সীমা আৰু অৱকলজ
(LIMITS AND DERIVATIVES)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature.*
WHITEHEAD ❖

13.1 অৱতাৰণা (Introduction)

এই অধ্যায়টো কলনগণিতৰ এটা অৱতাৰণা। কলন গণিত হৈছে গণিতৰ সেইটো শাখা য'ত প্ৰধানকৈ আদিক্ষেত্ৰৰ বিন্দুবোৰ পৰিৱৰ্তিত হোৱাৰ লগে লগে হোৱা এটা ফলনৰ মানৰ পৰিৱৰ্তনৰ অধ্যয়ন কৰা হয়। প্ৰথমতে সংজ্ঞাবদ্ধ নকৰাকৈ অৱকলজৰ এটা সহজাত ধাৰণা দিবলৈ আমি চেষ্টা কৰিম। তাৰ পিছত আমি সীমাৰ এটা সৰল সংজ্ঞা আগবঢ়াম আৰু সীমাৰ বীজগণিত সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম। পিছত আমি আকৌ অৱকলজৰ সংজ্ঞালৈ উভতি আহিম আৰু অৱকলজৰ বীজগণি সম্পৰ্কতো আলোচনা কৰিম। শেষত কেইটামান প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াম।

Sir Issac Newton (1642–1727)

13.2 অৱকলজৰ সহজাত ধাৰণা (Intuitive Idea of Derivatives)

এখন ওখ থিয় পৰ্বতৰপৰা এটা বস্তু তললৈ পেলাই দিলে t চেকেণ্ডত $4.9t^2$ দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে। ভৌতিক পৰীক্ষাৰপৰা এইটো প্ৰতীয়মান হৈছে অৰ্থাৎ সময় t ৰ (ছেকেণ্ডত) ফলন হিচাপে এটা বস্তুৱে অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব s (মিটাৰত) এনেদৰে প্ৰকাশ কৰা হয়: $s = 4.9t^2$

13.1 সাৰণীখনত এখন ওখ পৰ্বতৰপৰা পেলাই দিয়া বস্তুৱে বিভিন্ন সময়ৰ অন্তৰালত (ছেকেণ্ডত) অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব (মিটাৰত) দিয়া হৈছে।

এইখিনি তথ্যৰপৰা $t = 2$ ছেকেণ্ডত বস্তুটোৰ বেগ উলিয়াব লাগে। এইটো উলিওৱাৰ এটা উপায় হ'ল $t = 2$ ছেকেণ্ডত শেষ হোৱা বিভিন্ন সময়ৰ অন্তৰালৰ গড় বেগ উলিওৱা। ই $t = 2$ ছেকেণ্ডত বেগ সম্বন্ধে এটা আভাস দিব।

$t = t_1$ আৰু $t = t_2$ ৰ মাজৰ গড় বেগ হ'ল $t = t_1$ আৰু $t = t_2$ ছেকেণ্ডৰ মাজৰ দূৰত্বক $(t_2 - t_1)$ ৰে হৰণ কৰা মান। সেয়ে প্ৰথম দুই ছেকেণ্ডত গড় বেগ

$$= \frac{t_2 = 2 \text{ আৰু } t_1 = 0\text{ৰ মাজত অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব}}{\text{সময় অন্তৰাল } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6-0)m}{(2-0)s} = 9.8\,m/s$$

সেইদৰে, $t = 1$ আৰু $t = 2$ ৰ মাজৰ গড় বেগ হ'ল

$$\frac{(19.6-4.9)m}{(2-1)s} = 14.7\,m/s$$

সেইদৰে বিভিন্ন t_1 অৰ বাবে $t = t_1$ আৰু $t = 2$ ৰ মাজৰ গড় বেগ আমি উলিয়াব পাৰোঁ। 13.2 সাৰণীখনত গড় বেগ (v) উলিওৱা হৈছে, $t = t_1$ ছেকেণ্ড আৰু $t = 2$ ছেকেণ্ড।

সাৰণী 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

সাৰণী 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

সাৰণী 13.2 ৰ পৰা আমি দেখিছোঁ যে গড় বেগ ক্ৰমান্বয়ে বাঢ়ি গৈ আছে। $t = 2$ ত শেষ হোৱা সময়ৰ অন্তৰালবোৰ যদি আমি সৰু কৰি গৈ থাকোঁ, তেনেহ'লে $t = 2$ ত বেগ সম্বন্ধে আমি এটা ভাল ধাৰণা কৰি ল'ব পাৰিম। 1.99 ছেকেণ্ড আৰু 2 ছেকেণ্ডৰ মাজত বিশেষ উল্লেখ কৰিব লগীয়া একোৱেই নাই বুলি ক'ব পাৰি। আমি ক'ব পাৰোঁ যে $t = 2$ ছেকেণ্ডত বেগ $19.551 m/sec$ তকৈ অলপ বেছি।

তলৰ গণনাৰপৰা কথাখিনি আৰু বেছি বোধগম্য হ'ব। $t = 2$ ছেকেণ্ডত আৰম্ভ কৰি বিভিন্ন সময়ৰ অন্তৰালৰ বাবে গড়-বেগ গণনা কৰা হ'ল। আগৰ দৰে $t = 2$ ছেকেণ্ড আৰু $t = t_2$ ছেকেণ্ডৰ মাজত গড়-বেগ v হ'ল

$$= \frac{2 \text{ ছেকেণ্ড আৰু } t_2 \text{ ছেকেণ্ডৰ মাজত অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব}}{t_2 - 2}$$

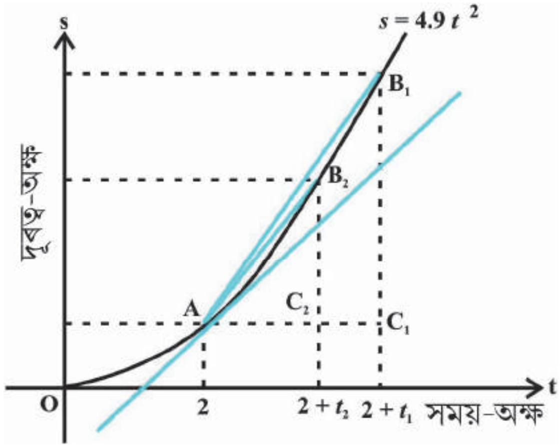
$$= \frac{t_2 \text{ছেকেণ্ডত অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব} - 2 \text{ ছেকেণ্ডত অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ ছেকেণ্ডত অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব} - 19.6}{t_2 - 2}$$

সাৰণী 13.3 ত $t = 2$ আৰু t_2 ছেকেণ্ডৰ মাজত গড়-বেগ v (মিটাৰ/ছেকেণ্ড) দেখুওৱা হৈছে।

সাৰণী 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649



চিত্ৰ 13.1

এই ক্ষেত্ৰতো যদি আমি $t = 2$ ত আৰম্ভ হোৱা সময়ৰ অন্তৰালবোৰ সৰু কৰি গৈ থাকোঁ, তেনেহ'লে $t = 2$ ত বেগ সম্বন্ধে আমি এটা ভাল ধাৰণা কৰি ল'ব পাৰিম।

প্ৰথম ক্ষেত্ৰত আমি $t = 2$ ত শেষ হোৱা বৰ্ধমান সময়ৰ অন্তৰালত গড়-বেগ উলিয়াইছোঁ আৰু মন কৰিছোঁ যে $t = 2$ ৰ ঠিক আগেয়ে বিশেষ উল্লেখযোগ্য একো হোৱা নাই। দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত আমি $t = 2$ ত শেষ হোৱা হ্ৰাসমান সময়ৰ অন্তৰালত গড়-বেগ উলিয়াইছোঁ আৰু মন কৰিছোঁ যে $t = 2$ ৰ ঠিক পিছত বিশেষ উল্লেখযোগ্য একো হোৱা নাই। নিতান্তই ভৌতিক কাৰণত, গড়-বেগৰ এই দুয়োটা অনুক্ৰমেই এটা উমৈহতীয়া সীমাৰ ওচৰ চাপিব লাগিব। আমি ক'ব পাৰোঁ যে $t = 2$ ত বস্তুটোৰ বেগ 19.551 m/s আৰু 19.649 m/s ৰ মাজত থাকে। অৰ্থাৎ আমি এনেদৰে ক'ব পাৰোঁ যে $t = 2$ ত তাৎক্ষণিক বেগ 19.551 m/s আৰু 19.649 m/s অৰ মাজত আছে। আমি জানো যে বেগ হ'ল বিস্থাপনৰ পৰিবৰ্তনৰ হাৰ। আমি তলৰ কথাখিনি পাইছোঁ। বিভিন্ন সময়ৰ অন্তৰালত অতিক্ৰান্ত দূৰত্বৰ তথ্যৰপৰা, সময়সাপেক্ষে দূৰত্বৰ পৰিবৰ্তনৰ হাৰ উলিয়াইছোঁ। আমি কওঁ যে $t = 2$ ত দূৰত্ব ফলন $s = 4.9t^2$ ৰ অৱকলজ 19.551 আৰু 19.649 অৰ মাজত থাকে।

বিকল্পভাৱে চিত্ৰ 13.1 অত সীমা-প্ৰক্ৰিয়া দেখুওৱা হৈছে। বিভিন্ন t ত আমি s বোৰ সংস্থাপন কৰিছোঁ। সীমাত সময়- অন্তৰাল $h_1, h_2, \ldots$ শূন্যৰ ওচৰ চপাৰ লগে লগে, গড়-বেগৰ অনুক্ৰমটো একে সীমাৰ ওচৰ চাপিব, যিটোলৈ

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

অনুপাতৰ সীমা ওচৰ চাপে, য'ত C_1B_1 হ'ল $h_1 = AC_1$ সময়-অন্তৰালত বস্তুটোৱে অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব $s_1 - s_0$, ইত্যাদি।

