अध्याय - 13

क्षेत्रमिति

(MENSURATION)

13.1 भूमिका

आप जानते हैं कि बन्द समतल आकृति की सीमाओं की कुल दूरी, उसका परिमाप कहलाती है और आकृति द्वारा घिरा हुआ क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल कहलाता है। हम त्रिभुज, आयत एवं वृत्त आदि समतल आकृतियों की परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं।

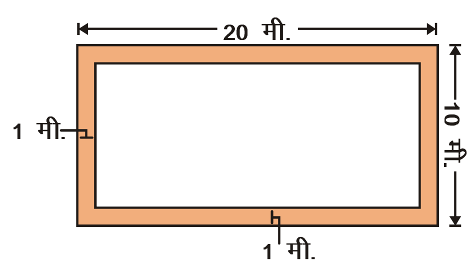
इस अध्याय में हम विभिन्न प्रकारों चतुर्भुज के क्षेत्रफल एवं परिमाप से संबंधित समस्याएँ हल करेंगे, साथ ही घन, घनाभ और बेलन जैसे ठोस के पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन के संबंध में भी जानकारी हासिल करेंगे।

आइए, इस समस्या को हल करें।

एक घर के आगे बने आयताकार बगीचे की लम्बाई 20 मीटर और चौड़ाई 10 मीटर है।

1. इस बगीचे के चारों ओर तार घेरना है। तार की लम्बाई क्या होगी? स्पष्ट है कि तार की लम्बाई ज्ञात करने के लिए हमें इस बगीचे का परिमाप निकालने की आवश्यकता होगी जो 60 मीटर है (जाँच कर पता लगाइए)
2. बगीचा कितनी भूमि में फैला है। इसकी जानकारी हासिल करने के लिए हमें उसका क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है, जो 200 वर्ग मीटर होगा (कैसे?)
3. इस बगीचे के अन्दर चारों ओर से 1 मीटर क्यारियों के लिए जगह है तो बताइए क्यारियों द्वारा बगीचे में घेरा क्षेत्रफल कितना है?

आप आरेखीय आकृति में देखते हैं कि दो आयत बने हैं। अतः क्यारियों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए बाहरी आयत के क्षेत्रफल में से भीतरी आयत के क्षेत्रफल को घटाना होगा। क्या आप बता सकते हैं कि भीतरी आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई कितनी होगी?

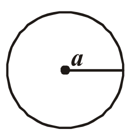
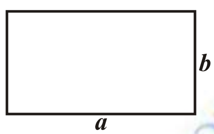
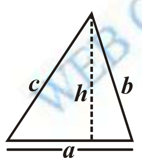
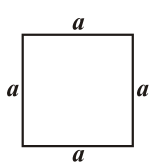
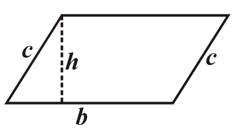


यहाँ भीतरी आयत की लम्बाई = (20 मी. – 2×1 मी.) अर्थात् (20 मी. – 2 मी.) = 18 मी.
भीतरी आयत की चौड़ाई = (10 मी. – 2×1 मी.) अर्थात् (10 मी. – 2 मी.) = 8 मी. है। (सोचिए क्यों?)

अतः रास्ते का क्षेत्रफल = बाहरी आयत का क्षेत्रफल – भीतरी आयत का क्षेत्रफल
= (20 मीटर × 10 मीटर) – (18 मीटर × 8 मीटर)

200 वर्ग मीटर– 144 वर्ग मीटर = 56 वर्ग मीटर होगा।
अतः क्यारियाँ 56 वर्ग मीटर में लगी है।

पूर्व में आप इन ज्यामितीय आकारों के बारे में पढ़ चुके हैं, इस आधार पर विभिन्न आकारों को उनके संगत क्षेत्रफलों से मिलाइए।

बन्द समतलीय आकृतियाँ	आकृति का नाम	क्षेत्रफल
	वृत्त	$\frac{1}{2}\times a\times h$ वर्ग इकाई
	आयत	$a\times a$ वर्ग इकाई
	त्रिभुज	$a\times b$ वर्ग इकाई
	वर्ग	$b\times \text{h}$ वर्ग इकाई
	समांतर चतुर्भुज	πa^2 वर्ग इकाई

– दी गई आकृतियों के लिए परिमाप का सूत्र भी लिखिए।

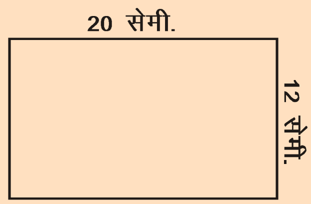
© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

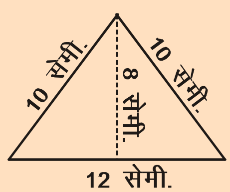
1. निम्न ज्यामितीय आकृतियों का उनके क्षेत्रफलों से मिलान कीजिए–

(a)

(i) 48 सेमी.^{2}

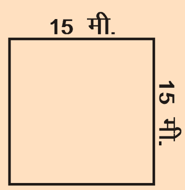
(b) 

(ii) 616 सेमी.^{2}

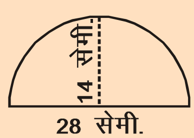
(c) 

(iii) 240 सेमी.^{2}

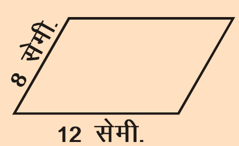
2. निम्नलिखित का मिलान उसके परिमाप से कीजिए।

(a) 

(i) 72 सेमी.

(b) 

(ii) 40 सेमी.

(c) 

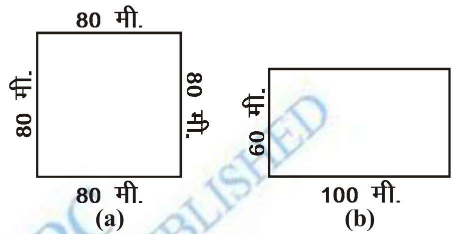
(iii) 60 सेमी.

नोटः–

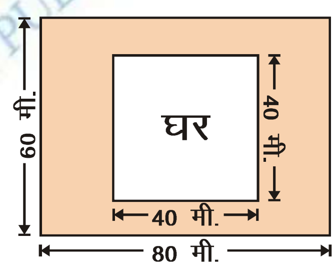
1. परिमाप/परिसीमा/परिमिति/ परिधि का अर्थ होता है घेरे की कुल लम्बाई।
2. क्षेत्रफल (Area) को A से दिखाया/दर्शाया जाता है।

प्रश्नावली – 13.1

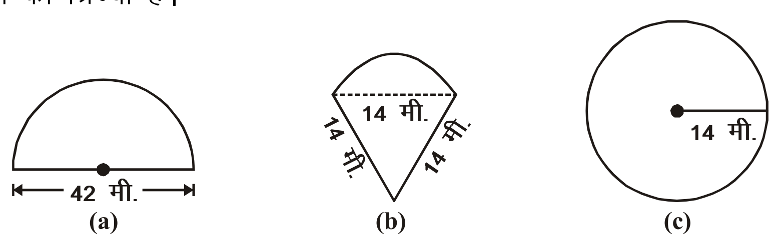
1. बगल की आकृतियों में एक आयताकार और एक वर्गाकार खेल के मैदान के माप दिए हुए हैं। यदि इनके परिमाप समान हैं तो किस मैदान का क्षेत्रफल अधिक होगा?



2. विमला के पास एक आयताकार प्लॉट है (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) वह प्लॉट के बीच में एक वर्गाकार घर बनाना चाहती है। घर के चारों ओर फुलवारी लगवानी है। उसे फुलवारी लगाने में 40 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से कितने रुपये खर्च करने होंगे?



