इण्टरमीडिएट परीक्षा, 2015

गणित—द्वितीय प्रश्न-पत्र

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] **335 (HS)** **[पूर्णांक : 50**

1. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि $y = x^{\sin^{-1} x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ख) समान्तर रेखाओं $y = mx + c_1$ तथा $y = mx + c_2$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 1

(ग) यदि बिन्दुओं $(1, a, 4)$ और $(-3, -5, 4)$ के बीच की दूरी 5 मात्रक है तो a का मान ज्ञात कीजिए। 1

(घ) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos \log \frac{x-1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका व्यास वृत्त $x^2 + y^2 = 10x$ की जीवा $y = 2x$ है। 1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

का बिन्दु $x = 0$ पर सांतत्य की जाँच कीजिए। 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^2 + y^2 = 1$ और $y^2 = 4(x-1)$ एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। 2

(ग) $\int \sqrt{1 + \sin x/2}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) रेखा के समीकरण $x - y\sqrt{3} + 6 = 0$ को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए। 2

(ङ) दीर्घवृत्त $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि $x = \tan^{-1} t$ तथा $y = t \sin 2t$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$ को हल कीजिए। 2

(ग) दो समतलों $x + y + 3z = 6$ तथा $3x + y + z = 5$ के मध्य का कोण सदिश विधि से ज्ञात कीजिए। 2

(घ) अतिपरवलय $4x^2 - 16y^2 = 9$ की उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 2

(ङ) सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ पर लम्ब सदिश ज्ञात कीजिए। 2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए—

(क) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 3

(ख) यदि बिन्दुओं A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः $(6, 3), (-3, 5)$ और $(4, -2)$ हैं तथा $P(a, b)$ एक अन्य बिन्दु है तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुजों PBC और ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात $(a + b - 2) : 7$ है। 3

(ग) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित बिन्दुओं θ_1 तथा θ_2 को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

(घ) दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 3

5. निम्नलिखत में से किन्हीं **तीन** खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि $x + y = 1$, तो फलन xy^2 का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए। 3

(ख) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्न अवरोधों के अन्तर्गत हल ज्ञात कीजिए— $x + 3y \le 60,\ x + y \ge 10, x \le y, x \ge 0, y \ge 0$ तथा $Z = 3x + 9y$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। 3

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left\{\log \frac{y}{x} + 1\right\}$ का हल ज्ञात कीजिए। 3

(घ) $\int \frac{dx}{x(x^{3/2} + 1)}$ को हल कीजिए। 3

6. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) $x^2 \cos x$ का प्रथम सिद्धान्त से x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 4

(ख) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके दो व्यासों के समीकरण $2x + y + 4 = 0$ और $x - y - 1 = 0$ और वृत्त बिन्दु $(1, 1)$ से गुजरता है। 4

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) यदि अतिपरवलयों $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ की उत्केन्द्रताएँ क्रमशः e_1 और e_2 हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$. 4

(ख) यदि मूलबिन्दु $(0, 0)$ को बिन्दु $(1, -2)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाए तथा अक्षों को $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ के कोण पर घुमा दिया जाए तो समीकरण $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 36x + 48y + 41 = 0$ का परिवर्तित रूप ज्ञात कीजिए। 4

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) वक्र $y = \log x$, X-अक्ष, $x = \frac{1}{2}$ तथा $x = \frac{3}{2}$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) बिन्दु $(1, 5)$ पर फलन $f(x) = x^2 - 2x + 4$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 4