(ABCD) = ar(PCD)

रचना : A को C से मिलाया और AB के बढ़े हुए भाग P बिंदु से AC || PB खिंचा |

प्रमाण : ΔACP तथा ΔACB एक ही आधार AC तथा AC || PB के बीच स्थित है |

अत: ar(ACP) = ar(ACB) .... (1)
(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

ar(AEC) दोनों तरफ घटाने पर

ar(ACP) - ar(AEC) = ar(ACB) - ar(AEC)

या ar(AEP) = ar(BEC) .... (2)

अत: ar(BEC) स्वास्थ्य केंद्र है और ar(AEP) के बदले मिला भूखंड है |

अब समीकरण (2) में दोनों तरफ ar(AECD) जोड़ने पर

ar(BEC) + ar(AECD) = ar(AEP) + ar(AECD)

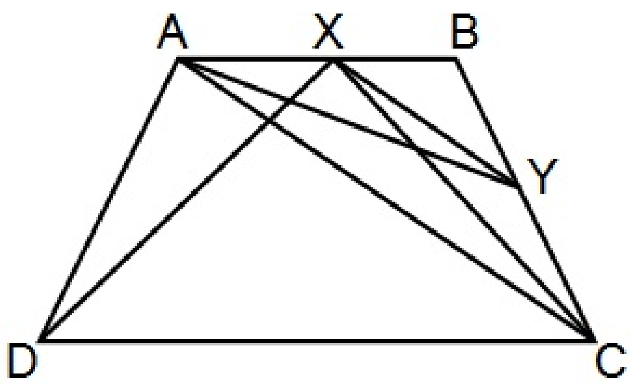
या ar(ABCD) = ar(PCD) **Proved**

Q13. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है और AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है | सिद्ध कीजिए कि

ar (ADX) = ar (ACY) है |

[संकेत : CX को मिलाइए]

हल :



दिया है : ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है और AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : ar (ADX) = ar (ACY)

रचना : CX और AY को मिलाया |

प्रमाण :

ΔADX तथा ΔACX एक ही आधार AX और AB || DC के मध्य स्थित है |

अत: ar(ADX) = ar(ACX) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

अब ΔACY तथा ΔACX एक ही आधार AC तथा AC || XY के बीच स्थित है |

अत: ar(ACY) = ar(ACX) .... (2)

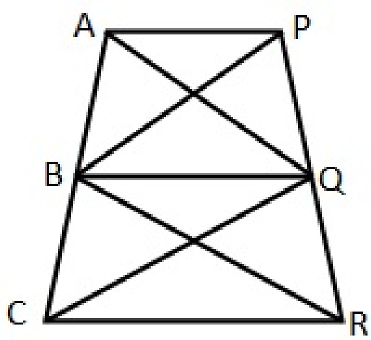
समीकरण (1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है |

ar (ADX) = ar (ACY) **Proved**

Q14. दी गई आकृति में, AP || BQ || CR है | सिद्ध कीजिए कि

ar(AQC) = ar(PBR) है |

हल :



दिया है : दी गई आकृति में, AP || BQ || CR है |

सिद्ध करना है : ar(AQC) = ar(PBR)

प्रमाण : AP || BQ दिया है | अत: ΔABQ तथा ΔPQB एक ही आधार BQ

तथा AP || BQ के मध्य स्थित है |

$\therefore$ ar(ABQ) = ar(PQB) .... (1)

(एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं मध्य स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं |)

इसीप्रकार, BQ || CR दिया है और ΔBQC तथा ΔBQR एक ही आधार BQ तथा BQ || CR के बीच स्थित है |

$\therefore$ ar(BQC) = ar(BQR) .... (2)

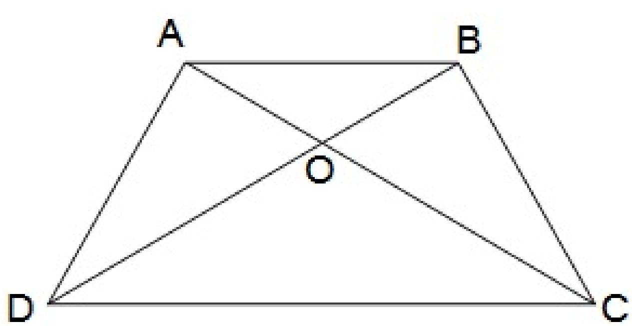
समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर

ar(ABQ) + ar(BQC) = ar(PQB) + ar(BQR)

या ar(AQC) = ar(PBR) **Proved**

Q15. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि ar (AOD) = ar (BOC) है | सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है |

हल :



दिया है : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD

परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं

कि ar (AOD) = ar (BOC) है |

सिद्ध करना है :

ABCD एक समलंब है |

प्रमाण : ar (AOD) = ar (BOC) .... (1) (दिया है)

समीकरण (1) में दोनों तरफ ar(COD) जोड़ने पर

ar (AOD) + ar(COD) = ar (BOC) + ar(COD)

या ar(ACD) = ar(BCD)

अब ΔACD तथा ΔBCD एक ही आधार CD और ar(ACD) = ar(BCD) है | अत: प्रमेय 9.3 से ये दोनों त्रिभुज अवश्य ही एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित है |

इसलिए AB || DC है |

चतुर्भुज ABCD में AB || DC है अत: ABCD एक समलंब है |

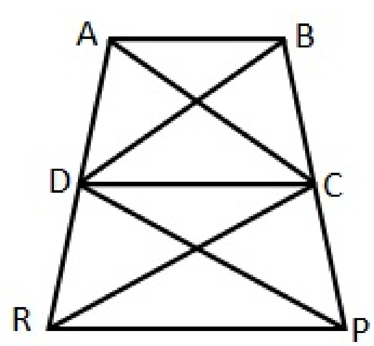
Proved

Q16. दी गई आकृति में, ar(DRC) = ar(DPC) है और

ar(BDP) = ar(ARC) है | दर्शाइए कि दोनों चतुर्भुज

ABCD और DCPR समलंब है |

हल :



दिया है : ar(DRC) = ar(DPC) है और

ar(BDP) = ar(ARC) है |

सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है |

प्रमाण :

ar(ARC) = ar(BDP) .... (1) (दिया है)

और ar(DRC) = ar(DPC) ...... (2) (दिया है)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर

ar(ARC) - ar(DRC) = ar(BDP) - ar(DPC)

या ar(ADC) = ar(BCD) .... (3)

अब ΔADC और ΔBCD एक ही आधार DC और क्षेत्रफल में बराबर हैं समी॰ (3) से अत: प्रमेय 9.3 से

(एक ही आधार और क्षेत्रफल में बराबर त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के मध्य-स्थित होते हैं|)

इसलिए, AB || CD है अत: ABCD एक समलंब है |

अब ΔDRC और ΔDPC एक ही आधार DC और समी॰ (2) से क्षेत्रफल में बराबर हैं | अत: प्रमेय 9.3 से

DC || RP है इसलिए DCPR एक समलंब है |

अत: चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब है | **Proved**