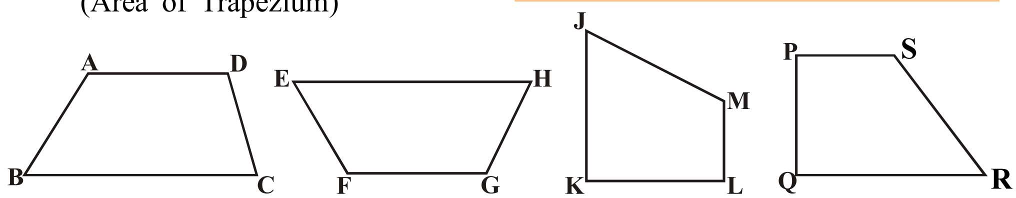
3. अमरेश अपने घर के आँगन में ईंट बिछवाना चाहता है। यदि आँगन की लम्बाई 20 मीटर और चौड़ाई 15 मीटर हो तथा एक ईंट की लम्बाई 25 सेमी. और 80 सेमी. हो तो उस आँगन में कितनी ईंटें लगेंगी? (कच्चा चित्र बना हल करें)
4. एक त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल 600 वर्ग मीटर तथा ऊँचाई 60 मीटर है तो उस खेत का आधार ज्ञात करें।
5. एक धावक को कम से कम दूरी तय करने के लिए निम्न में से किस आकृति पर चक्कर लगाना चाहिए? आप जानते हैं कि सम्पूर्ण वृत्त की परिधि का सूत्र $c = 2\pi r$ जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।



© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

13.2 समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल
(Area of Trapezium)

याद कीजिए ऐसे चतुर्भुज जिनके दोनों जोड़े आपस में समांतर हो क्या कहलाते हैं?



(a) (b) (c) (d)

उपर्युक्त चारों आकृति को ध्यान से देखिए और पता लगाइए कि चारों आकृतियों में क्या समानता है। क्या सभी चतुर्भुजों की आमने–सामने की भुजाएँ समांतर हैं? आपने ठीक निकाला उपर दिए गए चतुर्भुजों में भुजाओं के जोड़े में से एक जोड़ा समांतर व एक असमांतर है ऐसे चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज कहलाते हैं।

असलम का खेत समलम्ब चतुर्भुजाकार है जिसमें $PQ \parallel RS$ है। RZ खेत को कितने भागों में बाँट रहा है? स्पष्ट है कि RZ खेत को दो भागों में बाँट रहा है, एक भाग RZQS आयताकार एवं दूसरा भाग RZP त्रिभुजाकार है। यदि PQ = 18 मी. एवं RS = 8 मी. एवं QS = 12 मी. है तो

$$\Delta PZR \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times h \times PZ = \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{6}{\cancel{12}} \times 10 = 60 \text{ मी.}^2$$

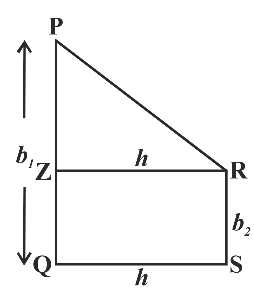
एवं आयत RZQS का क्षेत्रफल $= h \times ZQ = 12 \times 8 = 96$ मी.^{2}

अतः असलम के खेत का कुल क्षेत्रफल कितना हुआ?

असलम के खेत का कुल क्षेत्रफल = ΔPZR का क्षेत्रफल + ΔRZQS का क्षेत्रफल

= 60 वर्ग मीटर + 96 वर्ग मीटर

= 156 वर्गमीटर



इस प्रकार समलम्ब चतुर्भुज PQSR का क्षेत्रफल

= ΔPZR का क्षेत्रफल + आयत ZQSR का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times ZR \times PZ + \quad QS \times QZ$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times PZ + h \times QZ \qquad (ZR = QS = h)$$

$$= h\left(\frac{1}{2}\, PZ + QZ\right) \qquad \text{(ल.स.प. लेने पर)}$$

$$= h\left(\frac{PZ+2QZ}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{PZ+QZ+QZ}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) \text{ या } \frac{1}{2}\times h\times(b_1+b_2) \qquad [PZ+QZ=b_1]$$

$= \frac{1}{2}$ × ऊँचाई × समान्तर भुजाओं का योग

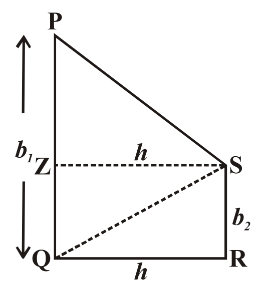
क्या उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर भी असलम के खेत का क्षेत्रफल 156 वर्ग मीटर आएगा? मान रखकर देखिए।

एक और तरीका देखिए

समलम्ब चतुर्भुज PQSR का क्षेत्रफल

$= \Delta PQS$ का क्षेत्रफल $+ \Delta SRQ$ का क्षेत्रफल

[Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई]



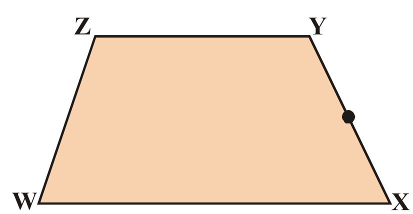
$$= \frac{1}{2}\times b_1\times h + \frac{1}{2}\times h\times b_2$$

$$= \frac{1}{2}\, h\,(b_1+b_2)$$

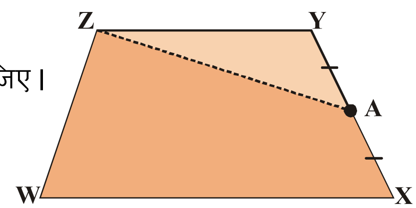
अर्थात् $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × समान्तर भुजाओं का योग।

गतिविधि

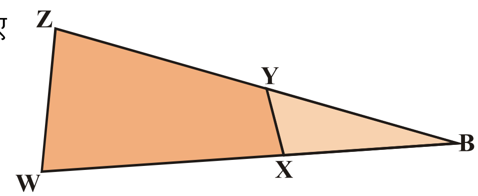
1. एक समलम्ब चतुर्भुज लीजिए एवं इसे नामांकित कीजिए।



2. भुजा XY को मोड़कर इसका मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए एवं इसे A नामांकित कीजिए।



3. कैंची से Z को A से मिलाते हुए काटिए एवं AY को AX के साथ रखिए।



4. इस प्रकार बड़े त्रिभुज के आधार की लम्बाई क्या है?
5. इस त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइए यदि इसकी ऊँचाई h इकाई है।
6. क्या इस त्रिभुज का क्षेत्रफल एवं समलम्ब चतुर्भुज (WZYX) का क्षेत्रफल समान है।

इस प्रकार समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें समान्तर भुजाओं की लम्बाई और इन दो भुजाओं के बीच लम्बवत् दूरी की आवश्यकता है। समान्तर भुजाओं की लम्बाइयों का योग और इनके बीच की लम्बवत् दूरी के गुणनफल के आधे के बराबर क्षेत्रफल होता है।

उदाहरण–1. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ क्रमशः 12 मीटर और 8 मीटर हैं तथा उनके बीच की दूरी 3 मीटर है तो समलम्ब का क्षेत्रफल क्या होगा।

हल : हम जानते हैं कि समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h\,(b_1 + b_2)$

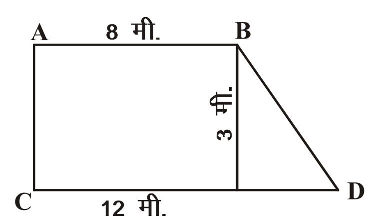
दिया हुआ है–

$\therefore \frac{1}{2} \times 3$ मीटर (12 मीटर + 8 मीटर)

$= \frac{1}{\not{2}} \times 3$ मीटर $\times\ \not{20}^{10}$ मीटर

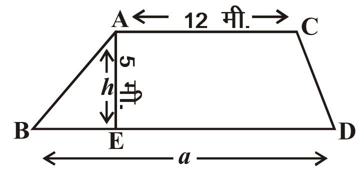
$= 3 \times 10$ वर्ग मीटर

$=$ 30 वर्ग मीटर



उदाहरण–2. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 105 वर्ग मीटर है तथा समानान्तर भुजाओं में से एक की लम्बाई 12 मीटर है तथा ऊँचाई 5 मीटर है तो दूसरी भुजा की लम्बाई क्या होगी?

