అధ్యాయము

4 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత

(Pair of Linear Equations in Two Variables)

4.1 పరిచయం

సిరి ఒకసారి వాళ్ళ నాన్నగారితో కలిసి పుస్తకాల దుకాణానికి వెళ్ళి 3 నోటు పుస్తకాలు 2 పెన్నులు కొన్నది. ఈ మొత్తం వస్తువులకు వాళ్ళ నాన్నగారు ₹ 80 చెల్లించినాడు. ఆమె మిత్రురాలు లక్ష్మి ఆ నోటు పుస్తకాలు, పెన్నులను ఇష్టపడి అవేరకం 4 నోటు పుస్తకాలు మరియు 3 పెన్నులను ₹110 లకు కొన్నది. ఆమె తరగతిలో స్నేహితులు రుబీనా పెన్నులను, జోసెఫ్ నోటు పుస్తకాలను కొనాలని ఇష్టపడ్డారు. వారు సిరిని ఒక నోటుపుస్తకము వెల, ఒక పెన్ను వెల అడిగారు. కాని ఆమెకు వాటి విలువలు విడివిడిగా తెలియవు. వారు వాటి వెలను ఎలా కనుగొంటారు?

ఈ ఉదాహరణలో ఒక నోటు పుస్తకము వెల, ఒక పెన్ను వెల తెలియదు. ఇవి అవ్యక్తరాశులు. మనకు నిత్యజీవితంలో ఇలాంటి సందర్భాలు చాలా ఎదురవుతాయి.

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

ఈ క్రింద రెండు సందర్భాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

(i) 1కిలో బంగాళాదుంపలు మరియు 2కిలోల టమాటాల మొత్తము వెల ₹30. రెండు రోజుల తరువాత, 2 కిలోల బంగాళాదుంపలు మరియు 4 కిలోల టమాటాల మొత్తము వెల ₹66.

(ii) ఎమ్.కె.నగర్ ఉన్నత పాఠశాల క్రికెట్ జట్టు శిక్షకుడు 3 బ్యాట్‌లు మరియు 6 బంతులను ₹ 3900 లకు కొనెను. తరువాత అతడు మరియొక బ్యాట్ మరియు 2 బంతులను ₹1300 లకు కొనెను.

పై ప్రతీ సందర్భంలో అవ్యక్తరాశులను గుర్తించండి.

ప్రతీ సందర్భంలో రెండు చరరాశులు వుండటాన్ని మనం గమనించవచ్చును.

4.1.1 అవ్యక్త రాశులను మనం ఎలా కనుగొంటాం ?

పరిచయంలో, సిరి 3 నోటుపుస్తకాలను మరియు రెండు పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది. ఒక నోటు పుస్తకము వెల లేదా ఒక పెన్ను వెల మనం ఎలా కనుగొంటాము?

రుబీనా, జోసెఫ్ వాటి వెలలను ఊహించడానికి ప్రయత్నిస్తున్నారు. రుబీనా ప్రతీ నోటు పుస్తకం వెల ₹25 ఉండవచ్చని చెప్పింది. అపుడు 3నోటు పుస్తకాల వెల ₹ 75, రెండు పెన్నుల వెల ₹5 మరియు ప్రతీ పెన్ను వెల ₹2.50 ఉండవచ్చును. జోసెఫ్ ఒక పెన్ను వెల ₹ 2.50 అనేది చాలా తక్కువని భావించాడు. అంతడు ఒక పెన్ను వెల కనీసం ₹16 ఉండాలని భావించాడు. అప్పుడు ప్రతీనోటు పుస్తకం వెల కూడా ₹16 అవుతుంది.

ఈ రకంగా మొత్తం వెల ₹ 80 అయ్యేటట్లు ఒక నోటు పుస్తకం వెల మరియు ఒక పెన్ను వెలకు అనేక విలువలు సాధ్యపడతాయి. మరి సిరి, లక్ష్మిలు వాటిని కొన్నవెల ఎంతో మనం ఎలా కనుగొంటాము? కేవలం సిరి సందర్భాన్ని తీసుకోవడం ద్వారా వాటి విలువలను విడివిడిగా మనం కనుగొనలేము. అందువల్ల మనం లక్ష్మి సందర్భాన్ని కూడా తీసుకోవాలి. కాబట్టి రెండు చరరాశులు ఉన్నపుడు ఒకే ఒక సాధన కావాలంటే కనీసం రెండు స్వతంత్ర సమీకరణాలు కావాలి. ఈ అవ్యక్త చరరాశుల విలువలు కనుగొనుటకు 'మోడల్ పద్ధతి' ఒక పద్ధతి. ఈ

పద్ధతిలో అవ్యక్తరాశులను దీర్ఘచతురస్రాలు లేదా దీర్ఘచతురస్ర భాగాలతో సూచిస్తారు. ఈ మోడల్ పద్ధతిలో మొదటి సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాము.

4.1.2 రెండు సమీకరణాలను ఒకేసారి ఉపయోగించడం

లక్ష్మి కూడా సిరి కొన్న లాంటి నోటు పుస్తకాలు, పెన్నులనే కొన్నది. ఆమె 4 నోటు పుస్తకాలు మరియు 3 పెన్నులకు ₹110 చెల్లించినది.

కావున మనకున్న రెండు సందర్భాలను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

(i) 3 నోటు పుస్తకాలు + 2 పెన్నులు = ₹80.

(ii) 4 నోటు పుస్తకాలు + 3 పెన్నులు = ₹110.

ఇవి మనకు ఒక పెన్నువెల, ఒక నోటు పుస్తకం వెల కనుగొనడానికి ఉపయోగపడతాయా?

రుబీనా ఊహించి చెప్పిన వెలను పరిశీలిద్దాం. ఒక నోటు పుస్తకం వెల ₹25 మరియు ఒక పెన్ను వెల ₹ 2.50 అపుడు

4 నోటు పుస్తకముల వెల : $4 \times 25 =$ ₹100

మరియు 3 పెన్నుల వెల : $3 \times 2.50 =$ ₹7.50

స్నిగ్ధ చెప్పినది సత్యమైన లక్ష్మి దుకాణదారునకు ₹$100 + 7.50 =$ ₹107.50 చెల్లించి వుండాలి. కాని ఆమె ₹110 చెల్లించినది.

ఇప్పుడు జోసెఫ్ చెప్పిన వెలలతో చూద్దాం.

1 పెన్ను వెల ₹16 అయిన 4 నోటుపుస్తకముల వెల : $4 \times 16 =$ ₹64

1పెన్ను వెల ₹16 అయిన 3 పెన్నుల వెల : $3 \times 16 =$ ₹ 48

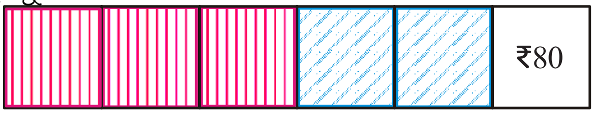
జోసెఫ్ చెప్పినది సత్యమైన, లక్ష్మి దుకాణదారునకు ₹$64 + 48 =$ ₹112 చెల్లించి వుండాలి. కాని ఇది ఆమె చెల్లించిన దాని కన్నా ఎక్కువ.

మరి మనము ఏమి చేయాలి? ఒక నోటు పుస్తకము, 1 పెన్నుల ఖచ్చితమైన విలువను ఎలా కనుగొనాలి?

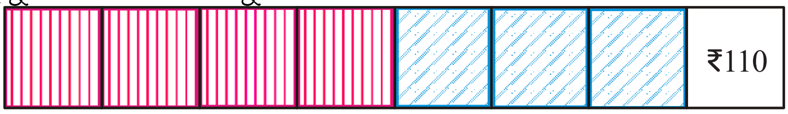
మనకు ఒకే ఒక సమీకరణము వుండి దానిలో రెండు అవ్యక్తరాశులు (చరరాశులు) వుంటే దానికి అనేక సాధనలు కనుగొనవచ్చును.

సోపానం-1 : నోటు పుస్తకములను [ ] తో కలములను [ ] తో సూచించుము.

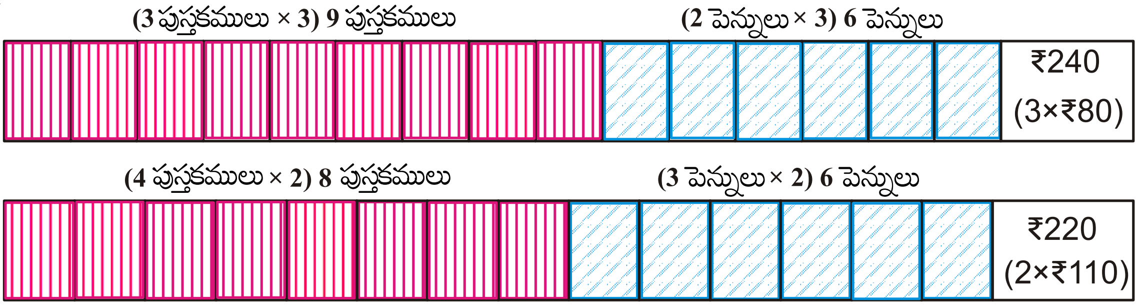
సిరి 3 నోటు పుస్తకములు, 2 పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది.



లక్ష్మి 4 నోటు పుస్తకములు, 3 పెన్నులను ₹110 లకు కొన్నది.



సోపానం-2 : రెండు సందర్భాలలోని ఒక రాశిని సమానం చేయడానికి ఆ రాశులను అనుపాతంలో పెంచాలి (లేదా తగ్గించాలి) .



