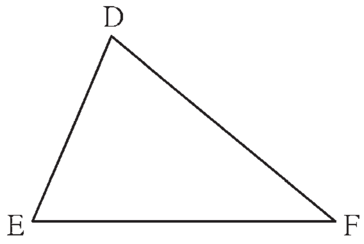
13

مثلثوں کی متماثلت

آیئے ذرا یاد کریں



متصلہ شکل کی مدد سے درج ذیل سوالات کے جوابات معلوم کیجیے۔

(i) ضلع DE کے مقابل کا زاویہ کون سا ہے؟

(ii) ∠E، کس ضلع کے مقابل کا زاویہ ہے؟

(iii) ضلع DE اور ضلع DF کو شامل کرنے والا زاویہ کون سا ہے؟

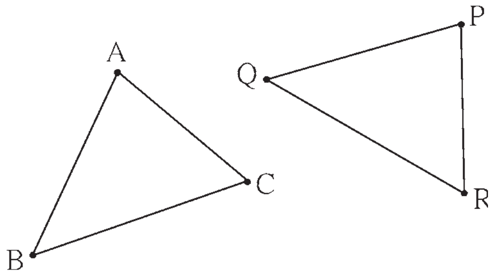
(iv) ∠E اور ∠F کو شامل کرنے والا ضلع کون سے ہیں؟

(v) ضلع DE سے متصل کون سے زاویے ہیں؟

- جو اشکال ایک دوسرے پر پوری طرح منطبق ہو جاتی ہیں انھیں متماثل اشکال کہتے ہیں۔
- جن قطعات خط کی لمبائیاں مساوی ہوں انھیں متماثل قطعات خط کہتے ہیں۔
- جن زاویوں کی پیائشیں مساوی ہوتی ہیں انھیں متماثل زاویے کہتے ہیں۔

آیئے سمجھ لیں

مثلثوں کی متماثلت (Congruence of triangles)



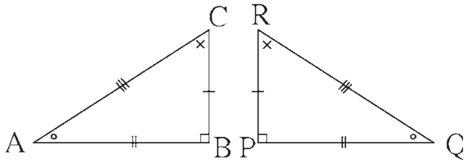
عملی کام : متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے۔

شفاف ٹریسنگ کاغذ پر △ABC بنایئے اور کاغذ کو △PQR پر رکھ کر مشاہدہ کیجیے۔نقطہ A، نقطہ P پر، نقطہ B، نقطہ Q پر اور نقطہ C، نقطہ R پر آتا ہے تو دونوں ہی مثلث ایک دوسرے پر مکمل طور پر منطبق ہوجاتے ہیں۔یعنی ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہ دونوں متماثل مثلث ہیں۔

عملی کام میں △ABC کو △PQR پر رکھنے کا ایک طریقہ دیا گیا ہے۔لیکن نقطہ A، نقطہ Q پر، نقطہ B، نقطہ R پر اور نقطہ C، نقطہ P پر رکھیں تو دونوں مثلث ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے،یعنی مخصوص طریقے پر رکھنے سے ہی ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔اس طریقے سے منطبق ہونے کو ایک سے ایک مطابقت کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔نقطہ A کا نظیری نقطہ P ہے۔اسے A ↔ P اس طرح لکھا جاتا ہے۔نقطہ A کی مطابقت نقطہ P سے ہے۔اسے A↔ P لکھتے ہیں۔یہاں A↔ P، B ↔ Q، C ↔ R مطابقت سے دونوں مثلث متماثل ہیں۔اس طریقے سے جب مثلث متماثل ہوں تو ∠A≅∠P، ∠B≅∠Q، ∠C≅∠R اسی طرح قطعہ PQ ≅ قطعہ AB، قطعہ QR ≅ قطعہ BC، قطعہ RP ≅ قطعہ CA اس طرح کل چھ متماثلت حاصل ہوتی ہیں۔اس لیے