हल : दिया हुआ है।



$A = 105$ वर्ग मी.

$h = 5$ मी.

एक समानान्तर भुजा की लम्बाई $AC = 12$ मी.

अन्य समान्तर भुजा को हम a मान लेते हैं।

अतः समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h\,(a + b)$ से

105 वर्ग मी. $= \frac{1}{2} \times 5$ मी. $(a + 12$ मी.)

105 वर्ग मी. $= \frac{1}{2}$ ($5a$ मी. + 60 वर्ग मी.)

210 वर्ग मी. $= 5a$ मी. + 60 वर्ग मी.

210 वर्ग मी. – 60 वर्ग मीटर $= 5a$ मीटर

150 वर्ग मी. $= 5a$ मी.

$\frac{\overset{30}{\cancel{150}} \text{ वर्ग मीटर}}{\cancel{5} \text{ मीटर}} = a$

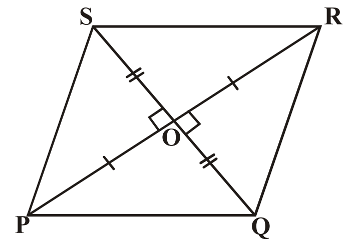
अतः दूसरी समानान्तर भुजा की लम्बाई 30 मी. है।

13.3 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of Rhombus)

अभी तक आपने देखा कि अलग–अलग चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमने पूर्व में ज्ञात आकृतियों के क्षेत्रफलों को काम में लिया। जैसे त्रिभुज, आयत, वर्ग फिर इनसे ज्ञात समांतर व समलम्ब चतुर्भुज।

आकृति PQRS एक समचतुर्भुज है। इसलिए इसके विकर्ण एक दूसरे के लम्ब समद्विभाजक हैं।

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED



समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल =

(Δ PRS का क्षेत्रफल) + (Δ PQR का क्षेत्रफल)

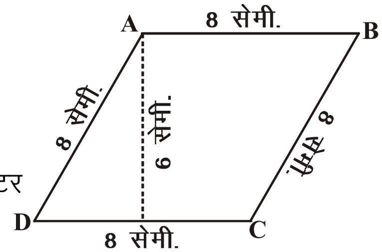
$$= \left(\frac{1}{2}\times PR\times OS\right) + \left(\frac{1}{2}\times PR\times OQ\right)$$

$= \frac{1}{2}PR \times (OS+OQ)$ (सार्व लेने पर)

$= \frac{1}{2}PR \times SQ$ $(OS + OQ = SQ)$

$= \frac{1}{2}d_1 \times d_2$ जहाँ $PR = d_1$ और $SQ = d_2$ (d = diagonal विकर्ण)

उदाहरण–3. किसी समचतुर्भुज की एक भुजा 8 सेन्टीमीटर और शीर्ष लम्ब 6 सेन्टीमीटर हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : हम जानते हैं कि

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × शीर्ष लम्ब

या $A = b \times h$

$A = 8$ सेन्टीमीटर $\times 6$ सेन्टीमीटर

$= 48$ सेन्टीमीटर^2

जब समचतुर्भज के विकर्णों को माप न दिया गया हो व आधार और ऊँचाई ज्ञात हो तो हम समांतर चतुर्भुज के सुत्र के अनुसार चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकाल लेते हैं।

सोचिए निम्न कथनों में से कौन सा सही है। कारण सहित बातइए।

(i) प्रत्येक समलंब चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है। ....

(ii) प्रत्येक समातंर चतुर्भुज एक समलंब चुतर्भुज भी होता है। ....

उदाहरण–4. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 20 सेन्टीमीटर एवं 24 सेन्टीमीटर हों तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हमें मालूम है कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

यानि $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

$A = \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{10}{\cancel{20}}$ सेमी. × 24 सेमी.

= 240 सेन्टीमीटर²

स्वयं करके देखिए

समचतुर्भुज	भुजा की लम्बाई	शीर्ष लम्ब	d_1	d_2	क्षेत्रफल	परिमाप
1.	–	–	18 सेमी.	12 सेमी.	....	....
2.	12 सेमी.	9 सेमी.	–	–		

13.4 बहुभुज (Polygon)

सोचिए, क्या आप दो रेखा खण्डों की मदद से कोई बंद आकृति बना सकते हैं?

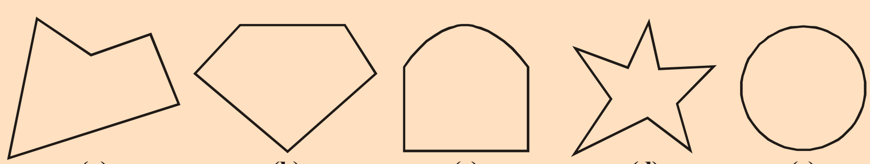
अतः कम से कम तीन रेखाखण्डों की सहायता से ही बंद आकृति बनाई जा सकती है। (यहाँ हम वक्र रेखा से घिरी बंद आकृतियों की बात नहीं कर रहे हैं

इसी प्रकार चार, पाँच रेखाओं द्वारा क्रमशः आप चतुर्भुज, पंचभुज जैसे बंद आकृतियाँ बना सकते हैं।

कोई भी बंद आकृति जो सरल रेखाओं द्वारा बनी हो **बहुभुज** कहलाती है।

स्वयं करके देखिए–

नीचे दी गई आकृतियों में से बहुभुज को छाँटिए–

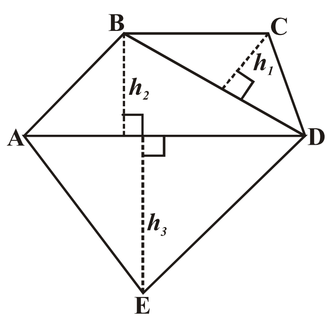


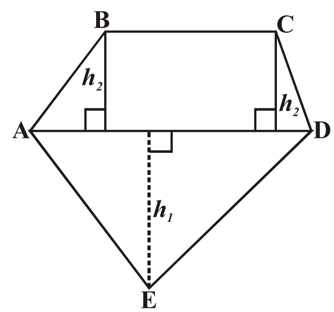
(a) (b) (c) (d) (e)

©BSTB NOT TO BE
WEB COPY

जिस प्रकार हमने चतुर्भुजों को त्रिभुजों में बाँट कर क्षेत्रफल ज्ञात किया। इसी प्रकार हम अलग–अलग बहुभुजों का क्षेत्रफल चतुर्भुजों व त्रिभुजों की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

