ಅಧ್ಯಾಯ – 7

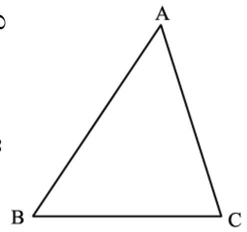
ತ್ರಿಭುಜಗಳು

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿವಿಧ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಮೂರು ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಆವೃತ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ ('ತ್ರಿ' ಎಂದರೆ ಮೂರು). ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು, ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ΔABC ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, Δ ABC ಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.1 ಗಮನಿಸಿ) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು AB, BC, CA, ಮೂರು ಕೋನಗಳು $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ಮತ್ತು A, B, C ಮೂರು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6 ರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೂ ಸಹ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ, ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿಯಮಗಳು, ತ್ರಿಭುಜದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಬಹುತೇಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈಗಾಗಲೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಈಗ ಕೆಲವನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 7.1

7.2 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆ

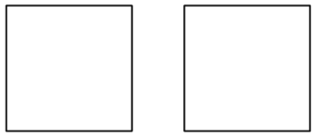
ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿರುವ ನಿಮ್ಮ ಭಾವಚಿತ್ರದ ಎರಡು ಪ್ರತಿಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರುವಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯಿರುವ ಎರಡೂ ಬಳೆಗಳು, ಒಂದೇ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ನೀಡಿರುವ ಎರಡು ATM ಕಾರ್ಡ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದೇ ಇಸವಿಯಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಣವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಒಂದು ರೂ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟಾಗ ಎರಡೂ ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈ ರೀತಿಯಾದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ? ಅವುಗಳನ್ನು ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಸರ್ವಸಮ ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧದಲ್ಲೂ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಅಥವಾ ಆಕೃತಿ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಸಮವಾಗಿರುವುದು ಎಂದರ್ಥ).

ಈಗ ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ಅಂತಹ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನಾವು ಸರ್ವಸಮ ವೃತ್ತಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದೇ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.2 ಗಮನಿಸಿ). ಅಥವಾ ಸಮಬಾಹುವಿರುವ ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ವರ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ಅದೇ ರೀತಿ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ

ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.



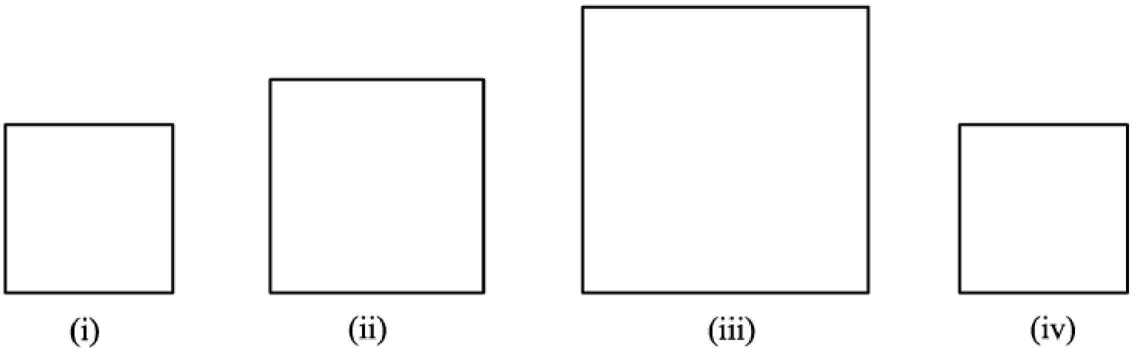
ಚಿತ್ರ 7.2

ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಏಕೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವೆವು ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸಬಹುದು. ರೆಫ್ರಿಜರೇಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಐಸ್‌ಕ್ಯೂಬ್‌ಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಬಳಸುವ ತಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ನೀವೆಲ್ಲಾ ನೋಡಿರಬಹುದು. ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚುಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ತಟ್ಟೆಯ ಲ್ಲಿರುವ ಅಚ್ಚುಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಾದ ತಗ್ಗುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ (ಆಯತಾಕಾರ ಅಥವಾ ವೃತ್ತಾಕಾರ ಅಥವಾ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರವಾಗಿರಬಹುದು). ಆದುದರಿಂದ ತದ್ರೂಪಿ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ನೀವು ಬಳಸುವ ಪೆನ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಹಳೆಯ ರೀಫಿಲ್(ಟ್ಯೂಬ್) ತೆಗೆದು ಹೊಸ ರೀಫಿಲ್ ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಹಳೆಯ ರೀಫಿಲ್‌ನ ಅಳತೆಯಷ್ಟೇ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ನೀವು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಕಷ್ಟಪಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ರೀಫಿಲ್‌ಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿ ಮತ್ತು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಹೊಸ ರೀಫಿಲ್ ಪೆನ್‌ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಸರ್ವಸಮತೆ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದಾದ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಬಹಳಷ್ಟು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಯೋಚಿಸುವಿರಾ? ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 7.3(i) ರ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳು ಯಾವುವು?



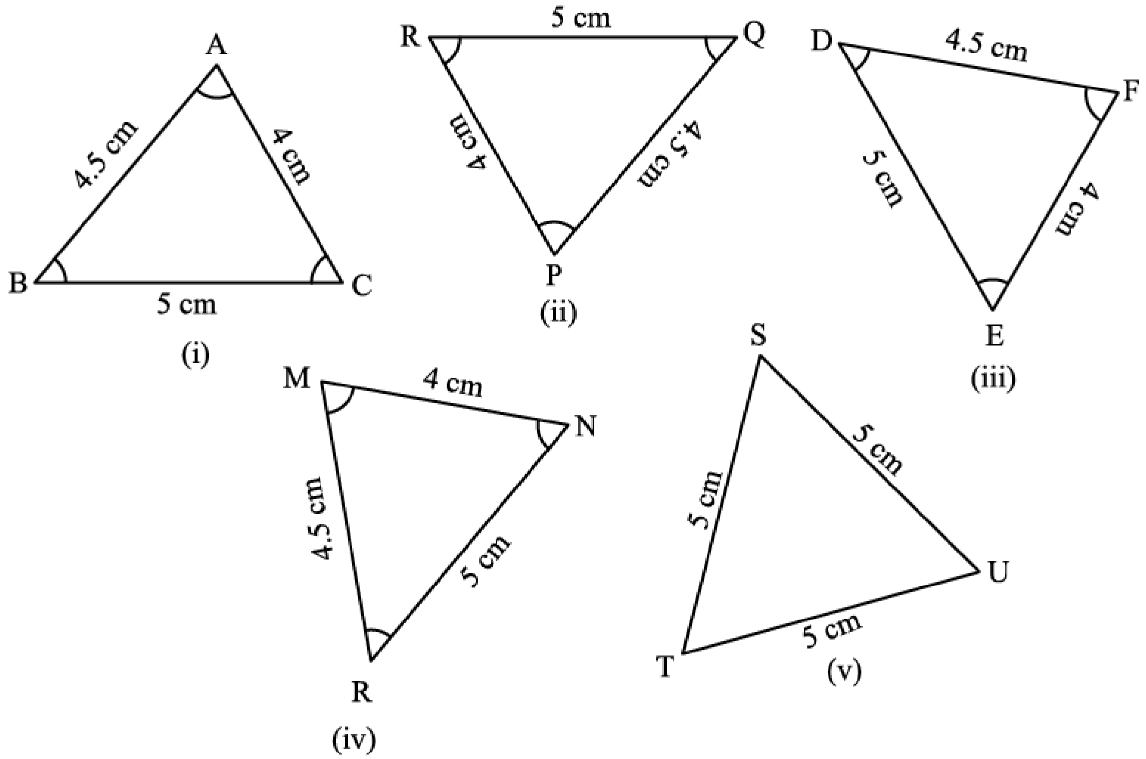
ಚಿತ್ರ 7.3

ಚಿತ್ರ 7.3 (ii) ಮತ್ತು (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ವರ್ಗಗಳು ಚಿತ್ರ 7.3 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 7.3 (iv) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗವು ಚಿತ್ರ 7.3 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಈಗಾಗಲೇ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತ್ರಿಭುಜವು ಚಿತ್ರ 7.4 (i) ರಲ್ಲಿರುವ ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದೆ?