ایسا کہتے ہیں $\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ مطابقت $ABC \leftrightarrow PQR$ کے ذریعے متماثل ہیں۔ اور اسے $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ لکھتے ہیں۔ اس طرح $A \leftrightarrow P$ ، $B \leftrightarrow Q$ ، $C \leftrightarrow R$ نقاط راس کی ایک سے ایک کی مطابقت لکھتے ہیں۔ اس سے حاصل ہونے والی چھے متماثلتیں ان میں شامل ہوتی ہیں۔ اسے دھیان میں رکھیے کہ دو مثلث متماثل ہوں تو انھیں لکھنے کے لیے نقاط راس کی ترتیب اور متماثلت کی ایک سے ایک کی مطابقت پوری ہونی چاہیے۔

آیئے بحث کریں

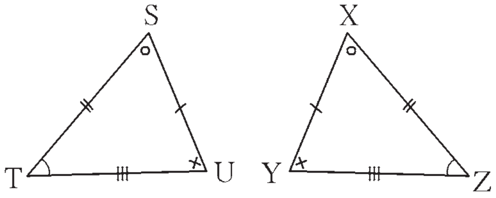


$\triangle ABC$ اور $\triangle PQR$ متماثل مثلثوں کے متماثل اجزاء یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے ہیں۔

انیل، ریحانہ اور سرجیت نے مندرجہ ذیل طریقے سے مثلثوں کی متماثلت لکھا۔

انیل کے لکھنے کا طریقہ :	$\triangle ABC \cong \triangle QPR$	ان میں سے کون سا لکھا ہوا طریقہ
ریحانہ کے لکھنے کا طریقہ :	$\triangle BAC \cong \triangle PQR$	صحیح ہے اور کون سا غلط ہے؟
سرجیت کے لکھنے کا طریقہ :	$\triangle ABC \cong \triangle PQR$	بحث کریں

حل کردہ مثالیں



مثال (1) متصلہ شکل میں مثلثوں کے یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزا متماثل ہیں۔

(i) نقاط راس کی جس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں اس مطابقت سے مثلثوں کی متماثلت دو طریقوں سے لکھیے۔

(ii) $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ یہ صحیح لکھا گیا ہے یا غلط وجہ کے ساتھ لکھیے۔

حل : مشاہدہ کی مدد سے دیے ہوئے مثلثوں میں $XZY \leftrightarrow STU$ ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہیں۔

(i) پہلا طریقہ : $\triangle STU \cong \triangle XZY$

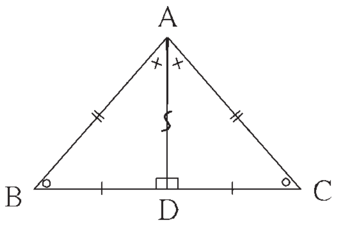
(ii) دوسرا طریقہ : $\triangle UST \cong \triangle YXZ$ اس متماثلت کو دوسرے طریقے سے لکھنے کی کوشش کریں۔

(iii) اگر ان مثلثوں کی متماثلت کو $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھیں تو ضلع $XY \cong$ ضلع ST مطلب ہوتا ہے جو غلط ہے۔

$\therefore$ $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ لکھنا غلط ہے۔

$\triangle XYZ \cong \triangle STU$) لکھنے میں اور کون سی غلطی ہوتی ہے یہ طلبہ خود معلوم کریں۔ لیکن جواب کیوں غلط ہے یہ بتانے کے لیے کوئی بھی ایک غلطی دکھانا کافی ہوتا ہے۔)

مثال (2) درج ذیل میں دکھائی گئی شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ان مثلثوں کے نقاط راس میں ایک سے ایک کی کس مطابقت کی بناء پر وہ مثلث متماثل ہیں بتائیے اور مثلثوں کی متماثلت علامت کے ذریعے ظاہر کیجیے۔



حل : $\triangle ABD$ اور $\triangle ACD$ میں ضلع AD مشترک قطعہ خط ہے۔

ہر قطعہ خط خود کا متماثل ہوتا ہے۔

مطابقت $A \leftrightarrow A$ ،$B \leftrightarrow C$ ،$D \leftrightarrow D$ ، $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

