गणित

कक्षा 8

सत्र 2019–20

DIKSHA एप कैसे डाउनलोड करें?

विकल्प 1 : अपने मोबाइल ब्राउज़र पर diksha.gov.in/app टाइप करें।

विकल्प 2 : Google Play Store में DIKSHA NCTE ढूंढ़े एवं डाउनलोड बटन पर tap करें।

DIKSHA

मोबाइल पर QR कोड का उपयोग कर डिजिटल विषय वस्तु कैसे प्राप्त करें ?

DIKSHA App को लॉंच करे → App की समस्त अनुमति को स्वीकार करें → उपयोगकर्ता Profile का चयन करें।

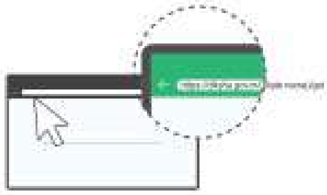
1 पाठ्यपुस्तक में QR Code को Scan करने के लिए मोबाइल में QR Code tap करें।

2 मोबाईल को QR Code पर केन्द्रित करें।

3 सफल Scan के पश्चात् QR Code से लिंक की गई सूची उपलब्ध होगी।

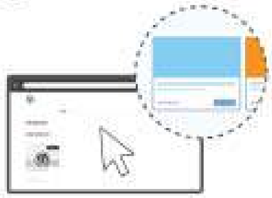
डेस्कटॉप पर QR Code का उपयोग कर डिजिटल विषय–वस्तु तक कैसे पहुँचे ?

1 QR Code के नीचे 6 अंक का Alpha Numeric Code दिया गया है।



2 ब्राउज़र में diksha. gov.in/cg टाईप करें।

3 सर्च बार पर 6 डिजिट का QR CODE टाईप करें।



4 प्राप्त विषय–वस्तु की सूची से चाही गई विषय–वस्तु पर क्लिक करें।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् छत्तीसगढ़, रायपुर

निःशुल्क वितरण हेतु

प्रकाशन वर्ष – 2019

सहयोग

हृदय कांत दीवान (विद्या भवन, उदयपुर)

संयोजक

डॉ. विद्यावती चन्द्राकर

समन्वयक

यू.के चक्रवर्ती

लेखक दल

यू.के. चक्रवर्ती, सी.पी.सिंह, जी.पी.पांडेय, नागेन्द्र भारती गोस्वामी, आर. के. चारी, आर. के देवांगन, बी.एल. गुप्ता, हुलेश पटेल, अनिल गभेल, मीना श्रीमाली, संजय बोल्या, दीपक मंत्री, रंजना शर्मा

आवरण पृष्ठ

रेखराज चौरागड़े

प्रकाशक

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर

मुद्रक

मुद्रित पुस्तकों की संख्या – ....

प्राक्कथन

गणित शिक्षा का उद्देश्य बच्चों को केवल गणित का ज्ञान देना ही नहीं है बल्कि उनमें ऐसी समझ का विकास करना है जिससे वे गणित से भयभीत होने के बजाय उसका आनंद उठा सकें, गणित से संबंधित सार्थक प्रश्न बना सकें, उन्हें हल कर सकें। साथ ही अपने दैनिक जीवन के अनुभवों से निर्मित गणितीय ज्ञान का रूपान्तर अपनी सुविधानुसार कर सकें।

कक्षा आठवीं तक आते आते बच्चे गणित में निहित शक्ति का अनुभव करना प्रारंभ कर देते हैं। यहां वे बड़ी से बड़ी संख्या को अलग–अलग रूप में लिखना, घात की सहायता से चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करना तो सीखते ही हैं साथ ही साथ वे ज्यामितीय आकृतियों के विशिष्ट गुणों को भी पहचानने लगते हैं। वे बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करने के साथ–साथ किसी वस्तु द्वारा स्थान घेरने से संबंधित अवधारणाओं को भी समझने लगते हैं। गणित का सबसे महत्वपूर्ण काम सोच व तर्कशक्ति में सक्षमता हासिल करना और उन्हें वृहद बनाना है।

यह पुस्तक गणित शिक्षा के उद्देश्यों एवं बच्चों के उपलब्धि स्तर को ध्यान में रखकर बनाई गई है। परन्तु, कोई भी पुस्तक अपने आप में पूर्ण नहीं होती अतः इसे और अधिक बोधगम्य एवं रूचिकर बनाने के लिए आपके सुझाव सदैव आंमत्रित हैं। आपके द्वारा दिये गए सुझाव प्रदेश के समस्त छात्रों के हित में होंगे।

इस पुस्तक के लेखन में हमें विभिन्न शासकीय और अशासकीय संस्थाओं तथा प्रबुद्व नागरिकों का मार्गदर्शन और सहयोग मिला है, हम उनके प्रति आभारी हैं। विशेष कर हम आभारी है विद्याभवन सोसाइटी, उदयपुर के जिनका इस पुस्तक के निर्माण में महत्वपूर्ण योगदान रहा है।

राष्ट्र शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (NCERT) ने कक्षा 1 से 8 तक सभी विषयों के लिए ऐसे लक्ष्य निर्धारित किए हैं जो स्पष्ट और मापने योग्य हैं। इन्हें ''अधिगम प्रतिफल'' (Learning outcomes) कहा गया है।

स्कूल शिक्षा विभाग एवं राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, छ.ग. द्वारा शिक्षकों एवं विद्यार्थियों में दक्षता संवर्धन हेतु अतिरिक्त पाठ्य संसाधन उपलब्ध कराने की दृष्टि से Energized Text Books एक अभिनव प्रयास है, जिसे ऑन लाईन एवं ऑफ लाईन (डाउनलोड करने के उपरांत) उपयोग किया जा सकता है। ETBs का प्रमुख उद्देश्य पाठ्यवस्तु के अतिरिक्त ऑडियो–वीडियो, एनीमेशन फॉरमेट में अधिगम सामग्री, संबंधित अभ्यास, प्रश्न एवं शिक्षकों के लिए संदर्भ सामग्री प्रदान करना है।

हमने इस वर्ष अपनी पाठ्यपुस्तकों में इन अधिगम प्रतिफलों के सन्दर्भ में कुछ आवश्यक बदलाव किए हैं। कुछ नई पाठ्यसामग्रियाँ जोड़ी गई हैं, कुछ पाठ एक कक्षा से अन्य कक्षाओं में स्थानांतरित किए गए हैं। इससे शिक्षक और विद्यार्थी भ्रमित न हो।

संचालक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
छत्तीसगढ़, रायपुर

विषय–सूची

अध्याय एक	:	वर्ग एवं धन	1–17
अध्याय दो	:	घातांक	18–24
अध्याय तीन	:	समान्तर रेखाएं	25–39
अध्याय चार	:	बीजीय व्यंजकों के गुणा एवं भाग	40–52
अध्याय पांच	:	वृत्त एवं उसके अवयव	53–68
अध्याय छः	:	सांख्यिकी	69–84
अध्याय सात	:	अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण	85–100
अध्याय आठ	:	बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड	101–109
अध्याय नौ	:	सर्वसमिकाएं	110–118
अध्याय दस	:	बहुभुज	119–134
अध्याय ग्यारह	:	चतुर्भुज की रचना	135–156
अध्याय बारह	:	समीकरण	157–167
अध्याय तेरह	:	प्रतिशतता के अनुप्रयोग	168–182
अध्याय चौदह	:	क्षेत्रमिति–1	183–198
अध्याय पन्द्रह	:	क्षेत्रमिति–3	199–209
अध्याय सोलह	:	आकृतियाँ (द्विविमीय एवं त्रिविमीय)	210–223
अध्याय सत्रह	:	संख्याओं का खेल	224–243
अध्याय अठारह	:	परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं	244–274
अध्याय उन्नीस	:	क्षेत्रमिति–2	275–285
		उत्तरमाला	286–296

8HU4U4

अध्याय–1

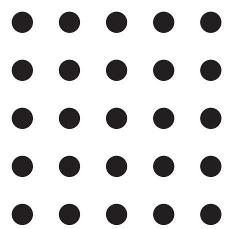
वर्ग एवं घन

SQUARE & CUBE

8N3ZVR

वर्ग संख्याएँ (Square Numbers)

नीचे दिए गए चित्र के प्रत्येक पंक्ति (आड़ी) एवं स्तम्भ (खड़ी) में बिन्दुओं की संख्या समान हैं। इनमें से प्रत्येक में 5–5 बिन्दु हैं, इन बिन्दुओं की कुल संख्या कितनी होगी?



चित्र 1

इसी प्रकार प्रत्येक पंक्ति तथा स्तम्भ में समान संख्या में दो–दो, तीन–तीन, चार–चार, आठ–आठ इत्यादि बिन्दु लेकर कुछ वर्गाकार पैटर्न (प्रतिरूप) बनाइए तथा तालिका की पूर्ति कीजिए–

सारणी 1.1

क्रमांक	प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में बिन्दुओं की संख्या	बनाए गए पैटर्न में बिन्दुओं की कुल संख्या
1.	5	25
2.	2	-------
3.	-------	9
4.	4	-------
5.	-------	-------
6.	-------	-------

अंतिम स्तम्भ की सभी संख्याएँ ऐसी हैं जो एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त की गई हैं। $25 = 5 \times 5$, $4 = 2 \times 2$, ये सभी संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25,... इत्यादि पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square Number) कहलाती हैं। आप भी 5 और पूर्ण वर्ग संख्याएँ लिखें।

इन संख्याओं को हमने स्वयं पूर्ण वर्ग संख्या बनाया है। अब यदि आपको कोई संख्या दी जाए तो कैसे पता करेंगे कि वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं?

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

आप पायेंगे कि 9 बिन्दुओं को तीन–तीन बिन्दुओं की तीन पँक्तियों में जमा सकते हैं,16 बिन्दुओं को चार–चार की चार पँक्तियों में जमा सकते हैं, किन्तु 10, 11, 12 बिन्दु होने पर उन्हें इस तरह नहीं जमाया जा सकता कि पँक्तियों की संख्या और प्रत्येक पँक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर हो। चाहें तो कोशिश करके देख लें। 10, 11, 12 बिन्दु होने पर तो हम इस प्रकार जमा कर देखने का प्रयास कर सकते हैं किन्तु यदि बिन्दुओं की संख्या 109 हो, 784 हो या और भी बड़ी हो तो इस तरह बिन्दुओं को जमा कर जाँचना कठिन हो जायेगा। पूर्ण वर्ग संख्या पहचानने के लिए एक अच्छा तरीका है अभाज्य गुणनखण्ड की विधि।

अभाज्य गुणनखण्ड व पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

पूर्ण वर्ग संख्या में पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर है। जैसे पूर्ण वर्ग संख्या $6 \times 6, 5 \times 5, 3 \times 3, 7 \times 7$ इत्यादि।

जिस संख्या में भी इस तरह गुणनखण्डों के जोड़े पूरे–पूरे बन जाए वही पूर्ण वर्ग संख्या होगी। इसके लिए हम दी गई संख्या के गुणनखण्ड कर लेंगे और फिर जोड़े बनाएँगे।

अभाज्य गुणनखण्ड की विधि

इस विधि में दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करके जोड़े बनाते हैं। जिन संख्याओं में सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं, वे पूर्ण वर्ग संख्या होंगी।

जैसे – (1) **144** को लें

144 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

यहाँ 144 में सभी अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं।

अतः 144 पूर्ण वर्ग संख्या हैं।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(2) **252** को देखें

252 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं – $\underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 7$

इसमें 7 का कोई जोड़ा नहीं है

अर्थात् 252 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

2	252
2	126
3	63
3	21
7	7
	1

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई सारणी में संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

सारणी 1.2

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	क्या सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे हैं?	पूर्ण वर्ग है या नहीं
1.	16	$\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}$	हाँ	पूर्ण वर्ग हैं
2.	32	$\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times2$	नहीं	नहीं
3.	36			
4.	48			
5.	40			
6.	49			
7.	56			
8.	64			

अब इन्हें भी जाँचिए कि नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या हैं या नहीं –

(i) 164 (ii) 256 (iii) 81 (iv) 120 (v) 576
(vi) 205 (vii) 625 (viii) 324 (ix) 216 (x) 196

पूर्ण वर्ग संख्याओं के कुछ गुण

इकाई का अंक देख पूर्ण वर्ग की पहचान–

नीचे सारणी में दी गई पूर्ण वर्ग संख्याओं जैसे 4, 9, 16, 25, 81, 100, 169, 324, 256, 625 आदि को ध्यान से देखिए। क्या कोई ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या है, जिसमें इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 अथवा 8 है? कुछ और संख्याए लेकर देखें क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आइए, इस सारणी को देखें –

सारणी 1·3

संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या	संख्या	पूर्ण वर्ग संख्या
1	1	2	4
3	9	4	16
5	25	6	36
7	49	8	64
9	81	10	100
11	121	12	144
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....

आप इस तालिका को और आगे बढ़ा सकते हैं।

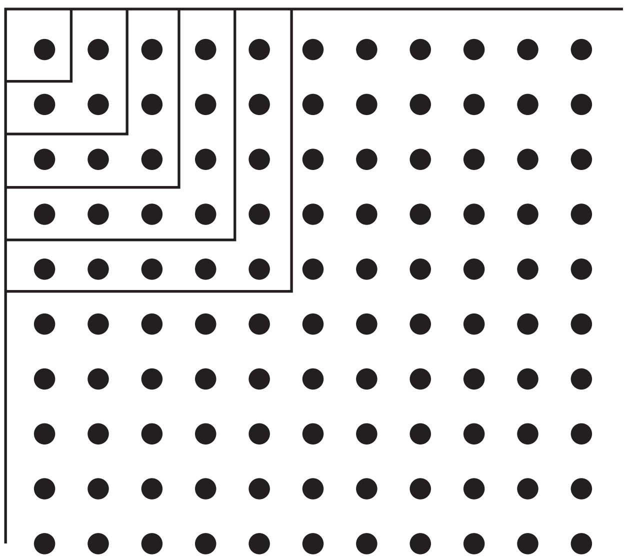
तालिका में दी गई विषम एवं सम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं? नीचे ✓ का चिह्न लगाएँ।

विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम/सम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग – विषम/सम

एक और मज़ेदार बात –

नीचे दिए गए चित्र का अवलोकन करें –



चित्र 2

चित्र में एक किनारे से आरम्भ करके विभिन्न वर्गों की रचना की गई है। इन वर्गों के हिस्से अपने आप नये वर्गों में शामिल होते गए हैं। यदि हम सब हिस्सों में शामिल बिन्दुओं को अलग–अलग जोड़ें तो हम देखते हैं कि वर्गों में बिन्दुओं की संख्या इस प्रकार से है–

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1 + 3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1 + 3 + 5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7	=	16	=	4^2
पांचवा वर्ग	1 + 3 + 5 + 7+9	=	25	=	5^2
छठा वर्ग	1 + 3 + ...	=	36	=	6^2
सातवा वर्ग	....	=	.....	=	....
आठवा वर्ग	....	=	....	=	....

इसको आगे बढ़ाने पर हम देख सकते हैं कि जो भी वर्ग लें उसमें बिन्दुओं की कुल संख्या भी

पूर्ण वर्ग है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसे आठवे वर्ग में और दसवे वर्ग में कुल कितने बिन्दु होंगे?

हमने देखा कि पहले, दूसरे ...... आदि वर्गों में शामिल कुल बिन्दु इस प्रकार हैं।

पहला वर्ग = पहली विषम संख्या $= 1^2$

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग $= 2^2$

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग $= 3^2$

और इसी तरह से आगे भी जैसे, पहली 8 विषम संख्याओं का योग 8^2 के बराबर होता है। हम कितना भी आगे जाए यह बात सही निकलती है।

इस प्रकार हम यह देख सकते हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या n का वर्ग प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।

कुछ और मनोरंजक पैटर्न –

1, 11, 111.... की वर्ग संख्याओं को देखें –

1^2 = 1

11^2 = 1 2 1

111^2 = 1 2 3 2 1

1111^2 = 1 2 3 4 3 2 1

11111^2 = - - - - - - - - - - -

111111^2 = - - - - - - - - - - - -

क्रियाकलाप 2.

अपने मित्र से दो क्रमागत संख्या बोलने को कहें। उन संख्याओं को मौखिक रूप से जोड़कर अपने कॉपी में लिख लें। मित्र को उन दो क्रमागत संख्याओं की वर्ग संख्याएँ पता करने को कहें और बड़ी वर्ग संख्या में से छोटी वर्ग संख्या घटाने को कहें। बाद में अपनी कॉपी में लिखी संख्या को दिखा दें। दोनों संख्याएँ बराबर हैं न?

यह कैसे हुआ?

क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसा कैसे होगा? निम्न प्रतिरूपों का अवलोकन करें।

$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = 4 + 3$,

$9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17 = 9 + 8$,

$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 13 + 12$

इन उदाहरणों को देखिए

$3^2 + 4^2 = 9+16= 25 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

$5^2 + 12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$ अर्थात् $5^2 + 12^2 = 13^2$

आप भी कुछ और ऐसे उदाहरण खोजें। आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिगड़ी है। इस प्रत्येक तिगड़ी में विशेष प्रकार की संख्याएँ हैं। बड़ी संख्या का वर्ग, शेष दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर है। इस प्रकार की संख्याएँ पाइथोगोरीय त्रिक कहलाती हैं। त्रिक याने तीन संख्याओं की तिगड़ी।

जैसे – (3, 4, 5), (6, 8, 10) एवं (5, 12, 13) पाइथोगोरीय त्रिक हैं।

उदाहरण 1. जाँच कीजिए कि (9, 40, 41) पाइथोगोरीय त्रिक है या नहीं?

हल: यहाँ $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681$

तथा $41^2 = 1681$

अतः $9^2 + 40^2 = 41^2$, अतः (9, 40, 41) पाइथागोरीय त्रिक है।

अभ्यास 1

जाँच कीजिए कि नीचे दिए गए त्रिक पाइथागोरीय त्रिक हैं अथवा नहीं ?

(i) (5, 12, 13) (ii) (8, 15, 17)

(iii) (10, 15, 25) (iv) (4, 7, 11)

टिप्पणी : हमारे देश में संख्याओं का यह सम्बन्ध बहुत पहले से ज्ञात था। ऐसा माना जाता है कि 600 ईसा पूर्व एक भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने इसे सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया और अनेक संख्यात्मक उदाहरणों के द्वारा स्पष्ट किया।

संख्याओं से पूर्ण वर्ग संख्याएँ बनाना

जैसा कि पृष्ठ क्र. 2 में आपने देखा कि 252 के गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 2 और 3 के जोड़े बन गए किन्तु अभाज्य् गुणनखंड 7 का जोडा नहीं बना।

यदि इसमें 7 का गुणा या भाग कर दिया जाता तो सभी गुणनखण्डों के जोड़े बन जाएगे , अर्थात 7 वह न्यूनतम सख्या है जिसका 252 से गुणा या भाग करने पर गुणनफल या भागफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा। आइये, इसे कुछ उदाहरणो से समझे –

उदाहरण 2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 720 को गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग हो।

हल: $720 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times 5$

720 के अभाज्य गुणनखण्डों में केवल 5 का जोड़ा नहीं बना। अतः पूर्ण वर्ग संख्या वह होगी जिसमें 5 का भी जोड़ा बन जाए इसके लिए हमें 720 को 5 से गुणा करना होगा।

अतः 5 वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसका 720 से गुणा करने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग होगी।

उदाहरण 3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 140 को भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग संख्या हो।

हल: $140 = \underline{2 \times 2} \times 5 \times 7$

140 के अभाज्य गुणनखण्डों में अभाज्य गुणनखंड 5 एवं 7 के जोड़े नहीं है। यदि हम 140 को $5 \times 7 = 35$ से भाग दें तब भागफल पूर्ण वर्ग बन जाएगी।

उदाहरण 4. वह न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6 एवं 8 से पूर्णतः विभाजित हो।

हल: 6 एवं 8 का ल.स. = 24

24 के अभाज्य गुणनखण्ड $= \underline{2 \times 2} \times 2 \times 3$

अब हम देखते हैं कि 24 के गुणनखण्डों में 2 एवं 3 के जोड़े नहीं हैं। अतः यदि 24 को $(2 \times 3) = 6$ से गुणा कर दें तब वह ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी जो 6 एवं 8 दोनों से विभाजित होगी। अतः वांछित संख्या $24 \times 6 = 144$ होगी।

इन्हें भी कीजिए –

$(10)^2 = 100$ होता है, $(300)^2 = 90000$, $(5000)^2 = 25000000$

10 के वर्ग में 2 शून्य हैं, 300 के वर्ग में 4 शून्य तथा 5000 के वर्ग में 6 शून्य हैं, तो क्या कोई ऐसी संख्या सोच सकते हैं जिसका वर्ग करने पर मात्र इकाई के स्थान पर शून्य हों या इकाई, दहाई एवं सैकड़ा तीनों के स्थान पर शून्य हों।

अभ्यास 2

(i) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 200 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(ii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 180 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

(iii) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिये जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

प्रश्नावली 1.1

प्र.1. निम्न संख्याओं के गुणनखण्डों के जोड़े बनाकर बताइये कि ये संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं अथवा नहीं?

(i) 164 (ii) 121 (iii) 289
(iv) 729 (v) 1100

प्र.2. निम्न संख्याओं के पूर्ण वर्ग न होने का कारण बताइये।

(i) 12000 (ii) 1227 (iii) 790
(iv) 1482 (v) 165000 (vi) 15050 (vii) 1078 (viii) 8123

प्र.3. निम्न संख्याओं में से किन संख्याओं का वर्ग सम संख्या एवं किन संख्याओं का वर्ग विषम संख्या है ?

(i) 14 (ii) 277 (iii) 179
(iv) 205 (v) 608 (vi) 11288
(vii) 1079 (viii) 4010 (ix) 1225

प्र.4. निम्न प्रतिरूप का अवलोकन करें एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

$11^2 = 121$
$101^2 = 10201$
$1001^2 = 1002001$
10001^2 = -----------
100001^2 = ------------
----------- = 1000002000001

घन संख्याएँ (Cube Numbers)

अब तक हमने वर्ग संख्याओं पर विचार किया। किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस संख्या की वर्ग संख्या कहते है। यदि अब गुणनफल को पुनः उसी संख्या से गुणा कर दिया जाए तब प्राप्त संख्या उस संख्या की घन संख्या बन जाएगी।

जैसे $2\times2\times2=8$ या $2^3=8$

$7\times7\times7=343$ या $7^3=343$

यहाँ 8 एवं 343 क्रमशः 2 एवं 7 की घन संख्याएँ हैं।

निम्न सारणी का अवलोकन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति करें।

सारणी 1.4

संख्या	तीनबार गुणा	घातीय रूप	घन संख्या
1	$1\times1\times1$	1^3	1
2	$2\times2\times2$	2^3	8
3	$3\times3\times3$	------	------
4	---------	------	------
5	---------	------	------
6	---------	------	------
7	---------	------	------
8	---------	------	------
9	---------	------	------
10	---------	------	------

उपरोक्त तालिका के अन्तिम स्तम्भ से प्राप्त संख्याएँ 1, 8, 27 .... इत्यादि क्रमशः 1,2,3,. ... इत्यादि पूर्णांकों की घन संख्याएँ हैं।

इस प्रकार की संख्याएँ पूर्ण घन संख्याएँ कहलाती हैं।

सारणी में दी गईं सम संख्याओं एवं उनके घनों पर विचार करें, आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे? क्या सम संख्याओं के घन भी सम हैं? क्या विषम संख्याओं के घन भी विषम हैं?