సోపానం 2లో మనం ఒక సాధారణ అనుపాత తర్కాన్ని పరిశీలించవచ్చును. సిరి 3 పుస్తకములు మరియు 2 పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది కావున 9 పుస్తకములు మరియు 6 పెన్నులకు

$3 \times 3 = 9$ పుస్తకములు మరియు $3 \times 2 = 6$ పెన్నులు, వెల $3 \times 80 =$ ₹240 (1)

అదేవిధంగా, లక్ష్మి 4 పుస్తకములు, 3 పెన్నులను ₹110 లకు కొన్నది కావున

$2 \times 4 = 8$ పుస్తకములు మరియు $2 \times 3 = 6$ పెన్నుల వెల $2 \times 110 =$ ₹220 (2)

(1), (2) సమీకరణములను పోల్చగా, అదనంగా వున్న 1 నోటు పుస్తకం వెల

₹240 - ₹ 220 = ₹20. కావున ఒక పుస్తకం వెల ₹20.

సిరి 3 పుస్తకములు మరియు 2 పెన్నులను ₹80 లకు కొన్నది. ప్రతీ పుస్తకం వెల ₹20 కనుక 3 పుస్తకముల వెల ₹ 60. అపుడు 2 పెన్నుల వెల ₹ 80 - ₹ 60 = ₹ 20.

కావున ప్రతీ పెన్ను వెల ₹20 ÷ 2 = ₹10.

లక్ష్మి సందర్భాన్ని ఈ విలువలతో ప్రయత్నించండి. 4 పుస్తకముల వెల ₹ 80 మరియు 3 పెన్నుల వెల ₹ 30 వాటి మొత్తము ₹ 110 అనేది సత్యము.

పై గణనలు మరియు చర్చను బట్టి ఒకే ఒక సాధన కావాలంటే రెండు చరరాశులు వున్నప్పుడు కనీసం రెండు స్వతంత్ర్య సమీకరణాలు కావాలని మనకు విశదమవుతుంది.

సాధారణంగా $ax + by + c = 0$ రూపంలో వుండి a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలౌతూ కనీసం a లేదా b సున్న కానట్టి సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశులలో x, y లలో రేఖీయ సమీకరణం అంటారు. [ఈ నిబంధన మనం సాధారణంగా $a^2 + b^2 \neq 0$ అని వ్రాస్తాము].

ప్రయత్నించండి

ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సరియైన సమాధానాన్ని గుర్తించండి.

1. ఈ క్రింది సమీకరణాలలో ఏది రేఖీయ సమీకరణం కాదు?

a) $5 + 4x = y + 3$ b) $x + 2y = y - x$

c) $3 - x = y^2 + 4$ d) $x + y = 0$

2. ఈ క్రింది వాటిలో ఏది ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణము ?

   a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

   c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3. క్రింది సంఖ్యలలో ఏది $2(x + 3) = 18$ అనే సమీకరణానికి సాధన?

   a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4. $2x - (4 - x) = 5 - x$ అనే సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచే x విలువ

   a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5. $x - 4y = 5$ అనే సమీకరణానికి

   a) సాధనలేదు b) ఒకే ఒక సాధన

   c) రెండు సాధనలు d) అనంతమైన సాధనలు

4.2 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలకు సాధనలు

ప్రారంభంలో యిచ్చిన నోటుపుస్తకాలు, పెన్నులు ఉదాహరణలో మనకు ఎన్ని సమీకరణాలు వున్నాయి ? మనకు రెండు సమీకరణాలు లేదా రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత వుంది. ఈ రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన అంటే ఏమిటి?

ప్రతీ సమీకరణాన్ని ఉమ్మడిగా తృప్తిపరచే x, y చరరాశుల విలువల జత రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన అవుతుంది.

4.2.1 గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనుట

రెండు చరరాశులలో నున్న రేఖీయ సమీకరణాల జతకు గల సాధనల సంఖ్య ఎంత? ఈ సంఖ్య అనంతమా, ఒకటా లేదా అసలు సాధనలు వుండవా ?

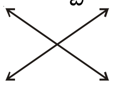
ఇంతకు ముందర మనం రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి మోడల్ పద్ధతి ఉపయోగించాము. ఇప్పుడు సమీకరణాల సాధనకు గ్రాఫ్‌లను ఉపయోగిద్దాము.

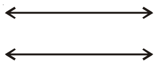
$a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0; (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$ లు రెండు చరరాశులలో గల ఒక జత రేఖీయ సమీకరణాలు.

రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణానికి గీసిన గ్రాఫ్ ఒక సరళరేఖ. ఈ రేఖపై గల వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మము (x, y) లచే సూచించబడే బిందువులు సమీకరణానికి సాధనలు మరియు ఈ రేఖపై లేని వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మాలచే సూచించబడే బిందువులు సాధనలు కావు.

మనకు ఒక సమీకరణాల జత వున్నపుడు, అవి ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలను సూచిస్తాయి. మరి ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలు వుంటే ఆ రెండు రేఖలకు సాధ్యమయ్యే సంబంధాలేవి ? ఆ సంబంధాలకు గల ప్రాధాన్యత ఏమిటి?

ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలు గీసినపుడు, ఈ క్రింది మూడు సందర్భాలలో ఒక్కటి మాత్రమే సాధ్యము.

i) ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకోవచ్చును. 

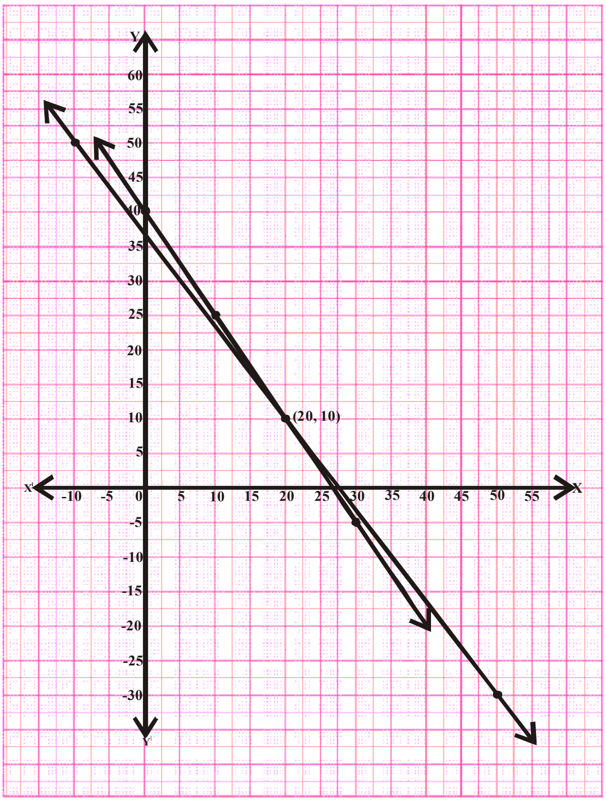
ii) ఆ రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకోకపోవచ్చును అనగా అవి సమాంతర రేఖలు కావచ్చును. 

iii) ఆ రెండు సరళరేఖలు ఏకీభవించవచ్చును.

నిజానికి ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒకటే, మొదటి ఉదాహరణను x, y లలో సమీకరణంగా వ్రాద్దాం. దీనిలో 'x' ఒక నోటు పుస్తకం వెలను, y ఒక పెన్ను వెలను సూచిస్తాయి అనుకొనుము. అప్పుడు ఆ సమీకరణాలు $3x + 2y = 80$ మరియు $4x + 3y = 110$.

$3x + 2y = 80$ సమీకరణానికి		
x	$y = \dfrac{80-3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \dfrac{80-3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \dfrac{80-3(10}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \dfrac{80-3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \dfrac{80-3(30}{2} = -5$	(30, -5)

$4x + 3y = 110$ సమీకరణానికి		
x	$y = \dfrac{110-4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \dfrac{110-4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \dfrac{110-4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \dfrac{110-4(50)}{3} = -30$	(50, -30)



పై బిందువులను ఒక కార్టీజియన్ తలంలో గుర్తించగా ఏర్పడిన గ్రాఫ్‌ను పరిశీలిస్తే, ఆ రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు (20, 10) అని గమనించవచ్చును.

ఈ x మరియు y విలువలను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా మనకు $3(20) + 2(10) = 80$ మరియు $4(20) + 3(10) = 110$.

కాబట్టి గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా ప్రతీ నోటు పుస్తకం వెల ₹20 మరియు ప్రతీ పెన్ను ఖరీదు ₹10 అని కనుగొనబడింది. మోడల్ పద్ధతి ద్వారా కూడా మనకు ఇదే సాధన వచ్చిన విషయాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

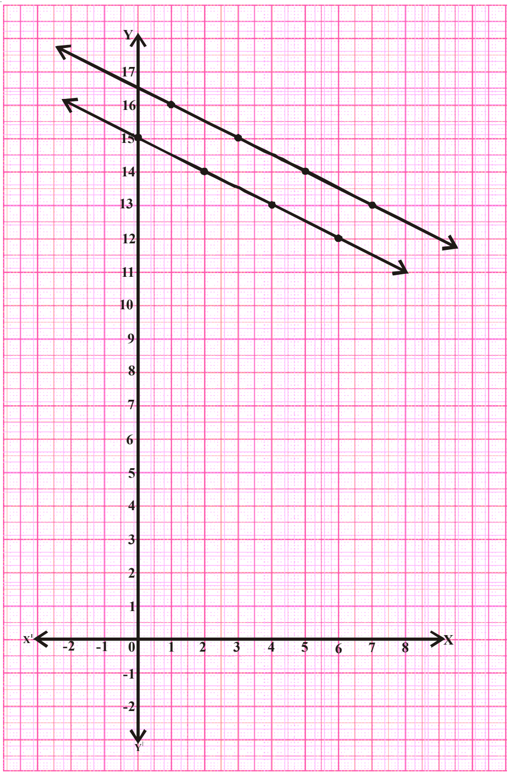
(20, 10) బిందువు ఆ రేఖలకు ఏకైక ఉమ్మడి బిందువు కావున రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఒకే ఒక సాధన వుంటుంది. ఇటువంటి సమీకరణాలను సంగత రేఖీయ సమీకణాల జత అంటారు. వీటికి ఎల్లప్పుడూ ఒకే ఒక సాధన వుంటుంది.