نوٹ : مشترک ضلع پر ' ∫ ' اس قسم کا نشان لگانے کا طریقہ رائج ہے۔

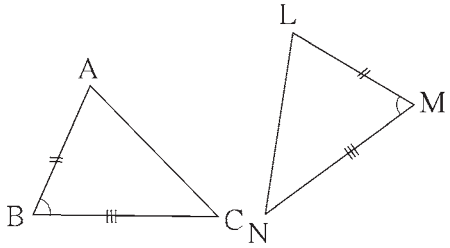
آیئے سمجھ لیں

بعض مرتبہ دیے گئے دو مثلث متماثل ہیں اسے دکھانے کے لیے تمام چھے اجزا کی متماثلت بتانے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ ایک مثلث کے تین مخصوص اجزاء دوسرے مثلث کے تین نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو بقیہ تین اجزاء کی جوڑیاں بھی ایک دوسرے کے متماثل ہوتی ہیں یعنی تین مخصوص اجزاء متماثلت کی آزمائش کا تعین کرتے ہیں۔

ہم نے مثلث بنانے کے کچھ عمل کا مطالعہ کیا ہے۔ جن دیے ہوئے تین اجزاء سے مثلث کی ایک اور صرف ایک شکل بنا سکتے ہیں وہی اجزاء متماثلت کی آزمائش متعین کرتے ہیں ہم اس کی جانچ کریں گے۔

(1) دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ : ضل زاضل آزمائش

اضلاع کی دو جوڑیاں متماثل ہوں اور ان کو شامل کرنے والے زاویے بھی متماثل ہوں ایسے $\triangle ABD$ اور $\triangle LMN$ بنائیے۔

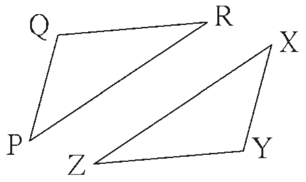


$\triangle ABD$ اور $\triangle LMN$ میں $l(AB) = l(LM)$

$l(BC) = l(MN)$ ، $m\angle ABC = m\angle LMN$

$\triangle ABD$، ٹریسنگ کاغذ پر بنائیے اور ٹریسنگ کاغذ $\triangle LMN$ پر اس طرح رکھیے کہ نقطہ A نقطہ L پر، ضلع AB ضلع LM پر، $\angle B$، $\angle M$ پر اور ضلع BC، ضلع MN پر ہو تو $\triangle ABC \cong \triangle LMN$ دکھائی دیتا ہے۔

(2) تین نظیری اضلاع : ضل ضل ضل آزمائش

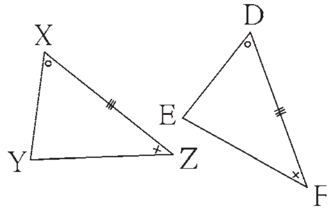


$l(RP) = l(ZX)$ ، $l(QR) = l(YZ)$ ، $l(PQ) = l(XY)$

اس طرح سے $\triangle PQR$ اور $\triangle XYZ$ بنائیے۔

ٹریسنگ کاغذ پر $\triangle PQR$ بنائیے اور اسے $\triangle XYZ$ پر اس طرح رکھیے کہ ایک سے ایک کی مطابقت $P \leftrightarrow X$ ، $Q \leftrightarrow Y$ ، $R \leftrightarrow Z$ ہوجائے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$

(3) دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ضلع : زاضل زا آزمائش



$\triangle XYZ$ اور $\triangle DEF$ اس طرح بنائیے کہ،

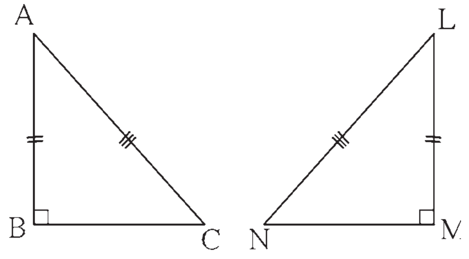
$l(XZ) = l(DF)$، $\angle X \cong \angle D$ اور $\angle Z \cong \angle F$