नीचे दिए गए चित्रों से समझिए।



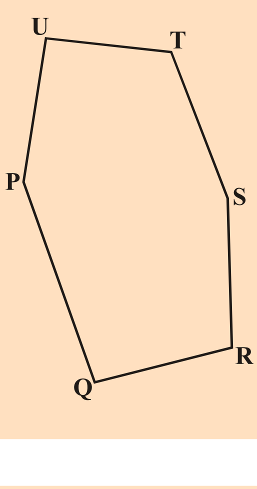


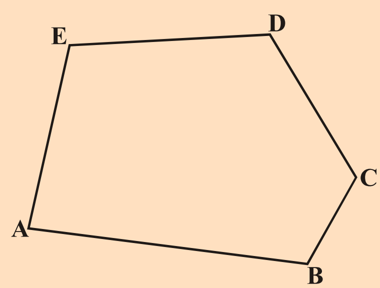
नेहा ने पंचभुज ABCDE को तीन त्रिभुजों में बाँटकर, उसका क्षेत्रफल ज्ञात किया अतः क्षेत्र. $\Delta ADE +$ क्षेत्र. $\Delta ADB +$ क्षेत्र. $\Delta BDC =$ क्षेत्रफल पंचभुज ABCDE

अशफाक ने पंचभुज ABCDE को तीन त्रिभुजों व एक आयत में बाँटकर, उसका क्षेत्रफल ज्ञात किया। अशफाक के लिए प्रतीक रूप में पंचभुज के क्षेत्रफल के लिए समीकरण लिखिए।

स्वयं करके देखिए

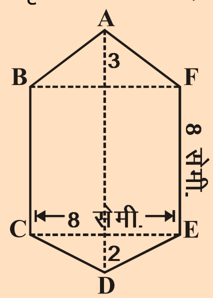
1. निम्नलिखित बहुभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हें त्रिभुजों व चतुर्भुजों में बाँटिए और साथ ही बहुभुज के क्षेत्रफल के लिए समीकरण रूप लिखिए।





2. नीचे आकृतियों में दी गई जानकारियों के आधार पर बहुभुजों का क्षेत्रफल निकालिए।

(A)



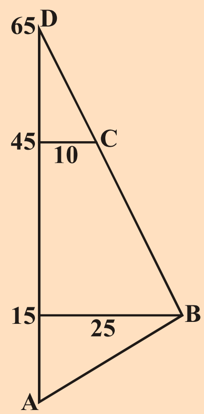
बहुभुज ABCDEF का क्षेत्रफल =

Δ ABF का क्षेत्रफल + ⊔ BCEF का क्षेत्रफल

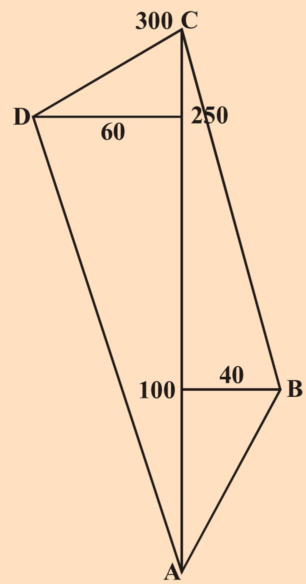
+ Δ CED का क्षेत्रफल

= .... + ... + ...

(B)

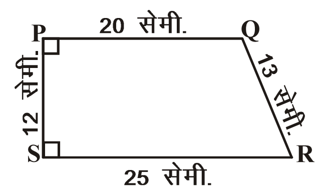


(C)



प्रश्नावली – 13.2

1. एक समलम्ब चतुर्भुज PQRS के $\angle$P और $\angle$S समकोण है। इसकी भुजाओं की माप चित्र में दर्शाई गई है, समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



2. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB, CD का समान्तर है AB = 30 सेमी., BC = 15 सेमी., DC = 44 सेमी., और AD = 13 सेमी.। समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएं 52 सेमी. और 27 सेमी. है तथा अन्य दो भुजाएं 25 सेमी. और 30 सेमी. की हैं। समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 200 मी.^{2} है और इसकी ऊँचाई 8 मी. है। यदि समान्तर भुजाओं में एक भुजा दूसरी भुजा से 6 मी. अधिक है तो समान्तर भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजाएँ क्रमशः 24 सेमी. और 20 सेमी. हैं तथा दोनों भुजाओं की बीच की दूरी 15 सेमी. है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 384 सेमी.^{2} है। यदि समान्तर भुजाओं का अनुपात 3 : 5 हो और दोनों के बीच की लम्बात्मक दूरी 12 सेमी. हो तो प्रत्येक समान्तर भुजाओं की माप ज्ञात कीजिए।

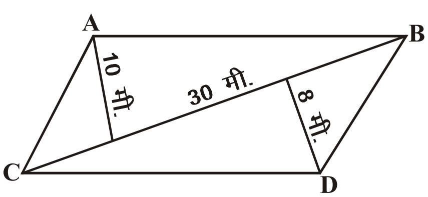
7. ऐसे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 10 सेमी. और शीर्ष लम्ब 6 सेमी. हो।

8. एक समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 8 सेमी. है और इसका क्षेत्रफल 11.2 सेमी^{2} है तो इस चतुर्भुज का शीर्ष लम्ब ज्ञात करें।

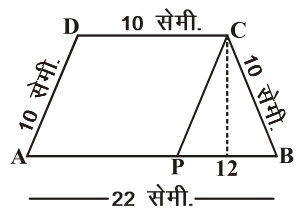
9. किसी समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 64 सेमी.^{2} है और इसकी परिमाप 64 सेमी. है। समचतुर्भुज का शीर्ष लम्ब ज्ञात कीजिए।

10. एक समचतुर्भुजाकार पार्क की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 72 मीटर तथा शीर्ष लम्ब 18 मीटर है। उस वर्गाकार खेल की मैदान का भुजा क्या होगी जिसका क्षेत्रफल इस समचतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है?

11. किसी चतुर्भुज का एक विकर्ण 30 मीटर और सम्मुख शीर्षों से डाले गए लम्ब 10 मी. और 8 मी. हैं तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए।



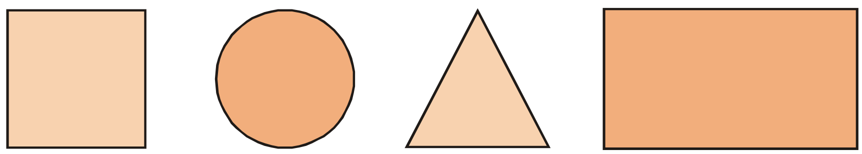
12. निम्न आकृति का क्षेत्रफल तथा शीर्ष लम्ब ज्ञात कीजिए।



13.5 ठोस आकार (Solid Shape)

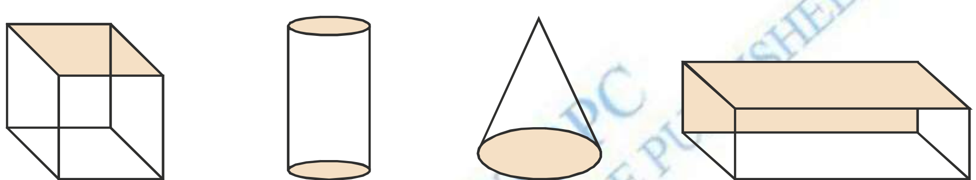
आप द्विविमीय व त्रिविमीय आकृतियों (ठोस) के बारे में थोड़ा जानते हैं। आइए हम अमर और अकबर की मदद करें।

अमर और अकबर के पास कुछ द्विविमीय आकार कटे हुए रखे हैं, इनकी सहायता से इन्हें कुछ त्रिविमीय आकृतियाँ बनानी हैं।



(a) (b) (c) (d)

द्विविमीय आकृतियाँ (Two Dimensional Shapes)



(i) (ii) (iii) (iv)

त्रिविमीय आकृतियाँ (Three Dimensional Shapes)

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

1. आकृति (i) को बनाने के लिए आप किस द्विविमीय आकार को काम में लेंगे?