ఇపుడు మనం ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి విభాగంలో ఇచ్చిన మొదటి ఉదాహరణను గమనిద్దాం. మనం దానిలో 1 కిలో బంగాళా దుంపల వెలను, 1 కిలో టమాటాల వెలను విడివిడిగా కనుగొనాలి. 1 కిలో బంగాళా దుంపల వెల ₹x మరియు 1కిలో టమాటాల వెల ₹y అనుకొనుము. అప్పుడు ఏర్పడే సమీకరణాలు $1x+2y=30$ మరియు $2x+4y=66$.

$x + 2y = 30$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

$2x + 4y = 66$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 15$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 14$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 13$	(7, 13)

ఈ సందర్భాన్ని గ్రాఫ్‌లో సూచించినపుడు రెండు సమాంతర రేఖలు ఏర్పడతాయి. ఈ రేఖలు అసలు ఖండించుకొనవు కనుక ఈ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి సాధన లేదు. అనగా వేరు వేరు రోజులలో బంగాళదుంపలు, టమాటాల వెలలు వేరువేరుగా వుంటాయి. నిజజీవితంలో కూడా యిది సత్యమే. ఎందుకంటే కూరగాయల ధరలు ఎప్పుడూ ఒకే విధంగా వుంటాయని మనం భావించలేము. అవి ఎప్పుడూ మారుతూ వుంటాయి. మరియు ఈ మార్పు స్వతంత్ర మార్పు.



ఈ విధంగా సాధన లేని రేఖీయ సమీకరణాల జతలను అసంగత రేఖీయ సమీకరణాల జతలు అంటారు.

అలాగే "ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి" విభాగంలోని రెండవ ఉదాహరణలో ప్రతీ బ్యాటు వెలను ₹ x మరియు ప్రతీ బంతి వెలను ₹ y అనుకొనుము. అప్పుడు ఆ సమీకరణాలను వ్రాయగా $3x + 6y = 3900$ మరియు $x + 2y = 1300$.

$3x + 6y = 3900$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y = \frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100, 600)

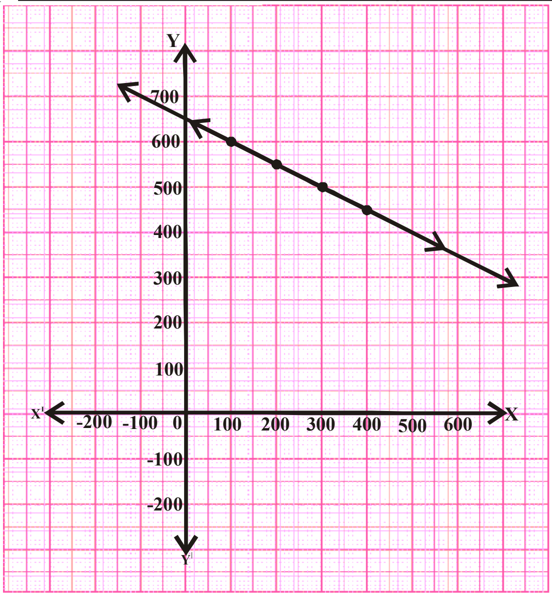
$x + 2y = 1300$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100, 600)

200	$y = \dfrac{3900-3(200)}{6} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{3900-3(300)}{6} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{3900-3(400)}{6} = 450$	(400, 450)

200	$y = \dfrac{1300-200}{2} = 550$	(200, 550)
300	$y = \dfrac{1300-300}{2} = 500$	(300, 500)
400	$y = \dfrac{1300-400}{2} = 450$	(400, 450)

ఈ సమీకరణాలు గ్రాఫ్‌లో ఏకీభవించే రేఖలుగా సూచించబడటాన్ని మనం గమనించవచ్చును. సమీకరణాల సాధనలు ఉమ్మడి బిందువులైతే, ఈ సందర్భంలో ఉమ్మడి బిందువులు ఏవి ?

గ్రాఫ్ నుండి, రేఖపై ఏర్పడిన ప్రతీ బిందువు రెండు సమీకరణాలకు ఉమ్మడి సాధనగా ఉండడాన్ని మనం గమనించవచ్చును. రెండు సమీకరణాలు తుల్యాలు కనుక వాటికి అనంతమైన సాధనలు వుంటాయి. ఇటువంటి సమీకరణాలను రెండు చరరాశులలో గల పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాలు అంటారు.



ప్రయత్నించండి

పైన ఇచ్చిన ఉదాహరణలో ప్రతీ బ్యాటు మరియు ప్రతీ బంతి వెలను మీరు కనుగొనగలరా ?

ఆలోచించి, చర్చించి రాయండి

పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాల జత ఎల్లప్పుడూ సంగత జత అవుతుందా ? ఎందుకు అవుతుంది (లేదా) ఎందుకు కాదు? కారణాన్ని వివరించండి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించండి.

i) $x - 2y = 0$, $3x + 4y = 20$ ii) $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$ iii) $2x - y = 4$, $4x - 2y = 6$

2. ఒక రైలు మార్గంలోని రెండు రైలు పట్టాలను సూచించే సమీకరణాలు $x + 2y - 4 = 0$ మరియు $2x + 4y - 12 = 0$ ఈ సందర్భాన్ని గ్రాఫ్ ద్వారా సూచించండి.

4.2.3 గుణకములు మరియు సమీకరణ వ్యవస్థ స్వభావము మధ్యగల సంబంధము

a_1, b_1, c_1 మరియు a_2, b_2, c_2 లు ఇచ్చిన రెండు చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణాల జతలోని గుణకములు అయిన పై ఉదాహరణలలోని $\dfrac{a_1}{a_2}, \dfrac{b_1}{b_2}, \dfrac{c_1}{c_2}$ ల విలువలు వ్రాసి వాటిని పోల్చుదాము.

సరళరేఖల జతలు	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	నిష్పత్తుల పోలిక	సూచించే గ్రాఫ్	బీజగణిత వివరణ
1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ఖండన రేఖలు	ఏకైక సాధన
2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	సమాంతర రేఖలు	సాధనలేదు
3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$	$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ఏకీభవించే రేఖలు	అనంతమైన సాధనలుండును

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. క్రింది సమీకరణాల జత ఖండనరేఖలా, సమాంతర రేఖలా లేదా ఏకీభవించే రేఖలా సరిచూడండి. ఆ సమీకరణాలు సంగతము అయిన వాటి సాధన కనుగొనుము.

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

సాధన : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ $\quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

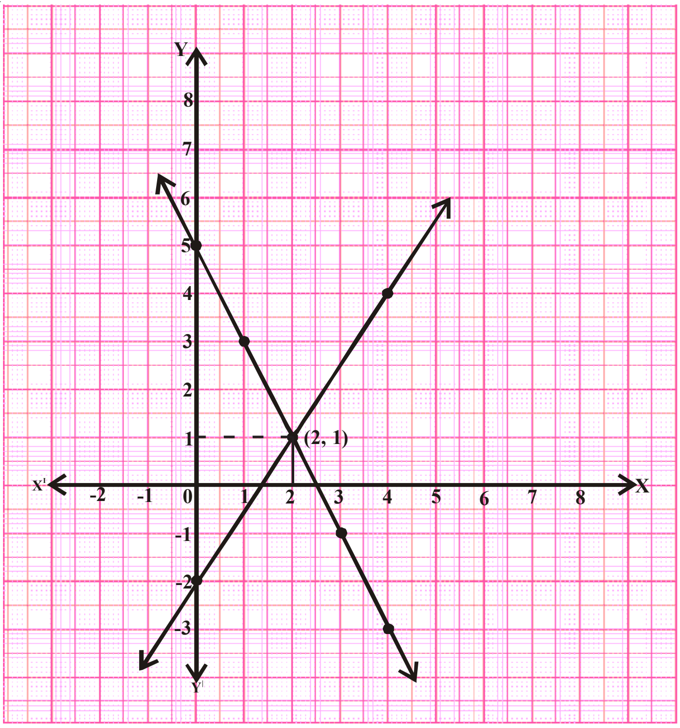
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ కావున అవి ఖండన రేఖలు అనగా సంగత రేఖీయ సమీకరణాల జత

$2x + y = 5$ సమీకరణానికి

x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

$3x - 2y = 4$ సమీకరణానికి

x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)



ఈ సమీకరణాల జతకు ఏకైక సాధన(2,1).

ఉదాహరణ-2. క్రింది సమీకరణాల జత సంగత జత అవునో, కాదో సరిచూడండి.

$3x + 4y = 2$ మరియు $6x + 8y = 4$

గ్రాఫ్ గీయడం ద్వారా మీ జవాబును సరిచూడండి.