ٹریسنگ کاغذ پر $\triangle XYZ$ بنائیے اور اس کاغذ کو $\triangle DEF$ پر اس طرح رکھیے کہ $D \leftrightarrow X$، قطعہ $FD \leftrightarrow$ قطعہ XZ اور اس مطابقت کی بناء پر $\triangle XYZ \cong \triangle DEF$ دکھائی دیتا ہے۔

(4) زازاضل (یاضل زازا) آزمائش :

دو مثلثوں میں نظیری زاویوں کی دو جوڑیاں متماثل ہوں تو باقی زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں کیونکہ ہر مثلث کے تینوں زاویوں کی پیائشوں کا مجموعہ $180°$ ہوتا ہے۔ یعنی کوئی بھی دو زاویے اور ایک زاویے کا متصلہ ضلع، دوسرے مثلث کے دو زاویے اور نظیری ضلع کے متماثل ہو تو زاضل زا آزمائش کی شرط پوری ہوجاتی ہے اور وہ دونوں مثلث متماثل ہوتے ہیں۔

(5) قائمۃ الزاویہ مثلثوں کی وتر ضلع آزمائش :

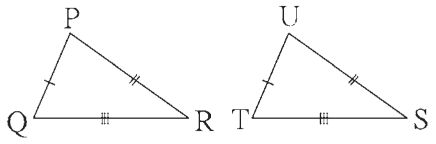


قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع دیا گیا ہو تو ایک اور صرف ایک مثلث بنا سکتے ہیں۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے قائمۃ الزاویہ مثلث کے نظیری متماثل اجزاء والے دو قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیے۔ درج بالا طریقے کے مطابق وہ متماثل ہیں یا نہیں اس کی جانچ کیجیے۔

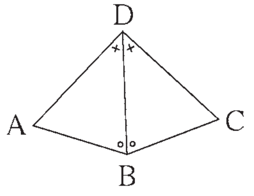
حل کردہ مثالیں

مثال **(1)** درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے اور نقاط راس کی کس ایک سے ایک کی مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔

(i)



(ii)

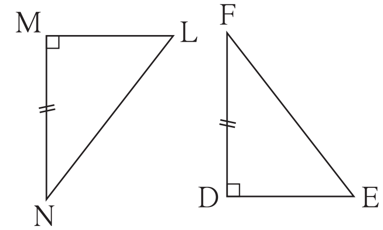


حل : (i) ضل ضل ضل آزمائش کے ذریعے $PQR \leftrightarrow UTS$ کی مطابقت کے ذریعے

(ii) زاضل زا آزمائش کے ذریعے $DBA \leftrightarrow DBC$ کی مطابقت کے ذریعے

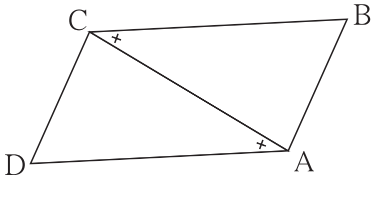
مثال (2) درج ذیل شکل میں مثلثوں کی جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں ۔ ہر شکل کے نیچے مثلثوں کی متماثلت کی آزمائش لکھی گئی ہے۔اس آزمائش کے ذریعے مثلثوں کو متماثل ہونے کے لیے اور کون سی معلومات دینا ضروری ہے اور وہ معلومات دینے کے بعد مثلث کے راسوں کی کس ایک سے ایک کی مطابقت سے متماثل ہوں گے لکھیے ۔

(i)



وتر ضلع آزمائش

(ii)