ಚಿತ್ರ 7.4

ಚಿತ್ರ 7.4 ರಲ್ಲಿರುವ (ii) ರಿಂದ (v) ರ ವರೆಗಿನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ. ಆ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ΔABC ಮೇಲೆ ಐಕ್ಯವಾಗಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ಚಿತ್ರ 7.4 ರ (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ರ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 7.4 (v) ರ Δ TSU, Δ ABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ΔPQR, ΔABC ಗೆ ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ನಾವು ΔPQR ≅ ΔABC ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ΔPQR ≅ ΔABC ಆದಾಗ, ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ΔABC ಯ ಸಮವಾದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಂದರೆ PQ ಜೊತೆ AB, QR ಜೊತೆ BC ಮತ್ತು CA ಜೊತೆ RP ಹಾಗೂ ∠P ಜೊತೆ ∠A, ∠Q ಜೊತೆ ∠B ಮತ್ತು ∠R ಜೊತೆ ∠C ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಅನುರೂಪತೆ ಇದೆ. ಅದು P ಯಿಂದ A, Q ಯಿಂದ B, R ಯಿಂದ C ಹಾಗೆಯೇ ಮುಂದುವರೆಯುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

P ↔ A, Q ↔ B, R ↔ C

ಈ ರೀತಿಯ ಅನುರೂಪತೆಯಲ್ಲಿ, ΔPQR ≅ ΔABC ಆಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ΔQRP ≅ ΔABC ಎಂದು ಬರೆದರೆ ತ ಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇರೀತಿ ಚಿತ್ರ 7.4 (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ

FD ↔ AB, DE ↔ BC, EF ↔ CA

ಮತ್ತು F ↔ A, D ↔ B, ಮತ್ತು E ↔ C

ಅಂದರೆ ΔFDE ≅ ΔABC. ಆದರೆ ΔDEF ≅ ΔABC ಎಂದು ಬರೆದರೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ.

ΔABC ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 7.4 (iv) ರ ತ್ರಿಭುಜದ ನಡುವಿನ ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

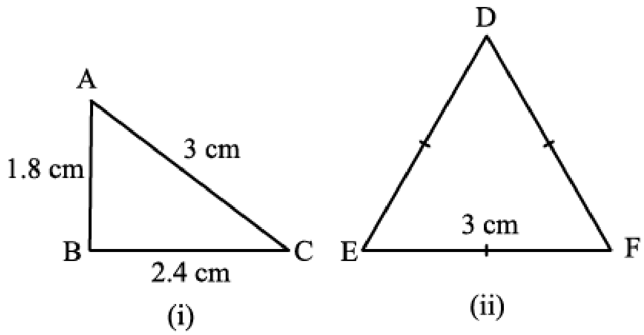
ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲು ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಮವಿರುವ ಬಾಗಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ 'ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ' ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಎಂದು ಅರ್ಥ.

7.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಿಬಂಧನೆಗಳು:

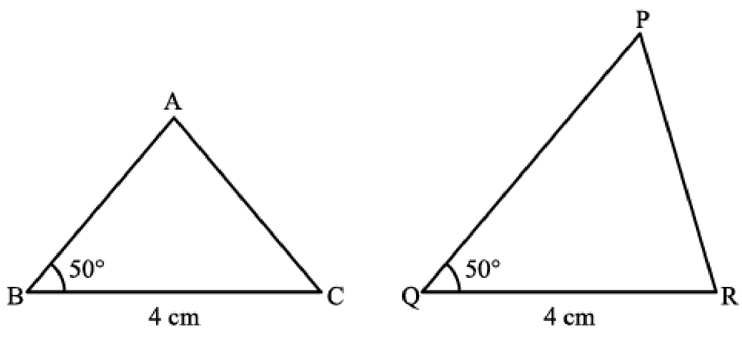
ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಾಲ್ಕು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 3cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.5 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.5

ಈಗ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ 50° ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.6 ನೋಡಿ). ಅವು ಸರ್ವಸಮವೇ?



ಚಿತ್ರ 7.6

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಸಹ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

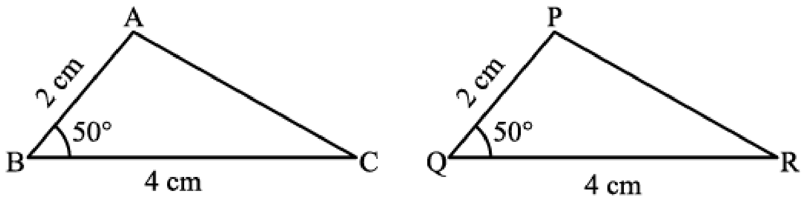
ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಮ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾದಾಗ ಏನಾಗಬಹುದು?

ಚಿತ್ರ 7.7 ರಲ್ಲಿ BC = QR, ∠B =∠Q ಹಾಗೂ AB = PQ ಆಗಿದೆ. ಈಗ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೀವು ಏನು ಹೇಳುವಿರಿ?

ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 7.7 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗೆ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಬೇರೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಸಮತೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನ ಸಮವಿರುವುದು, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದೇ? ಹೌದು, ಇದು ಸಾಕು.



ಚಿತ್ರ 7.7

ಇದೇ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೊದಲನೇ ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ.

ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ 7.1 : ಬಾಹು, ಕೋನ, ಬಾಹು(ಬಾ ಕೋ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ.

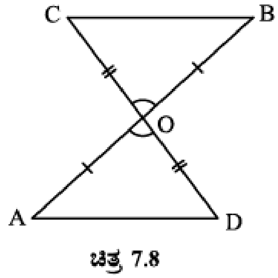
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಆಧಾರ ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಯಂತೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. (ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಚಿತ್ರ 7.8 ರಲ್ಲಿ OA = OB ಮತ್ತು OD = OC.

(i) ΔAOD ≅ ΔBOC ಮತ್ತು (ii) AD || BC ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.8

ಪರಿಹಾರ: (i) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು (ದತ್ತ)

ಹಾಗೆಯೇ ∠AOD ಮತ್ತು ∠BOC ಗಳು ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಗಳು.

ಆದುದರಿಂದ ∠AOD = ∠BOC

ΔAOD ≅ ΔBOC (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

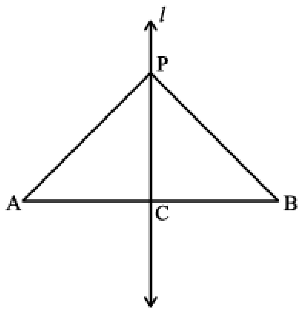
(ii) ΔAOD ಮತ್ತು ΔBOC ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಬೇರೆ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle$OAD = $\angle$OBC. ಇವು AD ಮತ್ತು BC ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, AD || BC

ಉದಾಹರಣೆ 2 : AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ರೇಖೆ l ಅದರ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದು l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಾಗ, P ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: l ರೇಖೆಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. ಇದು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಅ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.9 ಗಮನಿಸಿ). PA = PB ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬೇಕು. Δ PCA ಮತ್ತು Δ PCB ಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.9

AC = BC (C ಯು AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

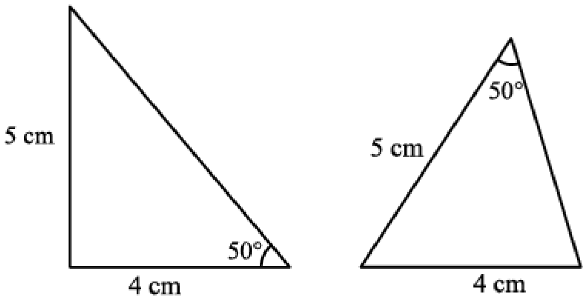
$\angle$PCA = $\angle$PCB = 90° (ದತ್ತ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ ΔPCA ≅ ΔPCB (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

ಹಾಗೇಯೇ PA = PB, ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು.

ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು 5cm ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು 50° ಇರುವಂತೆ ನಾವು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ರಚಿಸುವಾಗ 50° ಕೋನವು ಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವೆ ಬರದಂತೆ ರಚಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 7.10 ಗಮನಿಸಿ). ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ?



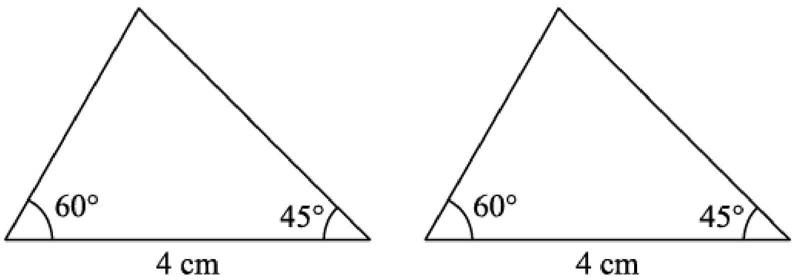
ಚಿತ್ರ 7.10

ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಬಹುಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಕೋನಗಳು ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿಯಮ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಹೊರತು ಕೋ ಬಾ ಬಾ ಅಥವಾ ಬಾ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮವಲ್ಲ.

ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ 60° ಮತ್ತು 45° ಹಾಗೂ ಈ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 4cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.11 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.11

ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಎರಡು ಸಮ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಾಹು ಸಮವಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಕೋನ, ಬಾಹು, ಕೋನ ನಿಬಂಧನೆಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಬಂಧನೆ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ ಆದರೆ ನಾವು ಈಗ ಇದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.1: (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ

ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: Δ ABC ಮತ್ತು Δ DEF ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

ಮತ್ತು BC = EF

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮೂರು ಪ್ರಕರಣಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಕರಣ (೧) AB = DE ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.12 ಗಮನಿಸಿ)

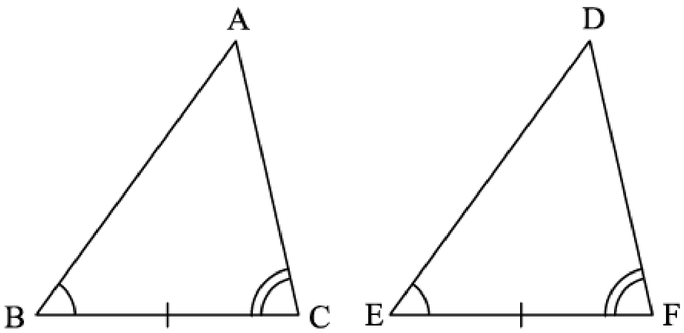
ಈಗ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ? ನೀವು ಈ ಮುಂದಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

AB = DE (ಊಹಿಸಿರುವುದು)

$\angle B = \angle E$ (ದತ್ತ)

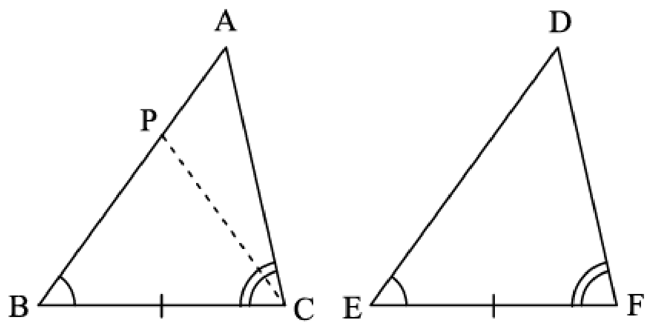
BC = EF (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ನಿಯಮ)



ಚಿತ್ರ 7.12

ಪ್ರಕರಣ (ii): ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ AB > DE ಆಗಿರಲಿ. ಆದುದರಿಂದ PB = DE ಆಗುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ Δ PBC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 7.13 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.13

Δ PBC ಮತ್ತು Δ DEF ಗಳಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

PB = DE (ರಚನೆಯಿಂದ)

∠ B = ∠ E (ದತ್ತ)

BC = EF (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ Δ PBC ≅ Δ DEF ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು, ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳು ಸಮ.

ಆದುದರಿಂದ ∠ PCB = ∠ DFE

ಆದರೆ ∠ ACB = ∠ DFE (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ ∠ ACB = ∠ PCB

ಇದು ಸಾಧ್ಯವೇ ?

P ಯು A ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯ.

ಅಥವಾ BA = ED

ಆದುದರಿಂದ Δ ABC ≅ Δ DEF (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ)

ಪ್ರಕರಣ (iii): AB < DE ಆದರೆ ME = AB ಆಗುವಂತೆ DE ಯ ಮೇಲೆ M ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಪ್ರಕರಣ (ii) ರಲ್ಲಿದ್ದಂತೆ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. AB = DE ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ΔABC ≅ ΔDEF.

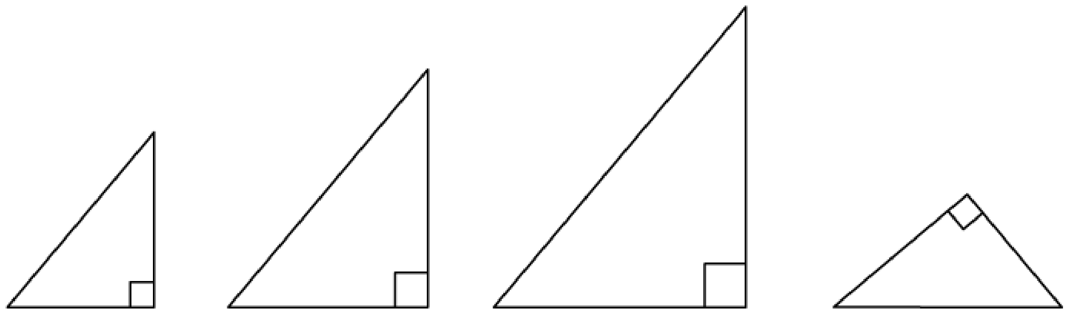
ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಬಾಹುವು ಅನುರೂಪ ಸಮಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು ಆಗಿರದಂತೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಏಕೆ ಎಂದು ಕಾರಣ ನೀಡುವಿರಾ?

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180^{o} ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಜೊತೆ ಕೋನಗಳೂ ಸಹ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (180° – ಸಮಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಜೊತೆ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಕೋನ, ಕೋನ, ಬಾಹು (ಕೋ ಕೋ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಕೋನಗಳು, 40°, 50° ಮತ್ತು 90° ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು? ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುವಂತೆ ಬಹಳಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ನೀವು ರಚಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 7.14 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.14

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಆಗದಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹು ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಈಗ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 3 : AB ರೇಖಾಖಂಡವು CD ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.15 ಗಮನಿಸಿ).

(i) Δ AOB $\cong$ Δ DOC (ii) BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವೂ ಸಹ 'O' ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

(i) Δ AOB ಮತ್ತು Δ DOC ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$\angle$ ABO = $\angle$ DCO (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು, ಕಾರಣ AB || CD ಮತ್ತು BC ಛೇದಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ)

$\angle$ AOB = $\angle$ DOC (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

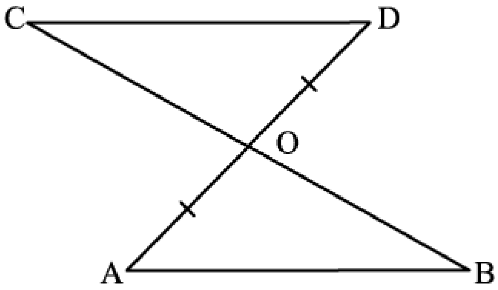
OA = OD (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ Δ AOB $\cong$ Δ DOC

(ಕೋ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

(ii) OB = OC (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

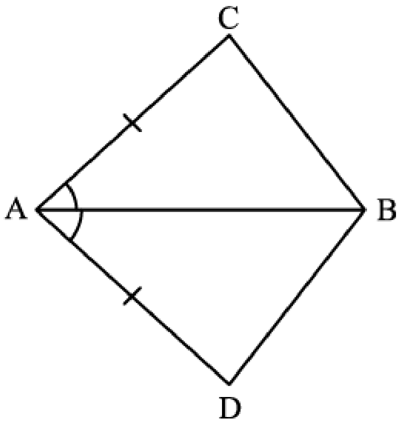
ಆದುದರಿಂದ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'O' ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.15

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

(1) ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AC = AD ಮತ್ತು AB ಯು ∠A ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.16 ಗಮನಿಸಿ). ΔABC ≅ ΔABD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. BC ಮತ್ತು BD ಗಳಿಗೆ ಸಂಭಂದಿಸಿದಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?