চিত্ৰ 13.1 অৰপৰা আমি পাওঁ যে পিছৰ অনুক্ৰমটো বক্ৰটোৰ A বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতাৰ ওচৰ চাপে। অৰ্থাৎ $t = 2$ সময়ত বস্তুটোৰ তাৎক্ষণিক বেগ $v(t), t = 2$ ত $s = 4.9t^2$ বক্ৰৰ প্ৰৱণতাৰ সমান।

13.3 সীমা (Limits)

কিছুমান ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণৰ সহায়ত আমি সীমাৰ ধাৰণাটো দাঙি ধৰিবলৈ চেষ্টা কৰিম।

$f(x) = x^2$ ফলনটো লোৱা হ'ল। মন কৰিব লগীয়া যে x অৰ মান 0 ৰ ওচৰ চাপি যোৱাৰ লগে লগে $f(x)$ অৰ মানো 0 ৰ ওচৰ চাপে (দ্বিতীয় অধ্যায়ৰ চিত্ৰ 2–10 দ্ৰষ্টব্য)। আমি কওঁ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(পঢ়োঁতে ইংৰাজীত এনেদৰে পঢ়া হয় ঃ limit of $f(x)$ as x tends to zero equals zero)। x শূন্যৰ ওচৰ চাপি যোৱাৰ লগে লগে $f(x)$ অৰ সীমাৰ বিষয়ে এনেদৰেও ভাবিব পাৰি যে $x = 0$ অত ফলনটোৱেনো কি মান লোৱা উচিত।

সাধাৰণতে যেতিয়া $x \to a, f(x) \to l$, তেতিয়া l অক $f(x)$ ফলনটোৰ সীমা বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ

সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়

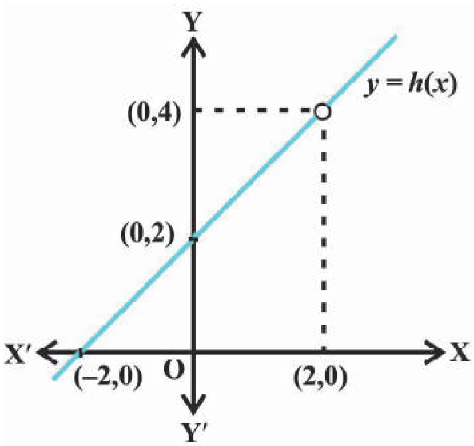
$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

এতিয়া $g(x)=|x|, x\neq 0$ ফলনটো লোৱা হ'ল। মন কৰিব লগীয়া যে $g(0)$ সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়। 0 ৰ অতি ওচৰৰ x অৰ বাবে $g(x)$ অৰ মানবোৰ 0ৰ ওচৰ চাপে। গতিকে $\lim_{x\to 0} g(x)=0$। $y=|x|, x\neq 0$ অৰ লেখৰপৰা এইটো বোধগম্য হয় (চিত্ৰ 2.13, দ্বিতীয় অধ্যায়)।

তলৰ ফলনটো লোৱা হ'ল

$$h(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2$$

x অৰ ঠাইত 2 ৰ অতি ওচৰৰ মান নাথাকিলে $h(x)$ ৰ মান কি পোৱা চোৱা। নিশ্চয় বুজিব পাৰিছা যে এই মান 4 ৰ অতি ওচৰৰ। এই কথাটো 13.2 চিত্ৰৰ $y = h(x)$ ফলনৰ লেখৰ পৰাও প্ৰতীয়মান হয়।



চিত্ৰ 13.2

ওপৰৰ উদাহৰণকেইটাত এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু $x=a$ ত ফলনটোৱে কি মান লোৱা উচিত, সেইটো x কেনেদৰে a ৰ ওচৰ চাপিছে তাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰা নাই। মন কৰিব লগীয়া যে x এ দুই ধৰণে a সংখ্যাটোৰ ওচৰ চাপিব পাৰে— হয় বাওঁ পিনৰপৰা নতুবা সোঁপিনৰপৰা। অৰ্থাৎ a ৰ ওচৰৰ মানবোৰ a তকৈ সৰু বা a তকৈ ডাঙৰ হ'ব পাৰে । ইয়াৰপৰা দুটা সীমাৰ ধাৰণা আহে— সোঁহতীয়া সীমা (right hand limit) আৰু বাওঁহতীয়া সীমা (left hand limit)। সোঁহাতৰপৰা x যেতিয়া a ৰ ওচৰ চাপে, $f(x)$ অৰ সেইবোৰ মানৰপৰা $f(x)$ উলিয়াই সোঁহতীয়া সীমা গণনা কৰা হয়। সেইদৰে, বাওঁহতীয়া সীমা গণনা কৰা হয়। এইটো বুজাবলৈ তলৰ ফলনটো লোৱা হ'ল

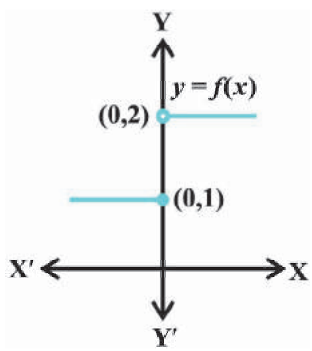
$$f(x)=\begin{cases}1, x\leq 0\\ 2, x>0\end{cases}$$

চিত্ৰ 13.3 ত এই ফলনটোৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে। স্পষ্টতঃ $x\leq 0$ ৰ বাবে $f(x)$ অৰ মানবোৰৰপৰা এইটো অনুমান কৰিব পাৰি যে 0 ত f অৰ মান 1 অৰ সমান অৰ্থাৎ 0 ত $f(x)$ অৰ বাওঁহতীয়া সীমা হ'ল

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$$

সেইদৰে $x>0$ ৰ বাবে $f(x)$ অৰ মানবোৰৰপৰা এইটো অনুমান কৰিব পাৰি যে 0 ত f অৰ মান 2 ৰ সমান অৰ্থাৎ 0 ত $f(x)$ অৰ সোঁহতীয়া সীমা হ'ল

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$$



চিত্ৰ 13.3

এই ক্ষেত্ৰত সোঁহতীয়া আৰু বাওঁহতীয়া সীমা বেলেগ। সেয়ে শূন্যৰ ওচৰ চাপি গ'লে $f(x)$ অৰ সীমা স্থিত নহয় (যদিও 0 ত ফলনটো সংজ্ঞাবদ্ধ)।

সাৰাংশ

a ৰ অতি ওচৰৰ বাওঁহাতৰ x অৰ বাবে f অৰ মানবোৰ দিয়া আছে। ইয়াৰ পৰা $x=a$ ত f অৰ প্ৰত্যাশিত মানেই হ'ল $\lim_{x\to a^-} f(x)$ । এই মানটোক a ত f অৰ বাওঁহতীয়া সীমা বোলে।

a ৰ অতি ওচৰৰ সোঁহাতৰ x অৰ বাবে f অৰ মানবোৰ দিয়া আছে। ইয়াৰপৰা $x=a$ ত f অৰ প্ৰত্যাশিত মানেই হ'ল $\lim_{x\to a^+} f(x)$ । এই মানটোক a ত f অৰ সোঁহতীয়া সীমা বোলে।

যদি সোঁহতীয়া আৰু বাওঁহতীয়া সীমা একে হয়, এই উমৈহতীয়া সীমাটোক $x=a$ ত $f(x)$ অৰ সীমা বোলে। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $\lim_{x\to a} f(x)$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 1 $f(x) = x + 10$ ফলনটো লোৱা হ'ল। $x = 5$ অত আমি ফলনটোৰ সীমা উলিয়াব বিচাৰিছোঁ। 5 অৰ একেবাৰে কাষৰ x অৰ বাবে আমি f ফলনটোৰ মান উলিয়াওঁ। 5 অৰ একেবাৰে ওচৰৰ আৰু বাওঁপিনৰ কিছুমান বিন্দু হ'ল 4.9, 4.95, 4.99, 4.995, ... ইত্যাদি। এই বিন্দুবোৰত ফলনটোৰ মান তলত উলিওৱা হৈছে। সেইদৰে, বাস্তৱ সংখ্যা 5.001, 5.01, 5.1 বিন্দুকেইটা 5 অৰ ওচৰৰ আৰু সোঁপিনে। এই বিন্দুবোৰত ফলনটোৰ মান সাৰণী 13.4 অত দেখুওৱা হৈছে।

সাৰণী 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

সাৰণী 13.4 অৰপৰা দেখা গ'ল যে $x = 5$ অত $f(x)$ অৰ মান 14.995 অতকৈ ডাঙৰ আৰু 15.001 অতকৈ সৰু হ'ব। $x = 4.995$ আৰু 5.001 অৰ মাজত উল্লেখ কৰিব লগীয়া বিশেষ একো নহয়। 5 অৰ বাওঁ পিনৰ সংখ্যাবোৰৰ বাবে ফলনটোৰ মানবোৰৰপৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে $x = 5$ অত ফলনটোৰ মান হ'ব 15 অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 15$$

সেইদৰে যেতিয়া সোঁপিনৰপৰা x এ, 5 অৰ ওচৰ চাপে, $f(x)$ এ 15 মানটো ল'ব অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 15$$

গতিকে, f অৰ বাওঁহতীয়া সীমা আৰু সোঁহতীয়া সীমা উভয়ে 15 অৰ সমান। অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} f(x) = 15$$

ফলনটোৰ লেখ দ্বিতীয় অধ্যায়ৰ চিত্ৰ 2.16 অত দেখুওৱা হৈছে। তাৰপৰাও ক'ব পাৰি যে সীমা 15 অৰ সমান। এই চিত্ৰটোত আমি দেখিছোঁ যে যেতিয়া x সোঁপিনৰপৰাই হওক বা বাওঁপিনৰ পৰাই হওক 5 অৰ ওচৰ চাপে, $f(x) = x + 10$ ফলনটোৰ লেখ (5,15) বিন্দুৰ ওচৰ চাপে।

উল্লেখ কৰিব পাৰি যে $x = 5$ অত ফলনটোৰ মানো 15.