زا ـ ضل ـ زا آزمائش

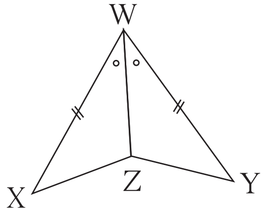
حل : **(i)** دیے گئے مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں ۔ان میں صرف ایک ضلع متماثل ہیں لہٰذا ان کے وتر قطعہ LN اور قطعہ EF متماثل ہوں یہ معلومات دینا ضروری ہے۔ یہ معلومات دینے پر $LMN \leftrightarrow EDF$ مطابقت کی بناء پر مثلث متماثل ہوتے ہیں ۔

(ii) شکل میں قطعہ CA مشترک ضلع ہے یعنی $\angle BAC \cong \angle DCA$ یہ معلومات دینا ضروری ہے، یہ معلومات دینے پر $BAC \leftrightarrow DCA$ مطابقت کی بنا پر مثلث متماثل ہوں گے۔

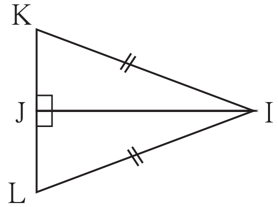
مشقی سیٹ 13.1

.1 درج ذیل اشکال میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں ۔ ہر جوڑی میں مثلث کس آزمائش کے ذریعے اور نقاط راس کی ایک سے ایک کی کس مطابقت کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے ۔

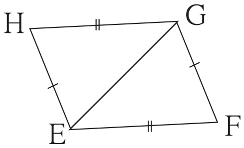
(i)



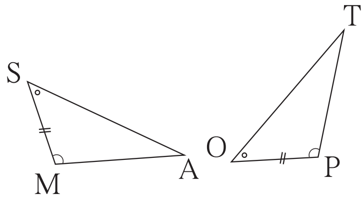
(ii)



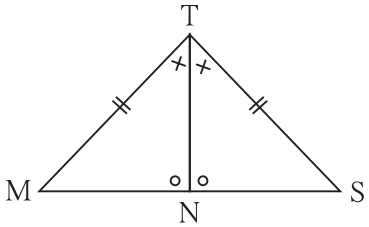
(iii)



(iv)



(v)



یہ میری سمجھ میں آ گیا

(1) ضل زا ضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے دو نظیری اضلاع اور ان کو شامل کرنے والے زاویے کے متماثل ہوں تو وہ مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔

(2) ضل ضل ضل آزمائش : اگر ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے تین نظیری اضلاع کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں ۔

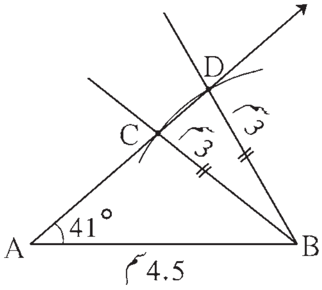
(3) زا ضل زا آزمائش : اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل کرنے والا ایک ضلع دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویے اور ان کو شامل کرنے والے ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوں گے۔

(4) زا زا ضل آزمائش : ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والا ضلع دوسرے مثلث کے دو نظیری زاویے اور ان کو شامل نہ کرنے والے نظیری ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں ۔

(5) وتر ضلع آزمائش : اگر ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع ، دوسرے قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر اور نظیری ضلع کے متماثل ہو تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں ۔

مزید معلومات کے لیے :

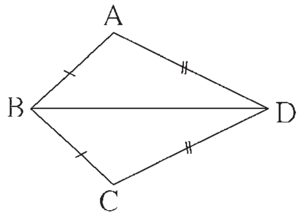
ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والا زاویہ دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہوں تو دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں یا نہیں؟



متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے $\triangle ABC$ اور $\triangle ABD$ میں AB مشترک ضلع ہے۔ ضلع $BD \cong$ ضلع BC اور $\angle A$ مشترک زاویہ ہے لیکن وہ ضلعوں کو شامل کرنے والا زاویہ نہیں ہے۔ یعنی ایک مثلث کے تین اجزاء دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہیں ۔ لیکن وہ مثلث متماثل نہیں ہیں ۔