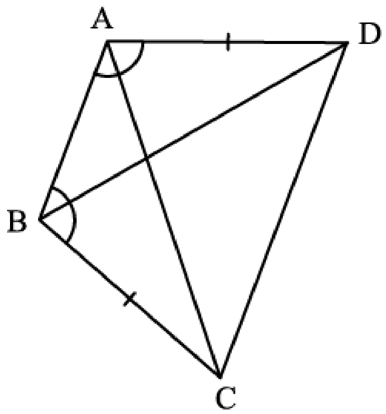
ಚಿತ್ರ 7.16

(2) ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ. AD = BC ಮತ್ತು ∠DBA=∠CBA ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.17 ಗಮನಿಸಿ).

(1) Δ ABD ≅ Δ BAC

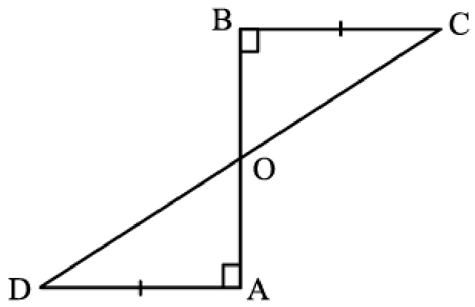
(2) BD = AC

(3) ∠ABD = ∠BAC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



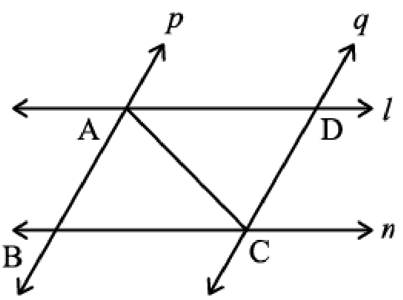
ಚಿತ್ರ 7.17

(3) AD ಮತ್ತು BC ಗಳು AB ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸಮ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.18 ಗಮನಿಸಿ). CD ಯು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.18

(4) ಟ ಮತ್ತು m ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು. ಈ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾದ p ಮತ್ತು q ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.19 ಗಮನಿಸಿ) ಹಾಗಾದರೆ ΔABC ≅ ΔCDA ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

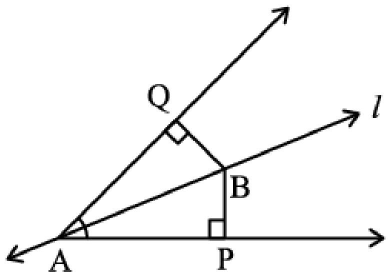


ಚಿತ್ರ 7.19

(5) ∠A ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ ಟ ಆಗಿದೆ. B ಯು ಟ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ. BP ಮತ್ತು BQ ಗಳು B ಯಿಂದ ∠A ನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.20 ಗಮನಿಸಿ).

(i) Δ APB ≅ Δ AQB

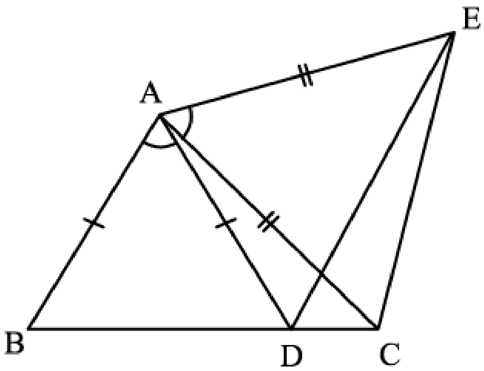
(ii) BP = BQ ಅಥವಾ B ಯು ∠A ನ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.20

(6) ಚಿತ್ರ 7.21 ರಲ್ಲಿ AC = AE, AB = AD ಮತ್ತು

∠BAD = ∠EAC ಆದರೆ BC = DE ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



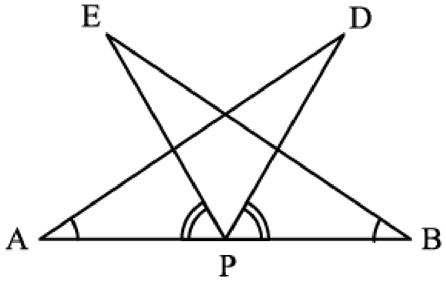
ಚಿತ್ರ 7.21

(7) AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು P ಅದರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. ∠BAD = ∠ABE ಮತ್ತು

∠EPA = ∠DPB ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳು AB ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.22 ಗಮನಿಸಿ).

(i) ΔDAP ≅ ΔEBP

(ii) AD = BE ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.22

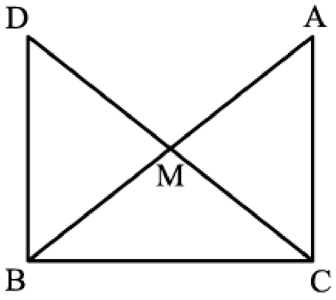
(8) ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ∠C ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. ವಿಕರ್ಣ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ. C ನ್ನು M ಗೆ ಸೇರಿಸಿ DM = CM ಆಗುವಂತೆ D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. D ಮತ್ತು B ಸೇರಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.23 ಗಮನಿಸಿ).

(i) ΔAMC ≅ ΔBMD

(ii) ∠DBC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ

(iii) ΔDBC ≅ ΔACB

(iv) CM = $\frac{1}{2}$ AB ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

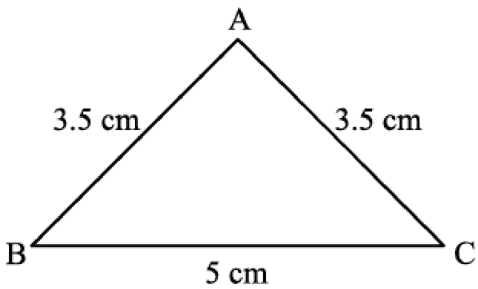


ಚಿತ್ರ 7.23

7.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳು

ಮೇಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಎರಡು ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ



ಚಿತ್ರ 7.24

ಎರಡು ಸಮಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 3.5cm ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5cm ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.24 ಗಮನಿಸಿ). ಈ ರೀತಿಯ ರಚನೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

ಇಂತಹ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಏನೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆಂದು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಾ?

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆದುದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 7.24 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಇಲ್ಲಿ AB = AC ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ∠B ಮತ್ತು ∠C ಅಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ ?

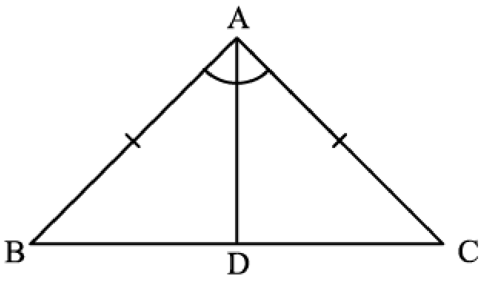
ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆಯಿರುವ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

ಅಂತಹ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮ

ನಿಸುವಿರಿ. ಇದು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಹಾಗೂ ಯಾವುದೇ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7.2 : ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ಅನೇಕ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.25

ಸಾಧನೆ : ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಇದರಲ್ಲಿ AB = AC ಆಗಿದೆ.

$\angle B = \angle C$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯೋಣ. ಅದು BC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಚಿತ್ರ 7.25 ಗಮನಿಸಿ).