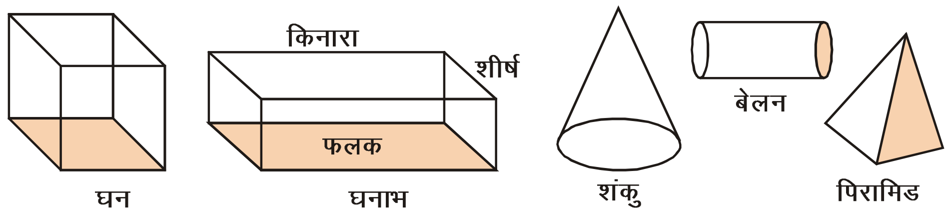
   क्या आप बता सकते हैं कि ऐसे कितने आकारों की सहायता से (i) को बनाया जा सकता है?

   इसी प्रकार आकृति (ii), (iii) व (iv) के लिए बताइए

	लिए जानेवाले द्विविमीय आकार	**अलग–अलग आकारों की संख्या**
आकृति (ii) के लिए		
आकृति (iii) के लिए		
आकृति (iv) के लिए		

इस प्रकार आपने कुछ त्रिविमीय आकृतियों को द्विविमीय आकारों की मदद से बनाया।

आपने ऊपर दी गई आकृतियाँ बनाते समय देखा होगा कि कुछ आकारों में दो या दो से अधिक सर्वांगसम फलक हैं। उनके नाम दीजिए। ऐसा कौन सा ठोस है जिसके सभी फलक सर्वांगसम हैं।



हाँ, आपने ठीक सोचा घन के सभी फलक वर्गाकार और समान होते हैं।

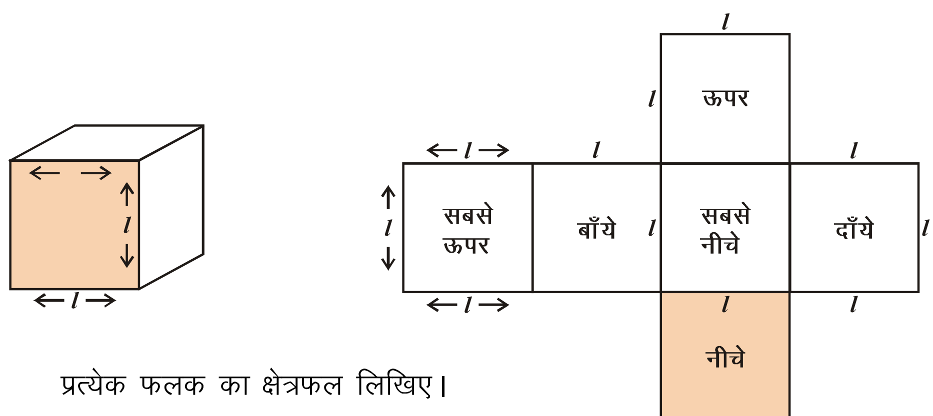
आप यह भी जानते हैं कि सर्वांगसम फलक क्षेत्रफल में समान होते हैं। तब क्या हम घन के एक फलक यानी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात होने पर घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, इसे समझें–

13.5.1 घन का क्षेत्रफल (Area of Cube)

दीपक एक घनाकार डिब्बे को रंग कर रहा है तो उसे उस घन के सभी फलकों को रँगना होगा। आइए, यह जानें कि उसे कुल कितने क्षेत्र को रँगना होगा?

डिब्बे को खोलने पर वह जाल के रूप में निम्न तरह से दिखेगा।



प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल लिखिए।

क्या सभी फलकों का क्षेत्रफल समान है?

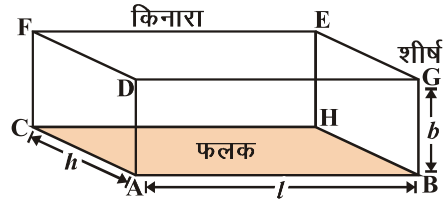
चूँकि एक पृष्ठ का क्षेत्रफल $= l$ इकाई $\times\, l$ इकाई $= l^2$ वर्ग इकाई

अतः छह पृष्ठों का क्षेत्रफल $= 6 \times l^2$ वर्ग इकाई

$= 6\, l^2$ या $6 \times (\text{भुजा})^2$

शिक्षक निर्देश :– शिक्षक घनाकार डब्बा लेकर घन की अवधारणा स्पष्ट करेंगे एवं उनके अंगों की जानकारी देंगे तथा सूत्र स्थापित में उपयोग करेंगे।

13.5.2 घनाभ का क्षेत्रफल (Area of Cuboid)



घनाभाकार आकृति को टूथपेस्ट, साबुन के डिब्बे या ईंट से आसानी से समझा जा सकता है।

मान लीजिए आप एक घनाभाकार डिब्बा लेकर उसे खोलकर समतल पर फैला देते हैं।

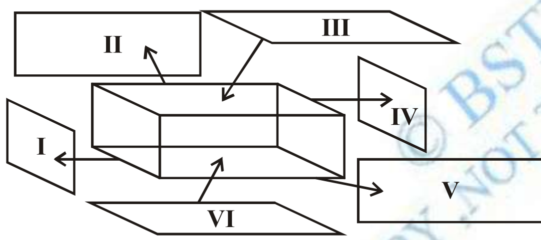
घनाभ के कुल पृष्ठ क्षेत्रफल

मान लीजिए कि घनाभ की लंबाई $= l$ इकाई,

चौड़ाई $= b$ इकाई

ऊँचाई $= h$ इकाई

घनाभाकार डिब्बा



सभी छह फलक आयताकार हैं और सम्मुख फलक सर्वांगसम हैं। इसलिए घनाभ में सर्वांगसम फलकों के तीन युग्म होते हैं।

तथा

$\therefore$ घनाभ के कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = आयत I क्षेत्रफल + आयत II क्षेत्रफल + आयत III क्षेत्रफल + आयत IV क्षेत्रफल + आयत V क्षेत्रफल + आयत VI क्षेत्रफल

$= hb + lh + bl + hb + lh + bl$

$= 2\,hb + 2lh + 2bl$

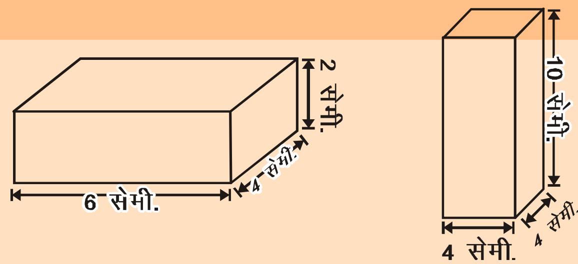
$= 2\,(hb + lh + bl)$

अर्थात् घनाभ का क्रम पृष्ठ क्षेत्रफल = 2 (लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई)

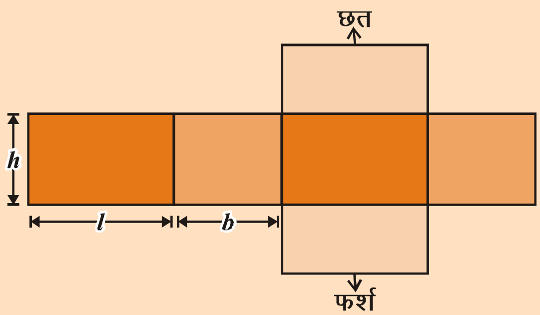
शिक्षक निर्देश :– शिक्षक घनाभाकार डब्बा लेकर घन की अवधारणा स्पष्ट करेंगे एवं उनके अंगों की जानकारी देंगे तथा सूत्र स्थापित के लिए उपयोग करेंगे।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित घनाभों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