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 2 $f(x) = x^3$ ফলনটো লোৱা হ'ল। $x = 1$ অত ফলনটোৰ সীমা উলিয়াব লাগে। আগৰ দৰে, 1 অৰ ওচৰৰ x অৰ বাবে $f(x)$ উলিয়াওঁ। সাৰণী 13.5 অত সেয়া দেখুওৱা হৈছে।

সাৰণী 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

সাৰণীৰপৰা আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে $x = 1$ অত f অৰ মান 0.997002999 অতকৈ ডাঙৰ আৰু 1.003003001 অতকৈ সৰু হ'ব $x = 0.999$ আৰু 1.001 অৰ মাজত উল্লেখ কৰিব লগীয়া বিশেষ একো নহয়। 1 অৰ বাওঁপিনৰ সংখ্যাবোৰৰ বাবে ফলনটোৰ মানবোৰৰপৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে $x = 1$ অত ফলনটোৰ মান হ'ব 1 অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

সেইদৰে, যেতিয়া সোঁপিনৰপৰা x এ, 1 অৰ ওচৰ চাপে, $f(x)$ এ 1 মানটো ল'ব অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

গতিকে, f অৰ বাওঁহতীয়া সীমা আৰু সোঁহতীয়া সীমা উভয়ে 1 অৰ সমান। অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

ফলনটোৰ লেখ দ্বিতীয় অধ্যায়ৰ চিত্ৰ 2.11 অত দেখুওৱা হৈছে। তাৰপৰা ক'ব পাৰি যে সীমা 1 অৰ সমান। এই চিত্ৰটোত আমি দেখিছোঁ যে যেতিয়া x সোঁপিনৰপৰাই হওক বা বাওঁপিনৰপৰাই হওক 1 অৰ ওচৰ চাপে, $f(x) = x^3$ ফলনটোৰ লেখ (1,1) বিন্দুৰ ওচৰ চাপে।

উল্লেখ কৰিব পাৰি যে $x = 1$ অত ফলনটোৰ মানো 1.

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 3 $f(x) = 3x$ ফলনটো লোৱা হ'ল। $x = 2$ ত ফলনটোৰ সীমা উলিয়াব লাগে। সাৰণী 13.6 অত বিভিন্ন মান দেখুওৱা হৈছে।

সাৰণী 13.6

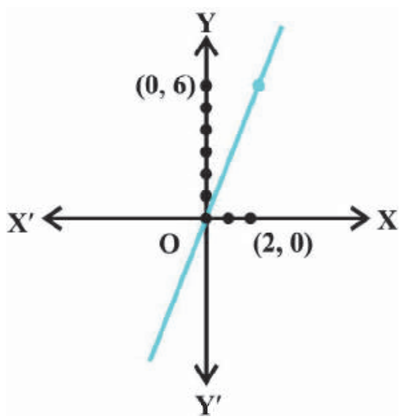
x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

আগৰ দৰে আমি মন কৰিছোঁ যে যেতিয়া x সোঁপিনৰপৰাই হওক বা বাওপিনৰপৰাই হওক 2 ৰ ওচৰ চাপে, $f(x)$ অৰ মান 6 অৰ ওচৰ চাপে। আমি পালোঁ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

চিত্ৰ 13.4 অত দেখুওৱা ফলনটোৰ লেখৰপৰাও এইটো প্ৰতিপন্ন হয়।

এই ক্ষেত্ৰতো আমি দেখিছোঁ যে $x = 2$ ত ফলনটোৰ মান $x = 2$ ত সীমাৰ সৈতে একে।



চিত্ৰ 13.4

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 4 $f(x) = 3$ ধ্ৰুৱক ফলনটো লোৱা হ'ল। $x = 2$ ত ইয়াৰ সীমা উলিয়াব লাগে। এই ফলনটো ধ্ৰুৱক ফলন। সকলো ক্ষেত্ৰতে একে মান (এই ক্ষেত্ৰত 3) অৰ্থাৎ 2 ৰ একেবাৰে ওচৰৰ বিন্দুতো ইয়াৰ মান 3। গতিকে

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

দ্বিতীয় অধ্যায়ৰ চিত্ৰ 2.9 অত ইয়াৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে। ইয়াৰ লেখ (0,3) বিন্দুৰে যোৱা x –অক্ষৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখা। ইয়াৰপৰাও এইটো স্পষ্ট যে নিৰ্ণেয় সীমা 3. দৰাচলতে, যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা a ৰ বাবে

$$\lim_{x\to a} f(x) = 3$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 5 $f(x) = x^2 + x$ ফলনটো লোৱা হ'ল। $\lim_{x\to 1} f(x)$ উলিয়াব লাগে। সাৰণী 13.7 অত $x =$ 1অৰ কাষত $f(x)$ অৰ মান দিয়া হৈছে।

সাৰণী 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

ইয়াৰপৰা আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে

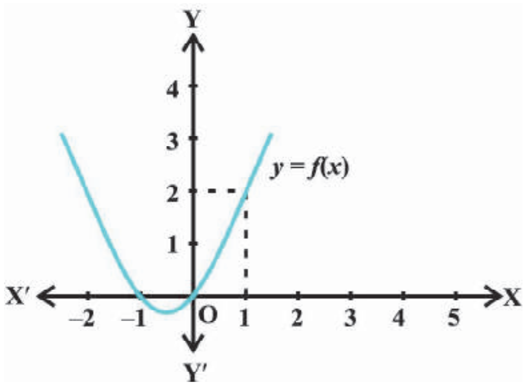
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

চিত্ৰ 13.5 অত $f(x) = x^2 + x$ ফলনৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে। এইটো স্পষ্ট যে x এ, 1 অৰ ওচৰ চাপি গ'লে, লেখটো (1,2) ৰ ওচৰ চাপে।

এই ক্ষেত্ৰতো আমি দেখিলোঁ যে

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

এতিয়া তলৰ কথা তিনিটালৈ মন কৰাঁঃ



চিত্ৰ 13.5

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1, \lim_{x\to 1} x = 1 \text{ আৰু } \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$$

তেনেহ'লে $\quad \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right]$

আকৌ $\quad \lim_{x\to 1} x . \lim_{x\to 1}(x+1) = 1.2 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x(x+1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right]$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 6 $f(x) = \sin x$ ফলনটো লোৱা হ'ল। $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x$ উলিয়াব লাগে। কোণ ৰেডিয়ান মাপত জোখা হৈছে। সাৰণী 13.8 অত $\frac{\pi}{2}$ ৰ কাষত $f(x)$ অৰ (মোটামুটি) মান দিয়া হৈছে। ইয়াৰপৰা আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

তৃতীয় অধ্যায়ৰ চিত্ৰ 3.8 অত $f(x) = \sin x$ অৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে। তাৰপৰাও এইটো প্ৰতীয়মান হয়। এই ক্ষেত্ৰতো আমি দেখিছোঁ যে $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

সাৰণী 13.8

x	$\frac{\pi}{2} - 0.1$	$\frac{\pi}{2} - 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.01$	$\frac{\pi}{2} + 0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 7 $f(x) = x + \cos x$ ফলনটো লোৱা হ'ল। $\lim_{x \to 0} f(x)$ উলিয়াব লাগে। সাৰণী 13.9 অত 0 ৰ ওচৰত $f(x)$ অৰ (মোটামুটি) মান দিয়া হৈছে।

সাৰণী 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

সাৰণী 13.9 অৰপৰা আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

এই ক্ষেত্ৰতো আমি দেখিছোঁ যে $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1.$

এতিয়া এই কথাটোত পতিয়ন যাব নোৱাৰিনে

$$\lim_{x \to 0}[x + \cos x] = \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} \cos x$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 8 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ফলনটো লোৱা হ'ল, $x > 0.$ $\lim_{x \to 0} f(x)$ উলিয়াব লাগে।

এই ক্ষেত্ৰত ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি বুলি দিয়া আছে। গতিকে যেতিয়া আমি সাৰণীত $f(x)$ অৰ মানবোৰ লিখোঁ, 0 ৰ বাওঁপিনৰপৰা x অৰ ওচৰ চাপি যোৱা সংখ্যাবোৰৰ বিষয়ে কোৱাৰ প্ৰয়োজন নাই। তলৰ সাৰণীখনত 0 ৰ একেবাৰে ওচৰৰ x অৰ ধনাত্মক মানৰ বাবে ফলনটোৰ মান লেখিছোঁ (এই সাৰণীখনত n এ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বুজাইছে)।

তলৰ সাৰণী 13.10 অৰপৰা আমি দেখিছোঁ যে x এ 0ৰ ওচৰ চাপি যোৱাৰ লগে লগে, $f(x)$ ডাঙৰৰপৰা ডাঙৰ হৈ থাকে। $f(x)$ অৰ মান প্ৰদত্ত যিকোনো সংখ্যাতকৈ ডাঙৰ কৰিব পাৰি।

সাৰণী 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

গাণিতিকভাৱে আমি কওঁ যে

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

এইখিনিতে উনুকিয়াই থওঁ যে এই পাঠ্যক্ৰমত আমি এনেধৰণৰ সীমাৰ বিষয়ে আলোচনা নকৰোঁ।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 9 দিয়া আছে

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ উলিয়াব লাগে।

আগৰ দৰে 0 অৰ ওচৰত x অৰ বাবে $f(x)$ উলিয়াওঁ। মন কৰিব লগীয়া যে x অৰ ঋণাত্মক মানৰ বাবে $x-2$ উলিয়াব লাগিব আৰু ধনাত্মক মানৰ বাবে $x+2$ উলিয়াব লাগিব।

সাৰণী 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

সাৰণী 13.11 অৰ প্ৰথম তিনিটা প্ৰৱিষ্টিৰপৰা আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে ফলনটো – 2 লৈ কমি গৈ আছে আৰু সেয়ে

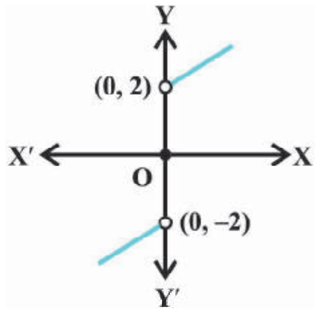
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$$