ΔBAD ಮತ್ತು ΔCAD ಗಳಲ್ಲಿ

AB = AC (ದತ್ತ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (ರಚನೆಯಿಂದ)

AD = AD (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

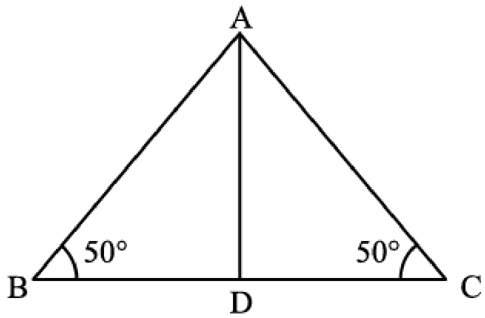
ಆದುದರಿಂದ $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

ಹಾಗಾಗಿ $\angle ABD = \angle CAD$ (ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $\angle B = \angle C$

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯೇ? ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಕೋನಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದೇ?

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ.



ಚಿತ್ರ 7.26

BC ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯಿದ್ದು ∠B = ∠C = 50^{0} ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ರಚಿಸಿ. ∠A ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಎಳೆಯಿರಿ ಅದು BC ಯನ್ನು D ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ
(ಚಿತ್ರ 7.26 ಗಮನಿಸಿ). Δ ABC ಯನ್ನು ಹಾಳೆಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಶೃಂಗ C ಯು ಶೃಂಗ B ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ AD ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಮಡಚಿ.

AC ಮತ್ತು AB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕುರಿತಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? AC ಯು AB ಯೊಂದಿಗೆ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ AC = AB

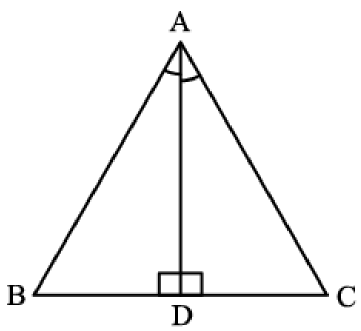
ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶವು ನಮಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.3: ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 7.2 ರ ವಿಲೋಮ

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಕೋ ಬಾ ಕೋ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AD ಯು ∠A ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ಮತ್ತು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.27 ಗಮನಿಸಿ). ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು
AB = AC ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.27

ಪರಿಹಾರ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACD ಗಳಲ್ಲಿ

∠BAD = ∠CAD (ದತ್ತ)

AD = AD (ಸಾಮಾನ್ಯಬಾಹು)

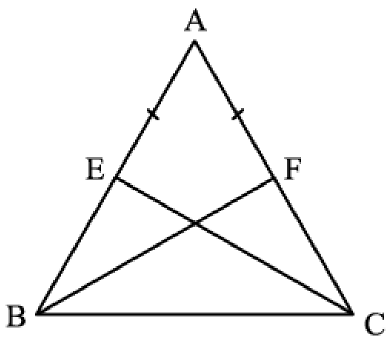
∠ADB = ∠ADC = 90^{o} (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ ΔABD ≅ ΔACD (ಕೋ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ)

AB = AC (ಸ. ತ್ರಿ. ಅ. ಭಾ.)

ಅಥವಾ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ΔABC ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು AC ಸಮಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.28 ಗಮನಿಸಿ). BF = CE ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 7.28

ಪರಿಹಾರ : Δ ABF ಮತ್ತು Δ ACE ಗಳಲ್ಲಿ

AB = AC (ದತ್ತ)

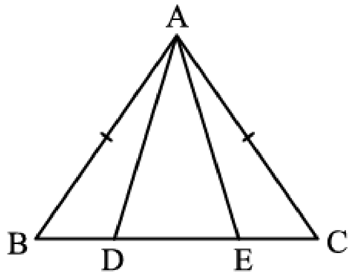
∠A = ∠A (ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನ)

AF = AE (ಸಮಬಾಹುಗಳ ಅರ್ಧಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ ΔABF ≅ ΔACE (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

BF = CE (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)

ಉದಾಹರಣೆ 6 : ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC. BC ಯ ಮೇಲೆ BE = CD ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.29 ನೋಡಿ). AD = AE ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.29

¥Àj°ÁgÀ : Δ ABD ಮತ್ತು Δ ACE ಗಳಲ್ಲಿ

AB = AC (ದತ್ತ) .... (1)

∠B = ∠C (ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು) .... (2)

ಹಾಗೂ BE = CD

ಆದುದರಿಂದ, BE – DE = CD – DE

ಅಂದರೆ BD = CE .... (3)

ಆದುದರಿಂದ, ΔABD ≅ ΔACE

((1), (2), (3) ಮತ್ತು ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ)

AD = AE (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)

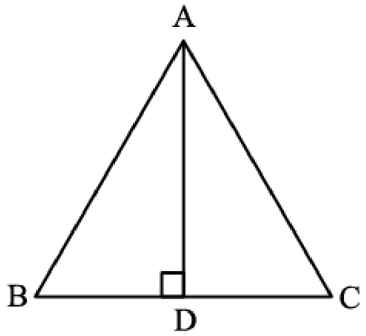
ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

(1) ABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB = AC. ∠B ಮತ್ತು ∠C ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ 'O' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. A ಮತ್ತು O ಸೇರಿಸಿ.

(i) OB = OC

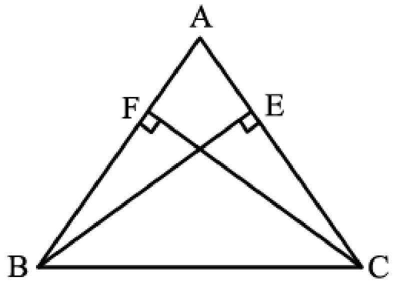
(ii) ∠A ನ್ನು AO ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

(2) ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವು AD ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.30 ಗಮನಿಸಿ). AB = AC ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



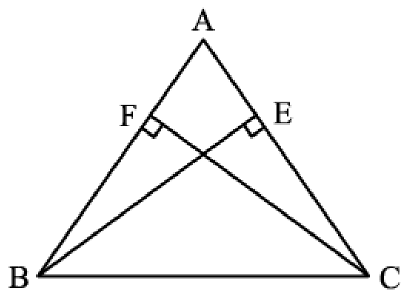
ಚಿತ್ರ 7.30

(3) ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. ಸಮಬಾಹುಗಳಾದ AC ಮತ್ತು AB ಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ BE ಮತ್ತು CF ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.31 ಗಮನಿಸಿ). ಈ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.31

(4) ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AC ಮತ್ತು AB ಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BE ಮತ್ತು BF ಆಗಿದ್ದು ಅವು ಸಮವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.32 ಗಮನಿಸಿ).

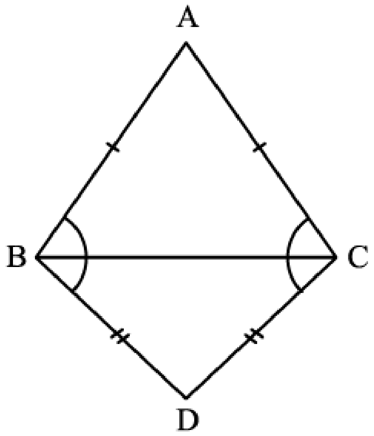


ಚಿತ್ರ 7.32

(i) ΔABE ≅ ΔACF

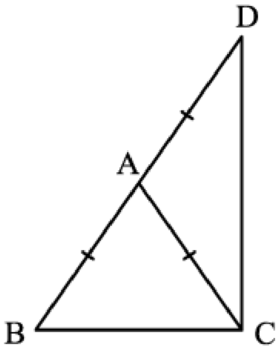
(ii) AB = AC ಅಂದರೆ ΔABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5) ABC ಮತ್ತು DBC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.33 ಗಮನಿಸಿ)
$\angle$ABD =$\angle$ACD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.33

(6) Δ ABC ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ. AB = AC ಆಗಿದೆ. AD = AB ಆಗುವಂತೆ BA ಯನ್ನು D ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.34 ಗಮನಿಸಿ). $\angle$BCD ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.34