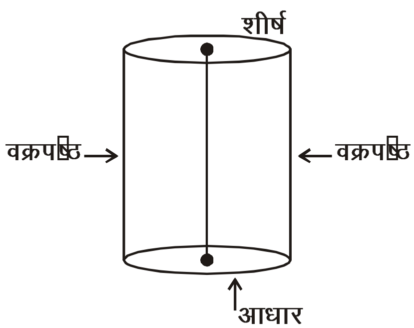


घनाभ की दीवारें [तल और शीर्ष के अतिरिक्त फलक] कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल बनाती हैं। उदाहरणतः जिस घनाभाकार कमरे में आप बैठे हुए हैं उस कमरे की चारदीवारों का कुल क्षेत्रफल $2(h \times l + b \times h)$ अथवा $2h(l + b)$ द्वारा प्राप्त किया जाता है।



13.5.3 बेलन (Cylinder)

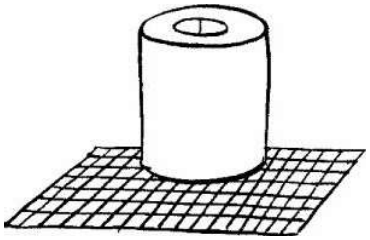
आपने घर में टिन या स्टील का बेलनाकार डिब्बा जरूर देखा होगा। आइए, ऐसी आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।



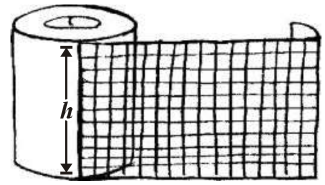
बेलन में एक वक्रपृष्ठ और दो वृत्ताकार सतह जो कि सर्वांगसम हैं।

आइए, कुछ और जानकारी प्राप्त करते हैं।

1. एक बेलनाकार डिब्बे के आधार को पेपर पर रखकर उसके चारों ओर पेंसिल से दाग लगाकर उस भाग को काट लेते हैं। पुनः एक दूसरा पेपर लेते हैं जिसकी चौड़ाई बेलनाकार डिब्बे की ऊँचाई के बराबर हो। इस पेपर को डिब्बे के चारों ओर लपेट देते हैं जो बेलनाकार आकृति में परिवर्तित हो जाता है।

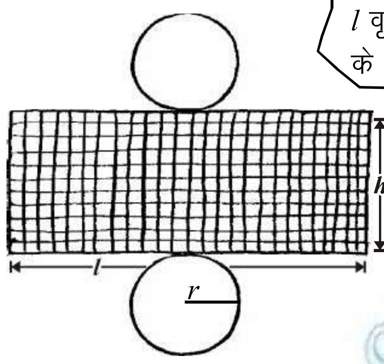


(i)

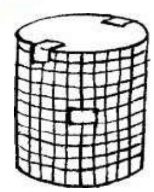


(ii)

क्या आयताकार भाग की लम्बाई l वृत्ताकार भाग की परिधि $2\pi r$ के बराबर है।



(iii)



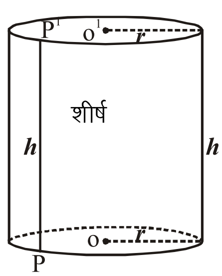
(iv)

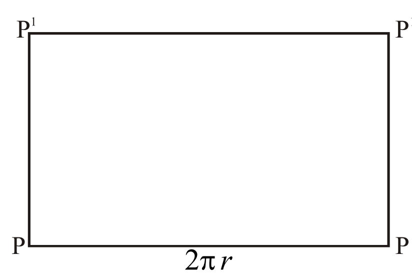
© BSTBPC
WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

इस पेपर को खोलने पर यह आयताकार बन जाता है।

बेलनाकार डिब्बे में कुल तीन पृष्ठ हैं जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार व शीर्ष) तथा तीसरा पृष्ठ वक्राकार भाग है। आधार और शीर्ष दोनों वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल बराबर होगा। यदि वृत्तीय पृष्ठों की त्रिज्या r हो तो प्रत्येक वृत्तीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होगा।

अब प्रश्न उठता है कि तीसरे पृष्ठ अर्थात् वक्राकार भाग का क्षेत्रफल कैसे प्राप्त किया जाए? चर्चा कीजिए।





प्राप्त आयताकार पट्टी की लम्बाई, वक्राकार भाग की परिधि के बराबर होगी एवं चौड़ाई

वक्राकार भाग की ऊँचाई के बराबर होगी। साथ ही आयताकार पट्टी एवं वक्राकार भाग के क्षेत्रफल भी बराबर होंगे।

चूँकि वक्राकार भाग की त्रिज्या r है, इसलिए उसकी परिधि $= 2\pi r$

अब यदि वक्राकार भाग की (डिब्बे की) ऊँचाई h हो, तो

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल = आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल

= पट्टी की लम्बाई × चौड़ाई

= वक्राकार भाग की परिधि × ऊँचाई

$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बेलन के वक्रपष्ठि का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
(Curved area of Cylinder)

अतः बेलनाकार डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्राकार भाग का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल + शीर्ष का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(r+h)$

बेलन का सम्पूर्ण पष्ठिीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r+h)$
(Total Surface area of Cylinder)

नोटः– जब तक कोई निर्देश न हो तब तक π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

उदाहरण–5. एक घनाभाकार पत्थर की लम्बाई 5 मीटर, चौड़ाई 4 मीटर तथा मोटाई (ऊँचाई) 3 मीटर है तो उसका कुल क्षेत्रफल निकालिए।

हल : यहाँ घनाभ की लंबाई $l = 5$ मी., चौड़ाई $b = 4$ मी. और मोटाई (ऊँचाई) $h = 3$ मीटर हैं।

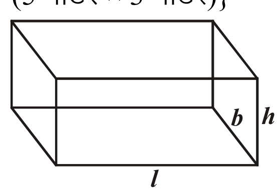
घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $= 2\,(lb + bh + lh)$

$\therefore$ = 2 {(5 मीटर × 4 मीटर) + (4 मीटर × 3 मीटर) + (5 मीटर × 3 मीटर)}

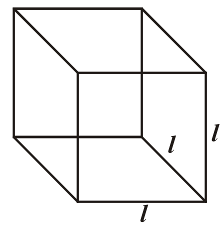
= 2 (20 मीटर + 12 मीटर +15 मीटर)

= 2 × 47 वर्ग मीटर

= 94 वर्ग मीटर



उदाहरण–6. एक घन की एक भुजा 5 सेंटीमीटर है तो इस घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



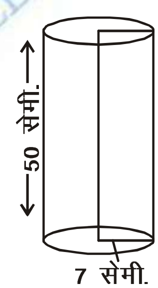
हल : यहाँ l (भुजा) = 5 सेन्टीमीटर है

अतः सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6l^2$

$= (6 \times 5 \times 5)$

= 150 वर्ग सेमी

उदाहरण–7. एक बेलनाकार ठोस लोहे की लम्बाई 50 सेंटीमीटर है तथा आधार की त्रिज्या 7 सेंटीमीटर है तो इस बेलनाकार ठोस के (i) वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल एवं (ii) सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



जहां $\pi = \frac{22}{7}$

हल : (i) बेलन का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7}$ सेमी. $\times 50$ सेमी.

$= 44$ सेमी. $\times 50$ सेमी.