घन संख्याओं की पहचान

कोई संख्या घन संख्या है या नहीं इसकी पहचान कैसे होगी ? वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए हमने अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाए थे। जिनके पूरे जोड़े बन गए थे, वे वर्ग संख्याएँ हैं।

घन संख्याओं के लिए इसी को आगे बढ़ाते हैं। 8 को हम $2\times2\times2$ के रूप में लिख सकते हैं अर्थात् इसके अभाज्य गुणनखण्ड करने पर हमें पता चलता है कि इसमें 2 को 2 के साथ तीन बार गुणा हुआ है और वह इनसे एक त्रिक (तिगड़ी) बनाने पर और कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं बचता। इसी तरह 27 को देखें। इसमें तीन का तीन बार गुणा होता है। इसमें भी त्रिक बन जाएगा। यदि 24 को लें तो $24=2\times2\times2\times3$ अर्थात् 2 तीन बार है और उससे तिगड़ी (त्रिक) बन गया किन्तु 3 बच गया, इसका मतलब हुआ कि 24 घन संख्या नहीं है।

इस प्रकार, पूर्ण घन संख्याओं की पहचान के लिए हम देखते हैं कि संख्या के अभाज्य

गुणनखण्डों में समान अभाज्य गुणनखण्डों के यदि सभी गुणनखण्ड त्रिकों में व्यवस्थित हो जाए तो वह संख्या पूर्ण घन संख्या होगी, अन्यथा नहीं।

आइए, कुछ उदाहरणों के द्वारा इसे समझें –

उदाहरण 5. 216 पूर्ण घन संख्या है अथवा नहीं?

हल : $216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$ (अभाज्य गुणनखण्ड बनाने पर)

$= 2^3 \times 3^3$ (सभी गुणनखण्डों के त्रिक बन गए)

$= (2 \times 3)^3 = 6^3$

यहाँ 216 को 6 के घन के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

अतः 216 एक पूर्ण घन संख्या हैं।

उदाहरण 6. बताइये कि संख्या 23625 पूर्ण घन है अथवा नहीं?

हल : $23625 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 7$ (अभाज्य गुणनखण्ड करने पर)

यहाँ 23625 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के त्रिक तो बन गए किन्तु 7 का नहीं।

अतः 23625 एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।

उदाहरण 7. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 68600 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन संख्या हो?

हल: $68600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5 \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

यहाँ 68600 के गुणनखण्डों में 2 एवं 7 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 5 के त्रिक बनाने के लिए एक बार और 5 का गुणा करना होगा। अतः 68600 में यदि 5 का गुणा कर दें तब वह पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

उदाहरण 8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 408375 में भाग करने पर भागफल पूर्ण घन हो जाए?

हल: $408375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \times 11 \times 11$

यहाँ 408375 के गुणनखण्डों में 3 एवं 5 के लिए तो त्रिक बन गए किन्तु 11 का त्रिक नहीं बन सका। अतः 408375 में $11 \times 11 = 121$ का भाग दें तब भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाएगी।

प्रश्नावली 1.2

प्र.1. निम्न संख्याओं में से कौनसी संख्या पूर्ण घन है और कौन सी नहीं?

(i) 125 (ii) 800 (iii) 729 (iv) 2744

(v) 22000 (vi) 832

प्र.2. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 256 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.3. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1352 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.4. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 8019 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन बन जाए।

प्र.5. प्रश्न 1 में जो संख्याएँ घन संख्याएँ नहीं है उन्हें किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल घन संख्या बन जाए

वर्गमूल [Square Root]

अध्याय के शुरूआत में हमने पूर्ण वर्ग संख्या के बारे में अध्ययन किया। आइए, उसे एक क्रियाकलाप द्वारा पुनः दोहराते है :–

क्रियाकलाप 3.

सारणी 5

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	किस संख्या का वर्ग है
1.	16	$\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}$	$2\times2=4$
2.	25	$\underline{5\times5}$	5
3.	36		
4.	49		
5.	64		
6.	100		
7.	144		
8.	196		

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने देखा कि 4 का वर्ग 16 है, 5 का वर्ग 25, 8 का वर्ग 64 है। इसे इस तरह भी हम कहते हैं कि 64 का वर्गमूल 8 है, 25 का वर्गमूल 5 है।

इसे ऐसे लिखते है :–

16 का वर्गमूल $=\sqrt{16}=4$, 25 का वर्गमूल $=\sqrt{25}$ (वर्गमूल को चिह्न "$\sqrt{\ }$" से दर्शाते हैं।)

आपने देखा है कि किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारंभिक n विषम संख्याओं के योगफल बराबर होता है। (चित्र : 2)

जैसे : $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

जिस प्रकार पाँच प्रारंभिक विषम संख्याओं को जोड़ कर 5 का वर्ग (25) प्राप्त किया है, क्या उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल प्राप्त कर सकते हैं?

आइए देखें–

$25 - 1 = 24,\quad 24 - 3 = 21,\quad 21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9,\quad 9 - 9 = 0,$

यहाँ 25 में उत्तरोत्तर से प्रारंभिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है। इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है, अर्थात् $\sqrt{25}$

आप भी कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए इस प्रक्रिया को जाँचे।

आप पायेंगे कि **किसी पूर्ण वर्ग संख्या में से जितनी प्रारंभिक विषम संख्याओं को घटाने पर शून्य प्राप्त होता है, वही उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल होता है।**

क्या इस प्रक्रिया द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या की जाँच की जा सकती है?

आप पायेंगे कि शेषफल शून्य नहीं होने की दशा में दी गई संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होती।

अभ्यास 3

निम्नांकित के वर्गमूल मौखिक बताइए :–

(i) 25 (ii) 49 (iii) 64 (iv) 81 (v) 121 (vi) 144

कुछ संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक निकाल सकते हैं किन्तु सभी संख्याओं के वर्गमूल हम मौखिक ज्ञात नहीं कर सकते हैं। आइए, हम वर्गमूल निकालने की विधि पर चर्चा करें।

(1) अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल :

इस विधि के द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कर लेते हैं। इसके पश्चात् समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाते हैं तथा प्रत्येक जोड़े से एक संख्या लेकर उनका गुणा कर लेते हैं।

उदाहरण 9. 441 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

3	441
3	147
7	49
7	7
	1

हल : $441 = \underline{3\times3}\ \ \underline{7\times7}$

अतः $\sqrt{441} = \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{7\times7}}$

$= 3\times7$ (प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेने पर)

$= 21$

उदाहरण 10. 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $1296 = \underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}$

अतः $\sqrt{1296} = \sqrt{\underline{2\times2}\times\underline{2\times2}\times\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}}$

$= 2\times2\times3\times3$

$= 36$

अभ्यास 4

निम्नांकित के अभाज्य गुणनखण्ड करके वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) 289 (ii) 625 (iii) 900 (iv) 361 (v) 1764

उदाहरण 11. यदि एक वर्गाकार चित्र का क्षेत्रफल 2025 वर्ग सेमी हो तब चित्र की एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = 2025$ वर्ग सेमी

अतः चित्र की एक भुजा की लम्बाई $= \sqrt{2025}$

$= \sqrt{\underline{3\times3}\times\underline{3\times3}\times\underline{5\times5}}$

$= 3 \times 3 \times 5$

$= 45$ सेमी.

3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

उदाहरण 12. एक व्यक्ति अपने बाग में 11025 आम के पौधे इस प्रकार लगाता है कि हर पंक्ति में उतने ही पौधे हैं जितनी पंक्तियाँ हैं तो बाग में कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल: माना बाग में पंक्तियों की संख्या x हैं

चूंकि पौधों की कुल संख्या $= x \times x = x^2$

$x^2 = 11025$ या $x = \sqrt{11025}$

$= \sqrt{3\times3\times5\times5\times7\times7}$

$= 3 \times 5 \times 7 = 105$

3	11025
3	3675
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

अतः बाग में पंक्तियों की संख्या $= 105$

प्रश्नावली 1.3

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात करिए

(i) 361 (ii) 400 (iii) 784

(iv) 1024 (v) 2304 (vi) 7056

2. एक बालकों की टोली ने 256 आम खरीदे और आपस में बाँट लिए यदि प्रत्येक को उतने ही आम मिले जितनी टोली में बालक थे तब बालकों की संख्या बताइये।

भागविधि से वर्गमूल ज्ञात करना

अभी तक हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल निकालना सीखा है।

गणित में ऐसी भी मजेदार विधि है जिससे हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के अलावा उन संख्याओं के वर्गमूल भी मालूम कर सकते हैं जो पूर्णवर्ग नहीं हैं। इसे वर्गमूल ज्ञात करने की 'भाग विधि' के नाम से जाना जाता है। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर काम करेंगे।

आप जानते हैं कि एक अंक और दो अंक वाली पूर्णवर्ग संख्याओं के वर्गमूल के रूप में हमें एक अंक वाली संख्याएँ ही मिलती है। आप इन्हें पहाड़े का उपयोग कर आसानी से जान सकते हैं।

जैसे– $1 \times 1 = 1$, इसलिए 1 का वर्गमूल 1 है।

$3 \times 3 = 9$, इसलिए 9 का वर्गमूल 3 है।

$9 \times 9 = 81$, इसलिए 81 का वर्गमूल 9 है।

81 के बाद की पूर्ण वर्ग संख्या 100 है जो तीन अंक वाली संख्या है। इसका वर्गमूल 10 है, जो दो अंक वाली संख्या है। (क्या किसी संख्या और उसके वर्गमूल में निहित अंकों की संख्या में कोई पैटर्न दिखाई पड़ता है?) तीन अंकों वाली किसी बड़ी संख्या का वर्गमूल कैसे निकालेंगे? आइए इसे एक उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 13. 625 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :–

पद 1 :– संख्या 625 की इकाई की ओर से आरंभ करते हुए संख्याओं के जोड़े बनाइए। जोड़े बनाने के लिए संख्याओं के ऊपर एक छोटी सी आड़ी रेखा खींच सकते हैं। यहाँ केवल एक जोड़ा बनेगा 25, 6 अकेला रहेगा।

$$\overline{6}\;\overline{25}$$

पद 2 :– 625 को भाग चिह्न के भीतर रखिए। अब ऐसा बड़ा से बड़ा भाजक ढूँढ़िए जिसका वर्ग 6 से बड़ा न हो। यहाँ वह 2 होगा।

$$\begin{array}{r|l} & \text{भागफल} \\ \hline \text{भाजक} & \overline{6}\;\overline{25}\ \text{भाज्य} \end{array}$$

(2 × 2 = 4, 3 × 3 = 9, 9 > 6)

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\;\overline{25} \\ & -4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

पद 3 :– भाजक और भागफल में 2 रखते हुए उनके गुणनफल 4 को 6 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 2 मिलेगा।

पद 4 :– भाजक में उतनी ही संख्या जोड़िए। 4 मिलेगा। उसे नीचे लिखिए। पद–3 में जो शेष 2 बचा था, उसके आगे पूरी एक जोड़ी संख्या 25 उतारकर रखिए। यह नया भाज्य 225 बनेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{6}\;\overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 4 & 2\;25 \end{array}$$

पद 5 :– अब हमें भाजक में 4 के आगे और भागफल में 2 के आगे एक ऐसी संख्या रखनी है जिससे उस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 225 से अधिक न हो। यदि हम भागफल में 3 रखें तो भाजक में 4 के आगे भी 3 रखेंगे, जिससे नया भाजक 43 होगा।

43 × 3 = 129, 129 < 225

क्रमशः भागफल में 4 और 5 रखकर भी देखें।

44 × 4 = 176 < 225

45 × 5 = 225 = 225

स्पष्ट है कि भागफल में 5 लेना उपयुक्त होगा। इस गुणनफल 225 को नए भाज्य 225 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 0 बचेगा। कुल भागफल 25 ही 625 का वर्गमूल होगा।

$$\begin{array}{r|l} & 2\;\;5 \\ \hline 2 & \overline{6}\;\overline{25} \\ +2 & -4 \\ \hline 45 & 225 \\ & 225 \\ \hline & \;\;0 \end{array}$$

अर्थात् $\sqrt{625}$ = 25.

उदाहरण 14. 9409 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

पद 1 :– हमें 4 अंकों की संख्या दी गई है। इकाई के स्थान की ओर से शुरू करते हुए 2–2 अंकों की जोड़ियाँ बनाइए। दो जोड़ियाँ बनेंगी– $\sqrt{\overline{94}\ \overline{09}}$

$\overline{94}\ \overline{09}$

इन्हें भाग चिह्न के भीतर रखिए।

पद 2 :– दूसरी जोड़ी 94 को भाज्य मानते हुए सबसे बड़ा ऐसा भाजक चुनिए जिसका वर्ग 94 से अधिक न हो। स्पष्ट है वह भाजक 9 होगा। अब भाजक एवं भागफल में 9 रखते हुए इनका गुणनफल 81, 94 के नीचे रखकर घटाइए। शेष 13 मिलेगा।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ & -81 \\ \hline & 13 \end{array}$$

पद 3 :– भाजक 9 में उतना ही जोड़िए। योगफल नीचे लिखिए। शेषफल 13 के आगे एक जोड़ी संख्या 09 उतारिए। नया भाज्य 1309 हो जाएगा। पहले उदाहरण की तरह देखिए, भाजक 18 के सामने क्या रखें कि इस संख्या और नए भाजक का गुणनफल 1309 के बराबर या उसके निकटतम और उससे छोटा हो। यहाँ हम अनुमान लगाते हैं। यहाँ भाजक तीन अंकों वाली संख्या होगी, भाज्य चार अंकों की संख्या है। दोनों से यदि इकाई का अंक छोड़ दें तो भाजक 18 और भाज्य 130 बचता है। अब यह आसानी से देखा जा सकता है कि $18 X\ 7 = 126$ मिलता है जो 130 से छोटा है। अतः भाजक और भाज्य में 7 रख कर देखा जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 18 & 13\ 09 \end{array}$$

$187 \times 7 = 1309$

इस गुणनफल को भागफल 1309 के नीचे रखकर घटाइए। शेष शून्य मिलेगा। कुल भागफल 97 ही संख्या 9409 का वर्गमूल होगा।

अर्थात् $\sqrt{9409} = 97$

$$\begin{array}{r|l} & 97 \\ \hline 9 & \overline{94}\ \overline{09} \\ +9 & -81 \\ \hline 187 & 13\ 09 \\ & -13\ 09 \\ \hline & 0 \end{array}$$

उक्त दोनों उदाहरणों में हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल प्राप्त किए हैं। अब एक ऐसा उदाहरण लें जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। ऐसी स्थिति में वर्गमूल में दशमलव चिन्ह के बाद की संख्याएँ भी मिलती हैं।

उदाहरण 15. 8772 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :– आप जानते हैं कि 8772 को 8772.0000 के रूप में लिखा जा सकता है। जिस प्रकार पहले के दोनों उदाहरणों में हमने इकाई से शुरु करके संख्याओं के जोड़े बनाए थे, उसी

प्रकार यहाँ भी बनाएँगे। इकाई दहाई के अंक एक साथ, सैकड़े और हजार के अंक एक साथ। दशमलव चिह्न के दायीं ओर जोड़ियाँ बनाते समय दशांश और शतांश स्थानों के अंक एक साथ रखते हैं और उससे आगे भी इसी तरह।

संख्या 8772.0000 को इस प्रकार लिखेंगे – $\overline{87}\,\overline{72}.\overline{00}\,\overline{00}$

पहले की ही तरह 8772 का वर्गमूल ज्ञात करें –

123 शेष बचने के बाद दशमलव चिह्न के बाद के शून्यों का एक जोड़ा उतारें। अब भागफल में जो संख्या लिखेंगे उसके पहले दशमलव का चिह्न लगाएँ। भाग की प्रक्रिया वैसे ही आगे बढ़ाएँ।

यदि वर्गमूल को दशमलव के बाद के दो अंकों तक ही प्राप्त करना हो तो यह प्रक्रिया यहाँ रोकी जा सकती है। यदि आगे बढ़ाना हो तो प्रत्येक बार शून्य का एक जोड़ा शेष के आगे लिखकर नया भागफल प्राप्त करते जाएँगे।

$$\begin{array}{r|r} & 93.65 \\ \hline 9 & \overline{87}\,\overline{72}.\overline{00}\,\overline{00} \\ +9 & -81 \\ \hline 183 & 672 \\ +3 & -549 \\ \hline 1866 & 12300 \\ +6 & -11196 \\ \hline 18725 & 110400 \\ & -93625 \\ \hline & 16775 \end{array}$$

अतः 8772 का वर्गमूल लगभग 93.65 होगा।

$\sqrt{8772} = 93.65$ लगभग

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल, भाग विधि से ज्ञात कीजिए :–

(i) 529 (ii) 1369 (iii) 1024 (iv) 5776

(v) 900 (vi) 7921 (vii) 50625 (viii) 363609

प्रश्न 02. एक सिनेमा हॉल में सिनेमा मालिक सीटों को इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहते हैं कि सिनेमा हॉल में जितनी स्तम्भों की संख्या है, उतनी ही संख्या पंक्तियों की हों। यदि उस हॉल में कुल 1849 सीटें हों तो पंक्तियों व स्तम्भों की संख्या ज्ञात कीजिए?

प्रश्न 03. एक वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल 1444 वर्ग मीटर हो, तो बगीचे की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए?

उदाहरण 16. 51.84 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :–

$$\begin{array}{r|r} & 7.2 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ +7 & -49 \\ \hline 142 & 02\,84 \\ & -2\,84 \\ \hline & 0\,00 \end{array}$$

$\sqrt{51.84} = 7.2$

उदाहरण 17. 23.1 का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

	4. 80
4	$\overline{23}.\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+ 4	– 16
88	07 10
8	– 7 04
960	6 00
	–0 00
	6 00

$\sqrt{23.1} = 4.80$

उदाहरण 18. 2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल :–

	1.41 4
1	$\overline{2}.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+ 1	– 1
2 4	1 00
+ 4	– 96
2 81	04 00
+ 1	– 2 81
2824	1 19 00
	– 1 12 96
	0 07 04

प्रश्नावली–1.5

प्रश्न 01. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 7.29 (ii) 16.81 (iii) 9.3025

प्रश्न 02. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक ज्ञात कीजिए :–

(i) 0.9 (ii) 5 (iii) 7

घनमूल

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हमने उसके अमाज्य गुणनखण्डों में से समान गुणनखण्डों के दो–दो के जोड़ों का प्रयोग किया था। प्रत्येक जोड़े में से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणा करके वर्गमूल प्राप्त किया था। किसी संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाते हैं। किसी संख्या का घनमूल निकालने के लिए उसके अभाज्य गुणनखंडों में से

समान गुणनखंण्डों के तीन–तीन के त्रिक (तिकड़ी) बनाएँगे तथा ऐसी प्रत्येक तिकड़ी से एक–एक संख्या लेकर उनका गुणनफल ज्ञात कर लेंगे। यही दी गई संख्या का घनमूल होगा।

उदाहरण 17. 512 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

हल :–

$$512 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}$$

$$\sqrt[3]{512} = 2\times2\times2$$

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

उदाहरण 18. 91,125 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

(संकेत –: हम देखते हैं कि संख्या के इकाई के स्थान पर 5 है अतः संख्या 5 से पूर्णतः विभाजित होगी।)

5	91,125
5	18,225
5	3,645
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

हल :–

$$91,125 = \underline{5\times5\times5}\times\underline{3\times3\times3}\times\underline{3\times3\times3}$$

$$\sqrt[3]{91,125} = 5\times3\times3$$

$$\sqrt[3]{91,125} = 45$$

प्रश्नावली–1.6

1. निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :–

(i) 125	(ii) 343	(iii) 1331
(vi) 2197	(v) 9261	(vi) 166375
(vii) 4913	(viii) 42875	

8ZR5DY

हमने सीखा

1. यदि n कोई संख्या है तब $n \times n$ या n^2 इसका वर्ग कहलाएगा और $n \times n \times n$ या n^3 इसका घन।
2. जिन संख्याओं के इकाई में 2,3,7 या 8 हो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।
3. यदि पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में सम संख्या में शून्य हो तो वे भी पूर्ण वर्ग संख्या होगी।
4. सम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव सम संख्याएँ एवं विषम संख्याओं के वर्ग एवं घन सदैव विषम संख्याएँ होती हैं।
5. किसी प्राकृत संख्या n का वर्ग, प्रारम्भिक n विषम संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।
6. यदि तीन संख्याएँ इस प्रकार हो कि बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर हो तब संख्याएँ पाइथागोरिय त्रिक कहलाती है। जैसे $3^2 + 4^2 = 5^2$ अतः (3,4,5) पाइथोगोरीय त्रिक है।
7. वर्गमूल को '$\sqrt{\ }$' चिह्न के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इस चिह्न को करणी चिह्न कहते हैं।

अध्याय–2

घातांक

EXPONENT

पूर्णांकों की घात

अब तक हमने प्राकृत संख्याओं के घातांकों पर विचार किया, परन्तु फातिमा के मन में यह प्रश्न उठ रहा था कि ऋणात्मक संख्याओं की घातांकों से सम्बंधित प्रश्नों को कैसे हल करेंगे? उसने सोचा कि क्यों न धनात्मक के स्थान पर ऋणात्मक संख्या लिख कर उसके किसी भी घात के लिए हल करके देखें –

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= \{(-1) \times (-1)\} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$$

$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\}$$
$$= 1 \times 1 = 1$$

$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\} \times (-1)$$
$$= 1 \times 1 \times (-1) = -1$$

इन्हें देखकर कमली ने कहा ''जब (–1) का घात सम संख्या है तब उसका मान 1 एवं जब (–1) का घात विषम संख्या है तब उसका मान –1 है।''

अर्थात्

$\boxed{(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1}$ एवं $\boxed{(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1}$

इस प्रकार फातिमा एवं कमली के समझ में यह बात आ गई कि $(-1)^{25} = -1$, $(-1)^{50} = 1$ $(-1)^{143} = -1$, $(-1)^{144} = 1$ इत्यादि।

अब निम्नांकित पर विचार करें :–

$$(-5) = (-1) \times 5$$

$$(-5)^4 = \{(-1) \times 5\}^4$$
$$= (-1)^4 \times 5^4 \qquad [\because (a \times b)^m = a^m \times b^m \text{ से}]$$
$$= 1 \times 5^4$$

$= \quad 5^4$

$(-27)^{13} = \{(-1) \times 27\}^{13}$

$= (-1)^{13} \times 27^{13}$

$= (-1) \times 27^{13} \qquad [\because (-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1]$