సాధన : $3x + 4y - 2 = 0$

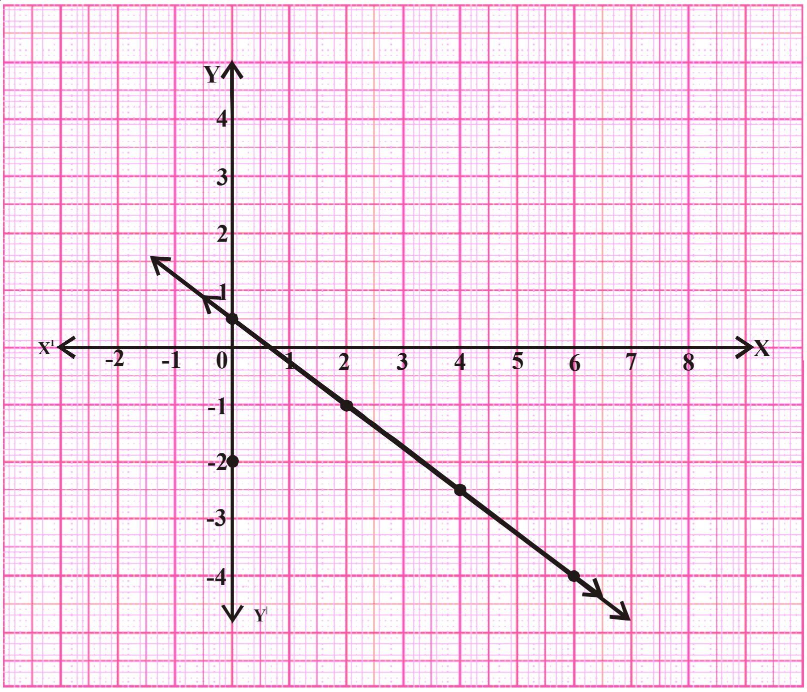
$6x+8y - 4 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ కావున అవి ఏకీభవించే రేఖలు. కావున ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జత పరస్పరాధారిత సమీకరణాల జత

$3x + 4y = 2$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)

$6x + 8y = 4$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)



ఉదాహరణ-3. $4x – 6y = 15$ మరియు $2x – 3y = 5$ సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలేమో సరిచూడండి. ఇంకా వాటికి గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన : $4x – 6y – 15 = 0$

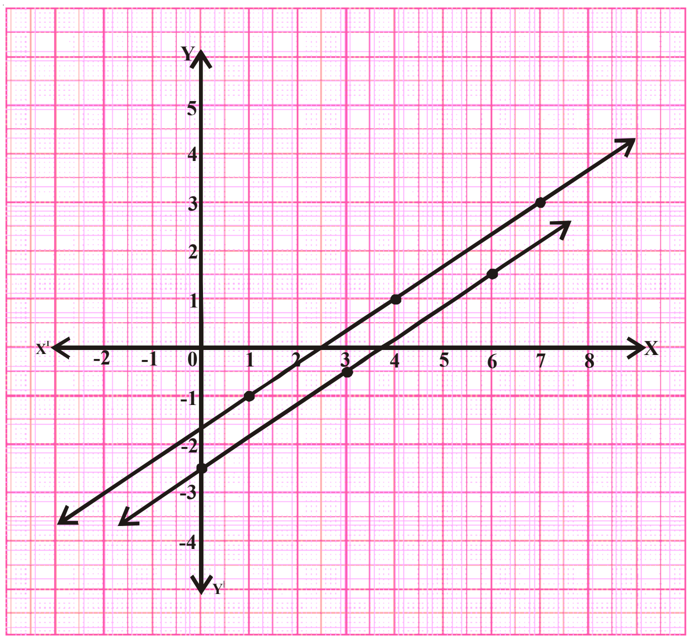
$2x – 3y – 5 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

ఇవి అసంగత సమీకరణాలు. వీటికి సాధనలేదు మరియు వీటి రేఖా చిత్రము (గ్రాఫ్) సమాంతర రేఖలు.

4x – 6y = 9 సమీకరణానికి			**2x – 3y = 5 సమీకరణానికి**		
x	$y = \frac{15-4x}{-6}$	(x, y)	x	$y = \frac{5-2x}{-3}$	(x, y)
0	$y = \frac{15-0}{-6} = \frac{-5}{2}$	(0, –2.5)	1	$y = \frac{5-2(1)}{-3} = -1$	(1, –1)
3	$y = \frac{15-4(3)}{-6} = \frac{-1}{2}$	(3, –0.5)	4	$y = \frac{5-2(4)}{-3} = 1$	(4, 1)
6	$y = \frac{15-4(6)}{-6} = \frac{3}{2}$	(6, 1.5)	7	$y = \frac{5-2(7)}{-3} = 3$	(7, 3)



ఇవి చేయండి

క్రింది సమీకరణాల జతలకు ఏకైక సాధన, అనంత సాధనలా లేక సాధనలు లేవో సరిచూడండి. వాటిని గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

(i) $2x+3y = 1$, $3x-y = 7$ (ii) $x + 2y = 6$, $2x + 4y = 12$ (iii) $3x + 2y = 6$, $6x+4y = 18$

ప్రయత్నించండి

1. క్రింది సమీకరణాల జతకు 'p' యొక్క ఏ విలువకు ఏకైక సాధన వుంటుందో కనుగొనండి.
   $2x + py = -5$ మరియు $3x + 3y = -6$
2. $2x - ky + 3 = 0$, $4x + 6y - 5 = 0$ సమీకరణాల జతకు, k యొక్క ఏ విలువకు అవి సమాంతర రేఖలవుతాయో కనుగొనండి.
3. 'k' యొక్క ఏ విలువకు, $3x + 4y + 2 = 0$ మరియు $9x + 12y + k = 0$ రేఖా సమీకరణాల జత ఏకీభవించే రేఖలవుతాయో కనుగొనండి.
4. 'p' యొక్క ఏ ధనవిలువలకు క్రింది సమీకరణాల జతకు అనంత సాధనలుంటాయో కనుగొనండి.
   $px + 3y - (p - 3) = 0$
   $12x + py - p = 0$

ఇప్పుడు మనం మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ-4. ఒక తోటలో కొన్ని తుమ్మెదలు మరియు పువ్వులు కలవు. ప్రతీ పువ్వుపై ఒక తుమ్మెద వాలినపుడు ఒక తుమ్మెద మిగిలిపోతుంది. ప్రతీ పువ్వుపై రెండు తుమ్మెదలు వాలితే ఒక పువ్వు మిగిలిపోతుంది. అయిన పువ్వులెన్ని ? తుమ్మెదలెన్ని ?

సాధన : తుమ్మెదల సంఖ్య $= x$

పువ్వుల సంఖ్య $= y$ అనుకొనుము.

ప్రతీ పువ్వుపై ఒక తుమ్మెద వాలిన, ఒక తుమ్మెద మిగిలిపోతుంది. కావున $x = y + 1$

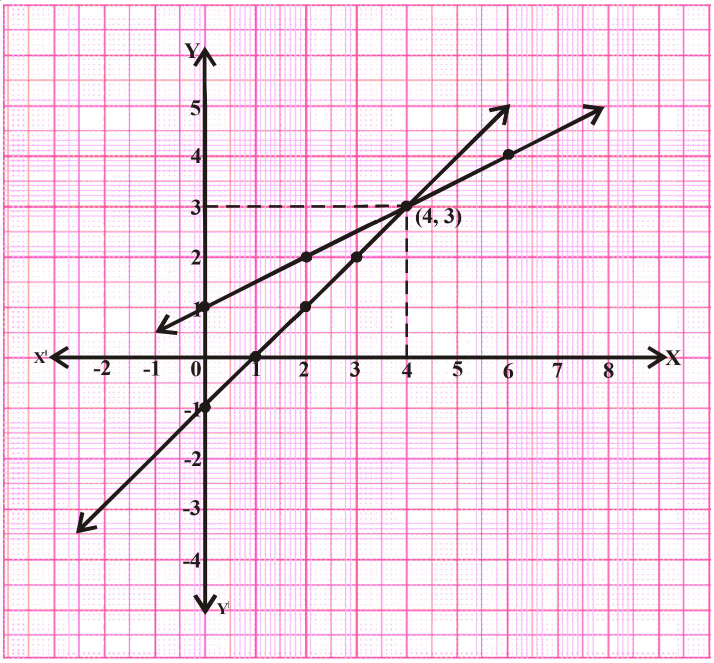
అనగా $x - y - 1 = 0$ (1)

ప్రతీ పువ్వుపై రెండు తుమ్మెదలు వాలితే, ఒక పువ్వు మిగిలిపోతుంది, కావున $x = 2(y - 1)$

అనగా $x - 2y + 2 = 0$ (2)

$x - y - 1 = 0$ సమీకరణానికి		
x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)

$x - 2y + 2 = 0$ సమీకరణానికి		
x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)



అందువలన తుమ్మెదల సంఖ్య 4 మరియు పువ్వుల సంఖ్య 3.

ఉదాహరణ-5. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము చుట్టుకొలత 32మీ. దాని పొడవును 2మీ పెంచి, వెడల్పును 1మీ తగ్గించగా దాని వైశాల్యములో ఏమార్పు లేక యథాతథంగా వుండును. అయిన ఆ స్థలము పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా l, b అనుకొనుము. అయిన వైశాల్యము $= lb$ మరియు

చుట్టుకొలత $= 2(l + b) = 32$ మీ.

$l + b = 16$ లేదా $l + b - 16 = 0$ (1)

దాని పొడవును 2 మీ., పెంచగా ఏర్పడిన క్రొత్త పొడవు $l+2$. అలాగే వెడల్పును 1మీ తగ్గించగా ఏర్పడిన క్రొత్త వెడల్పు $b - 1$.