= 2200 वर्ग सेन्टीमीटर

(ii) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r\ (r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7}\ (7 + 50)$ वर्ग सेमी.

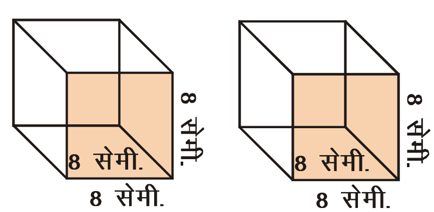
$= 44$ सेमी. $\times 57$ सेमी.

= 2508 वर्ग सेमी.

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली – 13.3

1. दिए गए दोनों घनों को जोड़कर एक घनाभ बनाया गया, तो घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



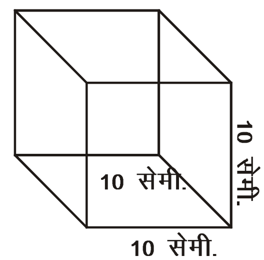
2. एक घन की एक भुजा 12 सेन्टीमीटर है तो घन का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक घनाभाकार पिंड की लम्बाई 15 सेमी., चौड़ाई 14 सेमी. एवं ऊँचाई 13 सेमी. है, पिंड का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. ऐसे घनाभाकार पिंड की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 2400 वर्ग मीटर है।

5. एक घनाभाकार साबुन की लम्बाई 6 सेमी., चौड़ाई 5 सेमी. एवं सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 148 वर्ग सेमी. है तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

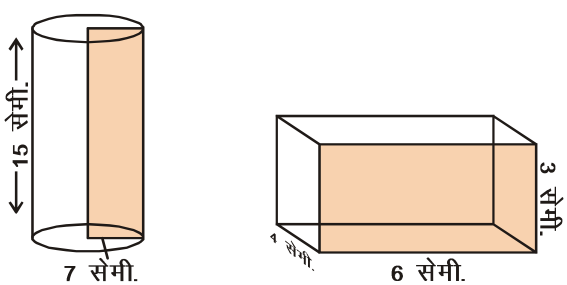
6. एक घनाकार लकड़ी के टुकड़े की एक किनारे की लम्बाई 10 सेमी. है। उसमें से 3 सेमी. × 2 सेमी. × 1 सेमी. आकार का घनाभ एक कोने से काटकर निकाल दिया गया तो शेष क्षेत्रफल कितना होगा?



7. एक बेलन की ऊँचाई 25 सेमी. है और आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है तो बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें?

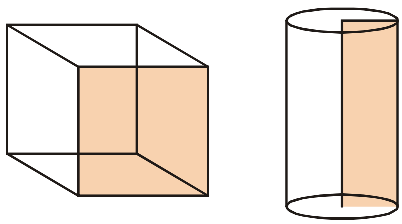
8. एक बेलनाकार लकड़ी की लम्बाई 50 सेमी. है तथा आधार की त्रिज्या 14 सेमी. है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

9. यदि आपको इन आकृतियों को कागज से पूरा–पूरा ढँकना हो तो कम से कम कितने कागज की आवश्यकता होगी?



10. एक भवन में 20 बेलनाकार खंभे लगे हैं जिसकी ऊँचाई 4 मीटर है तथा त्रिज्या 14 सेमी. है। 4 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल में रँगाई करने का खर्च ज्ञात कीजिए।

13.6 घन, घनाभ और बेलन का आयतन (Volume of cube, cuboid and cylinder)



कोई त्रिविमीय वस्तु द्वारा घिरी हुई जगह उसका आयतन (Volume) कहलाता है। परिवेश में पायी जाने वाले वस्तुओं के आयतन की तुलना कीजिए। स्पष्ट है कि किसी कमरे में रखी हुई संदूक के तुलना में कमरे का आयतन अधिक होगा। एक डिब्बा में रखा हुआ साबुन की तुलना में डिब्बा का आयतन अधिक होगा।

हमें मालूम है कि हम किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं। यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का प्रयोग करते हैं।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में बाँटते हैं और आयतन ज्ञात करने के लिए ठोस को घन इकाइयों में बाँटने की आवश्यकता है।

इस प्रकार किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हम उसमें घन इकाईयों को गिनते हैं।

1 घन सेमी. = 1 सेमी. × 1 सेमी. × 1 घन सेमी. = 1 सेमी^{3} जिसे हम 1 घन सेमी. भी पढ़ते हैं।

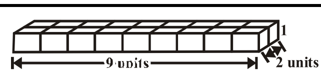
1 घन मीटर = 1 मीटर × 1 मीटर × 1 मीटर = 1 मीटर^3

1 घन मिलीमीटर = 1 मिली मीटर × 1 मिली मीटर × 1 मिली मीटर = 1 मिमी.^{3}

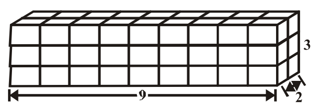
आइए, अब हम घनाभ, घन और बेलन का आयतन ज्ञात करने का तरीका समझें। प्रत्येक ठोस पर बारी–बारी से चर्चा करेंगे।

13.6.1 घनाभ (Cuboid)

समान आकारवाले (प्रत्येक घन की लंबाई समान) 1 सेमी. लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई के घन लीजिए। एक घनाभ बनाने के लिए उहें व्यवस्थित कीजिए। आप इन्हें अनेक रूपों में व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्नलिखित सारणी पर विचार कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

घनाभ	लंबाई	चौड़ाई	ऊँचाई	$l \times b \times h = V$
	9	2	1	9 ×2 × 1 = 18

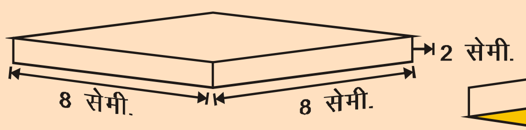
© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

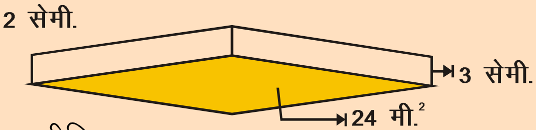
	....	....	....	....

अगर आप प्रत्येक आकृति में घनों की संख्या को गिनेंगे तो उनका मान आपको $l \times b \times h$ अतः ल. × चौ × ऊँ. ही प्राप्त होगा। जैसा कि आप जानते हैं आयतन वस्तु द्वारा घेरी गई जगह का मान होता हे। अब यदि ऊपर चित्र में दिए गए घनाभ खाली होते तो उनमें घनों की संख्या के बराबर समान भरा जा सकता जो उस घन का आयतन भी है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित घनाभों का आयतन ज्ञात कीजिए :





2. निम्नलिखित घनों का आयतन ज्ञात कीजिए :

   (i) 4 सेमी. भुजावाला (ii) 1.5 मी. भुजावाला

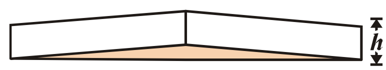
13.6.2 घन

घन, घनाभ का एक अनोखा (विशेष) उदाहरण है जिसमें $l = b = h$ अतः घन का आयतन $= l \times l \times l = l^3$

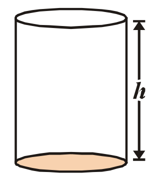
स्वयं करके देखिए

1. समान आकारवाले 64 घनों को जितने रूपों में आप व्यवस्थित कर सकते हैं उतने रूपों में व्यवस्थित करते हुए घनाभ बनाइए। प्रत्येक रूप का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या समान आयतनवाली ठोस आकृतियों का पृष्ठीय क्षेत्रफल समान होता है?
2. एक कंपनी बिस्कुट बेचती है। बिस्कुटों को पैक करने के लिए घनाभाकार डिब्बों का उपयोग किया जा रहा है। डिब्बा A $\rightarrow$ 3 सेमी. × 8 सेमी. × 20 सेमी., डिब्बा B $\rightarrow$ 4 सेमी. × 12 सेमी. × 10 सेमी. डिब्बे का कौन सा आकार कंपनी के लिए आर्थिक दृष्टि से लाभदायक रहेगा और क्यों? क्या आप ऐसे किसी और आकार (विमाएँ) के डिब्बे का सुझाव दे सकते हैं जिसका आयतन इनके समान हो परन्तु इनकी तुलना में आर्थिक दृष्टि से अधिक लाभदायक हो।

13.6.3 बेलन (Cylinder)



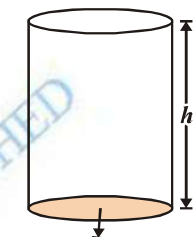
घनाभ



बेलन

हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल ज्ञात करते हुए ज्ञात किया जा सकता है। क्या इसी प्रकार हम बेलन का आयतन ज्ञात कर सकते हैं?

घनाभ की तरह बेलन में भी एक आधार और शीर्ष होता है जो एक दूसरे के सर्वांगसम और समांतर होते हैं। घनाभ की तरह इसका वक्रपृष्ठ आधार पर लंब होता है।



आधार का क्षेत्रफल $(=\pi r^2)$

इसलिए घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= l \times b \times h = lbh$

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–8. एक घनाभ का आयतन 60 घनमीटर है और आधार का क्षेत्रफल 20 वर्ग मीटर है तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए)

हल : यहाँ आयतन = 60 घन मीटर

और आधार का क्षेत्रफल = 20 वर्ग मीटर दिया हुआ है।

$$\text{अर्थात् ऊँचाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \frac{\overset{3}{\cancel{60}}\ \text{घनमीटर}}{\cancel{20}\ \text{वर्गमीटर}} = 3 \text{ मीटर}$$

उदाहरण–9. एक घनाभाकार गोदाम है जिसकी माप 40 मी. × 30 मी. × 20 मी. है। इसके अन्दर 3 मी. × 2 मी. × 1 मी. के कितने डिब्बे रखे जा सकते हैं?

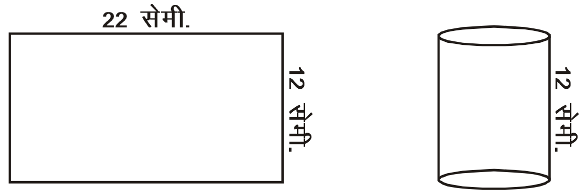
हल : $$\text{गोदाम के भीतर रखे जानेवाले डिब्बों की संख्या} = \frac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{एक डिब्बा के आयतन}}$$

$$= \frac{40 \text{ मी.} \times \overset{10}{\cancel{30}} \text{ मी.} \times \overset{10}{\cancel{20}} \text{ मी.}}{\cancel{3} \text{ मी.} \times \cancel{2} \text{ मी.} \times 1 \text{ मी.}}$$

$= 4{,}000$ डिब्बे

अर्थात् गोदाम में 4,000 डिब्बे रखे जा सकते हैं।

उदाहरण–10. कागज का एक आयताकार टुकड़ा 22 सेमी. लम्बा, 12 सेमी. चौड़ा है, लम्बाई के अनुदिश कागज को गोल करके एक बेलन बनाया जाए तो बेलन का आयतन कितना होगा? ज्ञात कीजिए।



हल : बेलन के आधार की परिधि = $2\pi r$ तथा ऊँचाई $= h = 12$ सेमी. होगा

$\because\ 2\pi r = 22$ सेमी.

22 सेमी. $= 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$22 \times 7 = 2 \times 22 \times r$

$\frac{\cancel{22} \times 7}{2 \times \cancel{22}} = r$

$r = \frac{7}{2}$ सेमी.

आयतन = $\pi r^2 h$

$\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \left(\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}} \text{ सेमी.}\right) \times \left(\frac{7}{\cancel{2}} \text{ सेमी.}\right) \times \overset{6}{\cancel{12}}$

$= 11 \times 42 = 462$ घन सेमी.

प्रश्नावली 13.4

1. अ. एक घन में कितने सतहें होती हैं?

   ब. किसी घनाभ में किनारों की कुल संख्या कितनी है?

स. घन और घनाभ के सतहों में क्या अन्तर है?

द. घन में कितने शीर्ष होते हैं।

2. नीचे घनाभ के किनारों की लम्बाइयां दी हुई हैं, उनके–

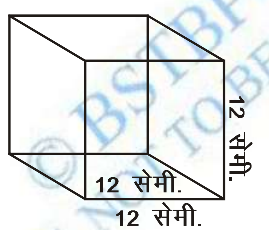
अ. कुलपृष्ठ का क्षेत्रफल एवं ब. आयतन निकालिए।

(i) 10 मी., 5 मी., 6 मी. (ii) 17 सेमी., 12 सेमी., 10 सेमी.

3. 5 सेमी. किनारेवाले एक घन से 1 सेमी. किनारेवाले कितने घन काटे जा सकते हैं?

4. एक घनाभ का आयतन 576 घन मीटर है और आधार वर्गाकार है जिसकी एक भुजा 6 मीटर है तो घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. 12 सेमी. किनारेवाले दो घन बराबर से जोड़ दिए जाएँ तो नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



6. एक लड़का 2 लीटर दूध खरीदने गया। दुकानदार ने उसे एक आयताकार आधार वाले बरतन से जो 20 सेमी. लम्बा, 15 सेमी. चौड़ा और 5 सेमी. गहरा था एक बार मापकर दे दिया। बताइए उस लड़के को कितना कम या अधिक दूध मिला। (यदि 1 लीटर = 1000 घन सेमी.)

7. एक तालाब की लम्बाई 20 मीटर, चौड़ाई 12 मीटर और गहराई 8 मीटर है तथा एक दूसरे तालाब की लम्बाई और चौड़ाई 20 मीटर के बराबर है तथा गहराई पहले तालाब के बराबर है। किस तालाब में अधिक पानी अँटेगा?

8. एक खाली डिब्बा जिसमें साबुन रखा जाना है, डिब्बों की लम्बाई 0.40 मीटर, चौड़ाई 0.25 मीटर तथा ऊँचाई 0.25 मीटर है। साबुन 5 सेमी. × 4 सेमी. × 2 सेमी. साइज का है। डिब्बा में कितने साबुन रखे जा सकते हैं?

9. 30 मीटर लम्बा, 20 सेमी. चौड़ा तथा 4 मीटर ऊँची दीवार बनवानी है? यदि एक ईंट की लम्बाई 25 सेमी., चौड़ाई 12.5 सेमी. तथा ऊँचाई 7.5 सेमी. हो तो उस दीवार के बनवाने में कितने ईंटे लगेंगी। (सीमेंट व बालू का आयतन नगण्य माना गया है।)

© BSTBPC NOT TO BE PUBLISHED VIEW COPY

10. एक कमरे की लम्बाई 15 मीटर, चौड़ाई 10 मीटर तथा ऊँचाई 8 मीटर है। उस घर में कितनी हवा भरेगा?

हमने सीखा

1. घन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 6l^2$ या $6 \times$ (भुजा)^2
2. घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\{l.b + b.h + l.h\}$

   $= 2 \times$ (लम्बाई $\times$ चौड़ाई $+$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $+$ लम्बाई $\times$ ऊँचाई)
3. बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
4. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r\ (r + h)$