$= -27^{13}$

$(-m)^{16} = \{(-1) \times m\}^{16}$

$= (-1)^{16} \times m^{16} \qquad [\because (-1)^{\text{सम संख्या}} = 1]$

$= m^{16}$

सोचकर बताएँ कि घातांक संख्याओं $(-35)^{12}$, $(-149)^{23}$, $(-m)^{37}$, $(-m)^{100}$, $(-11)^{111}$ में से कौनसी धनात्मक होगी एवं कौन–सी ऋणात्मक? क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आप पायेंगे कि यदि a और m कोई प्राकृत संख्याएँ हों, तो $(-a)^m = \{(-1) \times a\}^m = (-1)^m \times a^m$

अर्थात् $(-a)^m$ धनात्मक है या ऋणात्मक, $(-1)^m$ पर निर्भर करता है।
या $(-a)^m$ धनात्मक होगा यदि m सम संख्या हो तथा ऋणात्मक होगा यदि m विषम संख्या हो

उदाहरण 1. सरल कीजिए –

(i) $(-5)^4 \times (-5)^7$

(ii) $(-4)^2 \times (-4)^6 \times (-4)^{17}$

(iii) $(-9)^8 \div (-9)^2$

(iv) $(-x)^7 \div (-x)^4$

हल : (i) $(-5)^4 \times (-5)^7 = [(-1) \times 5]^4 \times [(-1) \times 5]^7$

$= [(-1)^4 \times 5^4] \times [(-1)^7 \times 5^7]$

$= 1 \times 5^4 \times (-1) \times 5^7$

$= -1 \times 5^{4+7} = -5^{11} \quad [\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

(ii) $(-4)^2 \times (-4)^6 \times (-4)^{17} = [(-1) \times (4)]^2 \times [(-1) \times (4)]^6 \times [(-1) \times (4)]^{17}$

$= (-1)^2 \times (4)^2 \times (-1)^6 \times (4)^6 \times (-1)\,(4)^{17}$

$= 1 \times 4^2 \times 1 \times 4^6 \times (4)^{17}\,(-1) \times 4^{17}$

$= -4^{2+6+17}$

$= -4^{25} \quad [\because a^\ell \times a^m \times a^n = a^{\ell+m+n}]$

(iii) $(-9)^8 \div (-9)^2 = \dfrac{(-9)^8}{(-9)^2} = \dfrac{\{(-1)\times 9\}^8}{\{(-1)\times 9\}^2}$

$= \dfrac{(-1)^8 \times 9^8}{(-1)^2 \times 9^2} = \dfrac{1 \times 9^8}{1 \times 9^2} = \dfrac{9^8}{9^2}$

$= 9^{8-2} = 9^6 \qquad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$

(iv) $(-x)^7 \div (-x)^4$ $= \dfrac{(-x)^7}{(-x)^4} = \dfrac{\{(-1)\times x\}^7}{\{(-1)\times x\}^4}$

$= \dfrac{(-1)^7 \times x^7}{(-1)^4 \times x^4} = \dfrac{-1\times x^7}{1\times x^4}$

$= (-1) \times x^{7-4} = -x^3$ $\quad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$

प्रश्नावली 2.1

1. सरल करें :–

(a) $(-5)^3$ (b) $(-4)^5$ (c) $(-2)^6$ (d) $(-3)^6$

2. निम्न को घातांक के रूप में लिखें :–

(a) $5^4 \times (-5)^2$ (b) $15 \times (-15)^{25}$

(c) $12^5 \div (-12)^3$ (d) $(-p)^{14} \div (-p)^7$

3. दोनों पक्षों को हल कर निम्न कथनों की सत्यता की जाँच कीजिए :–

(a) $(-2)^4 \times (-2)^2 = (-2)^8 \div (-2)^2$

(b) $(-3)^2 \times (-3)^{-6} = \dfrac{1}{(3^2)^2}$

(c) $(-7)^{32} \div (-7)^{32} = 1$

परिमेय संख्याओं की घात

रजिया के मन में विचार आया कि अभी तक हमने प्राकृत संख्याओं एवं पूर्णांकों के घातांकों पर ही विचार किया है किन्तु इनके स्थान पर यदि परिमेय संख्याएं हों तब क्या होगा?

आइए, रज़िया के सवाल का जवाब ढूँढें।

परिमेय संख्याओं के कुछ घातांकों पर विचार कीजिए:–

(1) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 = \dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{5}{7}$

$= \dfrac{5\times5\times5\times5}{7\times7\times7\times7} = \dfrac{5^4}{7^4}$

(2) $\left(-\dfrac{3}{11}\right)^5 = \left\{(-1)\times\left(\dfrac{3}{11}\right)\right\}^5 = (-1)^5 \times \left(\dfrac{3}{11}\right)^5$

$$= (-1) \times \frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11} \qquad [\because (-1)^5 = -1]$$

$$= -\frac{3^5}{11^5}$$

(3) $$\left(-\frac{4}{3}\right)^6 = (-1)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times \ldots \text{ 6 बार} \qquad [\because (-1)^6 = 1]$$

$$= \frac{4^6}{3^6}$$

अतः यदि हमारे पास कोई परिमेय संख्या $\left(\frac{5}{4}\right)^m$ हो, तब

$$\left(\frac{5}{4}\right)^m = \frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times - - - - \text{ (m बार)}$$

$$= \frac{5\times5\times\ldots\ldots\text{m बार}}{4\times4\times\ldots\ldots\text{m बार}} = \frac{5^m}{4^m}$$

अब आप $\left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{9}{4}\right)^5, \left(-\frac{4}{7}\right)^6, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^p$ को विस्तारित करके देखें।

यदि कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ (जहाँ $q \neq 0$) की घात m हो, तब

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times - - - - \text{ (m बार)}$$

$$= \frac{p\times p\times p\times\ldots\ldots\text{m बार}}{q\times q\times q\times\ldots\ldots\text{m बार}} = \frac{p^m}{q^m}$$

अर्थात् $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$ जहां p,q कोई पूर्णांक हैं एवं $q \neq 0$

अब यदि परिमेय संख्या का घात ऋणात्मक हो, तब स्थिति कैसी होगी?
निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए :–

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{5^{-2}}{4^{-2}}\right) = \frac{1/5^2}{1/4^2} = \frac{4^2}{5^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \qquad \left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ और } a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{7^{-4}} = \frac{1/3^4}{1/7^4} = \frac{7^4}{3^4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-m} = \frac{2^{-m}}{5^{-m}} = \frac{1/2^m}{1/5^m} = \frac{5^m}{2^m} = \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

अभ्यास

निम्नलिखित को स्वयं हल करने का प्रयास करें –

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{14}{13}\right)^{-9}, \left(\frac{15}{6}\right)^{-4}, \left(\frac{113}{53}\right)^{-11}, \left(\frac{5}{7}\right)^{-7}$$

पुनः विचार करें :–

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

इस प्रकार स्पष्ट है कि –

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$$ यहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं तथा $a \neq o, b \neq o$

उदाहरण 2. निम्न को सरल कीजिए –

1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2$ 2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

हल : 1. $\left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{4+(-2)}$ $\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^m - \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}\right]$ एवं $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$$

हल : 2. $\left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(-\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$$= (-1)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= 1 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{4+2}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \frac{531441}{64}$$

3. $-\frac{36}{49}$ को घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ $-\frac{36}{49} = (-1) \times \frac{36}{49}$

$$= (-1) \times \left(\frac{6}{7}\right)^2 = -\left(\frac{6}{7}\right)^2$$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न को सरल कीजिए :—

(a) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2$

(c) $(-5)^3 \div \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ (d) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

2. घात के रूप में व्यक्त कीजिए :—

(a) $-\frac{25}{49}$ (b) $\frac{27}{125}$ (c) $\frac{729}{64}$

3. सिद्ध कीजिए :—

(a) $\left(\frac{5}{7}\right)^7 \times \left(\frac{7}{5}\right)^7 - \left(\frac{3}{19}\right)^2 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 0$

(b) $\left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{q}{p}\right)^m = \left(\frac{q}{p}\right)^{-m}$

(c) $\left(\frac{25}{16}\right)^{-4} = \left(\frac{16}{25}\right)^4$

919WH9

4. सत्य या असत्य लिखिए :–

(a) $\left(\frac{-5}{4}\right)^{65} = \frac{-5^{65}}{4^{65}}$

(b) $\left(\frac{-32}{19}\right)^{150} = \frac{32^{150}}{19^{150}}$

(c) $(25 \times 3)^5 = 25 \times 3^5$

(d) $\left(\frac{27}{16}\right)^{-15} = \frac{27^{15}}{16^{15}}$

हमने सीखा

1. $\boxed{(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1}$ एवं $\boxed{(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1}$

2. यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$

3. यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या हो, तो $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m}$

अध्याय–3
समान्तर रेखाएँ
PARALLEL LINES

91ISIH

समान्तर रेखाएँ

पिछली कक्षा में आपने समान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। ये एक ही तल पर स्थित ऐसी दो रेखाएँ हैं, जिनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है। इन्हें दोनों ओर कितना भी बढ़ाया जाए, ये एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

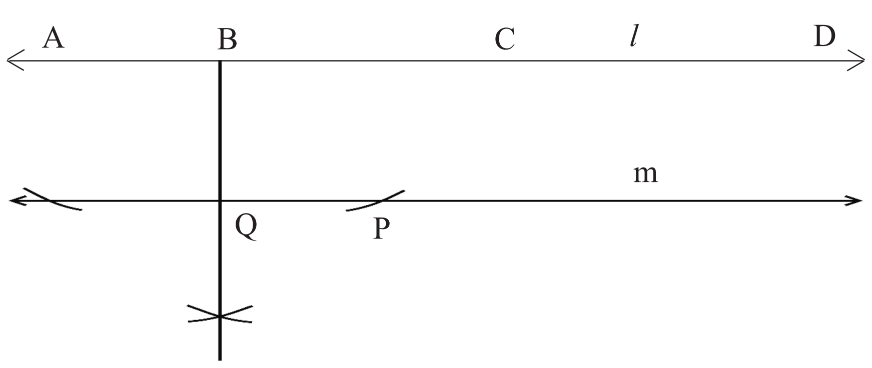
वर्ग या आयत की सम्मुख भुजाएँ, श्यामपट के सम्मुख किनारे, रेल की पटरी इत्यादि समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं। आप भी समान्तर रेखाओं के ऐसे ही कुछ उदाहरणों को सोच कर अपने कॉपी में लिखें।

समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

दो समान्तर रेखाओं की लम्बवत दूरी सदैव समान होती है। इसे ज्ञात करने के लिए, एक रेखा के किसी बिन्दु से दूसरी रेखा पर लम्ब डालते है। इस प्रकार प्राप्त लम्ब की लम्बाई ही उन रेखाओं के बीच की दूरी होती है।

क्रियाकलाप 1

अपनी कॉपी पर दो समान्तर रेखाएँ बनाएं। उनके बीच की दूरी को अलग–अलग बिन्दुओं पर नाप कर अवलोकन सारणी को पूर्ण कीजिए –



चित्र 3.1

सारणी 3.1

क्रमांक	रेखा l पर चिन्हित् बिन्दु	रेखा l से समान्तर रेखा m पर डाले गए लम्ब का बिन्दु	दूरी (सेमी में)
1	A	....	....
2	B	Q	BQ =......
3	C	....	....
4	D	....	....

क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों रेखाओं के बीच की दूरी समान है?
....

दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समान्तर रेखा खींचना

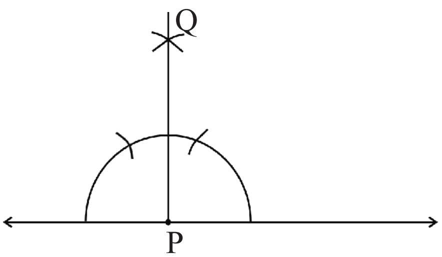
रेखा l खींच कर इससे 3 सेमी की दूरी पर एक समान्तर रेखा m की रचना करना–

रचना के चरण

1. दी गई रेखा l पर कोई बिन्दु P लीजिए (चित्र 3.2)

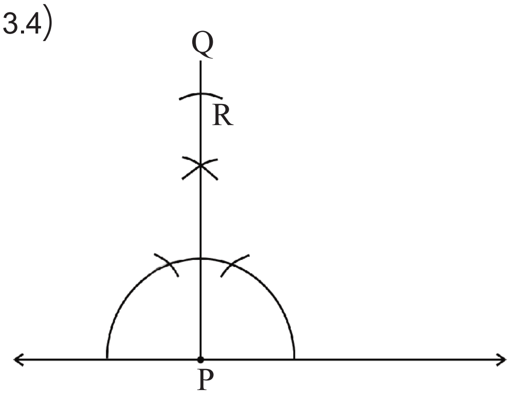
चित्र 3.2

2. P पर $PQ \perp l$ बनाइए (चित्र 3.3)



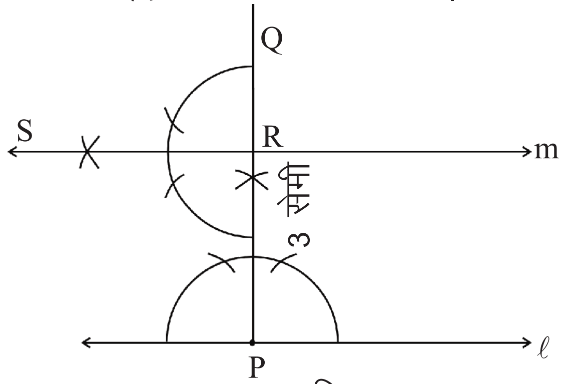
चित्र 3.3

3. बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से PQ पर 3 सेमी. त्रिज्या का चाप काटिए जो PQ को R पर मिलता है। (चित्र 3.4)



चित्र 3.4

4. बिन्दु R पर RS⊥PR बनाइए तथा RS को आगे बढ़ाकर रेखा m बनाइए (चित्र 3.5)



चित्र 3.5

रेखा m, रेखा ℓ से 3 सेमी. दूरी पर स्थित समान्तर रेखा है।

टीप – सेट स्क्वायर की सहायता से भी दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समांतर रेखा खींची जा सकती है।

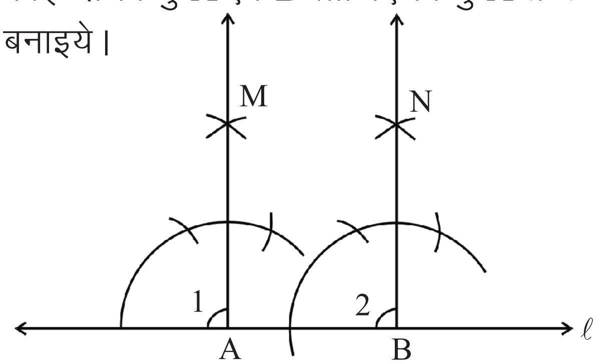
91SNKJ

समान्तर रेखाओं से सम्बन्धित कुछ गुणधर्म

1. एक ही रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गई लम्बवत् रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

क्रियाकलाप 2.

एक रेखा ℓ खींच कर उस पर कोई दो बिन्दु A एवं B लीजिए बिन्दु A से रेखा ℓ पर लम्ब AM तथा बिन्दु B से लम्ब BN बनाइये।



चित्र 3.6

अब अपने मित्रों को भी इसी प्रकार अपनी–अपनी कॉपी में एक रेखा के लम्बवत् दो रेखाएँ खींचने को कहें तथा संगत कोण माप कर सारणी की पूर्ति करने को कहें –

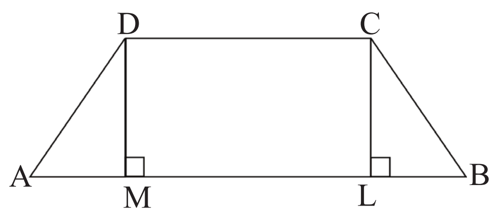
सारणी 3.2

क्र.सं.	नाम	∠1	∠2	क्या ∠1 = ∠2 है?
1.	मोहन	------	------	------------
2.	------------	------	------	------------
3.	------------	------	------	------------
4.	------------	------	------	------------

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$, चूँकि ये कोण संगत कोण है, अतः रेखाएँ AM एवं BN समान्तर रेखा होंगी। इस प्रकार एक ही तल में स्थित किसी रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गईं लम्बवत् रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।

अभ्यास – 1

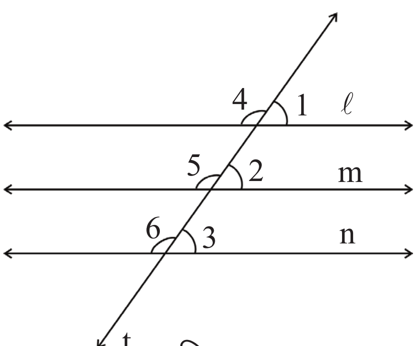
1. एक रेखा खींच कर उससे 5 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए।
2. एक रेखा खींच कर उससे 4.3 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए। इस प्रकार किसी रेखा के समान्तर अधिकतम कितनी समान्तर रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
3. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \| CD$, $CL \perp AB$ और $DM \perp AB$ है तो क्या $CL \| DM$? चतुर्भुज DMLC किस प्रकार का चतुर्भुज होगा? $\triangle ADM$ और $\triangle LCB$ किस प्रकार के त्रिभुज हैं?



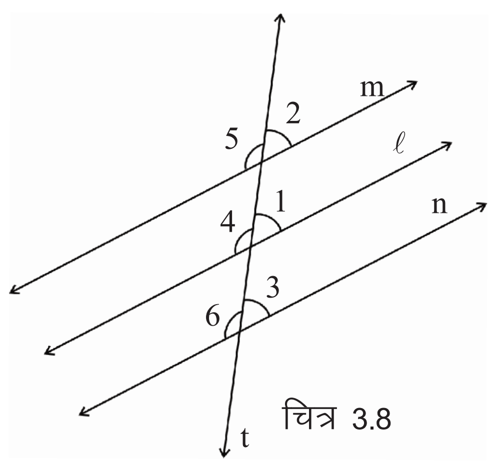
2. एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है

क्रियाकलाप 3

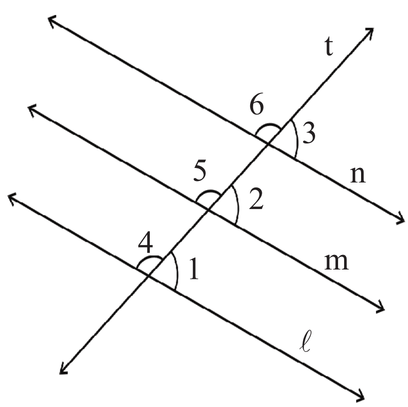
निम्न चित्रों में रेखाएँ m एवं n एक ही रेखा ℓ के समान्तर रेखाएँ हैं तथा t एक तिर्यक रेखा है जो इन्हें प्रतिच्छेद करती है। अब चित्रानुसार कोणों को माप कर सारणी की पूर्ति कीजिए–



चित्र 3.7



चित्र 3.8



चित्र 3.9

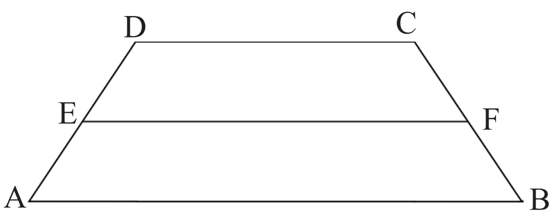
सारणी 3.3

चित्र क्रमांक	कोणों की माप (अंश में)							
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	$\angle 5$	$\angle 6$	क्या $\angle 2=\angle 3$?	क्या $\angle 5=\angle 6$?
3.7								
3.8								
3.9								

चित्र से हम पाते हैं कि $\angle 2=\angle 3$ तथा $\angle 5=\angle 6$, किन्तु ये संगत कोण हैं। अतः रेखाएँ m व n आपस में समान्तर होंगी अर्थात् ''**एक ही रेखा के समान्तर खीचीं गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।**''

अभ्यास 2

1. चित्र में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB||DC है। रेखाखण्ड EF||AB तथा E व F क्रमशः AD व BC पर हैं। क्या EF||DC होगी, यदि हाँ तो क्यों ?