అపుడు వైశాల్యము $= (l+2)(b-1)$

కాని వైశాల్యములో మార్పులేదు, కాబట్టి

$(l+2)(b-1) = lb$

$lb - l + 2b - 2 = lb$ లేదా $lb - lb = l - 2b + 2$

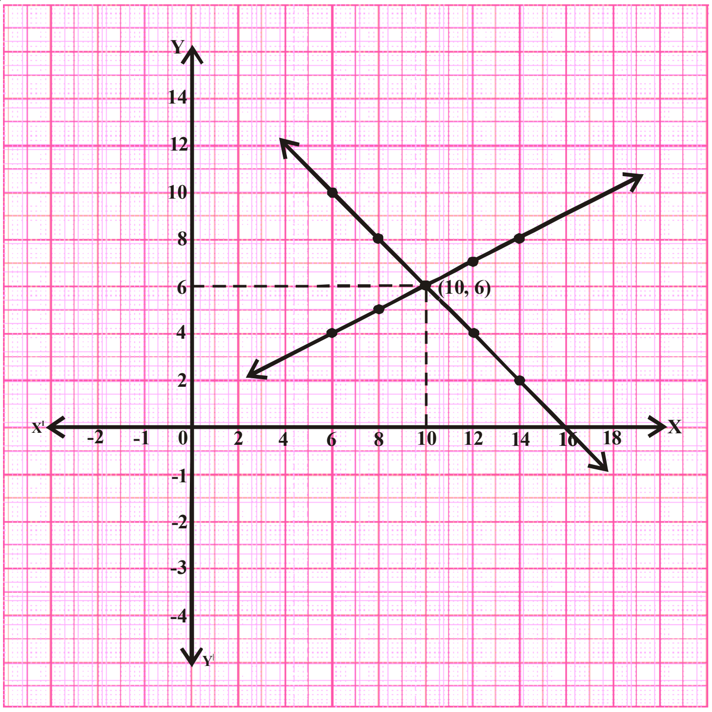
$l - 2b + 2 = 0$ (2)

$l + b - 16 = 0$ సమీకరణానికి		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

$l - 2b + 2 = 0$ సమీకరణానికి		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

కావున ఆ స్థలము యొక్క అసలైన పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 10మీ మరియు 6మీ.

పొడవు కొలతలు X-అక్షముపైనను, వెడల్పుకొలతలు Y- అక్షముపై తీసుకోగా



అభ్యాసము - 4.1

1. గ్రాఫ్‌లు గీయకుండా, $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$, $\frac{c_1}{c_2}$ నిష్పత్తులను పోల్చి, క్రింద యిచ్చిన రేఖా సమీకరణాల జతలు ఖండన రేఖలో, సమాంతర రేఖలో లేదా ఏకీభవించే రేఖలో కనుగొనుము.

   a) $5x - 4y + 8 = 0$, $7x + 6y - 9 = 0$
   b) $9x + 3y + 12 = 0$, $18x + 6y + 24 = 0$
   c) $6x - 3y + 10 = 0$, $2x - y + 9 = 0$

2. క్రింద యిచ్చిన సమీకరణాల జతలు సంగత సమీకరణాలో, అసంగత సమీకరణాలో సరిచూడుము. వాటిని రేఖా చిత్ర పద్ధతిన (గ్రాఫ్ పద్ధతిలో) సాధించుము.

   a) $3x + 2y = 5$, $2x - 3y = 7$
   b) $2x - 3y = 8$, $4x - 6y = 9$
   c) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$, $9x - 10y = 14$
   d) $5x - 3y = 11$, $-10x + 6y = -22$
   e) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$, $2x + 3y = 12$
   f) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
   g) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
   h) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
   i) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

3. నేహ కొన్ని ప్యాంటులను మరియు స్కర్టులను కొనడానికి దుకాణమునకు వెళ్ళినది. ఆమె మిత్రురాలు ప్యాంటులు ఎన్ని, స్కర్టులు ఎన్ని కొన్నావని అడుగగా ఆమె ఇలా జవాబిచ్చింది. "నేను కొన్న స్కర్టుల సంఖ్య, ప్యాంట్ల సంఖ్య రెట్టింపు కన్నా రెండు తక్కువ. అలాగే స్కర్టుల సంఖ్య ప్యాంట్ల సంఖ్యకు నాలుగు రెట్లు కన్నా నాలుగు తక్కువ".

   నేహ ఎన్ని ప్యాంటులు, ఎన్ని స్కర్టులు కొన్నదో తెలుసుకోవడంలో ఆమె మిత్రురాలికి సహాయం చేయండి.

4. పదవతరగతి చదివే 10 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత క్విజ్‌లో పాల్గొన్నారు. దానిలో పాల్గొన్న బాలికల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్య కన్నా 4 ఎక్కువ అయిన ఆ క్విజ్‌లో పాల్గొన్న బాలికల సంఖ్యను, బాలుర సంఖ్యను కనుగొనండి.

5. 5 పెన్సిళ్ళు మరియు 7 కలముల మొత్తము వెల ₹50. అలాగే 7 పెన్సిళ్ళు మరియు 5 కలముల మొత్తము వెల (అవేరకం) ₹46 అయిన ప్రతీ పెన్సిల్ మరియు కలము వెల కనుగొనండి.

6. వెడల్పు కన్నా పొడవు 4మీ ఎక్కువ కలిగిన ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార తోట చుట్టుకొలతలో సగము 36మీ. అయిన ఆతోట కొలతలు కనుగొనుము.

7. $2x + 3y - 8 = 0$ ఒక రేఖీయ సమీకరణము. దీనితో జ్యామితీయంగా ఖండన రేఖలను ఏర్పరిచేటట్లు వేరొక రేఖీయ సమీకరణాన్ని రాయండి.

   అదేవిధంగా సమాంతర రేఖలు అయ్యేటట్లు, ఏకీభవించే రేఖలు అయ్యేటట్లు మరి రెండు సమీకరణాలను రాయండి.

8. ఒక దీర్ఘ చతురస్రానికి పొడవు 5యూనిట్లు తగ్గించి, వెడల్పు 2యూనిట్లు పెంచగా, వైశాల్యము 80చదరపు యూనిట్లు తగ్గును. పొడవును 10 యూనిట్లు పెంచి, వెడల్పు 5 యూనిట్లు తగ్గించగా, వైశాల్యము 50 చదరపు యూనిట్లు పెరుగును. అయిన ఆ దీర్ఘ చతురస్రము పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

9. 10వ తరగతిలో, ముగ్గురేసి విద్యార్థులు ఒక బెంచిపై కూర్చొనగా, ఒక విద్యార్థికి కూర్చునేందుకు స్థలము వుండదు. అలాగని ఒక్కొక్క బెంచిలో నలుగురేసి విద్యార్థులు కూర్చొన్నచో, ఒక బెంచీ ఖాళీగా మిగిలి పోవును. అయిన ఆ తరగతిలోని విద్యార్థులెందరు? బెంచీలెన్ని ? కనుగొనుము.

4.3 రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి బీజగణిత పద్ధతులు

గ్రాఫ్ పద్ధతిలో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన ఎలా కనుగొనాలో మనం నేర్చుకున్నాము. కాని సాధనను సూచించే బిందువు నిరూపకాలు పూర్ణసంఖ్యలు కానపుడు ఈ గ్రాఫ్ పద్ధతి అంత అనుకూలమైనది కాదు. ఉదాహరణకు సాధనలు $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$.... మొదలగు రూపాలలో వుంటే ఆ బిందువులను గ్రాఫ్‌పై గుర్తించేటప్పుడు, గ్రాఫ్ నుండి వాటిని బిందు రూపంలో రాసేటపుడు తప్పుజరిగే అవకాశాలు చాలా ఎక్కువ. మరి ఈ సాధన కనుగొనడానికి ఏవైనా యితర పద్ధతులున్నాయా? అనేక బీజగణిత పద్ధతులున్నాయి. వాటిలో కొన్ని మనం చర్చించుకొందాము.

4.3.1 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనుటలో ఒక చరరాశిని, రెండవ చరరాశి పదములలో సులభంగా రాయగలిగినపుడు ఈ పద్ధతి చాలా ఉపయోగకరం. సోపానాల ప్రకారం పరిశీలిద్దాం.

సోపానము-1 : ఒక సమీకరణంలో ఒక చరరాశిని వేరొక చరరాశి పదములలో రాయుము. చరరాశి 'y' ని చరరాశి 'x' పదములలో రాయాలి.

సోపానము-2 : సోపానము 1లో వచ్చిన చరరాశి y విలువను రెండవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించాలి.

సోపానము-3 : సోపానము 2లో వచ్చిన సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించి x విలువ కనుగొనాలి.

సోపానము-4 : సోపానము 3లో వచ్చిన 'x' విలువని ఇచ్చిన సమీకరణాలలో ఏదో ఒక దానిలో ప్రతిక్షేపించి దానిని చరరాశి y కొరకు సాధించాలి.

సోపానము-5 : వచ్చిన సాధనలోని x, y విలువలను ఇచ్చిన రెండవ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడుము.

ఉదాహరణ-6. ఇచ్చిన సమీకరణాల జతను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.

$$2x - y = 5$$

$$3x + 2y = 11$$

సాధన : $2x - y = 5 \qquad (1)$

$3x + 2y = 11 \qquad (2)$

(1) వ సమీకరణాన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చును

$y = 2x - 5$ (సోపానము 1)

దీనిని (2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$3x + 2(2x - 5) = 11$ (సోపానము 2)

$3x + 4x - 10 = 11$

$7x = 11 + 10 = 21$

$x = 21/7 = 3.$ (సోపానము 3)

$x = 3$ ని సమీకరణం (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$2(3) - y = 5$ (సోపానము 4)

$y = 6 - 5 = 1$

x, y ల విలువలు (2)లో ప్రతిక్షేపించగా $3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11$

కాబట్టి, కావలసిన సాధన $x = 3$ మరియు $y = 1$.

యిచ్చిన రెండు సమీకరణాలను $x = 3$ మరియు $y = 1$ సంతృప్తి పరుస్తాయి (సోపానము 5)

ఇవి చేయండి

క్రింద యిచ్చిన ప్రతీ జత సమీకరణాలను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

1) $3x - 5y = -1$, $x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$, $2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$, $3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$, $3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో, సమీకరణాలలోని ఒక చరరాశి గుణకాలను సమానం చేయడం ద్వారా ఆ చరరాశిని తొలగిస్తాము. దీని వలన ఒక చరరాశిలో ఒకే సమీకరణము ఏర్పడుతుంది. దానిని సాధించడం ద్వారా రెండవ చరరాశి విలువ వస్తుంది. ఈ పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడానికి దీనిలోని ముఖ్యసోపానాలు గమనించండి.

సోపానము-1 : ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలను $ax + by = c$ రూపంలో రాయండి.

సోపానము-2 : ఆ రెండు సమీకరణాలను సరియైన వాస్తవ సంఖ్యలతో గుణించడం ద్వారా ఆ రెండు సమీకరణాలలోని రెండు చరరాశులలో తొలగించదలచిన ఒక చరరాశి గుణకాన్ని సమానం చేయండి.

సోపానము-3 : మనం తొలగించవలసిన చరరాశి గుణకాలు రెండు సమీకరణాలలో ఒకే గుర్తును కలిగి వుంటే ఒక సమీకరణం నుండి వేరొకటి తీసివేయడం ద్వారా ఒక చరరాశిలో ఒక సమీకరణం వస్తుంది. అదే వాటికి వ్యతిరేక గుర్తులుంటే వాటిని కూడాలి.

సోపానము-4 : మిగిలిన చరరాశి విలువ కొరకు ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సోపానము-5 : ఈ వచ్చిన విలువను ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలలో ఒకదానిలో ప్రతిక్షేపించి, మనం ముందు తొలగించిన చరరాశి విలువ కనుగొనాలి.

ఉదాహరణ-7. క్రింద ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

$3x + 2y = 11$

$2x + 3y = 4$

సాధన : $3x + 2y = 11$ (1)

$2x + 3y = 4$ (2) (సోపానము 1)

ఇచ్చిన సమీకరణాల నుండి చరరాశి 'y'ని తొలగించాలనుకొనుము. రెండు సమీకరణాలలో 'y' గుణకాలు వరుసగా 2 మరియు 3. వాటి క.సా.గు. 6. కావున సమీకరణము (1) ని 3చే, సమీకరణము (2) ని 2 చే గుణించాలి.

సమీకరణము (1) × 3 $9x + 6y = 33$ (సోపానము 2)

సమీకరణము (2) × 2 $4x + 6y = 8$

(-) (-) (-) (సోపానము 3)

$5x = 25$

$x = \frac{25}{5} = 5$ (సోపానము 4)

$x = 5$ విలువను సమీకరణం (1)లో వ్రాయగా

$3(5) + 2y = 11$

$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$ (సోపానము 5)

కావున కావలసిన సాధన $x = 5,\ y = -2$.

ఇవి చేయండి

క్రింది ప్రతీజత రేఖీయ సమీకరణాలను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

1. $8x + 5y = 9$, $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$, $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$, $5x - 6y = -9$

ప్రయత్నించండి.

ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల జతను సాధించండి.

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ-8. రుబీనా బ్యాంకు నుండి ₹2000 తీసుకొనదలచినది. ఆమె క్యాషియర్‌ను ఆ మొత్తానికి ₹50 మరియు ₹100 నోట్లు మాత్రమే ఈయమని కోరినది. మొత్తము ఆమెకు 25 నోట్లు వచ్చిన, ఆమెకు ఎన్ని ₹50 నోట్లు, ఎన్ని ₹100 నోట్లు వచ్చినవో చెప్పగలరా ?

సాధన : ఆమెకు వచ్చిన ₹50 నోట్ల సంఖ్యను x అని

₹100 నోట్ల సంఖ్యను y అని అనుకొనుము.

అపుడు, $x + y = 25$ (1)

మరియు $50x + 100y = 2000$ (2)

వీనిని ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో సాధించినది.

(1) వ సమీకరణము నుండి $x = 25 - y$

(2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా $50(25 - y) + 100y = 2000$

$1250 - 50y + 100y = 2000$

$50y = 2000 - 1250 = 750$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$x = 25 - 15 = 10$

కావున రుబీనా పది ₹50 నోట్లను, పదిహేను ₹100 నోట్లను తీసుకొన్నది.

శ్వేత చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి ద్వారా దీనిని సాధించినది.

సమీకరణాలలో, x గుణకాలు వరుసగా 1 మరియు 50 కావున

సమీకరణము (1) × 50 $50x + 50y = 1250$

సమీకరణము (2) × 1 $50x + 100y = 2000$ ఒకే గుర్తు కావున సమీకరణాన్ని తీసివేయగా

$(-)\quad(-)\quad(-)$

$-50y = -750$

లేదా $$y = \frac{-750}{-50} = 15$$

(1)వ సమీకరణంలో y విలువను ప్రతిక్షేపించగా $x + 15 = 25$

$x = 25 - 15 = 10$

కావున ఆమె పది ₹50 నోట్లను, పదిహేను ₹100 నోట్లను తీసుకొన్నది.

ఉదాహరణ-9. ఒక పోటీ పరీక్షలో, ప్రతీ సరియైన సమాధానానికి 3 మార్కులు వేయగా, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 1 మార్కు తగ్గించెదరు. ఈ పరీక్షలో మధు 40 మార్కులు సంపాదించెను. ప్రతి సరియైన సమాధానానికి 4 మార్కులు వేసి, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 2 మార్కులు తగ్గించిన అతనికి 50 మార్కులు వచ్చి ఉండేవి అయిన ఆ పరీక్షలో ఉన్న మొత్తము ప్రశ్నలు ఎన్ని? (మధు పరీక్ష పత్రములోని అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాసెను)

సాధన : సరియైన సమాధానముల సంఖ్య x;

తప్పు సమాధానముల సంఖ్య y అనుకొనుము.

ప్రతీ సరియైన సమాధానానికి 3 మార్కులు వేయగా, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 1 మార్కు తగ్గించెదరు. అపుడు అతనికి వచ్చిన మార్కులు 40.

$3x - y = 40$ (1)

ప్రతీ సరియైన సమాధానానికి 4 మార్కులు వేయగా, ప్రతీ తప్పు సమాధానానికి 2 మార్కులు తగ్గించిన అతనికి 50 మార్కులు వచ్చి ఉండేవి.

$4x - 2y = 50$ (2)

ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

(1)వ సమీకరణము నుండి, $y = 3x - 40$

(2)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా $4x - 2\,(3x - 40) = 50$

$4x - 6x + 80 = 50$

$-\,2x = 50 - 80 = -30$

$x = \dfrac{-30}{-2} = 15$

x విలువను (1)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$3(15) - y = 40$

$45 - y = 40$

$y = 45 - 40 = 5$

కావున పరీక్షా పత్రములోని మొత్తము ప్రశ్నల సంఖ్య = 15 + 5 = 20

ఇది చేయండి

పై ఉదాహరణ-9 లోని సమస్యను చరరాశిని తొలగించే పద్ధతిలో సాధించండి.

ఉదాహరణ-10. మేరి తన కూతురితో ఇలా చెప్పింది. "7 సంవత్సరముల క్రితం నా వయస్సు అప్పటి నీ వయస్సుకు 7 రెట్లు. అలాగే యిప్పటి నుండి 3 సంవత్సరముల తరువాత నా వయస్సు నీ వయస్సుకు మూడు రెట్లు ఉంటుంది" అయిన మేరి మరియు ఆమె కూతురి ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనండి.

సాధన : మేరి ప్రస్తుత వయస్సు x సంవత్సరములు

ఆమె కూతురి వయస్సు y సంవత్సరములు అనుకొనుము.

7 సంవత్సరముల క్రితం, మేరి వయస్సు $(x - 7)$ సం॥ ఆమె కూతురి వయస్సు $(y - 7)$సం॥.

$x - 7 = 7(y - 7)$

$x - 7 = 7y - 49$

$x - 7y + 42 = 0$ (1)

3 సంవత్సరముల తరువవాత, మేరి వయస్సు $x + 3$ మరియు ఆమె కూతురి వయస్సు $y + 3$.

$x + 3 = 3\,(y + 3)$

$x + 3 = 3y + 9$

$x - 3y - 6 = 0$ (2)

చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి

సమీకరణము (1) $\quad x - 7y = -\,42$

సమీకరణము (2) $\quad x - 3y = \ \ 6$

$\underline{(-) \quad (+) \quad (-)}$

$-4y = -48$

x పదానికి ఒకే గుర్తు కావున సమీకరణం (1) నుండి సమీకరణం (2)ను తీసివేయగా

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

ఈ y విలువను (2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$x-3\ (12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

కావున మేరి ప్రస్తుత వయస్సు 42 సంవత్సరములు మరియు ఆమె కూతురి వయస్సు 12 సంవత్సరములు.

ఇది చేయండి

ఉదాహరణ -10 లోని సమస్యను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

ఉదాహరణ-11. ఒక ప్రచురణ కర్త, క్రొత్త పాఠ్యపుస్తకాన్ని సిద్ధం చేసాడు. దాని స్థిర వెల (పునర్విమర్శ, ముద్రణ, టైపింగ్ ఖర్చులు మొదలైనవి) ఒక్కొ పుస్తకానికి ₹ 31.25. ఇవి కాక అదనంగా అతడు ఆ పుస్తకము ముద్రణకై ₹ 320000 ఖర్చు చేసెను. ఆ పుస్తకము టోకు ధర పుస్తకానికి ₹ 43.75 (ప్రచురణ కర్తకు వచ్చు సొమ్ము) ఆ ప్రచురణ కర్త ఖర్చులు, రాబడి సమానం కావాలంటే సమతుల్యస్థానం చేరవలెనంటే ఎన్ని పుస్తకాలను అమ్మాలి?