اس کی مدد سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کو شامل نہ کرنے والے زاویے دوسرے مثلث کے نظیری اجزاء کے متماثل ہوں دونوں مثلث متماثل ہوں گے ایسا نہیں بھی ہوسکتا ہے۔

حل کردہ مثالیں



مثال (1) شکل میں $\square ABCD$ میں مساوی اضلاع کو یکساں نشانات سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس شکل میں متماثل زاویوں کی جوڑیاں ہیں یا نہیں معلوم کیجیے۔

حل : $\triangle ABD$ اور $\triangle CBD$ میں،

ضلع $AB \cong$ ضلع CB ... (دیا ہوا ہے)

ضلع $DA \cong$ ضلع DC ... (دیا ہوا ہے)

ضلع BD مشترک ہے۔

(ضل ضل ضل آزمائش کے ذریعے) ... $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$

(متماثل مثلثوں کے نظیری زاویے) ...

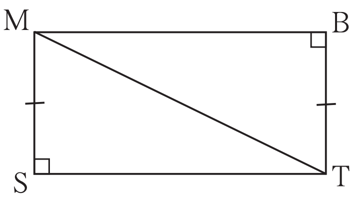
$\therefore \angle BAD \cong \angle BCD$

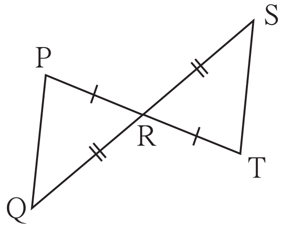
$\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$

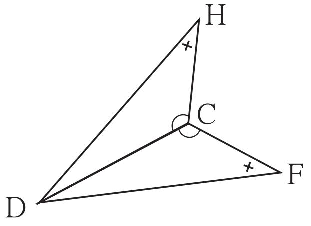
$\angle ADB \cong \angle CDB$

مشقی سیٹ 13.2

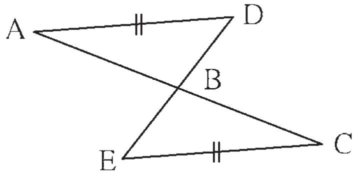
.1 مندرجہ ذیل میں مثلثوں کی ہر جوڑی میں یکساں نشانات سے ظاہر کیے گئے اجزاء متماثل ہیں۔ ہر جوڑی کے مثلث، نقاط راس کی کس مطابقت کے ذریعے اور کس آزمائش کے ذریعے متماثل ہیں لکھیے۔ ہر جوڑی میں مثلثوں کے باقی ماندہ نظیری متماثل اجزاء لکھیے۔

(1)


(2)


(3)


.2* متصلہ شکل میں قطعہ EC ≅ قطعہ AD اور مزید کون سی معلومات دی جائے کہ $\triangle ABD$ اور $\triangle EBC$ ضل زا زا آزمائش کے ذریعے ایک دوسرے کے متماثل ہو جائیں۔



جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 13.1 : 1. (i) ضل زا ضل , XWZ ↔ YWZ (ii) وتر ضلع , KJI ↔ LJI (iii) ضل ضل ضل, HEG ↔ FGE
(iv) زا ضل زا , SMA ↔ OPT (v) ضل زا زا یا زا ضل زا , MTN ↔ STN

مشقی سیٹ 13.2 : 1. (1) $\triangle MST \cong \triangle TBM$, وتر ضلع, ضلع ST ≅ ضلع MB, $\angle SMT \cong \angle BTM$
$\angle STM \cong \angle BMT$ (2) $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$, ضل زا زا, ضلع PQ ≅ ضلع TS, $\angle RPQ \cong \angle RTS$,
$\angle PQR \cong \angle TSR$ (3) $\triangle DCH \cong \triangle DCF$, ضل زا زا, $\angle DHC \cong \angle DFC$, ضلع HC ≅ ضلع FC

2. (1) $\angle ADB \cong \angle CEB$ اور $\angle ABD \cong \angle CBE$ یا $\angle DAB \cong \angle ECB$

❑❑❑