সাৰণী 13.11 অৰ শেহৰ তিনিটা প্ৰৱিষ্টিৰপৰা আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰোঁ যে ফলনটো 2 লৈ বাঢ়ি গৈ আছে আৰু সেয়ে

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

যিহেতু 0 অত বাওঁহতীয়া সীমা আৰু সোঁহতীয়া সীমা একে নহয়, গতিকে 0 অত ফলনটোৰ সীমা স্থিত নহয়।

ফলনটোৰ লেখ চিত্ৰ 13.6 অত দেখুওৱা হৈছে। এইখিনিতে উনুকিয়াই থোৱা ভাল হ'ব যে $x = 0$ ত ফলনটোৰ মান সুসংজ্ঞাবদ্ধ আৰু ই 0ৰ সমান; কিন্তু $x = 0$ ত ফলনটোৰ সীমা সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।



চিত্ৰ 13.6

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ 10 অন্তিম ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণটো দিয়া হ'ল।

দিয়া আছে $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 0\ , & x = 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ উলিয়াব লাগে।

সাৰণী 13.12

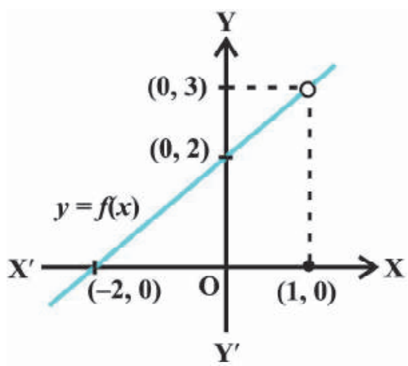
x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

আগৰ দৰে সাৰণীত 1অৰ কাষৰ x অৰ বাবে $f(x)$ অৰ মান লিখিছোঁ। 1 অতকৈ সৰু x অৰ বাবে $f(x)$ অৰ মানবোৰ উলিওৱা হ'ল, তাৰপৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে $x = 1$ অত ফলনটোৱে 3 মান লোৱা উচিত অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

সেইদৰে 1 অতকৈ ডাঙৰ x অৰ বাবে $f(x)$ অৰ মানবোৰ উলিওৱা হ'ল। তাৰপৰা অনুমান কৰিব পাৰি যে $x = 1$ অত ফলনটোৱে 3 মান লোৱা উচিত অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$



চিত্ৰ 13.7

কিন্তু তেতিয়া বাওঁহতীয়া আৰু সোঁহতীয়া সীমা সমান আৰু সেয়ে

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

চিত্ৰ 13.7 অত ফলনটোৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে। ইয়াৰ পৰা সীমাৰ ধাৰণাটো প্ৰতিপন্ন হ'ব।

ইয়াৰপৰা আন এটা কথা দেখা গ'ল যে ফলনটোৰ মান আৰু সীমা বেলেগ হ'ব পাৰে (দুয়োটা সংজ্ঞাৱদ্ধ হ'লেও)।

13.3.1 *সীমাৰ বীজগণিত (Algebra of limits)* ওপৰৰ ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণবোৰৰপৰা আমি দেখিছোঁ যে সীমা-প্ৰক্ৰিয়াই যোগ, বিয়োগ, পূৰণ আৰু হৰণ মানি চলে যেতিয়ালৈকে সংশ্লিষ্ট সীমা আৰু ফলনবোৰ সুসংজ্ঞাৱদ্ধ। তলত প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে উপপাদ্য হিচাপে কথাখিনি প্ৰকাশ কৰা হ'ল।

উপপাদ্য 1 ধৰা হ'ল f আৰু g দুটা ফলন। $\lim_{x\to a} f(x)$ আৰু $\lim_{x\to a} g(x)$ উভয়ে স্থিত হয়। তেনেহ'লে

(i) দুটা ফলনৰ যোগফলৰ সীমা, ফলন দুটাৰ সীমাৰ যোগফলৰ সমান অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

(ii) দুটা ফলনৰ অন্তৰফলৰ সীমা, ফলন দুটাৰ সীমাৰ অন্তৰফলৰ সমান অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

(iii) দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ সীমা, ফলন দুটাৰ সীমাৰ পূৰণফলৰ সমান অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

(iv) দুটা ফলনৰ হৰণফলৰ সীমা, ফলন দুটাৰ সীমাৰ হৰণফলৰ সমান (যেতিয়া হৰ শূন্য নহয়) অৰ্থাৎ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

> ☛ **টোকা** (iii) ৰ এটা বিশেষ অৱস্থা ঃ যদি g এটা ধ্ৰুৱক ফলন হয় যাতে $g(x)=\lambda, \lambda$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা, তেনেহ'লে

$$\lim_{x\to a}[(\lambda.f)(x)] = \lambda.\lim_{x\to a} f(x)$$

তলৰ অনুচ্ছেদ দুটাত, কিছুমান বিশেষ ধৰণৰ ফলনত এই উপপাদ্যকেইটাৰ প্ৰয়োগ কৰা হৈছে।

13.3.2 *বহুপদ আৰু পৰিমেয় ফলনৰ সীমা (Limits of polynomials and rational functions)* এটা ফলন f অক বহুপদ ফলন বুলি কোৱা হয় যদি $f(x)$ এটা শূন্য ফলন বা যদি $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, য'ত a_i বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা যাতে $a_n \neq 0$, n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।

আমি জানো যে $\lim_{x\to a} x = a$।

সেয়ে $\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x.x) = \lim_{x\to a} x.\lim_{x\to a} x = a.a = a^2$

আৰোহ-পদ্ধতিৰ সহায়ত অনায়াসে দেখুৱাব পাৰি যে

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

এতিয়া, ধৰা হ'ল $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+......+a_nx^n$ এটা বহুপদ ফলন। $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ প্ৰত্যেককে ফলন হিচাপে ভাবি লৈ আমি পাওঁ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left[a_0+a_1x+a_2x^2+.......+a_nx^n\right]\\ &= \lim_{x\to a} a_0+\lim_{x\to a} a_1x+\lim_{x\to a} a_2x^2+.....+\lim_{x\to a} a_nx^n\\ &= a_0+a_1\lim_{x\to a} x+a_2\lim_{x\to a} x^2+....+a_n\lim_{x\to a} x^n\\ &= a_0+a_1a+a_2a^2+.....+a_na^n\\ &= f(a)\end{aligned}$$

(ওপৰৰ প্ৰতিটো ঢাপৰ যুক্তিবোৰ মন কৰে যেন)

এটা ফলন f অক পৰিমেয় ফলন বুলি কোৱা হয় যদি $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, য'ত $g(x)$ আৰু $h(x)$ বহুপদ আৰু $h(x)\neq 0$. তেনেহ'লে

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}=\frac{g(a)}{h(a)}$$

অৱশ্যে যদি $h(a)=0$, দুটা কথা হ'ব পাৰে— (i) যেতিয়া $g(a)\neq 0$ আৰু (ii) যেতিয়া $g(a)=0$. প্ৰথম ক্ষেত্ৰত সীমা স্থিত নহয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰত আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ $g(x)=(x-a)^k g_1(x)$, য'ত k হ'ল $g(x)$ অত $(x-a)$ ৰ ঘাতবোৰৰ সৰ্বোচ্চ। সেইদৰে, $h(x)=(x-a)^l h_1(x)$ যিহেতু $h(a)=0$. এতিয়া, যদি $k>l$ আমি পালোঁ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)}=\frac{\lim_{x\to a}(x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x\to a}(x-a)^l h_1(x)}\\ &= \frac{\lim_{x\to a}(x-a)^{k-l} g_1(x)}{\lim_{x\to a} h_1(x)}=\frac{0.g_1(a)}{h_1(a)}=0\end{aligned}$$

যদি $k<l$, সীমা সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 1 সীমা উলিওৱাঁ (i) $\lim_{x\to 1}\left[x^3-x^2+1\right]$ (ii) $\lim_{x\to 3}\left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x\to -1}\left[1+x+x^2+.......+x^{10}\right]$

সমাধান প্ৰদত্ত সীমাবোৰ হ'ল বহুপদ ফলনৰ সীমা। গতিকে সীমাবোৰ হ'ল নিৰ্দিষ্ট বিন্দুবোৰত ফলনবোৰৰ মান। আমি পালোঁ

(1) $\lim_{x\to 1}\ [x^3-x^2+1]=1^3-1^2+1=1$

(2) $\lim_{x\to 3}[x(x+1)]=3(3+1)=3(4)=12$

(iii) $\lim_{x\to -1}[1+x+x^2+...+x^{10}]=1+(-1)+(-1)^2+...+(-1)^{10}=1-1+1...+1=1.$

উদাহৰণ 2 সীমা উলিওৱাঁ

(i) $\lim_{x\to1}\left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$ (iii) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$

(iv) $\lim_{x\to2}\left[\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$ (v) $\lim_{x\to1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

সমাধান ওপৰৰ সকলোবোৰ ফলনেই পৰিমেয় ফলন। সেয়ে আমি প্ৰথমতে নিৰ্দিষ্ট বিন্দুবোৰত ফলনবোৰৰ মান উলিয়াওঁ । যদি সেয়া $\frac{0}{0}$ আকাৰৰ হয়, তেনেহ'লে যিবোৰ উৎপাদকৰ বাবে সীমা $\frac{0}{0}$ আকাৰৰ হয়, সেইবোৰ কাটি ফলনটো নতুনকৈ লিখিবলৈ চেষ্টা কৰিম।

(i) আমি পাওঁ $\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x+100}=\frac{1^2+1}{1+100}=\frac{2}{101}$

(ii) 2 ত ফলনটোৰ মান উলিয়াবলৈ গৈ আমি দেখিলোঁ যে ই $\frac{0}{0}$ আকাৰৰ।

সেয়ে $$\lim_{x\to2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x+2)} \qquad \text{যিহেতু } x\neq2$$

$$=\frac{2(2-2)}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

(iii) 2 ত ফলনটোৰ মান উলিয়াবলৈ গৈ আমি দেখিলোঁ যে ই $\frac{0}{0}$ আকাৰৰ।

সেয়ে $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x(x-2)}=\frac{2+2}{2(2-2)}=\frac{4}{0},$$

যিটো সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

(iv) 2 ত ফলনটোৰ মান উলিয়াবলৈ গৈ আমি দেখিলোঁ যে ই $\frac{0}{0}$ আকাৰৰ।

সেয়ে $$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2}{(x-3)}=\frac{(2)^2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4$$

(v) প্ৰথমতে, আমি ফলনটোক পৰিমেয় ফলন হিচাপে প্ৰকাশ কৰোঁ।

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x^2-3x+2)}\right]$$

$$=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

1 অত ফলনটোৰ মান উলিয়াবলৈ গৈ আমি দেখিলোঁ যে ই $\frac{0}{0}$ আকাৰৰ।

সেয়ে $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x(x-2)}=\frac{1-3}{1(1-2)}=2$$

মন কৰিব লগীয়া যে ওপৰৰ মান নিৰ্ণয়ত $(x-1)$ পদটো কটা হৈছে, যিহেতু $x\neq 1$.

তলত উপপাদ্য হিছাপে এটা প্ৰয়োজনীয় সীমা নিৰ্ণয় কৰা হ'ল। পিছত এইটো বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হয়।

উপপাদ্য 2 যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

মন্তব্য ওপৰৰ সীমাটো যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যা n অৰ বাবে সত্য, a ধনাত্মক।

প্ৰমাণ ঃ (x^n-a^n) অক $(x-a)$ এৰে ভাগ কৰি আমি পালোঁ

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+....+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

গতিকে, $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+......+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

$$=a^{n-1}+aa^{n-2}+......+a^{n-2}a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+.....+a^{n-1}+a^{n-1}$$ (n টা পদ)

$$=na^{n-1}$$

উদাহৰণ 3 মান নিৰ্ণয় কৰা

$$\text{(i)} \lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

সমাধান

$$\text{(i)} \lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15(1)^{14}\div 10(1)^{9}$$ (ওপৰৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত)

$$= 15\div 10 = \frac{3}{2}$$

[ii) $y = 1+x$ বহুওৱা হ'ল।

যেতিয়া $x \to 0, \quad y \to 1.$

গতিকে

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

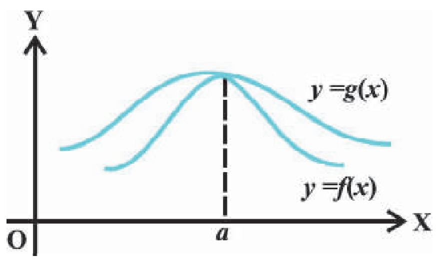
$$= \lim_{y\to 1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}$$ (ওপৰৰ মন্তব্যৰ সহায়ত) $= \frac{1}{2}$

13.4 ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ সীমা (Limits of Trigonometric Functions)

কিছুমান ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ সীমা নিৰ্ণয়ত তলৰ ফলকেইটাৰ (উপপাদ্য হিছাপে লিখা হৈছে) প্ৰয়োজন হয়।

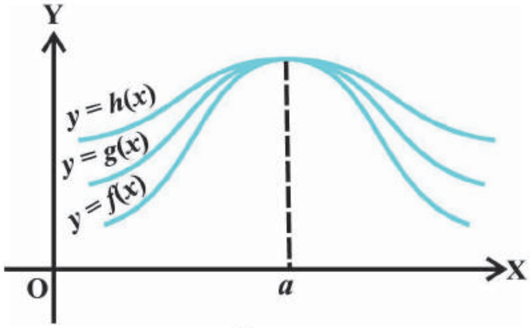
উপপাদ্য 3 ধৰা হ'ল f আৰু g দুটা বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন। ফলন দুটাৰ আদিক্ষেত্ৰ একে আৰু আদিক্ষেত্ৰৰ সকলো x অৰ বাবে $f(x) \le g(x)$। কোনো a ৰ বাবে যদি $\lim_{x\to a} f(x)$ আৰু $\lim_{x\to a} g(x)$ স্থিত হয়, তেনেহলে $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$। চিত্ৰ 13.8 অত এইটো দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ13.8

উপপাদ্য 4 (ছেণ্ডউইছ উপপাদ্য Sandwich Theorem)

ধৰা হ'ল f, g আৰু h তিনিটা বাস্তৱ ফলন। সিহঁতৰ উমৈহতীয়া আদিক্ষেত্ৰৰ সকলো x অৰ বাবে $f(x) \le g(x) \le h(x)$।যদি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x অৰ বাবে $\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x)$, তেনেহ'লে $\lim_{x \to a} g(x) = l$ । চিত্ৰ 13.9 অত এইটো দেখুওৱা হৈছে।

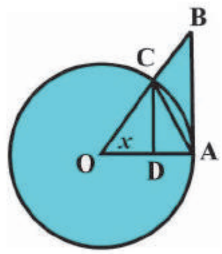


চিত্ৰ 13.9

তলৰ ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন সম্বন্ধীয় অসমিকাটোৰ এটা মনোগ্ৰাহী জ্যামিতীয় প্ৰমাণ দিয়া হৈছে।

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

প্ৰমাণ আমি জানো যে $\sin(-x) = -\sin x$ আৰু $\cos(-x) = \cos x$ । সেয়েহে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ৰ বাবে অসমিকাটো প্ৰমাণ কৰিলেই যথেষ্ট।



চিত্ৰ 13.10

চিত্ৰ 13.10 অত একক বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ O। AOC কোণ x ৰেডিয়ান আৰু $0 < x < \frac{\pi}{2}$ । ৰেখাখণ্ড BA আৰু CD উভয়ে OA ৰ ওপৰত লম্ব। আকৌ AC সংলগ্ন কৰা হ'ল। তেনেহলে ΔOAC ৰ কালি < OAC বৃত্তখণ্ডৰ কালি < ΔOAB ৰ কালি অৰ্থাৎ $CD < x.OA < AB$.

ΔOCD ৰ পৰা $\sin x = \frac{CD}{OA}$ (যিহেতু $OC = OA$) আৰু সেয়ে $CD = OA \sin x$

আকৌ $\tan x = \frac{AB}{OA}$ আৰু সেয়ে $AB = OA.\tan x$। এইদৰে

$$OA \sin x < OA.x < OA.\tan x$$

যিহেতু দৈৰ্ঘ্য OA ধনাত্মক, সেয়ে আমি পালোঁ

$$\sin x < x < \tan x$$

যিহেতু $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ ধনাত্মক আৰু সেয়ে $\sin x$ এৰে হৰণ কৰি আমি পালোঁ

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$ অন্যোন্যক লৈ, আমি পালোঁ

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

প্ৰমাণটো ইমানতে সম্পূৰ্ণ হ'ল।

উপপাদ্য 5 তলৰ সীমা দুটা অতি প্ৰয়োজনীয়।

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

প্ৰমাণ (i) (*) অসমিকাটোত $\frac{\sin x}{x}$ ফলনটো $\cos x$ আৰু ধ্ৰুৱক ফলন 1 অৰ মাজত আছে।

আকৌ, যিহেতু $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, (i) উপপাদ্যটো ছেণ্ডউইছ উপপাদ্যৰদ্বাৰা প্ৰমাণিত হ'ল।

(ii) প্ৰমাণ কৰোঁতে আমি $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ত্ৰিকোণমিতীয় অভেদটো ব্যৱহাৰ কৰিম।

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} . \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} . \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

মন কৰিব লগীয়া যে $x \to 0, \frac{x}{2} \to 0$ অৰ সমতুল্য। $y = \frac{x}{2}$ বহুৱাই এইটো প্ৰতিপন্ন কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 4 মান নিৰ্ণয় কৰাঁ (i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

সমাধান (i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} . \frac{2x}{\sin 2x} . 2\right]$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2 \lim_{4x \to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x \to 0} \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2 \times 1 \times 1$$

$= 2$ (যিহেতু $x \to 0$ হ'লে, $4x \to 0$ আৰু $2x \to 0$)

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.1=1.$

সীমা নিৰ্ণয়ত তলৰ কাৰ্য্যকৰী নিয়মটো মনত ৰখা প্ৰয়োজনীয়।

ধৰা হল $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ সীমাটো স্থিত আৰু আমি এইটো নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। প্ৰথমতে আমি $f(a)$ আৰু $g(a)$ মান দুটা পৰীক্ষা কৰি চাওঁ। যদি উভয়ে 0 হয়, তেনেহ'লে যিটো উৎপাদকৰ বাবে শূন্য হয় সেইটো উলিয়াব পৰা যায় নে নাযায় চাই লওঁ অৰ্থাৎ $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ আকাৰত লিখিব পাৰিনে নোৱাৰি চাই লওঁ যাতে $f_1(a)=0$ আৰু $f_2(a)\neq 0$. সেইদৰে, আমি লিখোঁ $g(x)=g_1(x)g_2(x)$, য'ত $g_1(a)=0$ আৰু $g_2(a)\neq 0$. যদি সম্ভৱ হয় $f(x)$ আৰু $g(x)$ অৱপৰা উমৈহতীয়া উৎপাদকবোৰ কাটি পেলাওঁ আৰু ফলটো নতুনকৈ এনেদৰে লিখোঁ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)},\ \text{য'ত}\ q(x)\neq 0$$

তেনেহ'লে
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}$$

অনুশীলনী 13.1

1 নম্বৰৰপৰা 22 নম্বৰলৈ সীমাবোৰৰ মান উলিওৱাঁ।

1. $\lim_{x\to 3}(x+3)$
2. $\lim_{x\to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$
3. $\lim_{r\to 1}\pi r^2$
4. $\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$
5. $\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$
7. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$
10. $\lim_{z\to 1}\frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$
11. $\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}, a+b+c\neq 0$
12. $\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$
14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx},\ a,b\neq 0$
15. $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi(\pi-x)}$
16. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\pi-x}$
17. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{ax + x\cos x}{b\sin x}$

19. $\lim_{x\to 0} x\sec x$

20. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} a,b,a+b\neq 0$

21. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x)$

22. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$

23. $\lim_{x\to 0} f(x)$ আৰু $\lim_{x\to 1} f(x)$ উলিওৱাঁ যদি $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq 0\\ 3(x+1), & x>0\end{cases}$

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$ উলিওৱাঁ যদি $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 1\\ -x^2-1, & x>1\end{cases}$

25. $\lim_{x\to 0} f(x)$ উলিওৱাঁ যদি $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

26. $\lim_{x\to 0} f(x)$ উলিওৱাঁ যদি $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

27. $\lim_{x\to 5} f(x)$ উলিওৱাঁ যদি $f(x)=|x|-5$

28. ধৰা হল $f(x)=\begin{cases}a+bx, & x<1\\ 4, & x=1\\ b-ax, & x>1\end{cases}$

আৰু $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$. a আৰু bৰ সম্ভাব্য মান কি কি?

29. ধৰা হ'ল $a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,a_n$ স্থিৰ বাস্তৱ সংখ্যা। এটা ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots..(x-a_n)$. $\lim_{x\to a_1} f(x)$ কি? $a\neq a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ ৰ বাবে $\lim_{x\to a} f(x)$ উলিওৱাঁ।

30. $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$, a ৰ কি মানৰ বাবে $\lim_{x\to a} f(x)$ স্থিত হয়?

31. যদি $f(x)$ ফলনে $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\pi$ সিদ্ধ কৰে, $\lim_{x\to 1} f(x)$ উলিওৱাঁ।

32. যদি $f(x)=\begin{cases}mx^2+n, & x<0\\ nx+m, & 0\leq x\leq 1\\ nx^3+m, & x>1\end{cases}$. m আৰু n অৰ কি অখণ্ড মানৰ বাবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ আৰু $\lim_{x\to 1} f(x)$ স্থিত হয়?

13.5 অৱকলজ (Derivatives)

13.2 অনুচ্ছেদত আমি দেখিছোঁ যে বিভিন্ন সময়ৰ অন্তৰালত বস্তু এটাৰ অৱস্থান জনাৰ পাছত কি হাৰত বস্তুটোৰ অৱস্থান সলনি হয়, তাক জনা সম্ভৱ। বিভিন্ন ব্যাৱহাৰিক ক্ষেত্ৰতো এনেধৰণৰ পদ্ধতি অৱলম্বন কৰা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে এটা আশয় (reservoir) আছে। বিভিন্ন সময়ৰ অন্তৰালত পানীৰ গভীৰতা জনাৰ পাছত কেতিয়া পানী উপচি পৰিব সেয়া জনাৰ প্ৰয়োজন হয়। ৰকেট-বিজ্ঞানীসকলে বিভিন্ন সময়ত ৰকেটটোৰ উচ্চতা জনাৰ পাছত কি বেগত ৰকেটটোৰপৰা উপগ্ৰহটো নিক্ষেপ কৰিব লাগিব, সেয়া জনাৰ প্ৰয়োজন হৈ পৰে। অৰ্থনৈতিক প্ৰতিষ্ঠানসমূহে এটা বিশেষ ষ্টকৰ বৰ্তমান মূল্য জনাৰ পাছত কি হাৰত ষ্টকৰ পৰিৱৰ্তন হ'ব পাৰে, সেয়া জনাৰ প্ৰয়োজন হৈ পৰে। এইবোৰ ক্ষেত্ৰত আৰু আন বহুতো ক্ষেত্ৰতে এটা প্ৰাচল সাপেক্ষে আন এটা প্ৰাচল কি হাৰত পৰিৱৰ্তিত হয়, সেয়া জনাৰ প্ৰয়োজন হয়। ইয়াৰ মূল কথাটো হ'ল আদিক্ষেত্ৰৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত ফলন এটাৰ অৱকলজ।

সংজ্ঞা 1 ধৰা হ'ল f এটা বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞাৰ আদিক্ষেত্ৰত a এটা বিন্দু। a বিন্দুত f অৰ অৱকলজৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

যদিহে সীমাটো স্থিত হয়। a বিন্দুত $f(x)$ অৰ অৱকলজক $f'(a)$ ৰে বুজোৱা হয়।

মন কৰিব লগীয়া যে $f'(a)$ এ a বিন্দুত x সাপেক্ষে $f(x)$ অৰ পৰিৱৰ্তন বুজায়।

উদাহৰণ 5 $f(x) = 3x$ ফলনৰ $x = 2$ বিন্দুত অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

$x = 2$ ত $3x$ অৰ অৱকলজ হ'ল 3

উদাহৰণ 6 $f(x) = 2x^2+3x-5$ ফলনৰ $x = -1$ বিন্দুত অৱকলজ উলিওৱাঁ। আকৌ প্ৰমাণ কৰাঁ যে $f'(0)+3f'(-1)=0$.

সমাধান প্ৰথমতে আমি $x=-1$ আৰু $x=0$ বিন্দুত $f(x)$ অৰ অৱকলজ উলিয়াওঁ।

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-1) = 2(0)-1 = -1$$

আৰু $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2(0+h)^2 + 3(0+h) - 5\right] - \left[2(0)^2 + 3(0) - 5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h+3) = 2(0) + 3 = 3$$

স্পষ্টতঃ $f'(0) + 3f'(-1) = 0$

মন্তব্য এইখিনিতে উনুকিয়াই থোৱা ভাল হ'ব যে অৱকলজ নিৰ্ণয়ৰ ক্ষেত্ৰত সীমাৰ বিধিৰ সঘন প্ৰয়োগ হয়। তলৰ উদাহৰণৰপৰা সেই কথা স্পষ্ট হ'ব।

উদাহৰণ 7 $x = 0$ বিন্দুত $\sin x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল $f(x) = \sin x$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

উদাহৰণ 8 $x = 0$ আৰু $x = 3$ বিন্দুত $f(x) = 3$ ৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

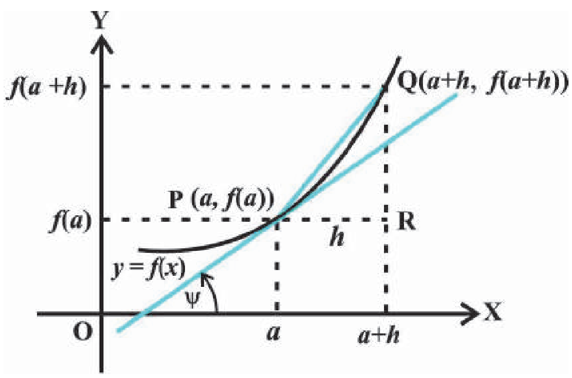
সমাধান যিহেতু অৱকলজে ফলনৰ পৰিৱৰ্তন জোখে, সহজাত জ্ঞানৰপৰা এইটো দেখদেখকৈ ওলাই পৰে যে প্ৰত্যেক বিন্দুত এটা ধ্ৰুৱক ফলনৰ অৱকলজ শূন্য। তলৰ গণনাৰপৰা কথাটো স্পষ্ট হৈ পৰে।

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

সেইদৰে

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

এতিয়া আমি ফলন এটাৰ এটা বিন্দুত অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা দিবলৈ চেষ্টা কৰিম। ধৰা হ'ল $y = f(x)$ এটা ফলন আৰু ফলনটোৰ লেখত $P = (a, f(a))$ আৰু $Q = (a+h, f(a+h))$ দুটা অতি ওচৰাউচৰি বিন্দু। চিত্ৰ13.11 অৰপৰা কথাটো স্পষ্ট হৈ পৰিব।



চিত্ৰ 13.11

আমি জানো যে $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

PQR ত্ৰিভুজৰপৰা আমি দেখিলোঁ যে আমি সীমা উলিওৱাঁ অনুপাতটো tan(QPR) অৰ সমান আৰু ই PQ জ্যাৰ প্ৰৱণতা। যেতিয়া সীমা h, 0 ৰ ওচৰ চাপে; তেতিয়া Q, P ৰ ওচৰ চাপে আৰু আমি পাওঁ যে

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{Q\to P}\frac{QR}{PR}$$

ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱেই যে PQ জ্যা, $y=f(x)$ বক্ৰৰ p বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ ওচৰ চাপে। গতিকে সীমা, স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতাৰ সমান। অৰ্থাৎ

$$f'(a)=\tan\psi.$$

এটা প্ৰদত্ত ফলন f অৰ বাবে আমি প্ৰতিটো বিন্দুত অৱকলজ উলিয়াব পাৰোঁ। যদি প্ৰতিটো বিন্দুত অৱকলজ থাকে, এটা নতুন ফলন সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হয় আৰু ইয়াক f অৰ অৱকলজ বোলে। এতিয়া আমি অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিওঁ।

সংজ্ঞা 2 ধৰা হ'ল f এটা বাস্তৱ মান বিশিষ্ট ফলন।

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ অৰদ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ ফলনটোক x অত f অৰ অৱকলজ বোলে, যদিহে সীমাটো স্থিত হয়। ইয়াক $f'(x)$ এৰে বুজোৱা হয়। অৱকলজৰ এই সংজ্ঞাক অৱকলজৰ প্ৰথম নিয়মো (first principle of derivative) বোলে। অৰ্থাৎ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

স্পষ্টতঃ $f'(x)$ অৰ সংজ্ঞাৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল য'ত উপৰিউক্ত সীমাটো বৰ্তে। এটা ফলনৰ অৱকলজৰ বাবে বিভিন্ন ধৰণৰ চিন আছে। কেতিয়াবা $f'(x)$ অক $\frac{d}{dx}[f(x)]$ এৰে বুজোৱা হয়, বা যদি $y=f(x)$, ইয়াক $\frac{dy}{dx}$ এৰে বুজোৱা হয়। ইয়াক $f(x)$ বা yৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ বুলি কোৱা হয়। ইয়াক $D[f(x)]$ এৰেও বুজোৱা হয়। আকৌ, $x=a$ ত f অৰ অৱকলজক $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_a$ বা $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ বা আনকি $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ ৰেও বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ 9 $f(x)=10x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10h}{h}=\lim_{h\to 0}(10)=10$$

উদাহৰণ 10 $f(x)=x^2$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

উদাহৰণ 11 এটা স্থিৰ বাস্তৱ সংখ্যা a ৰ বাবে $f(x) = a$ ধ্ৰুৱক ফলনৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \qquad h \neq 0$$

উদাহৰণ 12 $f(x) = \frac{1}{x}$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 ***ফলনৰ অৱকলজৰ বীজগণিত (Algebra of derivative of functions)*** যিহেতু অৱকলজৰ সংজ্ঞাত সীমাৰ ধাৰণা জড়িত হৈ আছে, গতিকে অৱকলজৰ বিধিবোৰ সীমাৰ বিধিৰ লেখীয়াই হ'ব যেন লাগে। এই বিধিবোৰ তলত এটা উপপাদ্য হিচাপে দাঙি ধৰা হ'ল।

উপপাদ্য 5 ধৰা হ'ল f আৰু g দুটা ফলন আৰু সিহঁতৰ অৱকলজ এটা উমৈহতীয়া আদিক্ষেত্ৰত সংজ্ঞাৱদ্ধ। তেনেহ'লে

(i) দুটা ফলনৰ যোগফলৰ অৱকলজ, ফলন দুটাৰ অৱকলজৰ যোগফলৰ সমান।

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

(ii) দুটা ফলনৰ অন্তৰৰ অৱকলজ, ফলন দুটাৰ অৱকলজৰ অন্তৰৰ সমান।

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

(iii) দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজ তলৰ **পূৰণৰ বিধিটোৰপৰা** (product rule) পোৱা যায়।

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).\frac{d}{dx} g(x) + g(x).\frac{d}{dx} f(x)$$

(iv) দুটা ফলনৰ ভাগফলৰ অৱকলজ তলৰ **ভাগফল বিধিটোৰপৰা** (quotient rule) পোৱা যায় (যেতিয়া হৰ অশূন্য)।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right].g(x)-f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{(g(x))^2}$$

সীমাৰ একে ধৰণৰ উপপাদ্যৰপৰা এইবোৰৰ প্ৰমাণ কৰিব পাৰি। আমি ইয়াত এইবোৰ প্ৰমাণ নকৰোঁ। সীমাৰ দৰে এই উপপাদ্যৰ সহায়ত বিশেষ ধৰণৰ ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াব পাৰি। উপপাদ্যটোৰ শেহৰ উক্তি দুটা তলত দিয়া ধৰণেও লিখিব পাৰি। মনত ৰখাত সহজ হয়।

ধৰা হ'ল $u=f(x)$ অৰু $v=g(x)$. গতিকে

$$(uv)'=u'v+uv'$$

ইয়াক পূৰণৰ বিধি বা ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজ উলিওৱা লাইবনিৎজৰ বিধি (Leibnitz rule) বোলে। সেইদৰে ভাগফলৰ বিধি হ'ল

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

এতিয়া আমি কিছুমান প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াম।

$f(x)=x$ ফলনৰ অৱকলজ হ'ল ধ্ৰুৱক ফলন 1. অনায়াসে এইটো উলিয়াব পাৰি, কিয়নো

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}1=1$$

$f(x)=10x=x+.......+x$ (দহটা পদ) অৰ অৱকলজ উলিয়াবলৈ আমি এইটো আৰু উপৰিউক্ত উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰিম। ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ (i) অৰ পৰা

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(x+........+x)\ (\text{দহটা পদ})$$

$$=\frac{d}{dx}x+......+\frac{d}{dx}x\ (\text{দহটা পদ})$$

$$=1+..........+1\ (\text{দহটা পদ})=10.$$

উনুকিয়াই থব পাৰি যে পূৰণৰ বিধিৰ সহায়তো এই সীমাটো উলিয়াব পাৰি। $f(x)=10x=uv$ হিচাপে লিখিব পাৰি। ইয়াত u হ'ল ধ্ৰুৱক ফলন আৰু ইয়াৰ মান সদায় 10 আৰু $v(x)=x$. ইয়াত $f(x)=10x=uv$. আমি জানো যে u ৰ অৱকলজ 0 আৰু $v(x)=x$ অৰ অৱকলজ 1. গতিকে পূৰণৰ বিধিৰপৰা আমি পালোঁ

$$f'(x)=(10x)'=(uv)'=u'v+uv'=0.x+10.1=10.$$

একে ধৰণে $f(x)=x^2$ অৰ অৱকলজো উলিয়াব পাৰি। $f(x)=x^2=x.x$ আৰু সেয়ে

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(x.x)=\frac{d}{dx}(x).x+x.\frac{d}{dx}(x)$$
$$=1.x+x.1=2x$$

সাধাৰণভাৱে, আমি তলৰ উপপাদ্যটো পাওঁ।

উপপাদ্য 6 যি কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে $f(x)=x^n$ অৰ অৱকলজ nx^{n-1}.

প্ৰমাণ অৱকলজ ফলনৰ সংজ্ঞানুযায়ী আমি পালোঁ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

দ্বিপদ উপপাদ্যৰপৰা $(x+h)^n=({}^nC_0)x^n+({}^nC_1)x^{n-1}h+.......+({}^nC_n)h^n$ আৰু $(x+h)^n-x^n=h\left(nx^{n-1}+.......+h^{n-1}\right)$. গতিকে

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+.......+h^{n-1})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+.....+h^{n-1}\right)=nx^{n-1}$$

বিকল্পভাৱে, আমি পূৰণবিধি আৰু আৰোহ-তত্ত্বৰ সহায়তো উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ। $n=1$ অৰ বাবে ফলটো সত্য। ইতিমধ্যে এইটো প্ৰমাণিত হৈছে। আমি পাইছোঁ

$$\frac{d}{dx}(x^n)=\frac{d}{dx}\left(x.x^{n-1}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right)+x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right)\text{(পূৰণ বিধিৰ সহায়ত)}$$

$$=1.x^{n-1}+x.\left((n-1)x^{n-2}\right)\text{(আগমনিক প্ৰকল্পৰ সহায়ত)}$$

$$=x^{n-1}+(n-1)x^{n-1}=nx^{n-1}$$

মন্তব্য ওপৰৰ উপপাদ্যটো n অৰ সকলো ঘাতৰ বাবে সত্য অৰ্থাৎ n যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হ'ব পাৰে (অৱশ্যে আমি এইটো ইয়াত প্ৰমাণ নকৰোঁ)।

13.5.2 বহুপদ আৰু ত্ৰিকোণমিতীয় ফলনৰ অৱকলজ (*Derivative of polynomials and trigonometric functions*)

আমি তলৰ উপপাদ্যটোৰে আৰম্ভ কৰিম। ইয়াৰপৰা এটা বহুপদ ফলনৰ অৱকলজ পোৱা যাব।

উপপাদ্য 7 ধৰা হ'ল $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+........+a_1x+a_0$ এটা বহুপদ ফলন, য'ত a_i বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a_n\neq 0$. তেনেহ'লে অৱকলজ ফলনটো

$$\frac{df(x)}{dx}=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+........+2a_2x+a_1$$

উপপাদ্য 5 অৰ অংশ (i) আৰু উপপাদ 6 খটুৱাই এই উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 13 $6x^{100}-x^{55}+x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান ওপৰৰ উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি ওপৰৰ ফলনটোৰ অৱকলজ $600x^{99}-55x^{54}+1$ পোৱা গ'ল।

উদাহৰণ 14 $f(x)=1+x+x^2+x^3+......+x^{50}$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান উপপাদ্য 6 প্ৰয়োগ কৰি ওপৰৰ ফলনটোৰ অৱকলজ $1+2x+3x^2+......+50x^{49}$ পোৱা গ'ল। $x=1$ অত এই ফলনটোৰ মান হ'ল

$$1+2(1)+3(1)^2+......+50(1)^{49} = 1+2+3+.....+50=\frac{(50)(51)}{2}=1275$$

উদাহৰণ 15 $f(x)=\frac{x+1}{x}$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান স্পষ্টতঃ এই ফলনটো $x=0$ ৰ বাহিৰে সকলোতে সংজ্ঞাৱদ্ধ। আমি হৰণ বিধিটো প্ৰয়োগ কৰিম। ইয়াত $u=x+1$ আৰু $v=x$. গতিকে $u'=1$ আৰু $v'=1$. গতিকে

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1(x)-(x+1)1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

উদাহৰণ 16 $\sin x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল $f(x)=\sin x$. গতিকে

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$ ($\sin A-\sin B$ ৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি)

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.1=\cos x$$

উদাহৰণ 17 $\tan x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল $f(x)=\tan x$. গতিকে

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$ ($\sin(A-B)$ ৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sinh}{h} . \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 . \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

উদাহৰণ 18 $f(x) = \sin^2 x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান লাইবনিৎজৰ পূৰণ বিধিৰ সহায়ত আমি এইটোৰ মান উলিয়াম।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$
$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$
$$= (\cos x) \sin x + \sin x (\cos x)$$
$$= 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

অনুশীলনী 13.2

1. $x^2 - 2$ ৰ $x = 10$ অত অৱকলজ উলিওৱাঁ।
2. $99x$ অৰ $x = 100$ অত অৱকলজ উলিওৱাঁ।
3. x অৰ $x = 1$ অত অৱকলজ উলিওৱাঁ।
4. প্ৰথম নিয়মৰপৰা তলৰ ফলনবোৰৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + ... + \frac{x^2}{2} + x + 1$ ফলনৰ বাবে প্ৰমাণ কৰাঁ যে