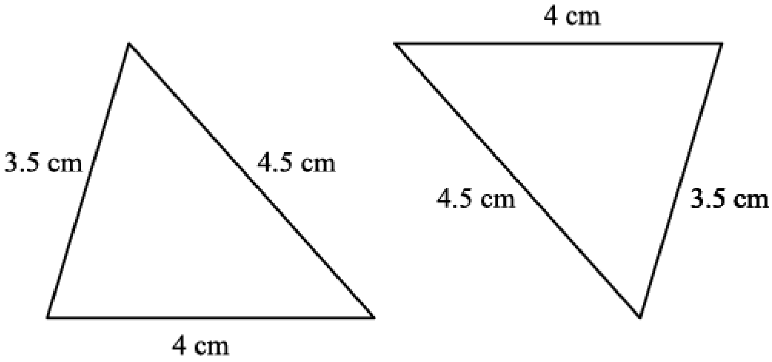
(7) ABC ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. $\angle A = 90^{O}$ ಮತ್ತು AB = AC. ಆದರೆ $\angle$B ಮತ್ತು $\angle$C ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 60^{O} ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7.5 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಬಂಧನೆಗಳು

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎಂದರೆ ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಈಗಾಗಲೇ ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ ಇದು ಸತ್ಯ.

ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ 4cm, 3.5cm ಮತ್ತು 4.5cm ಇರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ? ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಇಟ್ಟರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ (ಮುಚ್ಚುತ್ತವೆ) ಆದುದರಿಂದ ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 7.35

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ನಮಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಯಮ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

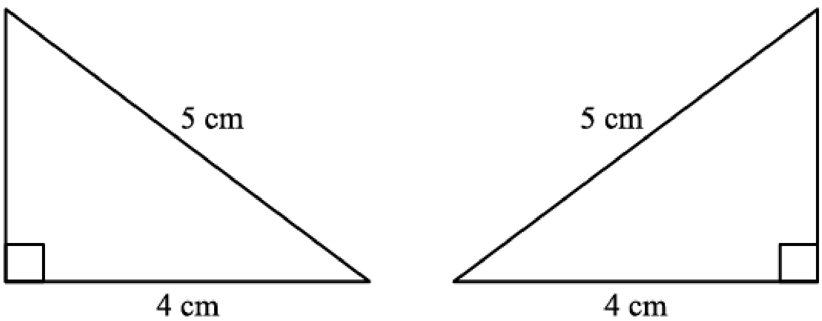
ಪ್ರಮೇಯ 7.4 : ಬಾಹು, ಬಾಹು, ಬಾಹು (ಬಾ ಬಾ ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ : ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಒಂದು ಸೂಕ್ತ ರಚನೆ ಬಳಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅನುರೂಪ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗುತ್ತವೆ ಇಲ್ಲವಾದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರ.

ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ :

ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದ 5cm ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಉದ್ದ 4cm ಇರುವಂತೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.36 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.36

ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಸಮಬಾಹುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಇಡಿ. ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಎರಡೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ. ಬೇರೆ ಜೊತೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ವಿಕರ್ಣ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಇದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದ್ದೀರ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋ

ನವು ಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಬರುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.5 : ಲಂಬಕೋನ, ಕರ್ಣ, ಬಾಹು (ಲಂ. ಕ. ಬಾ) ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ: ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದರ ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ: ಲಂ. ಕ. ಬಾ ಎಂದರೆ ಲಂಬಕೋನ, ಕರ್ಣ, ಬಾಹು ಎಂದರ್ಥ. ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

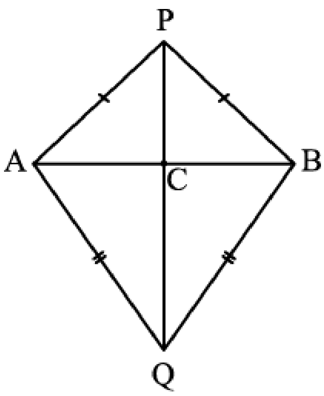
ಉದಾಹರಣೆ 7: AB ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ. AB ಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.37 ಗಮನಿಸಿ). PQ ವು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : PA = PB ಮತ್ತು QA = QB ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.

PQ $\perp$ AB ಮತ್ತು PQ ವು AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

PQ ವು AB ಯನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಇರಬಹುದೇ? ಯೋಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.37

Δ PAQ ಮತ್ತು Δ PBQ ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

AQ = BQ (ದತ್ತ)

PQ = PQ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ, Δ PAQ $\cong$ Δ PBQ (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ನಿಯಮ)

$\angle$APQ = $\angle$BPQ (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಈಗ Δ PAC ಮತ್ತು Δ PBC ಗಳಲ್ಲಿ

AP = BP (ದತ್ತ)

$\angle$APC = $\angle$BPC ($\angle$APQ = $\angle$BPQ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿದೆ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

ಆದುದರಿಂದ Δ PAC $\cong$ Δ PBC (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ನಿಯಮ)

AC = BC (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ) .... (1)

ಮತ್ತು $\angle$ACP = $\angle$BCP (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಹಾಗೂ $\angle ACP + \angle BCP = 180^{o}$ (ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳು)

ಆದುದರಿಂದ $2\angle ACP = 180^{o}$

$\angle ACP = 90^{o}$ .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ PQ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.

AP = BP (ದತ್ತ)

PC = PC (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

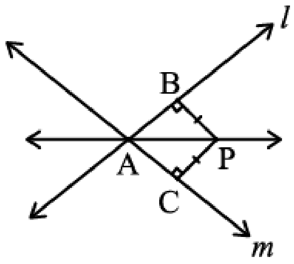
$\angle$PAC = $\angle$PBC (ΔAPB ಯಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಹೀಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ΔPAQ ಮತ್ತು ΔPBQ ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸದೇ ΔPAC $\cong$ ΔPBC ಎಂದು ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದಂತೆ ಸಾಧಿಸಿದರೆ ಬಾ ಬಾ ಕೋ ನಿಯಮ ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ ಸತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದಲ್ಲದೇ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಜೋಡಿಯ ನಡುವೆ ಕೋನವು ಸಹ ಇಲ್ಲ.

ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಉದಾಹರಣೆ 8 : P ಬಿಂದುವು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಟ ಮತ್ತು ಟ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿದೆ (ಚಿತ್ರ 7.38 ಗಮನಿಸಿ). AP ಯು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಟ ಮತ್ತು ಟ ರೇಖೆಗಳು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ ಎಂದು ನೀಡಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.38

PB ⊥ ಟ, PC ⊥ ಟ ಆಗಿರಲಿ.

PB = PC (ದತ್ತ)

∠PAB = ∠PAC ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

Δ PAB ಮತ್ತು Δ PAC ಗಳಲ್ಲಿ

PB = PC (ದತ್ತ)

∠PBA = ∠PCA = 90^{o} (ದತ್ತ)

PA = PA (ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)

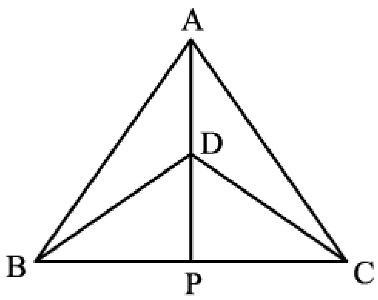
ಆದುದರಿಂದ Δ PAB ≅ Δ PAC (ಲಂ.ಕ.ಬಾ ನಿಯಮ)

∠PAB = ∠PAC (ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಭಾ)

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಅಭ್ಯಾಸ 7.1 ಪ್ರಶ್ನೆ 5 ರ ಸಾಧಿಸಿದ ಫಲಿತಾಂಶದ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲೆ Δ ABC ಮತ್ತು
Δ DBC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ನಿಂತಿವೆ. A ಮತ್ತು D ಶೃಂಗಗಳು BC ಯ ಒಂದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.39 ಗಮನಿಸಿ). AD ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಅದು BC ಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.39

(i) ΔABD ≅ ΔACD

(ii) ΔABP ≅ ΔACP

(iii) ∠A ಮತ್ತು ∠D ನ್ನು AP ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ

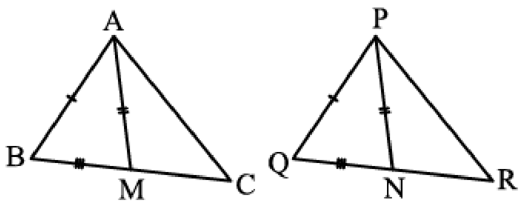
(iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕ AP ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. AB=AC ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AD ಯು ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ.