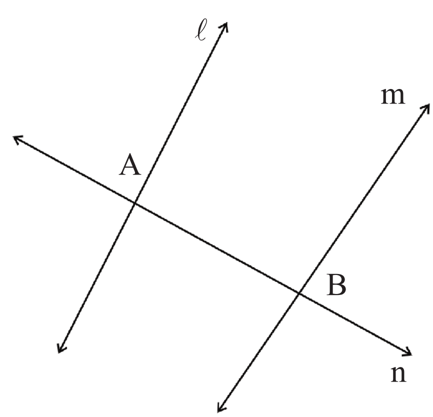


2. इस आकृति में कितने समलम्ब चतुर्भुज हैं। नाम लिखिए।

अन्तःखण्ड

जब दो सरल रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो तिर्यक रेखा का सरल रेखाओं के बीच कटा हुआ भाग **अन्तःखण्ड** कहलाता है। चित्र में AB, रेखा ℓ एवं m के द्वारा रेखा n पर काटा गया अन्तःभाग है इसे अन्तःखण्ड AB कहेंगे।

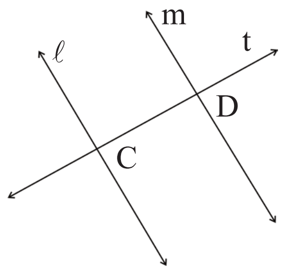
यह आवश्यक नहीं है कि दो रेखाएँ ℓ एवं m समान्तर ही हों।



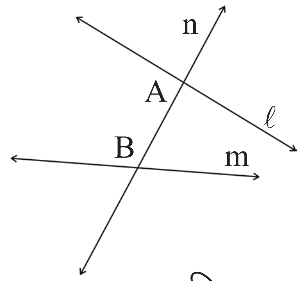
चित्र 3.10

अभ्यास 3

1. निम्न चित्र में अन्तःखण्ड की पहचान कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए



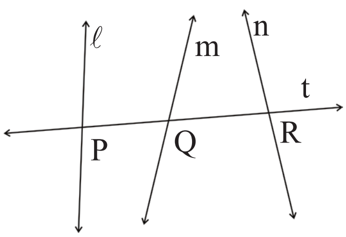
चित्र 3.11



चित्र 3.12

अन्तःखण्ड ——————————

अन्तःखण्ड ——————————



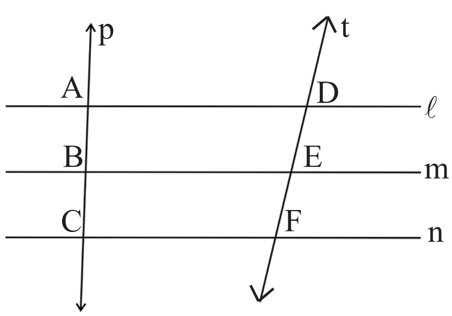
चित्र 3.13

अन्तःखण्ड ——————————

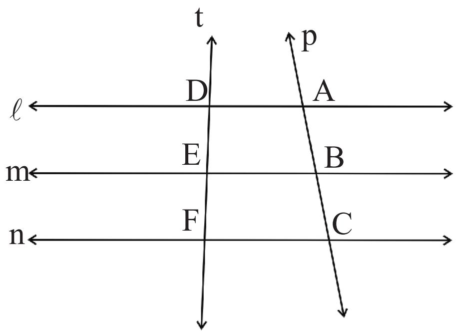
समान्तर रेखाएँ एवं समान अन्तःखण्ड

क्रियाकलाप 4

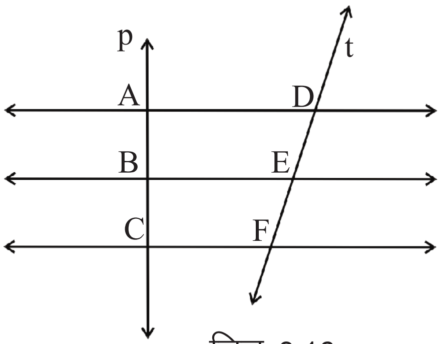
दिए गए चित्रों में रेखा P पर तीन बिन्दु A,B,C इस प्रकार लिए गए हैं कि AB = BC, इन बिन्दुओं से होती हुए तीन समान्तर रेखाएँ ℓ, m व n खींची गई हैं। इन समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हुई एक तिर्यक रेखा t खीची गई है, जो इन्हें क्रमशः D,E व F पर काटती है। स्केल की सहायता से नापकर दी गई सारणी पूरा कीजिए–



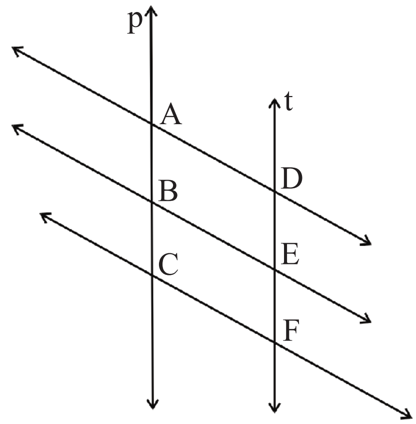
चित्र 3.14



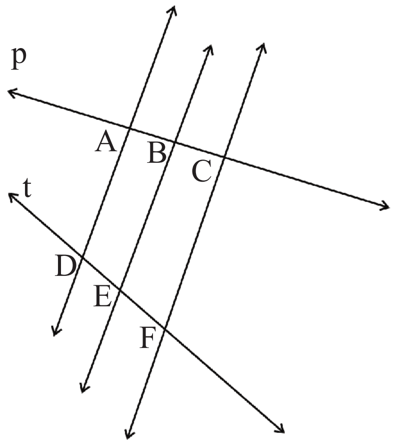
चित्र 3.15



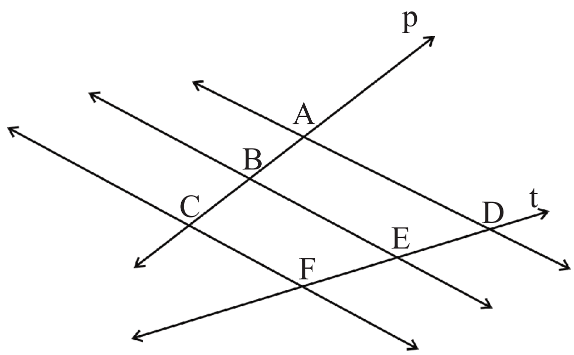
चित्र 3.16



चित्र 3.17



चित्र 3.18



चित्र 3.19

सारणी 3.4

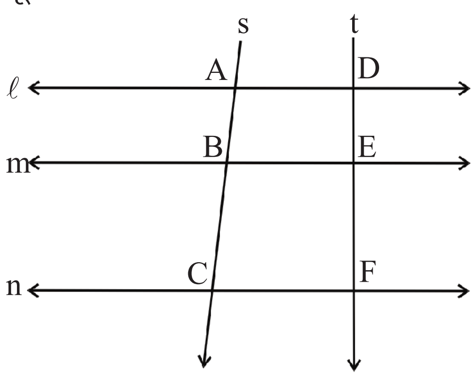
चित्र.क्र.	DE	EF	क्या DE = EF ?
3.14			
3.15			
3.16			
3.17			
3.18			
3.19			

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने पाया कि प्रत्येक स्थिति में DE = EF प्राप्त होता है।

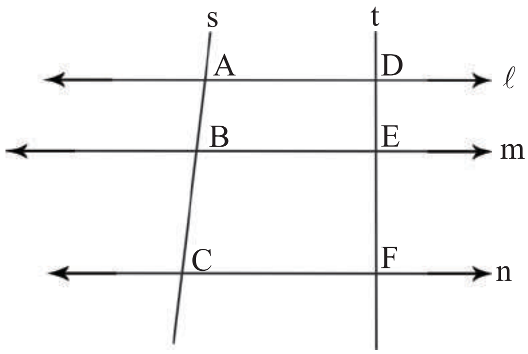
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि **"तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो दूसरी तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।"**

क्रियाकलाप 5.

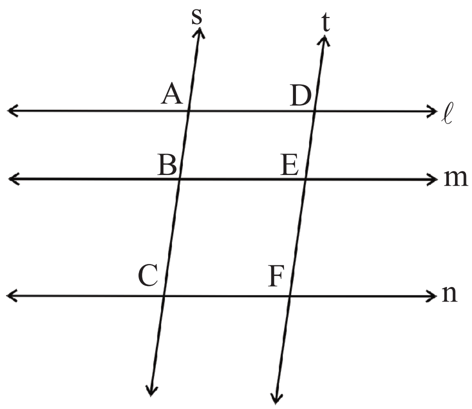
दिए गए चित्रों में $\ell \parallel m \parallel n$ है तथा तिर्यक रेखाएँ s व t तीनों समान्तर रेखाओं को A,B,C तथा D,E,F पर काटती हैं। स्केल की सहायता से सारणी में दिए गए मापों को नाप कर सारणी पूर्ण कीजिए?



चित्र 3.20



चित्र 3.21



चित्र 3.22

सारणी 3.5

क्र.सं.	चित्र क्र.	AB	BC	$\frac{AB}{BC}$	DE	EF	$\frac{DE}{EF}$	क्या $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$?
1.	3.20							
2.	3.21							
3.	3.22							

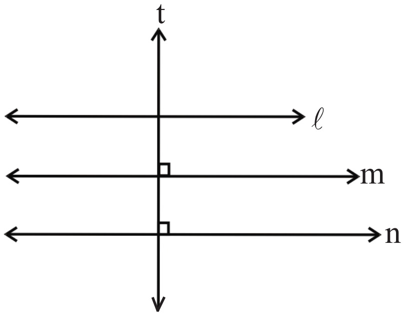
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ प्राप्त होता है।

अतः **"तीन समान्तर रेखाओं पर किसी एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटे गए अंतःखण्डों का जो अनुपात होता है, वहीं अनुपात अन्य तिर्यक रेखाओं में भी होता है।"**

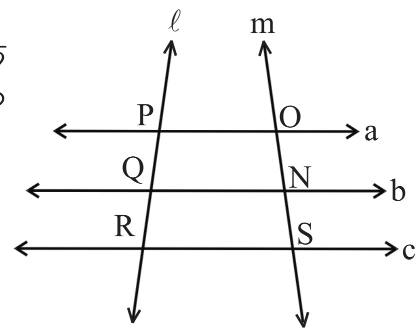
प्रश्नावली 3.1

1. 6 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचकर इस पर कोई बिन्दु P लेकर 2.5 सेमी. दूरी पर एक समान्तर रेखा खींचिए।

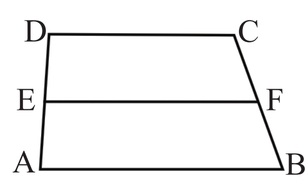
2. दी गई आकृति में $\ell \parallel m$, $t \perp m$ एवं $t \perp n$ है, तो
   (i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों?
   (ii) क्या $\ell \parallel n$ है? क्यों?
   (iii) क्या $t \perp \ell$ है? क्यों?



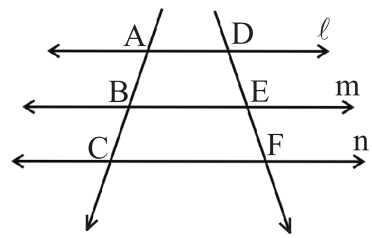
3. दिए गए चित्र में $a \parallel b \parallel c$ है तथा ℓ व m दो तिर्यक रेखाएँ है यदि $PQ = QR$ हो, तो क्या $ON = NS$ है? क्यों?



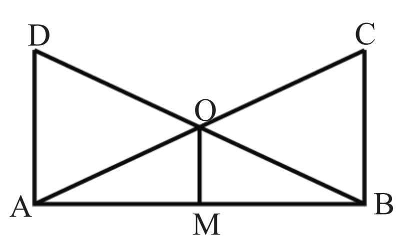
4. दी गई आकृति में $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ और E रेखाखण्ड AD का मध्य बिन्दु है, तब
   (i) क्या $AB \parallel EF \parallel DC$ है? क्यों?
   (ii) क्या F, रेखाखण्ड CB का मध्यबिन्दु है? क्यों?



5. दी गई आकृति में $\ell \parallel m \parallel n$ है, तो क्या इनके अन्तःखण्डों का अनुपात बराबर होगा?



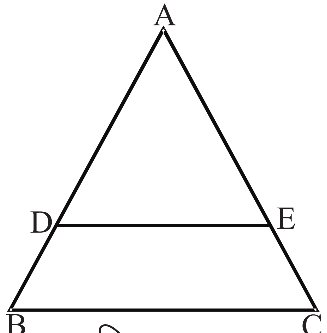
6. यदि DA, CB और OM सभी रेखाखण्ड AB पर लम्ब हैं जहाँ O रेखाखण्ड AC व DB का प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि $OA = 2.4$ सेमी. व $OC = 3.6$ सेमी. हो, तो
   (i) $\dfrac{AM}{BM}$ मान ज्ञात करो।
   (ii) यदि $BO = 3$ सेमी. तो DO का मान ज्ञात कीजिए।



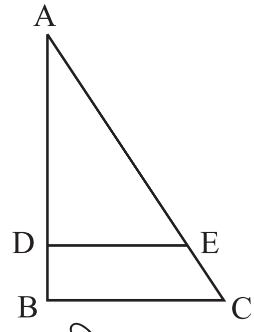
त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा का अन्य दोनों भुजाओं से संबंध–

क्रियाकलाप 6.

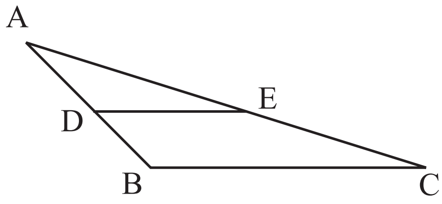
नीचे दिए गए ABC में $DE \parallel BC$ है, जो AB को D तथा AC को E पर प्रतिच्छेद करती है। चित्र की सहायता से सारणी में आये तथ्यों के मान माप कर लिखिए।



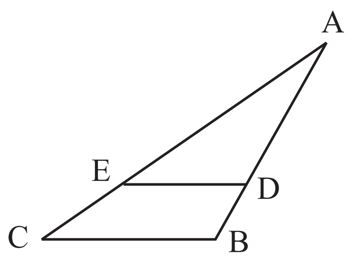
चित्र 3.23



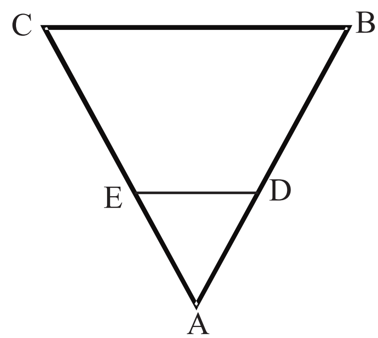
चित्र 3.24



चित्र 3.25



चित्र 3.26



चित्र 3.27

सारणी 3.6

क्र.सं.	चित्र क्र.	AD	DB	$\frac{AD}{DB}$	AE	EC	$\frac{AE}{EC}$	क्या $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$?
1.	3.23							
2.	3.24							
3.	3.25							
4.	3.26							
5.	3.27							

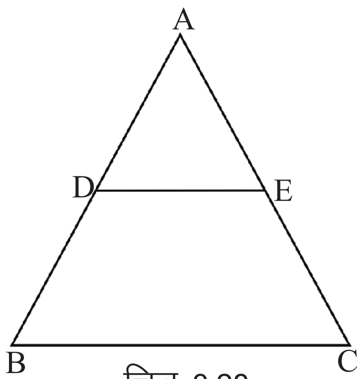
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ प्राप्त होता है।

"अतः किसी त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।"

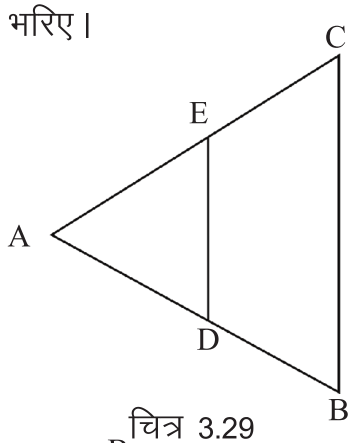
त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का तीसरी भुजा से सम्बन्ध

क्रियाकलाप 7

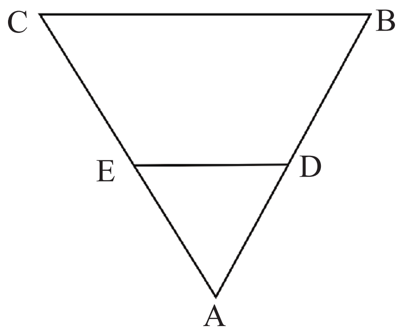
दिये गये $\triangle ABC$ में AB व AC के मध्य बिन्दु D व E हैं। DE पर बनने वाले कोण तथा B व C पर बने कोण को नाप कर सारणी में भरिए।



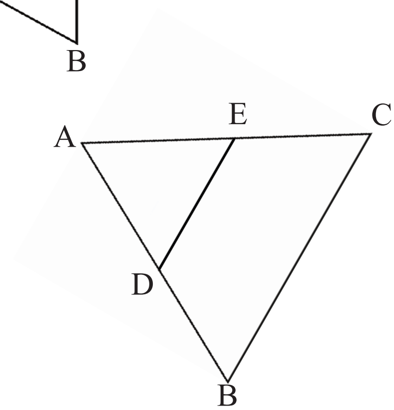
चित्र 3.28



चित्र 3.29



चित्र 3.30



चित्र 3.31

सारणी 3.7

क्र.सं.	चित्र क्र.	$\angle ADE$	$\angle B$	क्या $\angle ADE = \angle B$?	$\angle AED$	$\angle C$	क्या $\angle AED = \angle C$?
1.	3.28						
2.	3.29						
3.	3.30						
4.	3.31						

आप उपरोक्त क्रियाकलाप में पाते हैं कि $\angle ADE = \angle B$ तथा $\angle AED = \angle C$ है। पुनः इन कोणों को ध्यान से देखिए? इन कोणों को आप किस नाम से जानते हैं?

जब संगत कोण बराबर होते हैं तो रेखाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

अतः "**त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती हैं।**"

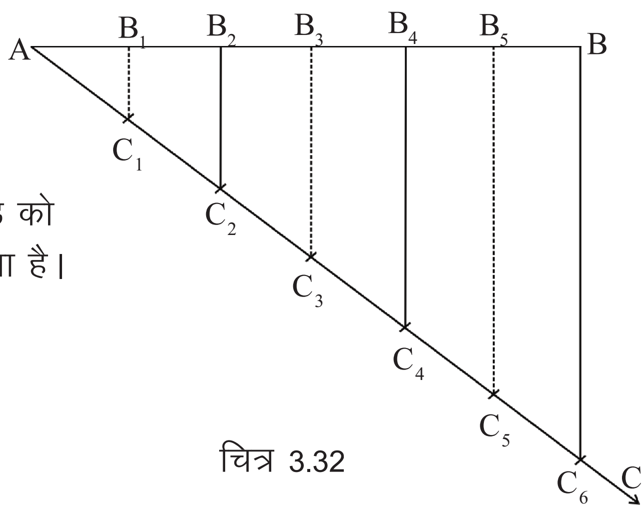
रेखाखण्ड का समान भागों में विभाजन

सलमा ने अशोक से कहा, क्या तुम 5 सेमी के एक रेखाखण्ड को तीन समान भागों में विभाजित कर सकते हो ?

अशोक ने कहा, क्यों नहीं उसने 5 को तीन से भाग दिया और $\frac{5}{3}=1.66..$ सेमी प्राप्त हुआ चुँकि स्केल से 1.66 सेमी मापा नही जा सकता है इसलिए उसने 1.6 सेमी तथा 1.6 सेमी के दो खण्ड किए तो तीसरा खण्ड 1.8 सेमी प्राप्त हुआ।

इस पर सलमा ने कहा, स्केल से मापकर किसी रेखाखण्ड को मनचाहे भागों में बाँटना तो सम्भव नहीं है, इसलिए कोई न कोई तरीका ऐसा होना चाहिए जिससे बिना मापे रेखाखण्डों को समान भागों में विभाजित किया जा सके।

आइए देखें, किस प्रकार समान्तर रेखाओं का उपयोग कर बिना स्केल की सहायता से मापन किये बिना किसी रेखाखण्ड को कई समान भागों में विभाजित किया जा सकता है।



चित्र 3.32

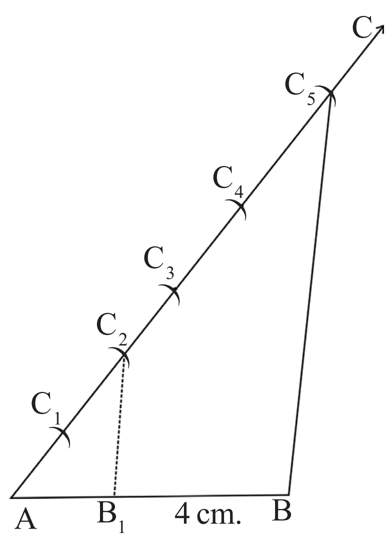
उदाहरण 1.

दिये गये रेखाखण्ड AB को 6 समान भागों में विभक्त करना।

रचना के पद

1. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर न्यून कोण बनाते हुए AC किरण खीचें।
2. अब किरण AC के बिन्दु A से परकार की सहायता से समान दूरियों पर 6 भाग AC_1, C_1C_2, C_2C_3,...,C_5C_6 काटिये।
3. C_6 को B से मिलाइये और C_6B के समान्तर रेखाएँ क्रमशः C_5, C_4,....C_1 से खींचिए जो रेखाखण्ड BA को $B_5B_4B_3$...B_1 पर मिलती हैं।

इस प्रकार, AB रेखाखण्ड AB_1, B_1B_2, B_2B_3,B_3B_4, B_4B_5,B_5B, 6 समान भागों में विभक्त हो गया।



चित्र 3.33

उदाहरण 2. 4 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड लेकर इसे 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।

रचना के पद

1. 4 सेमी. लम्बाई लेकर रेखाखण्ड AB खींचिए उसके बाद AC किरण खींचिए जो AB पर न्यून कोण बनाए

2. किरण AC को परकार की सहायता से समान माप के चाप काट कर अनुपात के योगफल (2+3=5) अर्थात् पाँच बराबर भागों में चिह्नित् कीजिए। जैसे– AC_1, C_1C_2, ...C_4C_5।

3. अब C_5B मिलाइये और उसके बाद C_5B के समान्तर एक रेखा AC को 2:3 में विभाजित करने वाले बिन्दु C_2 से खींचिए जो रेखाखण्ड AB को B_1 पर प्रतिच्छेद करे।

इस प्रकार अभीष्ट अनुपात का रेखाखण्ड AB_1 व B_1B प्राप्त हुआ अर्थात् $AB_1 : B_1B = 2 : 3$.

इसी प्रकार अब आप विभिन्न माप के रेखाखण्डों को लेकर मन चाहे अनुपात में विभाजित कीजिए तथा अपने साथियों को भी ऐसे ही प्रश्नों को हल करने दीजिए।

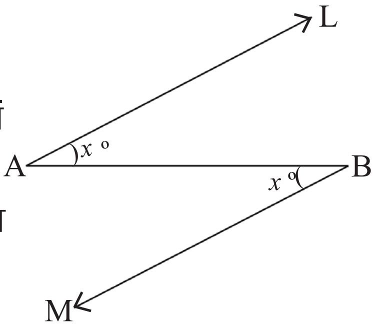
किसी रेखा के समान भाग करने की एक और विधि :

शैली को रेखाखण्डों को विभाजित करने में मज़ा तो आ रहा था परन्तु कभी–कभी उसे समान्तर रेखा खींचने में कुछ परेशानी हो रही थी। आइए एक और तरीका देखें जिससे समान दूरी पर समान्तर रेखाएँ भी बड़ी आसानी से खींची जा सकती हैं।

उदाहरण 3. AB रेखाखंड खींचकर उसको चार समान भागों में विभाजित करना।

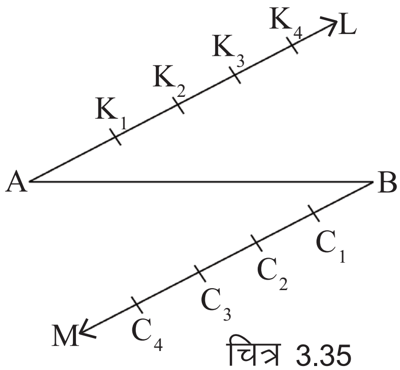
रचना 1. AB रेखाखंड खींच कर उसके दोनों सिरों पर विपरीत दिशा में समान न्यून कोण बनाइए।

यह ध्यान रहे कि दोनों न्यून कोण एक समान हों।



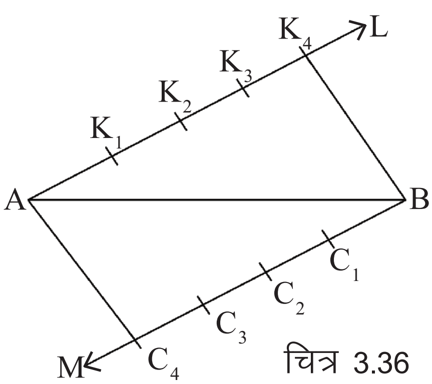
चित्र 3.34

रचना 2. परकार की सहायता से दोनों किरणों AL व BM पर 4–4 समान त्रिज्या के चाप काटिए।



चित्र 3.35

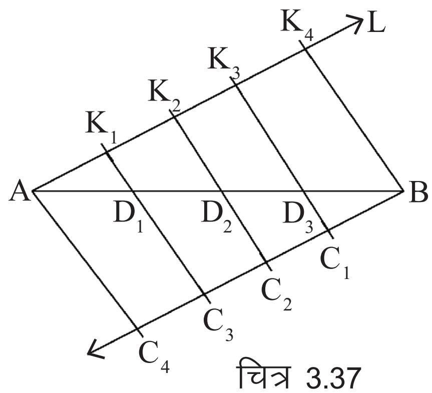
रचना 3. अन्तिम बिन्दु K_4 व C_4 को क्रमशः B व A से मिलाइए