   $f'(1) = 100 f'(0)$

6. স্থিৰ বাস্তৱ সংখ্যা a ৰ বাবে $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$ ৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।
7. a আৰু b ধ্ৰুৱকৰ বাবে

   (i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2 + b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$ ৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

8. ধ্ৰুৱক a ৰ বাবে $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ ৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।
9. অৱকলজ উলিওৱাঁ

   (i) $2x - \frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

   (iii) $x^{-3}(5 + 3x)$ (iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$

(v) $x^{-4}(3-4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

10. প্ৰথম নিয়মৰপৰা $\cos x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

11. তলৰ ফলনবোৰৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 19 প্ৰথম নিয়মৰপৰা f অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ। f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

(i) $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

সমাধান (i) মন কৰিব লগীয়া যে $x=2$ ৰ বাবে ফলনটো সংজ্ঞাৰদ্ধ নহয়। কিন্তু আমি পালোঁ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2}-\frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-7}{(x-2)(x+h-2)}=-\frac{7}{(x-2)^2}$$

আকৌ, মন কৰিব লগীয়া যে f' ফলনটোৱো $x=2$ ৰ বাবে সংজ্ঞাৰদ্ধ নহয়।

(ii) ফলনটো $x=0$ ৰ বাবে সংজ্ঞাৰদ্ধ নহয়। কিন্তু, আমি পালোঁ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-(x+\frac{1}{x})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h(1-\frac{1}{x(x+h)})\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

আকৌ, মন কৰিব লগীয়া যে f' ফলনটোৰো $x=0$ ৰ বাবে সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 20 প্ৰথম নিয়মৰপৰা $f(x)$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ, য'ত $f(x)$ হ'ল

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

সমাধান (i) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\frac{\cos h-1}{h}$$

$$= \cos x - \sin x$$

(ii) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cosh -1)}{h}+\lim_{h\to 0}x\cos x\frac{\sinh}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cosh +\sin h\cos x)$$

$$= x\cos x + \sin x$$

উদাহৰণ 21 (i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান (i) আমি জানো যে $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'\right]$$
$$= 2\left[(\cos x)\cos x + \sin x(-\sin x)\right]$$
$$= 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

(ii) সংজ্ঞাৰপৰা, $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. ফলনটো য'ত সংজ্ঞাৱদ্ধ তাত আমি ভাগফল বিধি প্ৰয়োগ কৰোঁ।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$
$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$
$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

বিকল্পভাৱে, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ অৰপৰা এই অৱকলজটো উলিয়াব পাৰি। উদাহৰণ 17 অত আমি পাইছোঁ যে $\tan x$ অৰ অৱকলজ $\sec^2 x$ আৰু আমি জানো যে ধ্ৰুৱক ফলনৰ অৱকলজ 0. এয়া আমি ব্যৱহাৰ কৰিম।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$
$$= \frac{(1)'(\tan x) - (1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$
$$= \frac{(0)(\tan x) - (\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$
$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

উদাহৰণ 22 (i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$ অৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

সমাধান (i) ধৰা হ'ল $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$. এই ফলনটো য'ত সংজ্ঞাৱদ্ধ তাত আমি ভাগফল বিধি খটুৱাম।

$$h'(x) = \frac{\left(x^5 - \cos x\right)' \sin x - \left(x^5 - \cos x\right)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(ii) $\frac{x + \cos x}{\tan x}$ ফলনটো য'ত সংজ্ঞাবদ্ধ তাত আমি ভাগফল বিধি খটুৱাম।

$$h'(x) = \frac{(x + \cos x)' \tan x - (x + \cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \sin x)\tan x - (x + \cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

ত্ৰয়োদশ অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. প্ৰথম নিয়মৰপৰা তলৰ ফলনবোৰৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ।

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

তলৰ ফলনবোৰৰ অৱকলজ উলিওৱাঁ (মনত ৰাখিব লাগিব যে a, b, c, d, p, q, r আৰু s স্থিৰ অশূন্য ধ্ৰুৱক আৰু m আৰু n অখণ্ড সংখ্যা)

2. $(x + a)$
3. $(px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$
4. $(ax + b)(cx + d)^2$
5. $\frac{ax + b}{cx + d}$
6. $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$
7. $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$
8. $\frac{ax + b}{px^2 + qx + r}$
9. $\frac{px^2 + qx + r}{ax + b}$
10. $\frac{a}{x^4} - \frac{b}{x^2} + \cos x$
11. $4\sqrt{x} - 2$
12. $(ax + b)^n$
13. $(ax + b)^n (cx + d)^m$
14. $\sin(x + a)$
15. $\operatorname{cosec} x \cot x$
16. $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$
17. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
18. $\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$
19. $\sin^n x$
20. $\frac{a + b\sin x}{c + d\cos x}$
21. $\frac{\sin(x + a)}{\cos x}$
22. $x^4(5\sin x - 3\cos x)$
23. $(x^2 + 1)\cos x$
24. $(ax^2 + \sin x)(p + q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ 26. $\dfrac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$ 27. $\dfrac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\dfrac{x}{1+\tan x}$ 29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$ 30. $\dfrac{x}{\sin^n x}$

সাৰাংশ

- এটা বিন্দুৰ বাওঁফালৰ বিন্দুবোৰৰদ্বাৰা নির্দেশিত ফলন এটাৰ প্রত্যাশিত মানক সেই বিন্দুত ফলনটোৰ বাওঁহতীয়া সীমা বুলি কোৱা হয়। তেনেদৰে সোঁহতীয়া সীমা উলিয়াব পাৰি।
- যদি বাওঁহতীয়া আৰু সোঁহতীয়া সীমা একে হয়, তেনেহ'লে উমৈহতীয়া মানটোক সেই বিন্দুত ফলনটোৰ সীমা বুলি কোৱা হয়।
- এটা ফলন f আৰু বাস্তৱ সংখ্যা a ৰ বাবে, $\lim_{x\to a} f(x)$ আৰু $f(a)$ একে নহ'বও পাৰে (প্রকৃতার্থত এটা সংজ্ঞাবদ্ধ হ'ব পাৰে আৰু আনটো নহ'ব পাৰে।)
- f আৰু g ফলনৰ বাবে অধোলিখিতবোৰ প্রযোজ্যঃ

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad \left[\lim_{x\to a} g(x) \neq o\right]$$

- কেইটামান প্রামাণিক সীমা হ'ল

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

- a ত f ফলনৰ অৱকলজৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- যি কোনো বিন্দু x অত f ফলনৰ অৱকলজৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- u আৰু v ফলনৰ বাবে অধোলিখিতবোৰ প্ৰযোজ্য

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$ যদিহে সকলোবোৰ সংজ্ঞাবদ্ধ হয়।

- কেইটামান প্ৰামাণিক অৱকলজ হ'ল

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ঐতিহাসিক টোকা

গণিতৰ ইতিহাসত কলনগণিত আৱিষ্কাৰৰ কৃতিত্ব যুটীয়াভাৱে দুজন কৃতিপ্ৰদ গণিতজ্ঞ আইজাক নিউটন (Issac Newton, 1642-1727) আৰু জি ডব্লিউ লাইবনিৎজক (G W Leibnitz, 1646-1717) দিয়া হয়। সপ্তদশ শতিকাত দুয়ো স্বতন্ত্ৰভাৱে কলনগণিত আৱিষ্কাৰ কৰে। কলনগণিতৰ উদ্ভাৱনৰ পিছত বহু গণিতজ্ঞই ক্ৰমবিকাশৰ বাবে অৰিহণা যোগায়। প্ৰধানকৈ বিখ্যাত গণিতজ্ঞ এ এল কছি (A. L. Cauchy), জে এল লাগ্ৰাঞ্জ (J.L. Lagrange) আৰু কাৰ্ল ৱেৰষ্ট্ৰাছে (Karl Weierstrass) পৰিশুদ্ধ ধাৰণা দিবলৈ চেষ্টা কৰে। এতিয়া আমি যেনেধৰণে পাঠ্যপুথিত পাওঁ, কলনগণিতৰ তেনে ধাৰণাৰ প্ৰৱৰ্তন কৰে কছিয়ে। এটা ফলনৰ অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিবলৈ গৈ কছিয়ে দ্য আলেম্বাৰ্টৰ সীমাৰ ধাৰণা ব্যৱহাৰ কৰে। কছিয়ে সীমাৰ সংজ্ঞাৰে আৰম্ভ কৰে আৰু উদাহৰণ দিয়ে, যেনে $\alpha = 0$ ৰ বাবে $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ৰ সীমা। তেওঁ $\frac{\Delta y}{dx} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ আৰু $i \to 0$ ৰ বাবে সীমাটোক " function derive'e, y' for $f'(x)$ " বুলি কয়।

1900 চনৰ আগলৈকে ভবা হৈছিল যে কলন গণিত শিকোৱাটো অতি কষ্টসাধ্য। গতিকে চেমনীয়াৰ বাবে কলনগণিত আয়ত্তৰ বাহিৰত আছিল। জন পেৰি (John Perry) আৰু ইংলণ্ডৰ কেইজনমানে ক'বলৈ আৰম্ভ কৰে যে কলন গণিতৰ আৱশ্যকীয় ধাৰণা আৰু পদ্ধতিবোৰ সৰল, আনকি স্কুলীয়া পৰ্য্যায়তে শিকাব পৰা যায়। এফ এল গ্ৰিফিনে (F.L Griffin) প্ৰথম বাৰ্ষিকৰ বিদ্যাৰ্থীসকলক কলনগণিত শিকোৱাৰ ক্ষেত্ৰত বাটকটীয়াৰ ভূমিকা লয়। সেই সময়ত এই কাম দুঃসাহসিক বুলি ভবা হৈছিল।

আজি অকল গণিতেই নহয়, আন বহুতো বিষয়ে যেনে পদাৰ্থবিজ্ঞান, ৰসায়নবিজ্ঞান, অৰ্থ-বিজ্ঞান আৰু জীৱবিজ্ঞানে কলনগণিতৰ লুফল ভোগ কৰি আছে।

— ❖ —