(i) BC ಯನ್ನು AD ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ

(ii) ∠A ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ AD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. Δ ABC ಯ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AM ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ Δ PQR ನ PQ ಮತ್ತು QR ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ PN ಗೆ ಸಮವಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.40 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.40

(i) Δ ABM ≅ Δ PQN

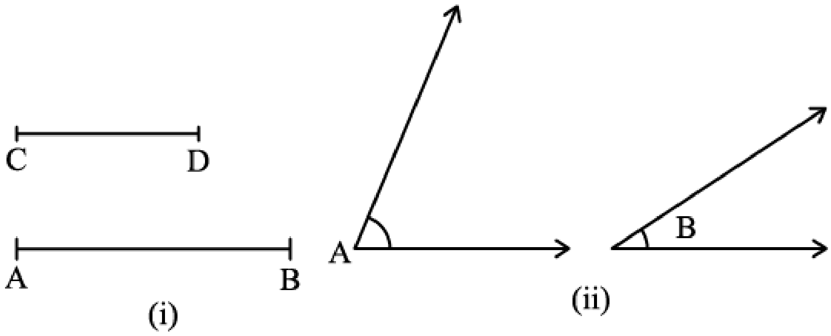
(ii) Δ ABC ≅ Δ PQR ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. BE ಮತ್ತು CF ಗಳು ΔABC ಯ ಸಮ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿವೆ. ಲಂ.ಕ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ ಬಳಸಿ ABC ಒಂದು ಸಮ ದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC, ∠B = ∠C ಎಂದು ತೋರಿಸಲು AP ⊥ BC ಎಳೆಯಿರಿ.

7.6 ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅಸಮಾನತೆ

ಈವರೆಗೂ ನೀವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿನ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮತೆ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಿರಿ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ನಾವು ಅಸಮವಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಿತ್ರ 7.41 (i) ರಲ್ಲಿರುವ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, AB ರೇಖಾಖಂಡವು ಹೆಚ್ಚು ಉದ್ದವಿದೆ. ಇದೇರೀತಿ ಚಿತ್ರ 7.41 (ii) ರಲ್ಲಿ∠B ಗಿಂತ ∠A ದೊಡ್ಡದು.

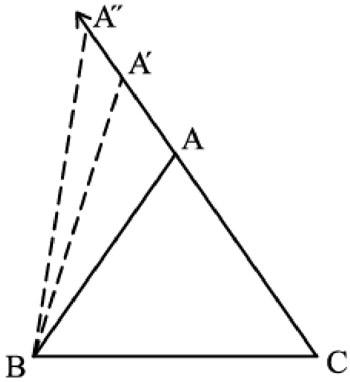


ಚಿತ್ರ 7.41

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅಸಮಬಾಹುಗಳ ನಡುವೆ ಮತ್ತು ಅಸಮಕೋನಗಳ ನಡುವೆ ಏನದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ:

ಒಂದು ಡ್ರಾಯಿಂಗ್ ಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಎರಡು ಗುಂಡುಸೂಜಿಗಳನ್ನು ಸಿಕ್ಕಿಸಿ. ಅವೆರಡನ್ನು ಒಂದು ದಾರದಿಂದ ಕಟ್ಟಿ. ಅದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹು BC ಆಗಿರಲಿ. ಇನ್ನೊಂದು ದಾರದ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಗೆ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಕಟ್ಟಿ. ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಬಳಸಿ ಬಿಂದು A ಗುರ್ತಿಸಿ. ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.42 ಗಮನಿಸಿ). CA ಮೇಲೆ A ಬಿಂದುವಿನ ಆಚೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು A' ನ್ನು ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಿ. (ಅದರ ಹೊಸ ಸ್ಥಾನ).



ಚಿತ್ರ 7.42

ಆದುದರಿಂದ A'C > AC (ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ)

A' ನ್ನು B ಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ A'BC ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿ. ∠A'BC ಮತ್ತು ∠ABC ಸಂಭಂದಿಸಿದಂತೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?

ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ∠A'BC >∠ABC

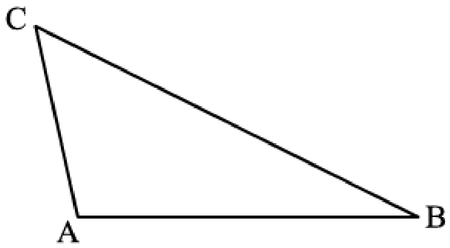
ಹೀಗೆ CA (ವೃದ್ಧಿಸಿದ) ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಿ. ಬಾಹು BC ಮತ್ತು ಗುರ್ತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ. AC ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ (A ನ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ) ಅದಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನ ಅಂದರೆ ∠B ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡೋಣ

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ಒಂದು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲವೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯುಳ್ಳ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ). ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ.

ಈಗ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?



ಚಿತ್ರ 7.43

ಚಿತ್ರ 7.43 ರಲ್ಲಿನ ΔABC ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು BC ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಬಾಹು AC ಆಗಿದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ∠A ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡದು ಮತ್ತು ∠B ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ.

ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಅಸಮಾನತೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 7.6 : ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಅಸಮವಿದ್ದಾಗ, ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಎದುರಿನ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

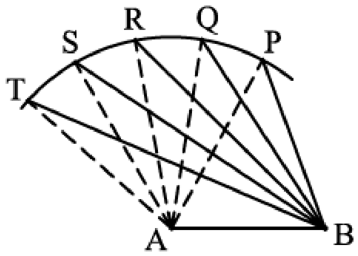
ಚಿತ್ರ 7.43 ರಲ್ಲಿ CA = CP ಆಗುವಂತೆ BC ಯ ಮೇಲೆ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೀವು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ಮತ್ತೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ :

ರೇಖಾಖಂಡ AB ಎಳೆಯಿರಿ. A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಅನುಕೂಲಕರ ತ್ರಿಜ್ಯ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P, Q, R, S, T ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅದರ ಮೇಲೆ ಗುರ್ತಿಸಿ.

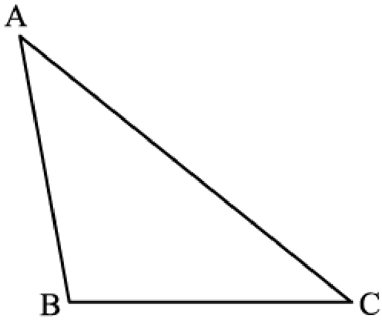
ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಯೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.44 ಗಮನಿಸಿ). ನಾವು P ಯಿಂದ T ವರೆಗೆ ಚಲಿಸಿದಲ್ಲಿ, ∠A ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ ಏನಾಗುತ್ತಿದೆ? ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವೂ ಸಹ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ∠TAB>∠SAB> ∠RAB >∠QAB >∠PAB ಮತ್ತು TB > SB > RB > QB > PB.



ಚಿತ್ರ 7.44

ಈಗ ಮೂರೂ ಭಿನ್ನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ರಚಿಸಿ. ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 7.45 ಗಮನಿಸಿ).

ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.45

ಚಿತ್ರ 7.45 ರಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ ∠B ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು AC ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಪ್ರಮೇಯ 7.6 ರ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಈ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.7 : ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವೈರುಧ್ಯತೆ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಈಗ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರಲ್ಲಿ AB + BC, BC + AC ಮತ್ತು AC + AB ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸುವಿರಿ?