चित्र 3.36

रचना 4. फिर K_3 को C_1 से K_2 को C_2 से और K_1 को C_3 से मिलाइए

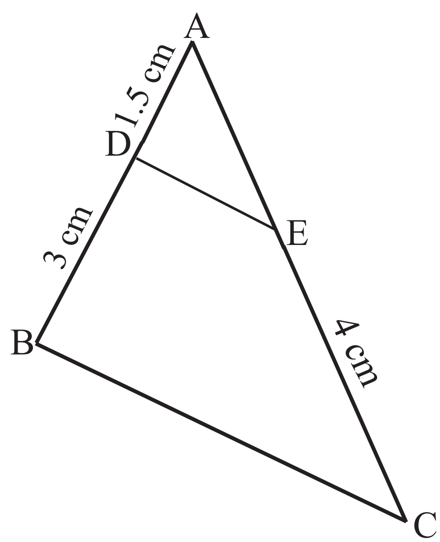
इस प्रकार AB पर व तीन बिन्दु D_1, D_2 एव D_3 प्राप्त हुए यह बिन्दु रेखाखण्ड को चार समान भागों में विभाजित करता है।



चित्र 3.37

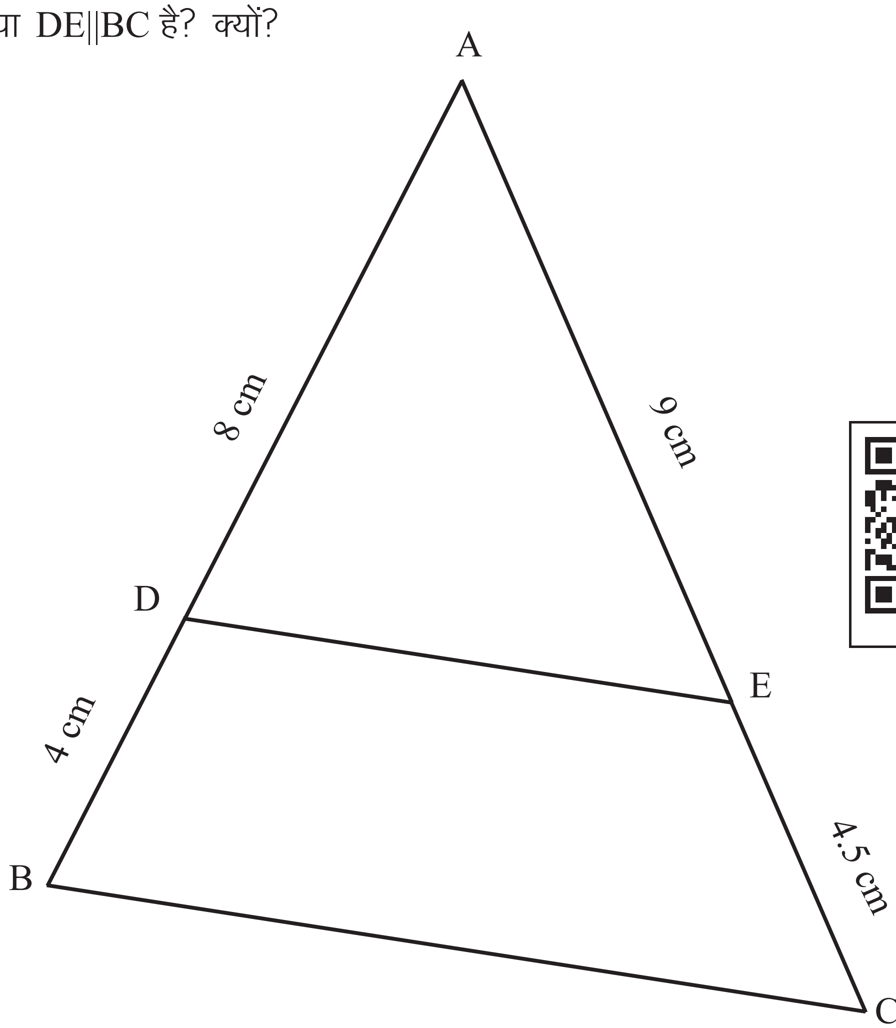
प्रश्नावली 3.2

1. दी गई आकृति में $DE \| BC$, यदि $AD = 1.5$ सेमी, $DB = 3$ सेमी और $EC = 4$ सेमी हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।



2. 7.5 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
3. 8.4 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे सात समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
4. 10 सेमी. के एक रेखाखण्ड को 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।
5. 7 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए इस पर एक बिन्दु P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $AP = \frac{2}{5}AB$ हो।

6. दी गई आकृति में AD = 8 सेमी, BD = 4 सेमी तथा AE = 9 सेमी., EC = 4.5 सेमी. हो, तो क्या DE||BC है? क्यों?



हमने सीखा

1. दो समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है।
2. एक रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।
3. एक रेखा के विभिन्न बिन्दुओं से लम्बवत खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।
4. तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो अन्य तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।
5. तीन समान्तर रेखाओं पर दो तिर्यक रेखाओं के अन्तःखण्डों का अनुपात समान होता है।
6. त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
7. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

92BFNU

अध्याय–4

बीजीय व्यंजकों का गुणा एवं भाग

MULTIPLICATION & DIVISION OF ALEGEBRAIC EXPRESSIONS

बीजीय व्यंजकों के योग एवं घटाने की क्रिया से आप परिचित हैं। योग एवं घटाने की क्रिया में पूर्णांक क्रमशः जुड़ते या घटते हैं तथा बीजांक वही रहता है। इसी प्रकार कक्षा सातवीं में आपने पढ़ा है – किन्हीं दो बीजीय व्यंजकों का गुणा करने पर उनके स्थिरांक का स्थिरांक से तथा चराकों का चराकों के साथ गुणा होता है।

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई तालिका में दो बीजीय व्यंजक एवं उनका गुणनफल दिया गया है। कुछ स्थान रिक्त हैं। रिक्त स्थानों में मान लिखिए।

सारणी 4.1

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक × द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यंजक × प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1	-3	a	$-3 \cdot a$	$a \cdot (-3)$	$-3a$
2	x	5	$x \cdot 5$	$5 \cdot x$	$5x$
3	2a	3a	2a·3a	3a·2a	$6a^2$
4	$7x$	$-4y$	--------	--------	--------
5	$-5xy$	$2x$	--------	--------	--------
6	$4a^2$	--------	--------	--------	$-12a^3b$
7	$-7a^2b^2$	8ab	--------	--------	--------

उपरोक्त तालिका में पदों का स्थान आपस में बदलने से प्राप्त गुणनफल समान रहता है। इससे गुणा सम्बन्धी किस नियम की पुष्टि होती है?

आइए कुछ और उदाहरण देखें

(i) $3x \cdot 5x = (3{\cdot}5)\ x \cdot x = 15x^2$

(ii) $(-4x)\ 6y = (-4 \times 6)\ x \cdot y = -24xy$

(iii) $(-ab)\ 5b^2 = (-1 \times 5)\ ab{\cdot}b^2 = -5\ a{\cdot}b{\cdot}b^2 = -5ab^3$

इस प्रकार आप देखते हैं कि जहाँ आधार समान होता है वहाँ चरांकों के घात, घातांक नियम के अनुसार आपस में जुड़ जाते हैं।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ते समय आपने देखा है कि गुणांक आपस में जुड़ जाते हैं।

जैसे, $x + x = (1 + 1)\,x = 2x$ (यहाँ x का गुणांक 1 है)

इस प्रकार, $2x$, x को दो बार आपस में जोड़ने से प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $x + x + x = 3x$

$$x + x + x + x = 4x$$

इस प्रकार, x को जितनी बार जोड़ते हैं, x का गुणांक उतना ही रहता है।

$2x$ में 2 गुणांक है एवं x चरांक है।

$2x$ का मान x के विभिन्न मानों के लिए भिन्न–भिन्न होगा।

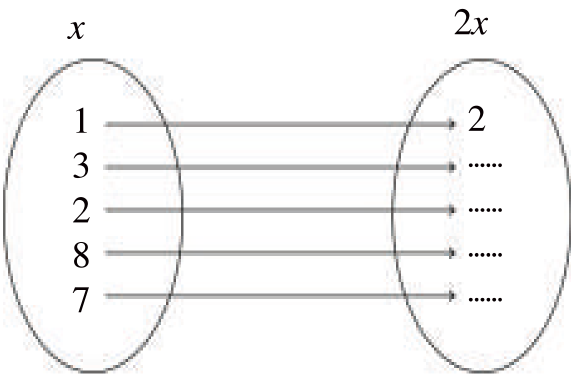
यदि $x = 3$ हो, तो $2x = 2{\cdot}(3) = 6$

यदि $x = -5$ हो, तो $2x = 2{\cdot}(-5) = -10$

और यदि $x = 0$ हो, तो $2x = 2{\cdot}(0) = 0$

$x = \frac{3}{8}$ हो, तो $2x = 2{\cdot}\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



ध्यान रहे कि $2x$ में 2 गुणांक एवं x चरांक है। अतः यदि $x = 5$ हो, तो $2x = 25$ नहीं होगा, बल्कि $2x = 2 \times 5 = 10$ होगा।

एक दिन शिक्षक कक्षा में नीरज से पूछते हैं कि आपकी उम्र क्या है?

नीरज – मेरी उम्र 13 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

नीरज – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 13 + 2 = 15 वर्ष होगी।

शिक्षक – जितेन्द्र आपकी उम्र कितनी है?

जितेन्द्र – मेरी उम्र लगभग 12 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

जितेन्द्र – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 12 + 2 = 14 वर्ष होगी।

शिक्षक : यदि किसी व्यक्ति की वर्तमान आयु x वर्ष हो, तो 2 वर्ष पश्चात् उसकी आयु क्या होगी?

मनीषा ने उत्तर दिया कि 2 वर्ष बाद उसकी उम्र $(x + 2)$ वर्ष होगी।

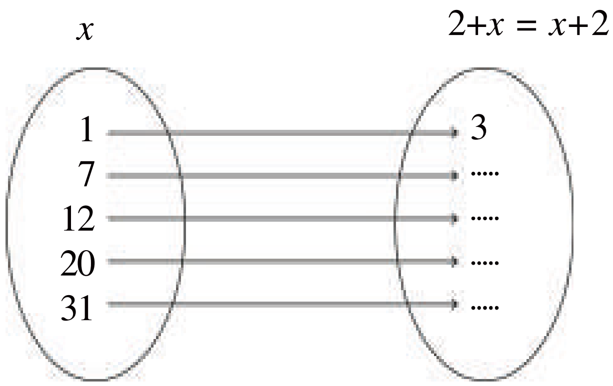
यदि हम x का मान अलग–अलग रखें तो $(x + 2)$ का मान भी भिन्न–भिन्न होगा।

यदि $x = 3$ हो, तो $x + 2 = 3 + 2 = 5$ वर्ष

$x = 8$ हो, तो $x + 2 = 8 + 2 = 10$ वर्ष

$x = 5$ हो, तो $x + 2 = 5 + 2 = 7$ वर्ष

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



इस प्रकार हम पाते हैं कि $2x$ जहाँ x के दुगुने को प्रदर्शित करता है वहाँ $(2+x)$, x से 2 अधिक को प्रदर्शित करता है

यदि $x = 0$, तो $2x = 2 \times 0 = 0$

यदि $x = 0$, तो $2+x = 2 + 0 = 2$

अत : $\boxed{2x \neq 2+x}$

एकपदीय व्यंजक का बहुपदीय व्यंजक के साथ गुणा

कक्षा सातवी में हमने किसी एकपदीय बीजीय व्यंजक का किसी द्विपदीय बीजीय व्यंजक से गुणा करना सीखा है।

आइए, एक पदीय व्यंजक का, द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणा हम एक क्रियाकलाप के माध्यम से पुनः दोहरा लेते हैं।

क्रियाकलाप 2.

आगे दी गई तालिका में एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणनफल दिया है। कुछ रिक्त स्थान दिए गए हैं उनकी पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.2

क्र.सं.	एक पदीय व्यंजक	द्विपदीय व्यंजक	एक पदीय x द्विपदीय व्यंजक	गुणनफल
1	x	a + b	x(a + b)	ax + bx
2	−4y	3a + b	----------	----------
3	xy	7 + 8x	$xy(7 + 8x)$	----------
4	$2t^2$	$3r^2 - 55$	----------	----------
5	$\frac{1}{2}m$	$m^3 + \frac{3}{2}n$	----------	----------
6	4a	$5x - \frac{1}{2}y$	----------	----------

इसी तरीके से हम किसी एक पदीय व्यंजक का गुणा किसी बहुपदीय व्यंजक से कर सकते हैं।

अथवा $a\,(b + c + d) = ab + ac + ad$

$(b + c + d)\,a = ba + ca + da$

इसी प्रकार $a\,(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae$

या $(b + c + d + e)\,a = ba + ca + da + ea$

उदाहरण 1. $2a\,(a + 2b + 5c) = 2a\cdot a + 2a\cdot 2b + 2a\cdot 5c$

$= 2a^2 + 4\,ab + 10ac$

उदाहरण 2. $(2q + r + 3s - t)\,p = 2q\cdot p + r\cdot p + 3s\cdot p - t\cdot p$

$= 2\,pq + pr + 3\,ps - pt$

उदाहरण 3. $(xy + 2y^2z + x^2)\,yz^2 = xy\cdot yz^2 + 2y^2z\cdot yz^2 + x^2\cdot yz^2$

$= xy^2z^2 + 2\,y^3z^3 + x^2\,yz^2$

क्रियाकलाप 3.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सारणी 4.3

क्र.सं.	बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणन प्रक्रिया	गुणनफल
1.	(2a +b + c) 5d	2a × 5d + b × 5d + c × 5d	10ad + 5 bd + 5 cd
2.	$7a^2$ (b + 2d – t)	....	....
3.	..... ($x^2 + xy$ + z)	p × x^2 + p × xy + p × z	p x^2 + ...
4.	–5 m (....+....+ b)	....	$-5m^2$ – 10mn – 5mb
5.	$7p^2m\,(m + n^3 + p)$	....	....

आइए, अब हम दो द्विपदीय व्यंजकों को आपस में गुणा करने पर विचार करें–

दो द्विपदीय व्यंजकों का गुणा

दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा दो एकपदीय व्यंजकों का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा के योग के समान है।

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$
$$= (ac + ad) + (bc + bd)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

इसे हम निम्न प्रकार से भी हल कर सकते हैं:–

$$(a + b)(c + d)$$
$$= (a + b)c + (a + b)d$$
$$= ac + bc + ad + bd$$

इस प्रक्रिया में गुणा का योग पर वितरण के नियम का दो बार उपयोग होता है ।

उदाहरण 4. $(5x + 3y)$ एवं $(4x + 5y)$ को आपस में गुणा कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(4x + 5y) = 5x(4x + 5y) + 3y(4x + 5y)$

[$(a + b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$= 5x \cdot 4x + 5x \cdot 5y + 3y \cdot 4x + 3y \cdot 5y$

[$a(b + c) = ab + ac$ के प्रयोग से]

$= 20x^2 + 25xy + 12yx + 15y^2$

$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$

इसे निम्न प्रकार से भी हल किया जा सकता है–

$(5x + 3y)(4x + 5y) = (5x + 3y) \cdot 4x + (5x + 3y) \cdot 5y$

[$(a + b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d$ के प्रयोग से]

$= 5x \cdot 4x + 3y \cdot 4x + 5x \cdot 5y + 3y \cdot 5y$

[$(a + b)c = ac + bc$ के प्रयोग से]

$= 20x^2 + 12yx + 25xy + 15y^2$

$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$

उदाहरण 5. $(3s^2 + 2t)$ एवं $(2r^2 + st)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए –

हल: $(3s^2 + 2t)(2r^2 + st) = 3s^2 \cdot (2r^2 + st) + 2t \cdot (2r^2 + st)$

[$(a + b)(c + d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$= 3s^2 \cdot 2r^2 + 3s^2 \cdot st + 2t \cdot 2r^2 + 2t \cdot st$

[$a(b + c) = ab + ac$ के प्रयोग से]

$= 6s^2r^2 + 3s^3t + 4tr^2 + 2st^2$

उदाहरण 6. $(5x + 3y)$ और $(x + y)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं $x = 3, y = -2$ के लिए गुणनफल की जाँच कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(x + y) = 5x(x + y) + 3y(x + y)$

$= 5x \cdot x + 5x \cdot y + 3y \cdot x + 3y \cdot y$

$= 5x^2 + 5xy + 3xy + 3y^2$

$(5x + 3y)(x + y) = 5x^2 + 8xy + 3y^2$

जाँच: बायाँ पक्ष $= (5x + 3y)(x + y)$

$[x = 3, y = -2$ रखने पर $]$

$= [5(3) + 3(-2)](3-2)$

$= [15-6](1)$

$= 9 \times 1 = 9$

दायाँ पक्ष $= 5x^2 + 8xy + 3y^2$

$= 5(3)^2 + 8(3)(-2) + 3(-2)^2$

$= 5(9) - 48 + 3(4)$

$= 45 + 12 - 48$

$= 57 - 48 = 9$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

क्रियाकलाप 4.

गुणा की प्रक्रिया के अनुसार सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

सारणी 4.4

दो बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणा की प्रक्रिया		प्राप्त गुणनफल
	वितरण नियम के प्रयोग से	वितरण नियम के पुनः प्रयोग से	
1. (a + b) (c + d)	a (c + d) + b (c + d) या (a+b)c + (a+b) d	ac + ad +bc +bd या ac + bc+ad+bd	ac+ad+bc+bd ac+bc+ad+bd
(a) $(4x+5y)(2x+3y)$	$4x(2x+3y)+5y(2x+3y)$	$4x\times2x+4x\times3y+5y\times2x+5y\times3y$	$8x^2+22xy+15y^2$
(b) $(5x^2+2s)(2t+5)$	....	....	....
(c) $(2r^2+5s^3)(r^2+t^3)$	....	....	....
2. (a + b) (c – d)	a (c – d) + b (c – d)	ac – ad +bc – bd	ac–ad+bc–bd
(a) $(b+2c)(3b-c)$	....	....	....
(b) $(5x+3y)(2y^2-z)$	....	....	....
3. (a – b) (c + d)	a (c + d) – b (c + d)	ac + ad – bc – bd	ac+ad–bc–bd
(a) $(2x-3y)(3x+z)$	....	....	....
(b) $(5p-2q)(3x+4s)$	....	....	....
4. (a – b) (c – d)	a (c – d) – b (c – d)	ac – ad – bc+bd	ac–ad–bc+bd
(a) $(2s-3p)(4x-5t)$	....	....	....
(b) $(x^2+xy)(y^2-z)(y^2-z)$	....	....	....

प्रश्नावली 4.1

प्र.1 निम्न पदों का आपस में गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x + 7)(3x + 2)$ (ii) $(3x - 5)(2x + 9)$

(iii) $(7x - 6)(15x - 2)$ (iv) $\left(\frac{1}{2}x + 5y\right)\left(3x - \frac{6}{5}y\right)$

(v) $(x + 5y)(7x - y)$

प्र.2 मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(x + y)(2y + 3x) + (3x + y)(y+2x)$ (ii) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

(iii) $(x^2 + y^2)(3x - 5y)$ (iv) $(a + b)(a + b)$

प्र.3 $(x + y)$ और $(3y + 4x)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं नीचे दिए मानों के लिए सत्यापन कीजिए –

(i) $x = 2, \ y = -1$

(ii) $x = 1, \ y = 0$

बीजीय व्यंजकों के भाग

आप किसी एक पूर्णांक से किसी दूसरे पूर्णांक का गुणा व भाग करना जानते हैं। आइए, कुछ उदाहरण देखें –

1. $6 \times 8 = 48$ तो $48 \div 8 = 6$ तथा $48 \div 6 = 8$
2. $-15 \times 3 = -45$ तो $-45 \div -15 = 3$ तथा $-45 \div 3 = -15$
3. $m \times n = mn$ तो $mn \div m = n$ तथा $mn \div n = m$

एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यंजक से भाग

आइए, प्रारम्भ में हम एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यजंक से भाग देना जाने।

उदाहरण 7. $18x^2y$ में $6xy$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $18x^2y \div 6xy = \frac{18x^2y}{6xy}$

$$= \frac{18}{6} \times \frac{x^2}{x} \times \frac{y}{y} = 3 \times \frac{x \times \cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} = 3x$$

उदाहरण 8. $-35mn^2p$ में $7np$ का भाग दीजिए।

हल : $-35mn^2p \div 7np = \frac{-35mn^2p}{7np}$

$$= \frac{-35}{7} \times \frac{m}{1} \times \frac{n^2}{n} \times \frac{p}{p} = -5 \times m \times \frac{n \times \cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} = -5mn$$

इस प्रकार आपने देखा कि भाग की क्रिया हम निम्न पदों में करते हैं –

1. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह समान हों, तो भागफल के चिह्न धनात्मक होता है।
2. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह असमान हों, तो भागफल का चिह्न ऋणात्मक होता है।
3. भाज्य के गुणांक में भाजक के गुणांक का भाग देते हैं।
4. भागफल में किसी चरांक का घात ज्ञात करने के लिए घातांक नियम $a^m \div a^n = a^{m-n}$ का उपयोग करते हैं। आइए, निम्न उदाहरण द्वारा समझें :–

उदाहरण 9. $-25a^3b^2c$ में $-5ab^2c$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $-25a^3b^2c \div -5ab^2c = \dfrac{-25a^3b^2c}{-5ab^2c}$

$$= \frac{-25}{-5} \times \frac{a^3}{a} \times \frac{b^2}{b^2} \times \frac{c}{c}$$

$$= 5 \times a^{3-1} \times b^{2-2} \times c^{1-1} \quad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$$= 5a^2b^0c^0 = 5a^2 \{\text{चूंकि } b^0 = 1, c^0 = 1\}$$

क्रियाकलाप 5.

