46

सदिश
(VECTOR)

सदिश की परिभाषा एवं भेद

जिन राशियों (quantities) की माप की जा सकती है, उन्हें भौतिक राशियाँ कहते है। भौतिक राशियाँ दो प्रकार की होती है –

(i) अदिश राशियाँ (ii) सदिश राशियाँ

अदिश राशियाँ :- जिन भौतिक राशियों में केवल परिणाम होता है किन्तु संबंधित दिशा नहीं, उन्हें अदिश राशियाँ कहते है।

जैसे – द्रव्यमान, आयतन, लम्बाई, तापक्रम, दबाव, घनत्व, गति, कार्य शक्ति, ऊर्जा इत्यादि सभी अदिश राशियाँ है।

सदिश राशियाँ :- जिन भौतिक राशियों में परिणाम के साथ संबंधित दिशा भी होता है, उन्हें सदिश राशि कहते है।

जैसे – बल, वेग, त्वरण, विस्थापन इत्यादि।

सदिशों का ज्यामितीय निरुपण (Geometrical Representation of Vectors) :- दिष्ट रेखाखण्ड OP एक सदिश को प्रदर्शित करता है, जिसे $\vec{OP}$ से सूचित करते हैं। O को मूल बिन्दु तथा P को शीर्ष बिन्दु कहते है। यदि $\vec{OP}=\vec{r}$ तो $\vec{r}$, P का स्थिति सदिश (Position vector) कहलाता है।

सदिश का मापांक (Modulus of vector) :- सदिश के परिणाम के माप को सदिश मापांक कहते है। सदिश $\vec{a}$ के मापांक को संकेत में $|\vec{a}|$ से सूचित करते हैं।

सदिश के प्रकार (Types of Vector)

1. **इकाई सदिश (Unit Vector) :** जिस सदिश का परिणाम इकाई हो, उसे इकाई सदिश कहते है।

   यदि $\vec{r}$ इकाई सदिश हो, तो $|\vec{r}|=1$

   $\vec{r}$ के अनुदिश इकाई सदिश को $\hat{r}$ से सूचित करते है।

   $\therefore \hat{r}=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \Rightarrow \vec{r}=|\vec{r}|\hat{r}$

2. **वास्तविक सदिश (Proper Vector) :** जिस सदिश का परिणाम शून्य न हो, उसे वास्तविक सदिश कहते है।

3. **नियतांक सदिश (Constant Vector) :** उस सदिश को नियतांक सदिश कहते है, जिसमें नियतांक हो।

4. **शून्य सदिश (Null Vector) :** जिस सदिश का परिणाम शून्य हो, तो उसे शून्य सदिश कहते है। इसे संकेत में $\vec{0}$ से सूचित करते है।

5. **समान सदिश (Equal Vector) :** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते है। यदि उनकी दिशाएँ और परिणाम दोनों समान हो।

   $\vec{a}=\vec{b} \quad \Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|$

6. **समदिश तथा असमदिश सदिश (Like and unlike Vectors) :** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समदिश कहलाते है। यदि उनकी दिशाएँ एक ही हो। यदि सदिश $\vec{b}$ और $\vec{c}$ की दिशाएँ एक न हों, तो उन्हें असमदिश सदिश कहते है।

7. **समरेख सदिश (Collinear Vectors) :** दो या दो से अधिक सदिशों को समरेख सदिश कहते है, जो एक ही रेखा के समान्तर हो, चाहे उनका परिणाम कुछ भी हो।

   Ex :- $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समरेख सदिश है।

8. **एक तलीय सदिश (Coplanar Vector) :** उन सदिशों को एक तलीय सदिश कहते है। जो एक ही तल में स्थित हो या एक ही तल के समान्तर हो।

9. **ऋणात्मक सदिश (Negative Vector) :** उस सदिश को ऋणात्मक सदिश कहते है, जिसका परिणाम दिये गये सदिश $\vec{a}$ के परिणाम के बराबर हो, किन्तु दिशा सदिश $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत हो। इसे $-\vec{a}$ से सूचित करते है।

10. **सदिशों का योग (Addition of Vectors) :** मान लिया कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश है तथा O एक निर्देश बिन्दु है तथा $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{AB}=\vec{b}$

    यदि, $\vec{OB}$ तथा $\vec{c}$ तो $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

    $\therefore \vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$

11. **सदिश योग के गुण (Properties of vector addition) :-**

    (i) योग का क्रम विनिमेय नियम (Commutative law) : सदिश योग, क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है, यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो समुच्चय हो, तो $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

    (ii) साहचर्य नियम (Association law) : सदिश योग साहचर्य नियम का पालन करता है।

    यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ कोई तीन सदिश हो, तो $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

    (iii) योग तत्समक (Additive identity) : यदि $\vec{a}$ कोई सदिश हो तथा शून्य $\vec{0}$ सदिश हो, तो $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$

    यहाँ $\vec{0}$ को योग तत्समक कहते है।

    (iv) योग प्रतिकूल (Addition Inverse) : यदि $\vec{a}$ कोई सदिश हो, तो सदिश $(-\vec{a})$, $\vec{a}$ का योग प्रतिकूल सदिश कहलाता है।

    $\therefore \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

12. **अदिश और सदिश का गुणन (Multiplication of vectors by scalars) :** यदि $\vec{a}$ एक सदिश है तथा m एक अदिश है, तो $m\vec{a}$ एक सदिश है, जिसका परिणाम $\vec{a}$ के परिणाम का $|m|$ गुणा है। इसकी दिशा $\vec{a}$ की दिशा में होती है, तो $m>0$ तथा विपरीत दिशा में होती है, तो $m<0$।

    अदिश और सदिश का गुणन साहचर्य और बंटन नियम का पालन करता है –

    (i) $m(n\vec{a})=n(m\vec{a})=(mn)\vec{a}$

    (ii) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$ तथा $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

13. **दो सदिशों के समांतर होने की शर्त (Condition for two vectors being Parallel) :** दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान्तर होंगे।

    यदि $\vec{a}=m\vec{b}$, m एक सदिश है।

14. **कोई दो समरेख सदिश रेखीय आधारित (Linearly dependent)** होते है। यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सरेखी सदिश हो, तो

$\bar{a} = m\bar{b} \quad \Rightarrow (-1)\bar{a} + m\bar{b} = 0$

$\therefore$ $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ रैखिक आधारित है।

दो रैखिक आधारित सदिश समरेख होते हैं।

15. दो असरेखी सदिश रेखीय Independent होते है -

यदि $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ दो असरेखीय सदिश हो, तथा x, y दो असदिश हो, जिससे $x\bar{a} + y\bar{b} = 0$, तो $x = 0$, $y = 0$

अतः तथा रेखीय Independent है।

दो रेखीय Independent सदिश असरेखीय होते है।

16. इकाई सदिश $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

माना कि $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ क्रमशः oX, oY, oZ के अनुदिश इकाई सदिश है।

यदि $OA = x, OB = y$ तथा $OC = z$ तो

$\bar{OA} = x\bar{i}, \bar{OB} = y\bar{k}, \bar{OC} = z\bar{k}$

P का निर्देशांक (अंशों के सापेक्ष) $= (x, y, z)$

यदि $\bar{OP} = \bar{r}$ तो, $\bar{OP} = \bar{OA} + \bar{OB} + \bar{OC}$ से, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

17. $\bar{r}$ का परिमाण (Modulus of $\bar{r}$) :

यदि $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ तो $\bar{r}$ का परिमाण

$r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

18. $\bar{r}$ की दिक्-कोज्या (Direction cosines of $\bar{r}$) : OP द्वारा अक्षों के साथ बने कोणों की कोज्या को दिक्-कोज्या कहते हैं। यदि ox, oy, oz के साथ बने कोण क्रमशः α, β, γ है, जो $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ को OP की दिक्-कोज्या कहते है। इसे संकेत में l, m, n से सूचित करते है।

$l = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma$

$\because \cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}$, तो

$\therefore l = \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $m = \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, तथा

$n = \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

सदिश पर आधारित प्रश्न

1. यदि P और Q की स्थिति (position vector) क्रमशः $= \bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$ तथा $5\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ हो, तो $\bar{PQ}$ क्या होगा ?

Speedy Solution :-

यदि O मूल बिन्दु हो, तो $\bar{PQ} = \bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$, $\bar{OQ} = 5\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$

$\bar{PQ} = \bar{OQ} - \bar{OP} = (5\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}) - (\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}) = 4\bar{i} - \bar{j} + 11\bar{k}$

2. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष क्रमशः A(1, 2, 4), B(−2, 2, 1) तथा C(2, 4, 2) हो, तो त्रिभुज किस प्रकार का होगा ?

Speedy Solution :-

मानलिया कि O मूल बिन्दु है।

$\therefore OA = (2, 4, 2) = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $OB = (-2, 2, 1) = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$

$OC = (2, 4, -3) = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}$

$\therefore \bar{AB} = \bar{OB} - \bar{OA} = (2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) - (\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}) = -3\bar{i} - 3\bar{k}$

$\therefore |\bar{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\bar{BC} = \bar{OC} - \bar{OB} = (2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}) - (-2\bar{i} + 2\bar{j}) + \bar{k} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$

$\therefore |\bar{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

$\bar{CA} = \bar{OA} - \bar{OC} = (\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}) - (2\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}) = -\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}$

$\therefore |\bar{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54}$

$\therefore AB^2 + BC^2 = 18 + 36 = 54 = CA^2$

$\therefore \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

3. यदि $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $|c| = 7$ से सदिश $\bar{a}$ और $\bar{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें ?

Speedy Solution :-

$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

$\therefore (\bar{a} + \bar{b})^2 = (-\bar{c})^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2\bar{a}.\bar{b} = c^2$

$\Rightarrow |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta = c^2$

जहाँ θ सदिश $\bar{a}$ और $\bar{b}$ के बीच का कोण है।

$\Rightarrow 3^2 + 5^2 + 2.3.\cos\theta = (7)^2$

$\Rightarrow 9 + 25 + 30\cos\theta = 49 \quad \Rightarrow 30\cos\theta = 49 - 34 = 15$

$\therefore \cos\theta = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$

4. सदिशों (1, 2, −3), (−2, 3, 4), (3, 0, 1) और (0, 1, −1) का योग ज्ञात करें।

Speedy Solution :-

मानलिया कि $\bar{a} = (1, 2, -3) = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$

$b = (-2, 3, 4) = -2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$

$\bar{c} = (0, 1, -1) = \bar{j} + \bar{k}$

$\therefore \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = 2\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}$

दो सदिशों का अदिश तथा सदिश गुणनफल

1. **दो सदिशों का अदिश गुणन (Scalar or dot Product of two vectors) :** दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का अदिश या बिन्दु गुणन, जिनके बीच का कोण θ है, एक अदिश राशि है जिसे इस प्रकार परिभाषित करते है।

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta = ab\cos\theta$

(i) यदि $\theta = 0$ तो $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta = ab$

(ii) यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$, तो $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\frac{\pi}{2} = ab.0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

(iii) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इकाई सदिश हो, तो $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$

$\therefore \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1.\cos\theta = \cos\theta$

(iv) यदि $\theta = \pi$ तो, $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\pi = ab(-1) = -ab$

(v) एक सदिश का वर्ग (Square of vector) :-

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 = a.a.1 = a^2$

$\therefore (\vec{a})^2 = (\vec{a})^2 = \vec{a}.\vec{a} = a^2$

(vi) दो सदिशों के बीच कोण (Angle between two vectors) :-

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

(vii) सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ की दिशा में प्रक्षेप

$= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\hat{b}$ तथा प्रक्षेप की लम्बाई $\left|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

(viii) सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ सदिश की दिशा में

प्रक्षेप $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.\vec{b} = \hat{a}.\vec{b}$

(ix) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (क्रमविनिमेय नियम)

(x) $(x\vec{a}).\vec{b} = x(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(x\vec{b})$ (साहचर्य नियम)

(xi) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (बंटन नियम)

(xii) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = a^2 - b^2$

(xiii) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$

$= a^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + b^2 = a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$

(xiv) $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b}$

$= a^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$

(xv) दो सदिश $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

दोनों सदिश लम्बवत होंगे यदि $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

(xvi) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

2. **दो सदिशों का रज्रगुणन या सदिश गुणन (cross product or vector product of two vectors) :** दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ जिनके बीच कोण θ है, का सदिश गुणन $\vec{a}\times\vec{b}$ वह सदिश है जिसका परिणाम $ab\sin\theta$ है तथा जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत है।

$\therefore \vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n} = ab\sin\theta\,\hat{n}$

जहाँ $\hat{n}$ इकाई सदिश है जिसकी दिशा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत है।

(i) $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$

(ii) $\vec{a}\times\vec{0} = 0$

(iii) यदि $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, तो सदिश $\vec{a}||\vec{b}$ अथवा या, तो $\vec{a} = \vec{O}$ या $\vec{b} = \vec{O}$

(iv) यदि $\theta = 90°$ i.e $\vec{a}\perp\vec{b}$ तो $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin 90°\,\hat{n} = ab\,\hat{n}$

$\therefore |\vec{a}\times\vec{b}||ab\,\hat{n}| = ab$

(v) त्रिभुज का क्षेत्रफल (जिसकी दो आसन्न भुजाएँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है)

$= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

(vi) $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$ (सदिश गुणन क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करता)

$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

(vii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (सदिश गुणन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता है)

(viii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) \neq \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ (बंटन नियम)

(ix) $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{i}\times\hat{i} = \hat{k}\times\hat{k} = \hat{k}\times\hat{k} = O\ \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j}\times\hat{k} = i, \hat{k}\times\hat{i} = \hat{i}$

$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}, \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$\hat{i}\times\hat{k} = \hat{i}$

(x) यदि त्रिभुज ABC के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a})$

(xi) यदि $\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} = 0$ तो बिन्दु $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{C})$ एक रैखिक होंगे।

i.e ΔABC का सदिश क्षेत्रफल $= 0$

(xii) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Rightarrow a = 0$ या $b = 0$ या $\vec{a}||\vec{b}$

(xiii) यदि $\vec{a}\times\vec{b} = 0$ तो $\vec{a}||\vec{b}$

PREVIOUS YEAR'S RRB'S QUESTIONS

1. यदि $\bar{a}$ एवं $\bar{b}$ दो इकाई सदिश जो θ कोण पर झुके है इस प्रकार है कि $\bar{a}+\bar{b}$ एक इकाई है तब θ का मान होगा -

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) इनमें कोई नहीं

(RRB कोलकाता T.A., 2003)

Speedy Solution : **(A)**

दिया गया है -

$|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|=1$ तब, $|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}.\bar{b}$

$\Rightarrow 1=1+1+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$

2. यदि $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}, \bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ और $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}$ तब $\bar{a}+t\bar{b}$ सदिश $\bar{c}$ के लम्बवत है तो t का मान होगा -

(A) 8 (B) 4 (C) 6 (D) 2

(RRB भुवनेश्वर J.E., 2003)

Speedy Solution : **(A)**

$\bar{a}+t\bar{b}\perp\bar{c}\Rightarrow(\bar{a}+t\bar{b}).\bar{c}=0\Rightarrow\bar{a}.\bar{c}+t\bar{b}.\bar{c}=0\Rightarrow t=-\frac{\bar{a}.\bar{c}}{\bar{b}.\bar{c}}$

$\Rightarrow t=\frac{6+2+0}{-3+2+0}=8$

3. सदिश $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश $4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ पर प्रक्षेप होगा -

(A) $\frac{5\sqrt{6}}{10}$ (B) $\frac{19}{9}$ (C) $\frac{9}{19}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{19}$

(RRB सिकन्दराबाद Diesel Driver, 2002)

Speedy Solution : **(B)**

माना $\bar{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \bar{b}=4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$

तब $\bar{a}$ का $\bar{b}$ पर प्रक्षेप $\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{b}|}=\frac{4+8+7}{\sqrt{16+16+49}}=\frac{19}{9}$

4. यदि $\bar{a}$ और $\bar{b}$ दो सदिश है तथा θ उनके मध्य कोण है तो $\left|\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}\right|$ का मान होगा -

(A) $\sin\frac{\theta}{2}$ (B) $\sin\theta$ (C) $2\sin\theta$ (D) $\sin 2\theta$

(RRB अजमेर Loco Pilot, 2003)

Speedy Solution : **(A)**

$|\bar{a}-\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{a}.\bar{b}\Rightarrow|\bar{a}-\bar{b}|^2=1+1-2|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos\theta$

$\Rightarrow|\bar{a}-\bar{b}|^2=2-2\cos\theta\Rightarrow|\bar{a}-\bar{b}|^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow\left|\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}\right|^2=\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow\left|\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}\right|=\sin\frac{\theta}{2}$

5. यदि सदिश $\hat{i}-2x\hat{j}-3y\hat{k}$ और $\hat{i}+3x\hat{j}+2y\hat{k}$ परस्पर समकोणीय हो तो बिन्दु (x,y) का बिन्दु पथ होगा -

(A) एक वृत्त (B) एक दीर्घ वृत्त (C) एक परवलय (D) एक सरल रेखा

(RRB मुम्बई E.S.M., 2004)

Speedy Solution : **(B)**

दिया गया है कि सदिश $\hat{i}-2x\hat{j}-3y\hat{k}$ व $\hat{i}+3x\hat{j}+2y\hat{k}$ समकोणीय है

अतः $(\hat{i}-2x\hat{j}-3y\hat{k}).(\hat{i}+3x\hat{j}+2y\hat{k})=0$

$\Rightarrow 1-6x^2-6y^2=0 \Rightarrow 6x^2+6y^2=1$ जो एक दीर्घ वृत्त है

6. माना ABC एक त्रिभुज है। उसके शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $7\hat{j}+10\hat{k}$, $-\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$ तथा $-4\hat{i}+9\hat{j}+6\hat{k}$ है तो ΔABC है -

(A) समद्विबाहु (B) समबाहु (C) समकोण (D) इनमें कोई नही

(RRB राँची Diesel Driver, 2003)

Speedy Solution : **(A)**

$\vec{AB}=-\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}, \vec{BC}=-3\hat{i}+3\hat{j}$ और $\vec{CA}=4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore|\vec{AB}|=|\vec{BC}|=3\sqrt{2}$ और $|\vec{CA}|=6$

अतः स्पष्ट है कि, $|\vec{AB}|^2+|\vec{BC}|^2=|\vec{AC}|^2$ अतः त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

7. यदि $|\bar{a}.\bar{b}|=|\bar{a}\times\bar{b}|$ तो $\bar{a}$ और $\bar{b}$ के मध्य कोण होगा -

(A) 0° (B) 180° (C) 135° (D) 45°

(RRB कोलकाता T.A., 2004)

Speedy Solution : **(C)**

$|\bar{a}.\bar{b}|=|\bar{a}\times\bar{b}|\Rightarrow|\bar{a}||\bar{b}||\cos\theta|=|\bar{a}||\bar{b}||\sin\theta|$

$=|\cos\theta|=|\sin\theta|\Rightarrow\theta=45°, 135°$

8. यदि $\bar{a}.\bar{b}=0$ और $\bar{a}+\bar{b}$ सदिश $\bar{a}$ के साथ 30° का कोण बनाता है तो -

(A) $|\bar{b}|=2|\bar{a}|$ (B) $|\bar{a}|=2|\bar{b}|$

(C) $|\bar{a}|=\sqrt{3}|\bar{b}|$ (D) इनमें कोई नहीं

(RRB मालदा E.S.M., 2003)

Speedy Solution : **(C)**

$\bar{a}.\bar{b}=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$

अतः सदिश $\bar{a},\bar{b},\bar{a}+\bar{b}$ एक समकोण त्रिभुज में ΔPQR में से

$\tan 30°=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\Rightarrow|\bar{a}|=\sqrt{3}|\bar{b}|$