వస్తువు ఉత్పాదకతకు అయిన ఖర్చు, వాటి అమ్మకాల ద్వారా వచ్చిన రాబడి సమానంగా వుండే స్థానాన్ని సమతుల్యతా స్థానము అంటారు.

సాధన : ప్రచురణ కర్త సమతుల్యతా స్థానం చేరాలంటే ఖర్చులు రాబడి సమానం కావాలి.

ముద్రణ అయి అమ్మకమయిన పుస్తకాల సంఖ్య x

సమతుల్యతా స్థానము y అనుకొనుము.

అపుడు ఆ ప్రచురణ కర్తకు పుస్తకముద్రణ ఖర్చు, రాబడిల సమీకరణాలు

ముద్రణ సమీకరణం $\quad y = 320000 + 31.25x \quad$ ...(1)

రాబడి సమీకరణం $\quad y = 43.75x \quad$ ... (2)

రెండవ సమీకరణము నుండి y విలువను ఒకటవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$43.75x = 3{,}20{,}000 + 31.25x$$

$$12.5x = 3{,}20{,}000$$

$$x = \frac{3{,}20{,}000}{12.5} = 25{,}600$$

25,600 పుస్తకాలను ముద్రించి అమ్మిన అతడు సమతుల్యతా స్థానము చేరును.

అభ్యాసం - 4.2

క్రింది సమస్యలలో ప్రతీ సందర్భంలో రేఖీయ సమీకరణాల జతను వ్రాసి దానికి సాధన కనుగొనండి.

1. ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాల నిష్పత్తి 9 : 7 మరియు వాటి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4 : 3 వారు ప్రతీ ఒక్కరూ నెలకు ₹2000 సొమ్ము ఆదాచేసిన, వారి నెలవారీ ఆదాయాలను కనుగొనండి.

2. ఒక రెండంకెల సంఖ్య మరియు దాని లోని స్థానాలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్యల మొత్తము 66. ఆ సంఖ్య లోని రెండు అంకెల భేదము 2 అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము. అటువంటి సంఖ్యలు ఎన్ని వుంటాయి ?

3. రెండు సంపూరక కోణాలలో పెద్ద కోణము, చిన్న కోణము కన్నా 18° ఎక్కువ. అయిన ఆకోణాలను కనుగొనండి.

4. హైదరాబాద్‌లో టాక్సీ ఛార్జీలు రెండు అంశాలుగా వుంటాయి. మొదటిది స్థిర ఛార్జీ కాగా రెండవది దూరాన్ని బట్టి నిర్ణయించే ఛార్జీ. 10 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసినపుడు అయిన మొత్తము ఛార్జి ₹220. అలాగే 15 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసినపుడు అయిన మొత్తము ఛార్జి ₹310. అయిన
   i. స్థిర ఛార్జీ విలువ మరియు ఒక కిలోమీటరుకు అయ్యే ఛార్జీల విలువ ఎంత ?
   ii. ఒక వ్యక్తి 25 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించిన అతను ఛార్జీల నిమిత్తం చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?

5. ఒక భిన్నంలో లవ, హారాలకు 1 కలిపిన అది $\frac{4}{5}$ అవుతుంది. అలాగే లవ, హారాల నుండి 5 తీసివేసిన ఆ భిన్నము $\frac{1}{2}$ అవుతుంది. అయిన ఆ భిన్నాన్ని కనుగొనండి.

6. ఒక రహదారిపై A, B అనే ప్రదేశాలు 100 కి.మీ. దూరంలో వున్నాయి. A నుండి ఒక కారు, B నుండి ఒక కారు ఒకే సమయంలో వేరు వేరు వేగాలతో ప్రయాణిస్తున్నాయి. ఆ రెండు కార్లు ఒకే దిశలో ప్రయాణం చేసిన అవి 5 గంటల తరువాత కలుస్తాయి. అలాకాక అవి ఒక దానివైపు ఒకటి ప్రయాణం చేసిన 1 గంట తరువాత కలుస్తాయి. అయిన ఆ రెండు కార్ల వేగాలను కనుగొనండి.

7. రెండు కోణాలు పూరక కోణాలు. పెద్ద కోణము కొలత, చిన్న కోణము రెట్టింపు కన్నా 3° తక్కువ అయిన ఆ రెండు కోణాలను కనుగొనండి.

8. ఒక బీజగణిత పాఠ్యపుస్తకంలో మొత్తము 1382 పేజీలు వున్నాయి. దీనిని రెండు భాగాలు చేసిన రెండవ భాగములో, మొదటి భాగము కన్నా 64 పేజీలు ఎక్కువ వున్నాయి. అయిన ప్రతీ భాగములోని పేజీల సంఖ్యను కనుగొనండి.

9. ఒక రసాయనాలు అమ్మే దుకాణదారుని వద్ద రెండు రకాల హైడ్రోక్లోరిక్ ఆమ్ల ద్రావణాలున్నాయి. ఒకటి 50% ద్రావణము మరియు రెండవది 80% ద్రావణము. 100మి.లీ. 68% ద్రావణం కావాలన్న ఆ రెండు ద్రావణాలను ఎంత పరిమాణంలో తీసుకోవాలి ?

10. నీ వద్ద దాచుకొనుటకు ₹12000 సొమ్ము కలదనుకొనుము. దానిలో కొంత మొత్తాన్ని 10% వడ్డీరేటుకు మిగిలినది 15% వడ్డీ రేటు వచ్చునట్లు పొదుపు చేయాలి. అయితే మొత్తము మీద పొదుపు 12% వడ్డీ రేటు రావాలంటే ఏ వడ్డీ రేటున ఎంత సొమ్ము దాచుకోవాలి ?

4.4 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చగలిగే సమీకరణాలు

కొన్ని సమీకరణాల జతలు రేఖీయ సమీకరణాలుకావు. కాని సరియైన ప్రతిక్షేపణల ద్వారా వాటిని రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చవచ్చును. అటువంటి సమీకరణాల సాధనను చర్చిద్దాము. ఒక ఉదాహరణ చూడండి.

ఉదాహరణ-12. క్రింది సమీకరణాల జతను సాధించండి. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాల జతను పరిశీలించండి. అవి రేఖీయ సమీకరణాలు కావు. (ఎందుకు?)

మనకు ఇచ్చిన సమీకరణాలు $2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13$ (1)

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \quad (2)$$

మనం $\frac{1}{x}=p$ మరియు $\frac{1}{y}=q$ ప్రతిక్షేపించగా, క్రింది రేఖీయ సమీకరణాల జత ఏర్పడుతుంది.

$2p+3q=13$ (3)

$5p-4q=-2$ (4)

q గుణకాలు 3, 4 మరియు వాటి క.సా.గు. 12. చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి ద్వారా

సమీకరణం (3) × 4 $8p+12q=52$

సమీకరణం (4) × 3 $15p-12q=-6$

$23p=46$

'q' పదములకు వేరువేరు గుర్తులున్నాయి. కావున ఆ సమీకరణాలను కలుపగా

$$p=\frac{46}{23}=2$$

p విలువను సమీకరణం (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2(2)+3q=13$$

$$3q=13-4=9$$

$$q=\frac{9}{3}=3$$

కాని, $\frac{1}{x}=p=2 \quad \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{y}=q=3 \quad \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

ఉదాహరణ-13. కవిత తన ఇంటిలో మరి రెండు గదులను నిర్మించాలనుకొంది. ఆమె గృహనిర్మాణ కూలీల గురించి ఆరా తీయగా 6 గురు పురుషులు మరియు 8 మంది స్త్రీలు కలిసి ఆ పనిని 14రోజులలో పూర్తి చేయగలరని తెలిసింది. కాని అమెకు తన ఇంటిలోని గదుల నిర్మాణ పని 10 రోజులలోనే పూర్తికావాలి. 8మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు కలిసి ఆ పనిని 10 రోజులలో పూర్తి చేయగలరని తెలుసుకొంది. పురుషుడు లేదా స్త్రీ ఒక్కరే ఆ పనిని పూర్తి చేయాలంటే ఎంత కాలం పడుతుందో? కనుక్కోండి.

సాధన : పురుషుడు ఒక్కడే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు కాలం $=x$ రోజులు అనుకొనుము.

పురుషుడు ఒక్కడే ఒకరోజులో చేయగలిగిన పని $= \frac{1}{x}$ అవుతుంది.

స్త్రీ ఒక్కరే ఆపనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు కాలం $= y$ రోజులు అనుకొనిన

స్త్రీ ఒక్కరే ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $= \frac{1}{y}$ అవుతుంది.

8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు ఆపనిని 10 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

అనగా 8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు ఒకరోజులో

చేయగలిగిన పని $= \frac{1}{10}$ (1)

8 మంది పురుషులు ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $8 \times \frac{1}{x}$. $= \frac{8}{x}$

అదేవిధంగా 12 మంది స్త్రీలు ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

8 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీలు ఒక రోజులో చేయ

గలిగిన మొత్తము పని $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ (2)

(1), (2) సమీకరణాల నుండి $\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \qquad (3)$$

అలాగే, 6 గురు పురుషులు మరియు 8 మంది స్త్రీలు ఆ పనిని 14 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

6 గురు పురుషులు మరియు 8 మంది స్త్రీలు ఒక రోజులో చేయగలిగిన పని $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$\Rightarrow \qquad 14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \qquad (4)$$

(3), (4) సమీకరణాలను పరిశీలించండి. అవి రేఖీయ సమీకరణాలేనా ? వాటి సాధన మనం ఎలా కనుగొంటాము?

$\frac{1}{x} = u$ మరియు $\frac{1}{y} = v$ ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా వాటిని మనం రేఖీయ సమీకరణాలుగా మార్చవచ్చును.

(3) వ సమీకరణాన్ని రేఖీయ సమీకరణం మార్చగా $80u + 120v = 1$ (5)

(4) వ సమీకరణాన్ని రేఖీయ సమీకరణం మార్చగా $84u + 112v = 1$ (6)

80 మరియు 84 ల క.సా.గు. 1680. చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి ద్వారా

సమీకరణం (3) × 21 $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

సమీకరణం (4) × 20 $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$1680u + 2520v = 21$$
$$1680u + 2240v = 20$$
$$(-)\quad (-)\quad (-)$$

uకు ఒకే గుర్తు కావున తీసివేయగా

$$280v = 1$$

$$v = \frac{1}{280}$$

సమీకరణం (5) లో ప్రతిక్షేపించగా $80u + \left(120 \times \frac{1}{280}\right) = 1$

$$80u = 1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$u = \frac{4}{7} \times \frac{1}{80} = \frac{1}{140}$$

కావున పురుషుడొక్కడే ఆ పనిని 140 రోజులలో, స్త్రీ ఒక్కరే ఆ పనిని 280 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

ఉదాహరణ-14. ఒక వ్యక్తి 370 కి.మీ. దూరాన్ని కొంత దూరం రైలులో, కొంతదూరం కారులో ప్రయాణించాడు. అతను 250కి.మీ దూరాన్ని రైలులో, మిగిలిన దూరాన్ని కారులో ప్రయాణించగా అతనికి 4 గంటలు పట్టినది. అదే అతను 130 కి.మీ దూరం రైలులో, మిగిలిన దూరం కారులో ప్రయాణిస్తే అతనికి 18 నిమిషాల కాలం ఎక్కువ పట్టేది. రైలు మరియు కారుల వేగాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : రైలు వేగం x కి.మీ/గం. , కారు వేగం y కి.మీ/గం. అనుకొనుము.

కాలము = $\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$

అని మనకు తెలుసును.

1వ సందర్భంలో, రైలు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం $= \frac{250}{x}$ గం.

కారు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం $= \frac{120}{y}$ గం.

మొత్తం కాలం = రైలు ప్రయాణానికి పట్టినకాలం + కారు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = $\frac{250}{x} + \frac{120}{y}$

కాని మొత్తం ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం 4 గంటలు కావున

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \quad \rightarrow (1)$$

మరల 130 కి.మీ దూరం రైలులో మిగిలిన దూరం కారులో ప్రయాణించినపుడు

130 కి.మీ రైలు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = $\frac{130}{x}$ గం.

240 కి.మీ (370 – 130) కారు ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = $\frac{240}{y}$ గం.

మొత్తం కాలం = $\frac{130}{x} + \frac{240}{y}$

కాని ప్రయాణానికి పట్టిన మొత్తం కాలం 4 గంటల 18 నిమిషాలు $4\frac{18}{60} = 4\frac{3}{10}$ గం॥

అనగా, $$\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \quad (2)$$

(1) (2) సమీకరణాలలో $\frac{1}{x} = a$ మరియు $\frac{1}{y} = b$ ప్రతిక్షేపించగా

$$125a + 60b = 2 \quad (3)$$

$$130a + 240b = 43/10 \quad (4)$$

60, 240 ల క.సా.గు. 240. చరరాశిని తొలగించే పద్ధతిని ఉపయోగించగా

సమీకరణము (3) × 4 $\quad 500a+240b= 8$

సమీకరణము (4) × 1 $\quad 130a+240b = \frac{43}{10}$ (ఒకే గుర్తు కావున తీసివేయగా)

(-) (-) (-)

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\underset{10}{\cancel{370}}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$ ను సమీకరణం (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(\overset{5}{\cancel{125}} \times \frac{1}{\underset{4}{\cancel{100}}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{60}}} = \frac{1}{80}$$

కావున $a = \frac{1}{100}$ మరియు $b = \frac{1}{80}$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{100}$ మరియు $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$

$x = 100$ కి.మీ/గం. మరియు $y = 80$ కి.మీ/గం.

కావున రైలు వేగం 100 కి.మీ/గం. మరియు కారు వేగం 80 కి.మీ/గం.

అభ్యాసం - 4.3

క్రింది సమీకరణాల జతలను, రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చడం ద్వారా వాటికి సాధన కనుగొనండి.

i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

ii) $\frac{x+y}{xy} = 2$

$\frac{x-y}{xy} = 6$

iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

iv) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

v) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$

vi) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ $x \neq 0, y \neq 0$ అయిన

$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ $x \neq 0, y \neq 0$ అయిన

vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. క్రింది సమస్యలకు సమీకరణాల జతలను వ్రాసి వాటికి సాధన కనుగొనండి.

   i. ఒక పడవ నీటిలో ప్రవాహమునకు అభిముఖముగా 30 కి.మీ దూరమును మరియు ప్రవాహపువాలులో 44 కి.మీ. దూరము ప్రయాణించుటకు 10 గంటలు పట్టును. అదే పడవకు 40 కి.మీ అభిముఖముగా, 55 కి.మీ. ప్రవాహపు వాలులో ప్రయాణించుటకు 13 గంటలు కాలము పట్టును అయిన ప్రవాహవేగమును, నిలకడ నీటిలో పడవ వేగమును కనుగొనుము.

   ii. రహీమ్ తన యింటికి పోవుటకు 600 కి.మీ దూరములో, కొంత దూరము రైలులో మరియు కొంతదూరము కారులో ప్రయాణించును. 120 కి.మీ. దూరము రైలులో మిగిలిన దూరము కారులో ప్రయాణమునకు అతనికి 8 గంటలు పట్టును. అదే 200కి.మీ. దూరము రైలులో మిగిలిన దూరము కారులో ప్రయాణము చేసిన అతనికి 20 నిమిషాల కాలము ఎక్కువ పట్టును. అయిన కారు మరియు రైలుల వేగములను కనుగొనండి.

   iii. ఇద్దరు స్త్రీలు మరియు 5 గురు పురుషులు ఒక కుట్టుపనిని 4 రోజులలో చేయగా ముగ్గురు స్త్రీలు మరియు 6గురు పురుషులు దానిని 3రోజులలో చేసెదరు. స్త్రీ ఒక్కరే లేదా పురుషుడు ఒక్కడే ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టుకాలమును కనుగొనుము.

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[పరీక్షలకు నిర్దేశింపబడినది కాదు]

1. క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి:-

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$

(ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

(iv) $\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a + b$

$ax - by = 2ab$

(vi) $2^x + 3^y = 17$

$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

2. ఒక ప్రయోగంలో జంతువులకు నిర్దేశించిన ఆహారాన్ని యివ్వాలి. ప్రతీ జంతువుకు మిగిలిన వాటితోపాటు 20గ్రాముల ప్రోటీన్లు, 6గ్రాముల క్రొవ్వు యివ్వాలి. ఆ ప్రయోగశాల పరిశీలకులు A, B అనే రెండు రకాల ఆహార మిశ్రమాలను కొన్నారు. మిశ్రమం A లో 10% ప్రోటీన్లు మరియు 6% క్రొవ్వువున్నాయి. మిశ్రమం B లో 20% ప్రోటీన్లు, 2% క్రొవ్వు వున్నాయి. అయిన వారు ప్రతీ మిశ్రమానికి ఎన్ని గ్రాములు ఉపయోగించాలి?

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒకే రకమైన రెండు చరరాశులు గల రెండు రేఖీయ సమీకరణాలను రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత అంటారు.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

దీనిలో $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

2. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలను సాధించడానికి అనేక పద్ధతులున్నాయి.

3. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల రేఖా చిత్రము (గ్రాఫ్) రెండు సరళరేఖలచే సూచింపబడుతుంది.

   i. రెండు సరళరేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటే వాటికి ఒకే సాధన వుంటుంది. అప్పుడు ఆ సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలు.

   ii. రెండు రేఖలు ఏకీభవిస్తే వాటికి అనంతమైన సాధనలుంటాయి. ఆ రేఖపై వుండే ప్రతీ బిందువు సాధన అవుతుంది. అపుడు ఆ సమీకరణాలు పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు.

   iii. రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలైన, ఆ సమీకరణాలజతకు సాధనలేదు. అపుడు ఆ సమీకరణాల జత అసంగత సమీకరణాలు.

4. రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన కనుగొనడానికి మనం క్రింది పద్ధతులను చర్చించాం.

   i. మోడల్ పద్ధతి

   ii. రేఖాచిత్రం (గ్రాఫ్) పద్ధతి

   iii. బీజగణిత పద్ధతులు – ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి మరియు చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి.

5. సమీకరణాలలోని చరరాశుల గుణకాలకు, సమీకరణాల స్వభావానికి మధ్య సంబంధము వుంటుంది.

   i. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగత సమీకరణాలు

   ii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత అసంగత సమీకరణాలు

   iii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ అయిన ఆ రేఖీయ సమీకరణాల జత సంగత సమీకరణాలు మరియు పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు

6. నిత్యజీవితంలో అనేక సందర్భాలను గణిత గుర్తులతో రెండు సమీకరణాలుగా రాసినపుడు అవి ప్రారంభంలో రేఖీయ సమీకరణాలుగా వుండవు. కాని వాటిని సరియైన ప్రతిక్షేపణ చేయడం ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చవచ్చును.