निम्न सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.5

क्र.सं.	पहली संख्या × दूसरी संख्या	दोनों संख्याओं के गुणनफल का मान	भाग संक्रिया के रूप में दर्शाना	
			पहली विधि	दूसरी विधि
1.	$3x \times 4y$	$12xy$	$12xy \div 3x = 4y$	$12xy \div 4y = 3x$
2.	$2x \times (-7x)$	$-14x^2$	------------------	------------------
3.	$m \times 4n$	$4mn$	------------------	------------------
4.	$18a^2 \times 2b^2$	--------------	------------------	------------------
5.	$13p^2 \times 7pq$	$91p^3q$	------------------	------------------

इस प्रकार, हम देखते है कि $3x$ एवं $4y$ का गुणा करने पर $12xy$ प्राप्त होता है तथा $12xy$ में $3x$ का भाग देने पर $4y$ तथा $12xy$ में $4y$ का भाग देने पर $3x$ प्राप्त होता है। अतः गुणा एवं भाग एक दूसरे की विपरीत क्रियाएं हैं।

बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजक से विभाजन

आपने एकपदीय का एकपदीय व्यंजक से विभाजन तो जान लिया। आइए, अब निम्न उदाहरणों में बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजकों से विभाजन देखें –

उदाहरण 10. $16m^2 + 4mn - 12mn^2$ को $2m$ से भाग दीजिए।

हल : $(16m^2 + 4mn - 12mn^2) \div 2m$

$$= \frac{16m^2 + 4mn - 12mn^2}{2m}$$

$$= \frac{16m^2}{2m} + \frac{4mn}{2m} - \frac{12mn^2}{2m}$$

$$= 8m^{2-1} + 2m^{1-1}n - 6m^{1-1}n^2$$

$$= 8m + 2n - 6n^2$$

यहाँ बहुपदीय व्यंजक को अलग–अलग एकपदीय व्यंजक में बदलकर भाग की क्रिया की गई है।

प्रश्नावली 4.2

प्र.1. मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(18x^2y^2) \div (-6xy)$

(ii) $(-15x^3y^2z) \div (-5x^2yz)$

(iii) $(-x^5y^7) \div -x^4y^5)$

(iv) $(32a^4b^2c) \div (-8abc)$

(v) $(28a^4b^6c^8) \div (-7a^2b^4c^6)$

प्र.2. भाग दीजिए।

(i) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2$ को $2x^2$ से

(ii) $5a^4b^3 - 10a^3b^2 - 15a^2b^2$ में $-5a^2b^2$ का

(iii) $27a^4 - 36a^2$ को $-9a$ से

(iv) $x^4 + 2x^3 - 2x^2$ को $4x^2$ से

(v) $a^2 + ab + ac$ को a से

92KBQH

बहुपदीय में द्विपदीय का भाग

आप किसी एक पदीय या बहुपदीय व्यंजक में एक पदीय व्यंजक का भाग देना जान चुके हैं। आइए, निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 11. $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ में $3a + 2$ का भाग दीजिए।

हल : सर्वप्रथम दिये गये बहुपदीय व्यंजक $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ को घात के घटते हुए क्रम में लिख लेते हैं।

जैसे, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$

चरण 1. यहाँ भाज्य का पहला पद $27a^3$ है। इसमें भाजक के पहले पद 3a का भाग देते हैं –

$$3a+2\overline{)27a^3+18a^2+12a+8}$$

$$\frac{27a^3}{3a}=9a^2$$

और $9a^2$ को भागफल में लिख लेते हैं।

चरण 2. अब $9a^2$ को पूरे भाजक से गुणा करते है।

अतः $9a^2(3a+2)=27a^3+18a^2$

यहाँ $27a^3+18a^2$ को भाज्य में सजातीय पदों के नीचे लिखते है और घटा देते है।

अर्थात् नीचे वाले पद के चिह्न बदल देते है।

$$\begin{array}{r|l} & 9a^2 \\ \hline 3a+2 & 27a^3+18a^2+12a+8 \\ & \underline{\pm 27a^3 \pm 18a^2} \end{array}$$

चरण 3. घटाने के बाद शेष बची संख्या को नीचे लिख लेते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & 9a^2 \\ \hline 3a+2 & \cancel{27a^3}+\cancel{18a^2}+12a+8 \\ & \pm 27a^3 \pm 18a^2 \\ \hline & \qquad\qquad +12a+8 \end{array}$$

चरण 4. अब शेष भाज्य के पहले पद 12a में भाजक के पहले पद 3a का भाग देते हैं।

$12a \div 3a = 4$

+4 को भागफल में लिखते है तथा +4 का पुनः पूरे भाजक में गुणा करते है।

अतः $4(3a+2)=12a+8$

$$\begin{array}{r|l} & 9a^2 \\ \hline 3a+2 & 27a^3+18a^2+12a+8 \\ & \pm \cancel{27a^3} \pm \cancel{18a^2} \\ \hline & \qquad\qquad +12a+8 \end{array}$$

चरण 5. भाज्य में सजातीय पदों के नीचे 12a + 8 को लिख लेते है एवं घटा देते है।

$$\begin{array}{r|l} & 9a^2+4 \\ \hline 3a+2 & 27a^3+18a^2+12a+8 \\ & \pm 27a^3 \pm 18a^2 \\ \hline & \qquad\qquad +\cancel{12a}+\cancel{8} \\ & \qquad\qquad \underline{\pm 12a \pm 8} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

चरण 6. यहाँ घटाने पर शेषफल शून्य बचता है।

$$\begin{array}{r|l} & 9a^2+4 \\ \hline 3a+2 & 27a^3+18a^2+12a+8 \\ & \pm \cancel{27a^3} \pm \cancel{18a^2} \\ \hline & 0 + 0 \quad +12a+8 \\ & \qquad\quad \underline{\pm \cancel{12a} \pm \cancel{8}} \\ & \qquad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

चरण 7. $\therefore$ अभीष्ट भागफल $= 9a^2 + 4$ है।

आप जानते है कि जब किसी एक संख्या में किसी दूसरी संख्या का पूरा–पूरा भाग जाता है और शेषफल शून्य बचता है तो दूसरी संख्या पहली संख्या का गुणनखण्ड कहलाती है।

यहाँ $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ में $(3a + 2)$ का पूरा–पूरा भाग देने से शेषफल शून्य बचता है अतः $(3a+2)$, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ का एक गुणनखण्ड होगा।

आइए, एक और उदाहरण देखते हैं –

उदाहरण 12. $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ को $(2x - 3)$ से विभाजित कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{l}
2x - 3)\,-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10\,(-6x^2 - 13x - 22 \\
\quad\;\; \mp 12x^3 \pm 18x^2 \\
\hline
\qquad\quad -26x^2 - 5x + 10 \\
\qquad\quad \mp 26x^2 \pm 39x \\
\hline
\qquad\qquad\quad -44x + 10 \\
\qquad\qquad\quad \mp 44x \pm 66 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad -56
\end{array}
$$

यहाँ भी पूर्व की भाँति भाग दिया गया है। परन्तु शेषफल -56 है, शून्य नहीं।

अतः हम कह सकते है कि $(2x - 3)$ व्यंजक $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

उदाहरण 13. $8q^3 + 2q - 8q^2 - 1$ में $4q + 2$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ q के घात घटते क्रम में नहीं है, अतः पहले व्यंजक को घटते क्रम में लिखने पर $8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\;\; 2q^2 - 3q + 2 \\
4q + 2 \,\big)\; 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1 \\
\qquad\quad\; \pm 8q^3 \pm 4q^2 \\
\hline
\qquad\qquad\quad -12q^2 + 2q - 1 \\
\qquad\qquad\quad \mp 12q^2 \mp 6q \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad +8q - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \pm 8q \pm 4 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\; -5
\end{array}
$$

यहाँ भी भाग के चरण पूर्व में बताएं अनुसार पूर्ण किए गए है। भाग की क्रिया तब तक करते हैं। जब तक शेषफल में बीजीय चरांक का घात भाजक के बीजीय चरांक के घात से कम न हो जाए।

जांच : भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इस प्रश्न में,

भाज्य $= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

भाजक $= 4q + 2$

भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$

शेषफल $= -5$

दायाँ पक्ष = भाजक × भागफल + शेषफल

$= (4q + 2)\cdot(2q^2 - 3q + 2) + (-5)$

$= 4q\,(2q^2 - 3q + 2) + 2\,(2q^2 - 3q + 2) - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 8q + 4q^2 - 6q + 4 - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 4q^2 + 8q - 6q - 1$

$= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

= बायां पक्ष

अर्थात् **भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल**

अतः प्राप्त भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$ और शेषफल $= -5$ सही है।

प्रश्नावली 4.3

प्र.1. निम्नलिखित बहुपद को चर राशि के घातांक के घटते क्रम में लिखिए –

(i) $15x^2 - 3x + 8x^4 - 4x^3 - 15$

(ii) $12m^5 - 9m^3 + 16 - 6m^2 + 8m$

(iii) $9m^4 - 16m^2 - 4m + 16 - m^3$

(iv) $4 - 8y^3 + 12y^4 - 6\,y^2$

प्र.2. भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइये कि क्या भाजक, भाज्य का एक गुणनखण्ड है ?

(i) $x^2 - 11x + 30$ को $(x - 5)$ से

(ii) $x^2 + 20x + 91$ में $(x + 7)$ का

(iii) $x^2 - 5x - 6$ में $(x - 6)$ का

(iv) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ को $(x - 4)$ से

(v) $a^2 + 2ab + b^2$ में $(a + b)$ का

प्र.3 भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइए कि भाजक भाज्य का गुणनखण्ड नहीं है ? भागफल एवं शेषफल लिखिए –

(i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ को $x - 1$ से

(ii) $-12 + 3x^2 - 4x + x^3$ को $x + 5$ से

(iii) $4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 13x - 6$ को $2x + 3$ से

(iv) $8x^3 - 6x^2 + 10x + 15$ को $4x + 1$ से

प्र.4. भाग देकर जांच कीजिए कि क्या –

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

(i) $m^2 - 3m + 7$ को $m - 2$ से

(ii) $a^3 - 2a^2 + a + 2$ को $a + 2$ से

(iii) $9x^3 + 15x^2 - 5x + 3$ को $3x + 1$ से

(iv) $2x^3 + 3x^2 + 7x + 15$ को $x^2 + 4$ से

92U7S5

हमने सीखा

1. दो एक पदीय व्यंजकों का गुणा करने के लिए पहले उनके गुणांकों का उसके बाद चरांकों का गुणा करते है।

2. एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा करने के लिए एक पदीय व्यंजक को, द्विपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफलों को जोड़ देते हैं। इस प्रकार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं।

3. चराकों का गुणा करते समय घातांक नियम का उपयोग करते है।

4. दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा करने के लिए दो बार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं। जैसे–

$$(a+b)\ (c+d) = a\ (c+d) + b\ (c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

5. गुणा करते समय यदि बीजीय व्यंजकों के चिह्न समान हो तो व्यंजक के चिह्न धनात्मक होता है एवं असमान चिह्न होने पर ऋणात्मक हो जाता है।

6. भागफल की क्रिया तब तक करते हैं जब तक शेषफल में बीजीय चरांक की घात, भाजक के घात से कम न हो जाये।

7. बहुपदीय व्यंजक में, एक पदीय व्यंजक का भाग देते समय प्रत्येक पद में, एकपदीय व्यंजक का भाग देते हैं।

अध्याय 5

वृत्त एवं उसके अवयव
CIRCLE

9343TS

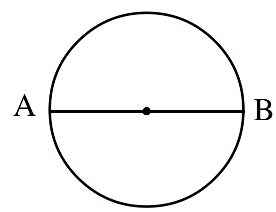
अनु ने कक्षा छठवीं में वृत्त के पाठ में पढ़ा था कि वृत्त के प्रत्येक बिन्दु की केन्द्र से दूरी समान होती है, यह दूरी त्रिज्या कहलाती है। उसको विभिन्न मापों का वृत्त बनाना भी आता है, चूड़ी से वृत्ताकार आकृति बनाना और नये नये डिजाइन बनाना तो उसका प्रिय खेल हैं।

एक दिन उसकी एक चूड़ी टूट गयी उसने चूड़ी के टुकड़ों को निश्चित स्थान में रखकर फिर से चूड़ी बना ली और पेंसिल की सहायता से एक वृत्ताकार आकृति भी बना ली। अनु सोच रही थी कि जिस प्रकार चूड़ी के कई टूकड़े हो सकते है वैसे ही क्या वृत्त के भी कई टुकड़े हो सकते हैं?

आप क्या सोचते है? आप शायद सोच रहे होंगे कि जब चूड़ी के टुकड़े हो सकते हैं, तो वृत्त के क्यों नहीं?

आइये, इन प्रश्नों का उत्तर ढूँढ़े–

कक्षा छठी में आपने पढ़ा है कि वृत्त के किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा, जो वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है, व्यास कहलाती है।



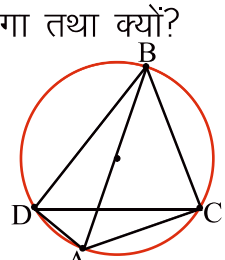
क्रियाकलाप 1.

कागज पर किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए तथा वृत्त के केन्द्र को चिन्हांकित कीजिए। वृत्त में एक व्यास खींचिए। व्यास के सापेक्ष वृत्त को काट लीजिए। क्या कटे हुए दोनों भाग समान है? क्या किसी भी वृत्त को व्यास के सापेक्ष काटने पर वह दो समान भागों में विभाजित होगा?

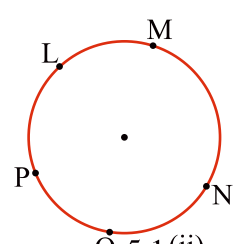
क्या इस प्रकार दो समान भागों में बँटे वृत्तों को अर्द्धवृत्त कह सकते हैं?

क्रियाकलाप 2.

नीचे दिए गए वृत्तों पर कुछ बिन्दुएँ अंकित है। इन्हें मिलाने पर कौनसा रेखाखंड वृत्त को दो अर्द्ध वृत्तों में बाँटेगा तथा क्यों?

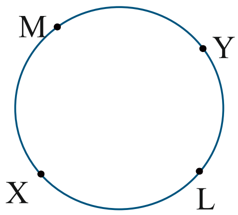


5.1 (i)



5.1 (ii)

चित्र 5.1 (i) में AB व्यास हैं एवं AC, AD, DC, BD और BC जीवाएँ हैं। प्रत्येक जीवा वृत्त



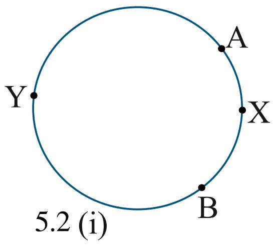
5.1 (iii)

को दो वृत्तखण्डों में बाँटती है, इन वृत्त की परिधि के भाग को चाप कहते हैं। चित्र 5.1 (ii) में ON, NM, ML, PO .... इत्यादि चाप हैं।

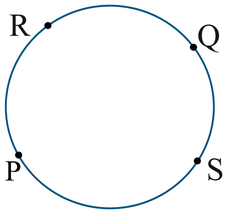
चित्र (iii) में यदि चाप XY कहा जाए तो यह स्पष्ट नहीं होता हैं कि यह कौनसा चाप है। गहरा वाला या हल्का वाला। अतः हम चापों का निर्धारण तीन बिन्दुओं से करते है जैसे चाप XLY या $\overset{\frown}{XLY}$ तथा इसी प्रकार चाप XMY या $\overset{\frown}{XMY}$, चाप $\overset{\frown}{XLY}$ की माप अर्द्धवृत्त से छोटी है, इसलिए इसे लघुचाप कहते है। उसी प्रकार $\overset{\frown}{XMY}$ की माप अर्द्धवृत्त से बड़ी है इसलिए इसे दीर्घचाप कहते है।

क्रियाकलाप 3.

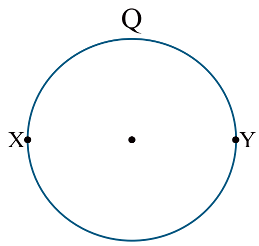
नीचे दिये गये चित्रों में लघु चाप एवं दीर्घ चाप को पहचानिए–



5.2 (i)



5.2 (ii)



5.2 (iii) P

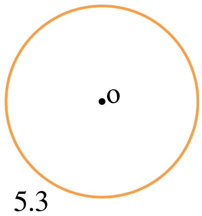
क्या सिर्फ देखकर यह बताया जा सकता है कि कोई चाप दीर्घ चाप है या लघु चाप?

पंकज सोच रहा था कि चित्र 5.2 (i) में तो स्पष्ट दिख रहा है कि $\overset{\frown}{AXB}$ लघुचाप तथा $\overset{\frown}{AYB}$ दीर्घचाप है और इसी प्रकार चित्र 5.2 (ii) में $\overset{\frown}{PRQ}$ लघुचाप तथा $\overset{\frown}{PSQ}$ दीर्घचाप है। परंतु 5.2 (iii) में तो यह बताना मुश्किल है कि $\overset{\frown}{XPY}$ और $\overset{\frown}{XQY}$ में कौन सा दीर्घचाप है और कौन सा लघुचाप।

तभी राकेश ने चित्र 5.2 (i) में बिन्दु A और B को वृत्त के केन्द्र बिन्दु O से मिला दिया और यह देखा कि $\angle AOB$ जो कि $\overset{\frown}{AXB}$ की ओर बन रहा है यह $\overset{\frown}{AYB}$ की ओर बने $\angle AOB$ से छोटा है। आप भी चित्र 5.2 (ii) में बिन्दु P और बिन्दु Q को केन्द्र से मिलाइए और केन्द्र पर बने कोणों को नापकर बताइये कि कौन सा चाप, बड़ा और कौन सा चाप छोटा हैं ?

अनु ने चित्र 5.2 (iii) में बिंदु X और Y को केंद्र से जोडा और पाया कि XPY और XQY दोनों ओर बनें कोण समान हैं, अतः दोनों चाप समान है। XOY एक सरल रेखा है अतः $\angle XOY = 180^0$ । इसलिए राकेश ने कहा जिस चाप की तरफ केन्द्र पर बना कोण 180° से कम है, वह चाप लघु चाप और जिस चाप की ओर केन्द्र पर बना कोण 180° से अधिक है, वह चाप दीर्घ चाप कहलाएगा।

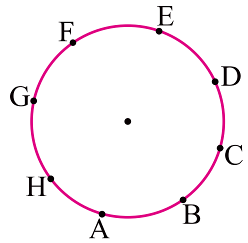
अब तो आप चापों को पहचानने लगे हैं, आइए इन्हीं से संबंधित कुछ गतिविधियाँ भी करते हैं–



5.3

नीचे एक वृत्त दिया गया है (चित्र5.3) इस वृत्त में कितने चाप बना सकते हैं? सुरेश सोच रहा था कि एक वृत्त के तो अनगिनत बिन्दु है और किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच का भाग चाप हैं। तब तो किसी वृत्त में भी अनगिनत चाप हो सकते है। सुरेश ने ठीक ही सोचा, एक वृत्त में अनगिनत चाप हो सकते हैं तथा जिस प्रकार अनगिनत बिन्दु है उसी प्रकार इनमें से किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाकर अनगिनत जीवाएँ बन सकती हैं।

रमेश ने एक वृत्त बनाकर उसमें चित्रानुसार (चित्र5.4) बिन्दुओं को अंकित किया और उनमें से दो बिन्दुओं A व C को मिलाकर जीवा AC प्राप्त की।



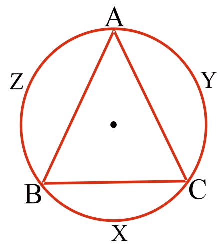
5.4

इसे देख कर सुरेश ने कहा कि जीवा AC वृत्त के दो वृत्त खण्डों (चापों) में विभाजित करती है। एक लघुचाप AC और दूसरा दीर्घ चाप AC। लघु चाप AC को तो $\overset{\frown}{ABC}$ लिखते है क्योंकि इस चाप में बिन्दु B सम्मिलित है, परन्तु दीर्घ चाप AC में बहुत सारे बिन्दुएँ इसे कैसे लिखा जाए?आइये सोचते है।

आप भी सोचिए ?

दीर्घ चाप AC को उस वृत्त खण्ड में आए सभी बिन्दुओं को लेकर AHGFEDC लिखना होगा। इस चाप को भी लघु चाप AC ($\overset{\frown}{ABC}$) की तरह $\overset{\frown}{AHC}$ या $\overset{\frown}{AGC}$ या .... या $\overset{\frown}{ADC}$ लिख सकते हैं जो कि उस दीर्घ वृत्त खंड को दर्शाते हैं।

चाप (वृत्तखण्ड) द्वारा वृत्त पर बनाया गया कोण –

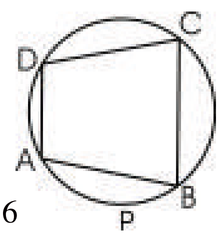


5.5

चित्र (5.5) में एक Δ ABC दिया गया है जिसके सभी शीर्ष A,B व C वृत्त पर स्थित है। यहाँ $\overset{\frown}{BXC}$ द्वारा वृत्त के बिन्दु A पर $\angle BAC$ बनाया गया है। क्या आप $\overset{\frown}{CYA}$ और $\overset{\frown}{AZB}$ द्वारा वृत्त पर बने कोणों को पहचान सकते हैं? कोणों को पहचान कर लिखिए।

क्रियाकलाप 4.

नीचे दिए गए चतुर्भुज ABCD के चारों शीर्ष A,B,C व D वृत्त पर स्थित है। इस वृत्त में किस चाप द्वारा वृत्त पर कौन सा कोण अंतरित किया जा रहा है, पहचान कर लिखिए–

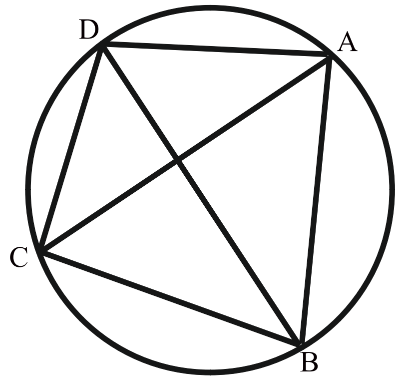


5.6

क्र. स.	बिन्दु जिनके बीच चाप बना है	लघुचाप का नाम	लघुचाप द्वारा वृत्त पर बना कोण	दीर्घ चाप का नाम	दीर्घ चाप द्वारा वृत्त पर बना कोण
1.	A एवं B	APB	कोई कोण नहीं	ADB या ACB	कोई कोण नहीं
2.	A एवं C				
3.					
4.					
5.					
6.					

प्रश्नावली 5.1

1. संलग्न चित्र से संबंधित निम्न प्रश्नों का उत्तर ढूँढिए–



   (i) $\overset{\frown}{ABC}$ **लघु / दीर्घ चाप है**

   (ii) $\overset{\frown}{BCD}$ **लघु / दीर्घ चाप है**

   (iii) लघु चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा अंतरित कोणों के नाम लिखिए।

   (iv) $\angle ACB$ किस चाप द्वारा बना है?

   (v) $\angle CBA$ किस चाप द्वारा बना है?

   (vi) $\angle CBD$ और $\angle CAD$ किस चाप द्वारा बने हैं।

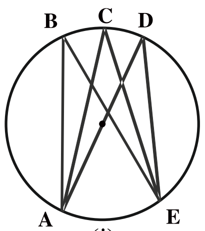
   (vii) चापों द्वारा बिन्दु D पर बने कोणों के नाम लिखिए।

वृत्त के किसी चाप द्वारा वृत्त पर बनने वाले सभी कोणों को आपने पहचान लिया है, आइए इन कोणों के बीच संबंध ढूंढ़ें।

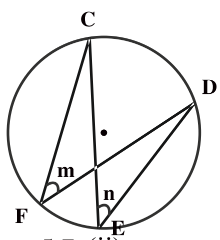
वृत्तखण्ड के कोणों के गुण

क्रियाकलाप 5.

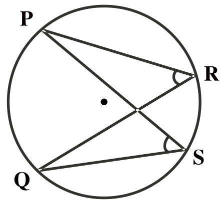
दिए गए प्रत्येक चित्र में एक चाप द्वारा वृत्त पर कई कोण बनाए गए हैं। उन कोणों को माप कर सारणी को पूरा कीजिए।



5.7 (i)



5.7 (ii)



5.7 (iii)

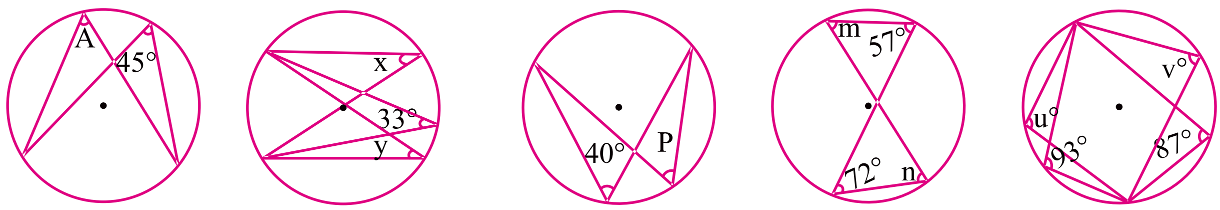
क्र.सं.	चित्र क्र.	चाप का नाम	चाप द्वारा वृत्त पर बने कोणों के नाम एवं उनका माप		
			1	2	3
1.					
2.					
3.					

उपरोक्त क्रियाकलापों को करते हुए शैली ने देखा कि किसी भी चाप द्वारा उसके सम्मुख वृत्तखण्ड पर जितने भी कोण बनाए जाते है वे सभी एक ही माप के हैं अर्थात् किसी चाप द्वारा एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते है।

आप भी ऐसे ही कई वृत्त लेकर उनमें चाप खींचिए तथा उन चापों द्वारा सम्मुख वृत्तखण्डों पर कई कोण बनाइए और अपने साथियों से नपवाकर देखिए कि क्या एक ही चाप से बने सभी कोण समान हैं

प्रश्नावली 5.2

निम्न चित्रों में अंग्रेजी के अक्षरों द्वारा दर्शाए गए कोणों के माप चाँदा से बिना मापे ज्ञात कीजिए–



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

A = ... x = ... p = ... m = ... u = ...

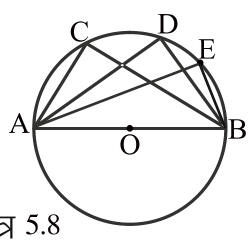
y = ... n = ... v = ...

क्रियाकलाप 6.

O केन्द्र वाले वृत्त में व्यास AOB खींचिए। व्यास के ऊपर वाले अर्द्धवृत्त पर बिन्दु C,D,E लीजिए। तथा $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$ बनाइए। चाँदे की सहायता से इन कोणों को मापिए और उनका मान लिखिए–

$\angle ACB$ = ..., $\angle ADB$ = ..., $\angle AEB$ = ...

इन कोणों के माप से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? ....



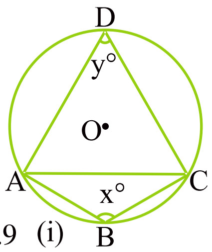
चित्र 5.8

अवलोकन पश्चात आप पायेंगे कि सभी कोण समकोण हैं अर्थात् **अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।**

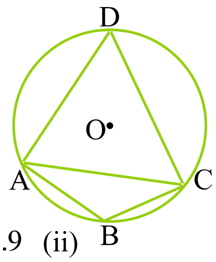
वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं द्वारा लघु वृत्तखण्ड एवं संगत दीर्घ वृत्तखण्ड के कोण–

क्रियाकलाप 7.

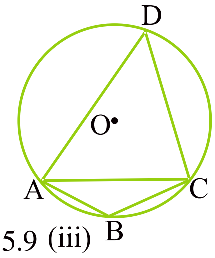
केन्द्र O लेकर, एक वृत्त बनाइए। वृत्त पर दो बिन्दु A और C लीजिए जिससे यह एक लघु वृत्तखण्ड ABC तथा एक दीर्घवृत्त खण्ड ADC में बँट जाए।



5.9 (i)



5.9 (ii)



5.9 (iii)

लघुवृत्तखण्ड का कोण $\angle ABC$ है तथा संगत दीर्घवृत्त खण्ड का कोण $\angle ADC$ है। इन्हें मापकर निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

क्र.सं.	लघुवृत्तखण्ड का कोण x°	संगत दीर्घ–वृत्तखण्ड का कोण y°	$x^\circ + y^\circ$
1.	----------------------	-------------------------------------	---------------
2.	----------------------	-------------------------------------	---------------
3.	----------------------	-------------------------------------	---------------

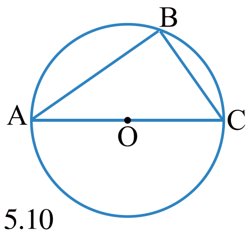
सारणी पूर्ण करने के पश्चात आप पायेगें कि जीवा के दोनों ओर के वृत्तखण्ड़ों में बने कोणों का योगफल 180° होता है।

प्रश्नावली 5.3

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. लघु वृत्तखण्ड का कोण ––––––––– है। (न्यून कोण / अधिक कोण)
2. दीर्घ–वृत्तखण्ड का कोण ––––––––– है। (न्यून कोण / अधिक कोण)
3. एक ही वृत्त में लघुवृत्तखण्ड एवं संगत दीर्घ वृत्तखण्ड में बने कोणों का योग ––––––– होता है। ($180^\circ / 270^\circ / 360^\circ$)

उदाहरण 1. नीचे दिए गये आकृति में वृत्त का केन्द्र O है यदि $\angle C=55^\circ$ है तो $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए–



5.10

हल: AC व्यास है। (वह केन्द्र O से गुजरता है।) अत: $\angle ABC$ अर्द्धवृत्त का कोण है। जो कि समकोण होता है। अर्थात् $\angle B$ या $\angle ABC=90^\circ$

अत: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ($\because$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

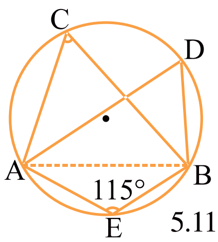
$= \quad \angle A + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

$= \quad \angle A + 145^\circ = 180^\circ$

$= \quad \angle A = 180^\circ - 145^\circ$

$= \quad \angle A = 35^\circ$ उत्तर

उदाहरण 2. दिये गये चित्र में $\angle AEB = 115^\circ$ तो $\angle ACB$ तथा $\angle ADB$ ज्ञात कीजिए।



5.11

हल: दिया है – $\angle AEB = 115^\circ$

ज्ञात करना है – $\angle ACB$ तथा $\angle ADB$

चूँकि जीवा के दोनों ओर के वृत्तखण्ड़ों में बने कोणों का योग 180^0 होता है। अतः

$\angle AEB + \angle ACB = 180^\circ$

$115^\circ + \angle ACB = 180^\circ$

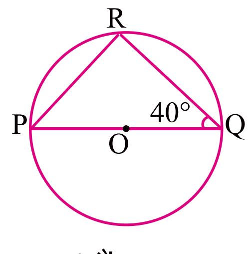
$\angle ACB = 180^\circ - 115^\circ$

$\angle ACB = 65^\circ$

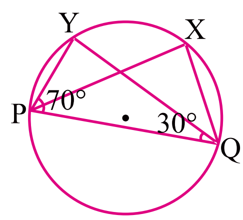
हम जानते है कि किसी चाप द्वारा एक ही वृत्तखण्ड पर बनाए गए कोण बराबर होते है अतः $\angle ACB = \angle ADB = 65^\circ$

प्रश्नावली 5.4

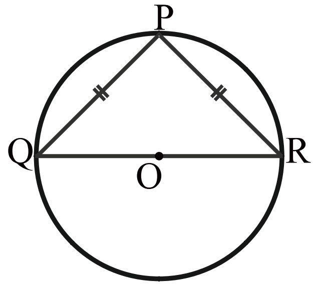
प्रश्न 1 सामने दिए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle PRQ$ तथा $\angle QPR$ के माप ज्ञात कीजिए।



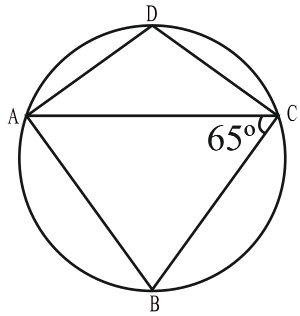
प्रश्न 2 सामने के चित्र में वृत्तखण्ड PQXY में बने $\angle YPQ = 70^\circ$ तथा $\angle YQP = 30^\circ$ हैं। $\angle PYQ$ तथा $\angle PXQ$ के माप ज्ञात कीजिए।



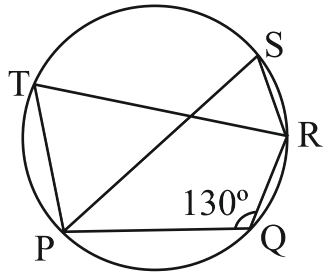
प्रश्न 3 दिए गए चित्र में PQ = PR है तथा O वृत्त का केन्द्र है तो त्रिभुज PQR के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 4 सामने चित्र में AB=BC तथा $\angle ACB=65^\circ$ है।
$\angle ADC$ की माप ज्ञात कीजिए।



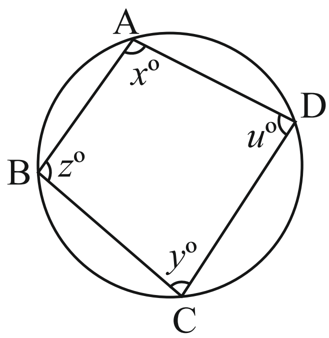
प्रश्न 5 सामने चित्र में $\angle PTR$ और $\angle PSR$ की माप ज्ञात कीजिए। जिसमें $\angle PQR=130^\circ$ है।



क्रियाकलाप–8

अपनी कापी में अलग–अलग माप का वृत्त लेकर दी गई आकृति के अनुसार आकृति बनाइए तथा कोणों को मापकर निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

वृत्त क्र.	x°	y°	$x^\circ+y^\circ$	z°	u°	$z^\circ+u^\circ$
1.						
2.						
3.						
4.						

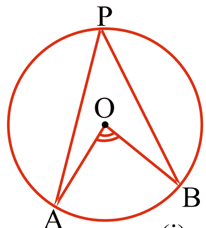


एक ही चाप का कोण और चाप द्वारा केन्द्र पर बनाये गये कोण में संबंध –

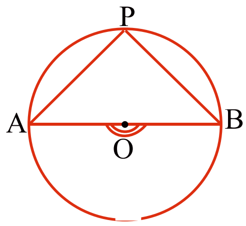
आप चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा केन्द्र O पर बनाए गए $\angle AOB$ को पहचान चुके हैं। आपने चाप $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा शेष वृत्तखण्ड के बिन्दु P पर $\angle APB$ बनाना भी सीख लिया है।

क्रियाकलाप 9

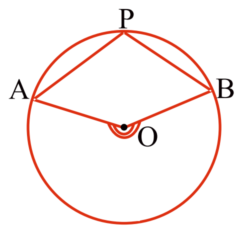
अब चाप AB का केन्द्रीय कोण $\angle AOB$ तथा शेष चाप पर बना कोण $\angle APB$ एक ही वृत्त पर निम्न प्रकार से बनाइए तथा अपनी कॉपी में कई वृत्त बनाकर इन कोणों को मापिए और तालिका पूर्ण कीजिए–



(i)
5.12



(ii)
5.12



(iii)
5.12

आकृति क्रं.	$\angle AOB$ की माप	$\angle APB$ की माप	$2\angle APB$ की माप	क्या $\angle AOB = 2\angle APB$
5.12 (i)				
5.12 (ii)				
5.12 (iii)				

आपने क्या देखा?

$\angle AOB$ और $2\angle APB$ समान या लगभग समान हैं?

अत: $\angle AOB = 2\angle APB$ ....(1)

अर्थात् चाप AB का केन्द्रीय कोण = 2 x (शेष चाप पर बना कोण)

समी. (1) से, $\angle APB = \frac{1}{2} \times \angle AOB$

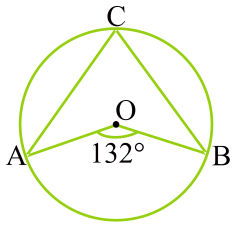
दूसरे शब्दों में, वृत्त में **"किसी चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण, उसी चाप द्वारा केन्द्र पर बने कोण का आधा होता है।"**

अभ्यास

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

चाप का केन्द्रीय कोण या अंशीय माप	चाप का कोण या चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर बनाया गया कोण	चाप कैसा है? लघुचाप/अर्धवृत्त/दीर्घचाप
150°	75° (क्यों)	लघुचाप (क्यों)
220°	————————	दीर्घचाप
————————	90°	अर्धवृत्त
————————	————————	दीर्घ चाप
————————	————————	लघु चाप

उदाहरण 3. एक वृत्त के चाप की अंशीय माप 132° है। इसी चाप द्वारा शेष वृत्तखण्ड के किसी बिन्दु पर अंतरित $\angle ACB$ ज्ञात कीजिए।



5.13

हल $\angle AOB = 132^\circ$ (दिया है)

चूंकि $\angle AOB = 2 \times \angle ACB$

या $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

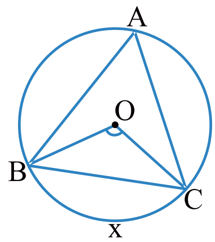
$=$ $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 132^\circ = 66^\circ$

$\because$ $\angle ACB = 66^\circ$

उदाहरण 4.

समबाहु Δ ABC के परिगत वृत्त का केन्द्र O है।

$\angle BOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



5.14

हल: Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

अतः $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

$\because$ $\overset{\frown}{BxC}$ का केन्द्रीय कोण $= \angle BOC$

$\because$ $\angle BOC = 2 \angle BAC$

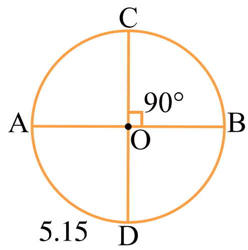
$=$ $\angle BOC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

अतः $\angle BOC = 120^\circ$

इस उदाहरण में OA को मिलाने पर $\angle AOC$ और $\angle AOB$ की माप बताइए?

समान चाप, संगत जीवा, चाप की अंशीय माप

क्रियाकलाप 10.



5.15

एक सफेद कागज पर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। व्यास AB खींचिए। AB से 90° का कोण बनाते हुए व्यास CD खींचिए।

आप जानते हैं प्रत्येक वृत्त अपने व्यास के सापेक्ष सममित है अतः दो समकोण बनाते हुए व्यास AB और CD वृत्त को चार समान टुकड़ों में बांट देंगे।

कागज को AB और CD दो बार मोड़ने से प्रत्येक चौथाई भाग एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेगा।

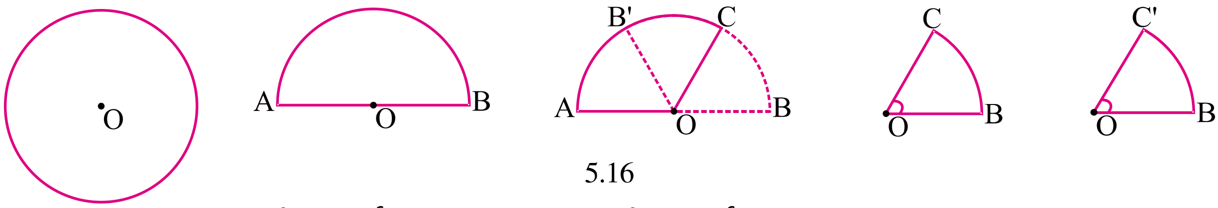
यहाँ चाप AD, DB, BC और CA एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं। इन चापों का केन्द्रीय कोण 90° है।

अतः लघु $\overset{\frown}{AD}$ = लघु $\overset{\frown}{DB}$ = लघु $\overset{\frown}{BC}$ = लघु $\overset{\frown}{CA}$

तो $\angle AOD = \angle DOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$

क्रियाकलाप 11.

O केन्द्र वाला एक वृत्त कागज पर बनाइए। व्यास AB खींचिए। इसे व्यास पर मोड़िये। केन्द्र O से इसे किसी अन्य त्रिज्या OC पर मोड़िये। कैंची से इसे OC पर काट लीजिए। फिर OB पर काटिये इस तरह दो टुकड़े OBC और OBC' दोनों त्रिज्या खण्ड हैं जो बराबर है।



5.16

अब चाप BC की लंबाई = चाप BC' की लंबाई

और $\angle COB = \angle C'OB'$

परिणाम–

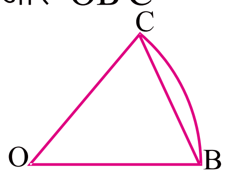
एक ही वृत्त में समान लंबाई के चाप, केन्द्र पर समान कोण बनाते हैं एवं इसका विलोम भी सत्य है अर्थात् **''एक ही वृत्त में केन्द्र पर बराबर कोण बनाने वाले चाप बराबर होते हैं।''**
ऊपर लिखे क्रियाकलाप में BC और B'C' को मिलाइए।

अब देखिए ये दोनों त्रिज्याखण्ड OBC और OB'C'

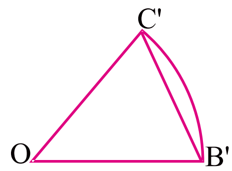
इनमें $\angle COB = \angle C'OB'$

चाप BC = चाप B'C'

जीवा BC = जीवा B'C'



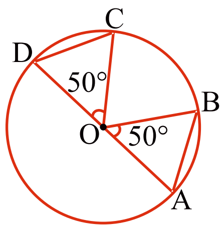
5.17



5.18

अतः समान चाप के संगत जीवाओं की लंबाई समान है एवं इसके विपरीत बराबर जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर होता है।

उदाहरण 5. आकृति में दो त्रिज्याखण्ड AOB तथा COD हैं। $\angle AOB = \angle COD = 50^\circ$ यदि AB=2.5 सेमी तो CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



5.19

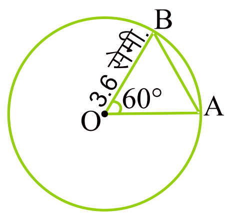
हल : चूँकि समान केन्द्रीय कोण वाले जीवाओं की लम्बाई समान होती है अतः

जीवा AB = जीवा CD

जीवा AB = 2.5 सेमी

अतः जीवा CD = 2.5 सेमी

उदाहरण 6. आकृति में वृत्त की त्रिज्या 3.6 सेमी है तथा $\angle AOB = 60^\circ$ है जीवा AB की लम्बाई तथा $\angle OAB$, $\angle OBA$ की माप ज्ञात कीजिए।



5.20

हलः दिया है त्रिज्या = 3.6 सेमी

OAB में

OA = OB = 3.6 सेमी (त्रिज्याएं)

$\therefore$ इन भुजाओं के सामने के कोण बराबर होंगे।

$\therefore$ $\angle OBA = \angle OAB = x^\circ$ (माना)

ΔOAB में कोणों को योग $= 180^\circ$

$\angle BOA + \angle OBA + \angle OAB = 180^\circ$

$60^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$

$60^\circ + 2x^\circ = 180^\circ$

$2x^\circ = 180^\circ - 60^\circ$

$2x^\circ = 120^\circ$

$x^\circ = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

$\therefore$ Δ OAB के तीनों कोण $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ के हैं।

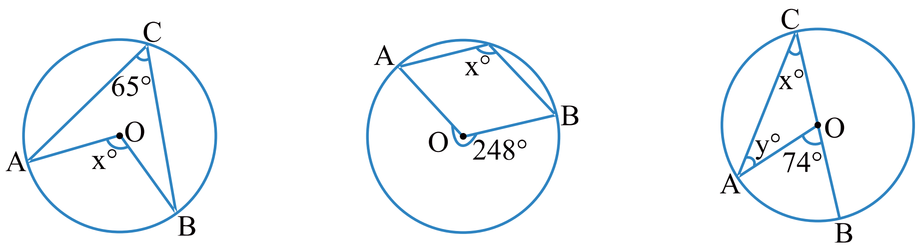
यह एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ AB = OB = OA = 3.6 सेमी

अतः जीवा AB = 3.6 सेमी, $\angle OAB = 60^\circ$, $\angle OBA = 60^\circ$

प्रश्नावली 5.5

प्रश्न 1 निम्न आकृतियों में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



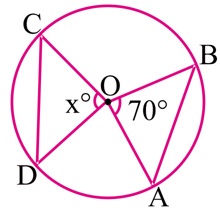
(a) (b) (c)

प्रश्न 2 निम्न आकृतियों में x तथा y का मान ज्ञात कीजिए बताइये।

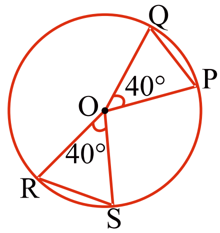
जब (i) $x = y$ (ii) $x = 2y$

(i) (ii)

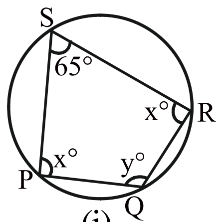
प्रश्न 3 आकृति में $AB = CD$ यदि $\angle AOB = 70^\circ$ तो $\angle COD$ का मान ज्ञात कीजिए।



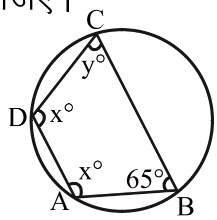
प्रश्न 4 आकृति में $RS = 3.2$ सेमी तो PQ की माप क्या होगी?



प्रश्न 5 निम्न आकृतियों में x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

<u>जीवा</u> – पूर्व में आपने सीखा है कि वृत्त के किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने पर जो रेखाखण्ड प्राप्त होता है उसे जीवा कहते है और सबसे बड़ी जीवा ही व्यास है। आइए जीवा के कुछ गुणों को जाने।

<u>वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब –</u>

क्रियाकलाप 12.

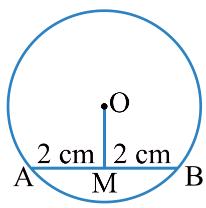
केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त में जीवा AB खींचिए। अब $OM \perp AB$ इस प्रकार खींचिए कि M जीवा AB पर स्थित हो।

अलग–अलग त्रिज्याएँ और केन्द्र लेकर और उनसे वृत्त खींचकर उपर्युक्त क्रिया को दोहराइए।

उन आकृतियों को इसी प्रकार से नामांकित कीजिए।

वृत्तों को 1, 2 व 3 ..... से नामांकित कीजिए।

प्रत्येक स्थिति में AM तथा BM को माप कर सारणी पूर्ण कीजिए।



चित्र क्र. 5.21

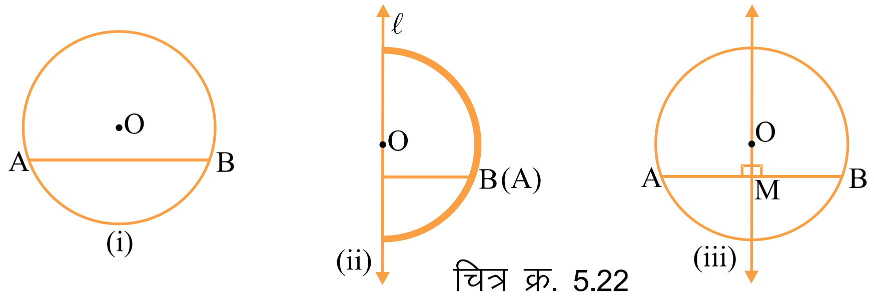
वृत्त	AM	BM	क्या AM= BM ?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

आप देखेगें कि प्रत्येक स्थिति में AM तथा BM का समान है अतः AM=BM

क्रियाकलाप 13.

एक मोटा कागज लीजिए और उस पर O केन्द्र वाला एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त में जीवा AB भी खींचिए।

93CYVF



चित्र क्र. 5.22

अब वृत्त को इस प्रकार मोड़िए कि A बिन्दु B बिन्दु पर पड़े, रेखा ℓ के अनुदिश मोड़ का निशान प्राप्त करने के लिए कागज को दबाइए मोड़ के निशान को देखने पर पता चलता है कि रेखा ℓ वृत्त केन्द्र O से होकर गुजरती है, तथा दोनों भाग एक दूसरे को पूर्णतया ढँक लेते हैं।

अब कागज को खोलकर ℓ और जीवा AB के प्रतिच्छेद बिन्दु को M से अंकित कीजिए।

$\angle OMA$ तथा $\angle OMB$ को मापिये, ये दोनों 90° के होंगे। चूंकि AM, BM के संपाती है अतः AM=BM

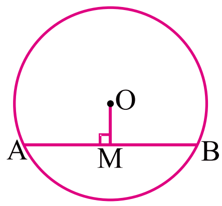
क्रियाकलाप 11 व 12 से स्पष्ट होता है कि –

"वृत्त में उसके केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।"

क्रियाकलाप 14.

केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। इसकी एक जीवा AB भी खींचिए। AB को एक बिन्दु M पर समद्विभाजित कीजिए तथा O और M को मिलाइए।

इसी क्रियाकलाप को दोहराकर अन्य वृत्त बनाइए। इन वृत्तों को 1, 2, 3 .... से चिन्हित कीजिए एवं सभी आकृतियों को समान रूप से नामांकित कीजिए।



चित्र क्र. 5.23

प्रत्येक वृत्त में $\angle OMA$ को मापिए तथा निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

वृत्त	$\angle OMA$	$\angle OMB$	क्या $\angle OMA = \angle OMB$?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

आप पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle OMA = \angle OMB$ (लगभग 90°) प्राप्त होता है। चूँकि

$\angle OMA$ तथा $\angle OMB$ दोनों जीवा AB के बीच के एक बिन्दु पर बने कोण है अतः उनका योगफल 180° है और साथ ही दोनों कोण बराबर है।

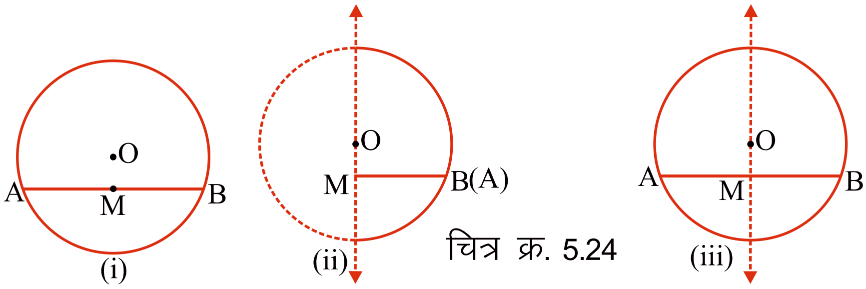
अतः $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

अर्थात् $OM \perp AB$

अतः "वृत्त की जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।"

क्रियाकलाप 15.

एक कागज लीजिए और उस पर O केन्द्र वाला एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की एक जीवा AB खीचिंए और उसका मध्य बिन्दु M को चिन्हांकित कीजिए। M और O को मिलाइए, अब रेखा OM के अनुदिश इसे मोड़िए जिससे कि बिन्दु A बिन्दु B पर पड़े।



चित्र क्र. 5.24

93LUX3

अब कागज को खोलिए आप पायेगें कि $\angle OMA$, $\angle OMB$ पर पड़ता है। अतः $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$

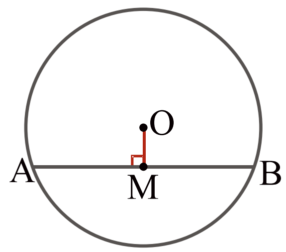
अर्थात् $OM \perp AB$

क्रियाकलाप 13 व 14 से स्पष्ट होता है कि –

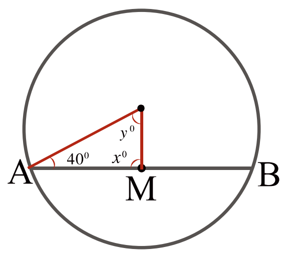
"वृत्त की किसी जीवा के मध्य–बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।"

प्रश्नावली 5.6

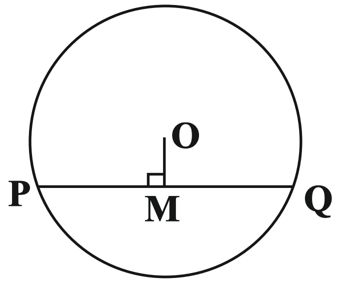
प्रश्न 1. आकृति में $OM \perp AB$. यदि AM = 3.5 सेमी. हो, तो BM और AB का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 2. आकृति में जीवा AB का मध्य बिन्दु M है, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



प्रश्न 3. आकृति में $OM \perp PQ$. यदि $PQ = 8$ सेमी. हो, तो PM और MQ का मान ज्ञात कीजिए। क्या $PM = MQ$?



प्रश्न 4.रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(1) वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को .... करता है।

(2) वृत्त में किसी जीवा के मध्य–बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर .... होती है।

हमने सीखा

1. वृत्त के किसी चाप द्वारा शेष वृत्त खण्ड पर बने सभी कोण समान होते हैं।
2. किसी जीवा के दोनों ओर वृत्त खण्डों में बनने वाले कोणों का योगफल 180^0 होता है।
3. वृत्त के किसी चाप द्वारा वृत्त शेष वृत्तखण्ड पर अतंरित कोण चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण का आधा होता है।
4. एक ही वृत्त में समान लम्बाई के चाप केन्द्र पर समान कोण बनाते हैं।
5. किसी वृत्त के केन्द्र से वृत्त के जीवा पर डाला गया उस जीवा को समद्विभाजित करता है।
6. वृत्त की किसी जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

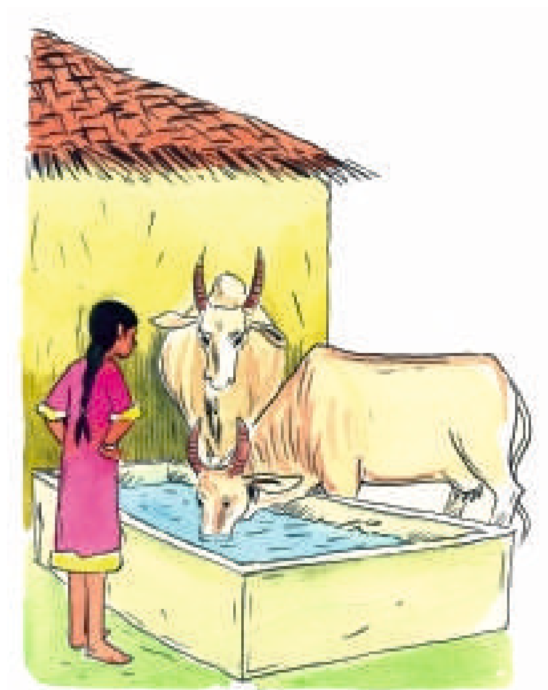
93VQYQ

अध्याय–6
सांख्यिकी
STATISTICS

9F9ZFA

समान्तर माध्य [MEAN]

जानवरों को पानी पिलाने में राधा बहुत आनन्द अनुभव करती है। वह रोज़ एक बड़ी टंकी में जानवरों के लिए पानी भर देती है और हिसाब भी रखती है कि प्रत्येक दिन सुबह 8 बजे से 11 बजे के बीच कितने जानवर पानी पी रहे हैं। उसके द्वारा लिखे गए पिछले हफ्ते का हिसाब कुछ इस प्रकार है :–



9FIVGX

चित्र 6.1

सोमवार	–	12,	मंगलवार	–	15,	बुधवार	–	13,
बृहस्पतिवार	–	11,	शुक्रवार	–	13,	शनिवार	–	12
रविवार	–	14						

क्या आप बता सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

क्रिकेट खिलाड़ी A ने अपनी दस पारियों में 60, 70, 15, 90, 72, 45, 11, 77, 125, 200 रन बनाये। इसी तरह खिलाड़ी B ने अपनी छः पारियों में 220, 110, 70, 37, 15, 07 रन बनाये। क्या आप बता सकते है कि किस खिलाड़ी की उपलब्धि अच्छी रही?

इस तरह की तुलना हम औसत निकाल कर आसानी से कर सकते है।

इसी प्रकार दैनिक जीवन में हम कई स्थानों पर औसत का उपयोग करते हैं। जैसे –

(1) आपकी कक्षा में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की औसत आयु 14 वर्ष है।

(2) आपका रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है।

(3) दैनिक समाचार पत्रों का औसत मूल्य 2.50 रूपये है।

(4) कक्षा में विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 45 है।

(5) इस वर्ष रायपुर में औसत से कम वर्षा हुई।

उपरोक्त उदाहरणों में आप देख रहे है कि कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 15 वर्ष है। रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है। इनसे तात्पर्य यह नहीं है कि कक्षा के प्रत्येक छात्र की आयु 14 वर्ष है या रोज़ रात में आप 8 घंटे सोते हैं। न ही यह अधिकतम या न्यूनतम है।

वास्तव में, औसत दिए गए प्रेक्षणों (आँकड़ों) के योग में प्रेक्षणों (आँकड़ों) की संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है। इसे समान्तर माध्य भी कहते है। इसे संकेत M द्वारा दर्शाते हैं।

अतः $\boxed{\text{औसत या समान्तर माध्य (Mean) (M)} = \dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}}$

अब हम आसानी से ज्ञात कर सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

$$\text{औसत} = \frac{12+15+13+11+13+13+14}{7} = \frac{91}{7} = 13$$

अतः राधा औसतन 13 जानवरों को प्रतिदिन पानी पिलाती है।

अब आप स्वयं खिलाड़ी A व B की पारियों का समान्तर माध्य ज्ञात कर बताइए कि किस खिलाड़ी का प्रदर्शन अच्छा रहा।

क्रियाकलाप 1

आप अपने परिवार के सदस्यों की औसत आयु निकालिए।

क्रियाकलाप 2.

आप अपनी अर्द्धवार्षिक परीक्षा में सभी विषयों के प्राप्तांकों का औसत निकालिए।

उदाहरण 1. एक फल की दुकान पर पांच टोकरियों में 46 किग्रा, 21 किग्रा, 18 किग्रा, 25 किग्रा. तथा 35 किग्रा. सेब रखे हैं। इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः समान्तर माध्य (M) = $\dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

समान्तर माध्य (M) = $\dfrac{46+21+18+25+35}{5} = \dfrac{145}{5} = 29$ किग्रा.

उदाहरण 2. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम दस प्राकृत संख्याएँ निम्नांकित हैं –

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

समान्तर माध्य (M) = $\dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

समान्तर माध्य (M) = $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}$

$= \dfrac{55}{10} = 5.5$

बहुलक [MODE]

विद्यालय द्वारा कक्षा आठवीं के छात्रों को दीपावली अवकाश में किसी दर्शनीय स्थल के भ्रमण कराने का निश्चय किया गया। प्रधानाध्यापक ने सिरपुर, रतनपुर, जगदलपुर तथा अम्बिकापुर में से एक स्थान का चुनाव करने का निर्देश दिया। कुछ छात्र सिरपुर तो कुछ छात्र जगदलपुर जाना चाहते है। स्थान तय नहीं होने के कारण, कक्षाध्यापक द्वारा चारों स्थानों के नाम श्यामपट्ट पर लिखकर बच्चों से हाथ खड़े करवाकर टैली (गणन चिह्न) द्वारा बारम्बारता सारणी बनाई गई, जो निम्नानुसार है–

सारणी 6.1

दर्शनीय स्थल	गणना चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
सिरपुर	𝍸 ||	7
जगदलपुर	𝍸 𝍸 |||	13
रतनपुर	𝍸	5
अम्बिकापुर	𝍸	5

सारणी बनाने के बाद कक्षाध्यापक ने कहा सर्वाधिक 13 विद्यार्थी जगदलपुर जाना चाहते हैं, अतः हमें जगदलपुर जाना चाहिए।

दैनिक जीवन में भी ऐसी कई घटनाएं होती है जिनका चयन इसी प्रकार करते हैं। जैसे – अधिकतर समान व्यक्तियों की शर्ट की माप 38 या 40 नम्बर होती हैं। अतः रेडिमेड कपड़े की दुकान में हमें 38 या 40 नम्बर की ही शर्ट आसानी से मिलती है। इससे कम या अधिक माप की शर्ट दुकान में कम रखी जाती है, क्योंकि उसकी मांग कम है। अतः कम्पनी उसी नम्बर का शर्ट अधिक बनाती है जिसकी मांग बाजार में अधिक है।

चयन का यह आधार ही बहुलक है। अर्थात् ''**बहुलक दिए गये प्रेक्षणों में से वह मान है जो सर्वाधिक बार दोहराया गया हो।**'' इसे संकेत M_0 द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण 3. एक फुटबाल टीम के 11 खिलाड़ियों द्वारा पहने गए जूतों के नाप के नम्बर निम्न प्रकार हैं–

6, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 6, 7, 8

बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गये नम्बरों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिखने पर,

4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8

स्पष्ट है कि यहाँ 6 नम्बर सबसे अधिक बार (4 बार) आया है,

अतः बहुलक 6 होगा अर्थात् $\boxed{M_0 = 6}$

9FSRIK

माध्यिका [MEDIAN]

उदाहरण 4. एक कक्षा के 15 छात्रों के वार्षिक परीक्षा में पूर्णांक 100 में से प्राप्तांक निम्नानुसार हैं :–

(A) 15, 35, 16, 25, 45, 76, 90, 99, 50, 16, 57, 60, 86, 17, 95

बताइये इनमें से कितने छात्रों के अंक आधे से अधिक है। यहाँ प्राप्तांकों को देखने से तो यह स्पष्ट नहीं हो रहा है। आइए, इन्हें हम आरोही (बढ़ते) क्रम में व्यवस्थित करके देखें –

(B) 15, 16, 16, 17, 25, 35, 45, 50, 57, 60, 76, 86, 90, 95, 99

(अ) प्राप्तांकों **(A)** के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. दिए गए प्राप्तांकों (पदों) में मध्य पद हैं ? …………
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? …………
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? …………
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान (बराबर) है ? …………

(ब) व्यवस्थित प्राप्तांकों **(B)** के आधार पर प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. व्यवस्थित प्राप्तांकों में मध्य पद के प्राप्तांक क्या हैं ? …………
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? …………
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं ? …………
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान है ? …………

पदों को घटते क्रम या बढ़ते क्रम में रखने पर ही मध्य पद का निर्धारण होता है। इसी मध्य पद को माध्यिका कहते हैं।

अर्थात् "**दिए गए आँकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करने पर उनके बीच वाला मान ही माध्यिका है।**" माध्यिका को संकेत M_d द्वारा दर्शाते हैं।

[A] माध्यिका ज्ञात करना जब आँकड़ों की संख्या N विषम हो :

जब दिए गए आँकड़ों की संख्या विषम संख्या में हो, तो सर्वप्रथम उनको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान ज्ञात करते हैं। प्राप्त मान ही माध्यिका है।

अर्थात् माध्यिका $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान

उदाहरण 6. 3, 5, 10, 9, 8, 14, 6, 12, 13, 11, 7 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करके लिखने पर,

3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (यहाँ कुल पदों की संख्या 11 अर्थात विषम है)

$$M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} = \left(\frac{11+1}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} = 6 \text{ वाँ पद का मान}$$

$$\boxed{M_d = 9}$$

[B] माध्यिका, जब आँकड़ों की संख्या N सम हो :–

जब दिए गए आँकड़े सम संख्या में हों तो उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवथित करने पर मध्य में दो संख्याएँ होती हैं। ऐसी स्थिति में हम उन दोनों मध्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कर माध्यिका निकालते हैं।

अर्थात्
$$M_d = \frac{\left[\left(\frac{N}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

उदाहरण 7. बंटन 5, 9, 4, 6, 12, 8 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

4, 5, 6, 8, 9, 12

यहाँ N = 6 (सम संख्या है)

$$\text{माध्यिका } M_d = \frac{\left[\frac{6}{2} \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

$$M_d = \frac{\left[\frac{6}{2} \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

$$= \frac{\text{तीसरे पद का मान + चौथे पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{6+8}{2} = 7$$

$$\therefore \boxed{M_d = 7}$$

पश्नावली 6 1

प्र.1. समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

81, 74, 69, 73, 91, 55, 61

प्र.2. 50 से 70 तक की सम संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्र.3. माध्यिका ज्ञात कीजिए।

4, 5, 10, 6, 7, 14, 9, 15

प्र.4. एक कक्षा के 11 छात्रों का भार (किलोग्राम में) निम्न प्रकार हैं –

25, 27, 29, 32, 30, 28, 26, 31, 35, 41, 34

इनकी माध्यिका ज्ञात करो।

प्र.5. कक्षा आठवीं के छात्रों में विज्ञान प्रतियोगिता में निम्नानुसार अंक प्राप्त किये।

83, 61, 48, 73, 76, 52, 67, 61, 79

उपरोक्त आंकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए।

प्र.6. दिये गये आँकड़ों से बहुलक प्राप्त कीजिए :–

7, 5, 9, 9, 3, 1, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 9, 7, 7, 5, 5, 5, 3, 1 ,5, 3, 5, 1, 5, 7, 7, 9, 9, 1

प्र.7. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 3, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4, 3, 5, 3

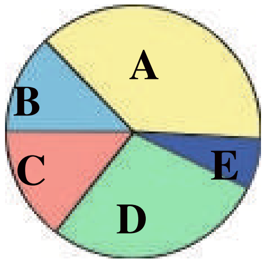
प्र.8. प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

प्र.9. संख्याएँ 8,5,x,6,10,5 का माध्य 7 हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।

पाई चार्ट (वृत्त चित्र)

क्रियाकलाप 1.

किसी राज्य के A,B,C,D,E, 5 जिलों में वनों की मात्रा को वृत्ताकार रेखा चित्र द्वारा दर्शाया गया।



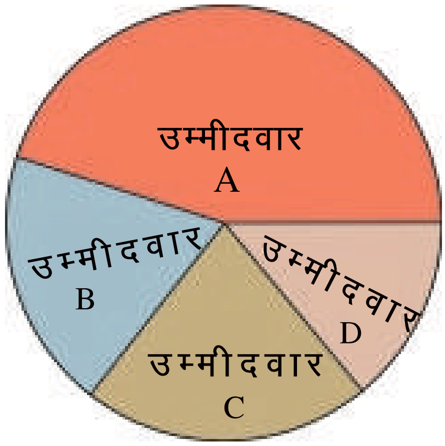
चित्र 6.2

यह मान लिया जाये कि जिस जिले में सर्वाधिक वन हैं, उस जिले में सर्वाधिक वर्षा होती है, तो क्या आप बता सकते हैं कि –

1. किस जिले में सर्वाधिक वर्षा होती है?
2. किस जिले में सबसे कम वर्षा होती है?

क्रियाकलाप 2.

किसी विधानसभा चुनाव में 4 उम्मीदवार ने चुनाव लड़ा। उनके प्राप्त मतों को वृत्ताकार रेखाचित्र में दर्शाया गया है। वृत्ताकार रेखा चित्र को देखकर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



चित्र 6.3

1. किस उम्मीदवार को सर्वाधिक मत मिले?
2. किस उम्मीदवार को सबसे कम मत मिले?

इसका आंकलन आपने कैसे किया?

आप जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360° होता है। उम्मीदवार A के प्राप्त मतों का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे बड़ा कोण बनाता है। उसी प्रकार उम्मीदवार D के मतों द्वारा घेरा गया क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बनाता है।

उदाहरण 8. जशपुर के एक विद्यालय में कक्षा 6 से कक्षा 10 तक पढ़ने वाले विद्यार्थी की संख्या निम्नांकित है। इनको वृत्ताकार लेखाचित्र में दर्शाईये।

कक्षा	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
विद्यार्थी की संख्या	216	180	150	110	64

हलः वृत्ताकार रेखाचित्र बनाने के लिए हम सबसे पहले सभी कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या का योग करते हैं और प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या के लिए वृत्त के केन्द्र पर बनने वाले कोण का मान ज्ञात करते है।

कुल विद्यार्थी $= 216 + 180 + 150 + 110 + 64 = 720$

सम्पूर्ण वृत्त 720 छात्रों का प्रतिनिधित्व करता है।

∴ 720 छात्रों के लिए इस वृत्त के केन्द्र पर कोण बनाया जाता है $= 360^{\circ}$

∴ एक छात्र के लिए केन्द्र पर बना कोण $= \frac{360^{\circ}}{720}$

∴ 216 छात्रों के लिए $= \frac{360^{\circ}}{720} \times 216$

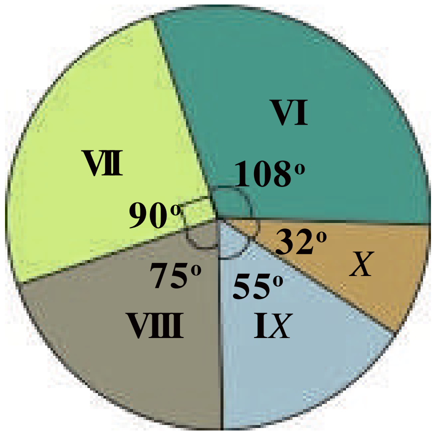
अत: कक्षा 6 के छात्रो के लिए बना कोण $= \frac{360^{\circ}}{720} \times 216 = 108^{\circ}$

कक्षा 7————,,———— $= \frac{360^{\circ}}{720} \times 180 = 90^{\circ}$

कक्षा 8————,,———— $= \frac{360^{\circ}}{720} \times 150 = 75^{\circ}$

कक्षा 9————,,———— $= \frac{360^{\circ}}{720} \times 110 = 55^{\circ}$

कक्षा 10————,,———— $= \frac{360^{\circ}}{720} \times 64 = 32^{\circ}$



चित्र 6.4

कोण ज्ञात करने के बाद किसी भी त्रिज्या का वृत्त बनाकर इसे एक–एक त्रिज्या खण्ड़ द्वारा चित्रानुसार (चित्र 6.4) निरूपित करेंगे।

उदाहरण 9. कक्षा आठवीं के 100 छात्रों की विभिन्न खेलों में रूचि(प्रतिशत में)निम्नानुसार है–

सारणी 6.2

खेल का नाम	खेलो में रूचि (%)	केन्द्रीय कोण
क्रिकेट	65	$\frac{65}{100} \times 360^{\circ} = 234^{\circ}$
फुटबॉल	15	$\frac{15}{100} \times 360^{\circ} = 54^{\circ}$
हॉकी	10	$\frac{10}{100} \times 360^{\circ} = 36^{\circ}$
हैंडबाल	3	$\frac{3}{100} \times 360^{\circ} = 11^{\circ}$
वालीबॉल	7	$\frac{7}{100} \times 360^{\circ} = 25^{\circ}$
कुल छात्रों की संख्या	100	कुल केन्द्रीय कोण 360^{0}