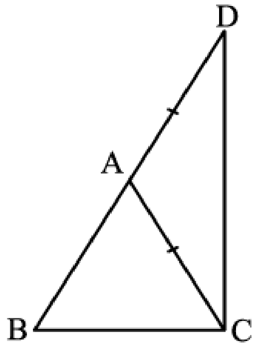
AB + BC > AC, BC + AC > AB ಮತ್ತು AC + AB > BC ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸುವಿರಿ.

ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿರಿ.

ಪ್ರಮೇಯ 7.8 : ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 7.46 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಬಾಹು BA ವನ್ನು AD=AC ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ∠BCD >∠BDC

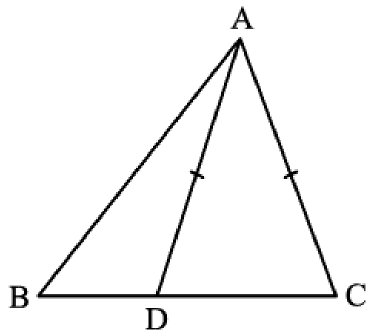
ಮತ್ತು BA + AC > BC ಎಂದು ನೀವು ತೋರಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ? ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯಡೆಗೆ ನೀವು ಬಂದಿರಾ ?



ಚಿತ್ರ 7.46

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲಿರುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : Δ ABC ಯಲ್ಲಿ AD = AC ಆಗುವಂತೆ BC ಯ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದು ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.47 ಗಮನಿಸಿ). AB > AD ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.47

ಪರಿಹಾರ: Δ DAC ಯಲ್ಲಿ

AD = AC (ದತ್ತ)

ಆದುದರಿಂದ ∠ADC = ∠ACD

(ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು)

ಈಗ Δ ABD ಗೆ ∠ADC ಯು ಬಾಹ್ಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ∠ADC > ∠ABD

ಅಥವಾ ∠ACD > ∠ABD

ಅಥವಾ ∠ACB > ∠ABC

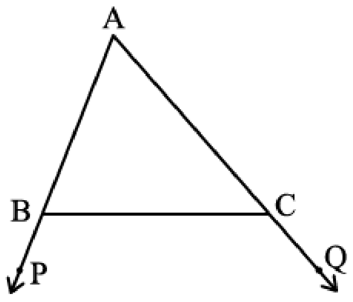
ಆದುದರಿಂದ AB > AC (Δ ABC ಯಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹು)

ಅಥವಾ AB > AD (AD = AC)

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4

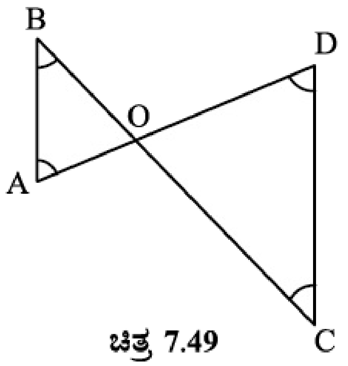
(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣವು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(2) ಚಿತ್ರ 7.48 ರಲ್ಲಿ Δ ABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ P ಮತ್ತು Q ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ∠PBC < ∠QCB ಆಗಿದೆ. AC > AB ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.48

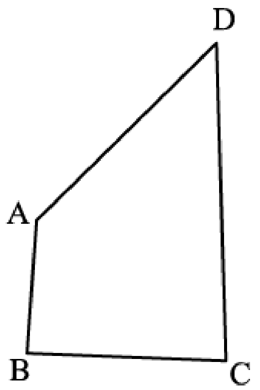
(3) ಚಿತ್ರ 7.49 ರಲ್ಲಿ ∠B < ∠A ಮತ್ತು ∠C < ∠D ಆದರೆ AD < BC ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.49

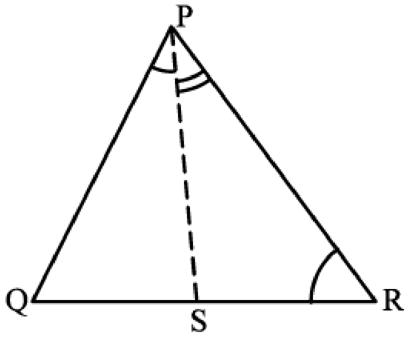
(4) ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುಗಳಾಗಿವೆ (ಚಿತ್ರ 7.50 ಗಮನಿಸಿ).

∠A > ∠C ಮತ್ತು ∠B >∠D ಎಂದು ತೋರಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 7.50

(5) ಚಿತ್ರ 7.51 ರಲ್ಲಿ PR > PQ ಮತ್ತು ∠QPR ನ್ನು PS ದ್ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ∠PSR > ∠PSQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.51

(6) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಹೊರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವೇ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

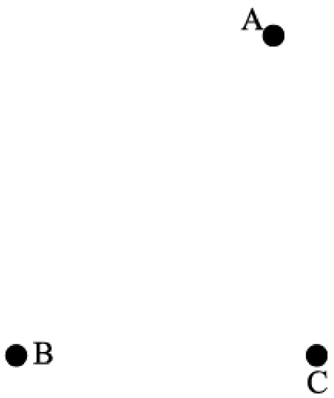
ಅಭ್ಯಾಸ 7.5 (ಐಚ್ಛಿಕ)

ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

(1) ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ. ΔABC ಯ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

(2) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಸಮದೂರವಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಳ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಿ.

(3) ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಉದ್ಯಾನವನದಲ್ಲಿ ಜನರು ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಕೃತವಾಗಿದ್ದಾರೆ (ಚಿತ್ರ 7.52 ಗಮನಿಸಿ).



ಚಿತ್ರ 7.52

A : ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಭಿನ್ನ ಇಳಿಜಾರು (ಜಾರುವ ಬಂಡೆ) ಮತ್ತು ಉಯ್ಯಾಲೆ ಇರುವ ಕಡೆ,

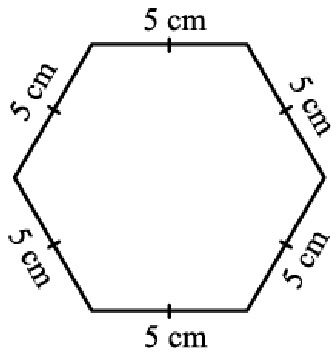
B : ಮಾನವ ನಿರ್ಮಿತ ಕೊಳ ಇರುವ ಕಡೆ,

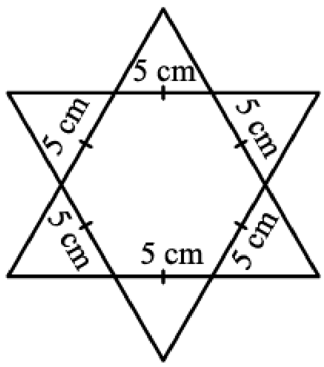
C : ಹೆಚ್ಚು ವಾಹನಗಳನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುವ ಮತ್ತು ಹೊರಗಡೆ ಹೋಗುವ ಕಡೆ.

ಹೆಚ್ಚು ಜನ ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ ಅಂಗಡಿಗೆ ಬರಲು ಅದನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ?

(ಸುಳಿವು : ಐಸ್‌ಕ್ರೀಂ ಅಂಗಡಿಯು A, B ಮತ್ತು C ಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರಬೇಕು)

(4) ಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರ ಆಕಾರದ ರಂಗೋಲಿಗಳನ್ನು (ಚಿತ್ರ 7.53 ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ನಿಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಾದ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು 1 cm ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಂದ ತುಂಬಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಣಿಸಿ. ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿವೆ ?





ಚಿತ್ರ 7.53

7.7 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

(1) ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(3) ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ವರ್ಗಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(4) A ↔ P, B ↔ Q ಮತ್ತು C ↔ R ಅನುರೂಪತೆಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ PQR ಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಅದನ್ನು Δ ABC ≅ Δ PQR ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

(5) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(6) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ ಕೋ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(7) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(8) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(9) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಸಮಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(10) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 60^0.

(11) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ ಬಾ ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(12) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಲಂ. ಕ. ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆ ನಿಯಮ)

(13) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(14) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(15) ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ.