



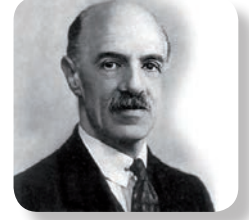
கார்ல் பியர்சான்
(1857–1936)

கார்ல் பியர்சான் (Karl Pearson), இங்கிலாந்தைச் சேர்ந்த கணித மேதையும் புள்ளியியலாளரும் ஆவார். அவர் உலகின் முதல் புள்ளியியல் துறையை லண்டனில் உள்ள பல்கலைக்கழகக்கல்லூரியில் 1911 ஆம் ஆண்டு தோற்றுவித்தார்.

அவர் உருவாக்கிய நேரிய ஒட்டுறவுக்கெழு என்ற கருத்து, அவரது பெயரிலேயே பியர்சானின் விலக்கப்பெருக்க ஒட்டுறவுக்கெழு என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது ஃபிரான்சிஸ் கால்ட்டன் என்பருடைய கருத்துடன் தொடர்புடையதாகும். இந்த ஒட்டுறவுக்கெழு முறை முதன்முதலில் உருவாக்கப்பட்டாலும், பரவலாகப் பயன்படுத்தும் முறையாக விளங்குகிறது.

சார்லஸ் எட்வர்ட் ஸ்பியர்மான் (Charles Edward Spearman)

இங்கிலாந்து நாட்டைச் சேர்ந்த உளவியலாளர் ஆவார். பதினைந்து ஆண்டுகள் இராணுவத்தில் பணியாற்றியபின், செய்முறை உளவியல் படிப்பில் சேர்ந்து 1906 ஆம் ஆண்டு முனைவர் பட்டம் பெற்றார். இவர் கால்ட்டன் ஆய்வுகளால் ஈர்க்கப்பட்டு அதன் மூலம் தர ஒட்டுறவு என்னும் கருத்தை 1904 ஆம் ஆண்டு உருவாக்கினார். அத்துடன் காரணிப்பகுப்பாய்வியல் என்ற பிரிவை உருவாக்குதலிலும் முன்னோடியாகத் திகழ்ந்தார்.



சார்லஸ் எட்வர்ட்
ஸ்பியர்மான்
(1863–1945)

தொடர்பு என்பது, அளவைப்பொறுத்து இருக்கும்போது அவற்றின் உறவைக் கண்டுபிடித்து, அது எவ்வாறு தீவிரமாக தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்பதைக் காண உதவும் சரியான புள்ளியியல் கருவி ஒட்டுறவாகும்.

—கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன்



கற்றல் குறிக்கோள்கள்

- ❖ ஒட்டுறவின் பொருள், வரையறை மற்றும் பயன்பாடுகளைப் பற்றி தெரிந்து கொள்ளுதல்
- ❖ ஒட்டுறவின் வகைகளைக் கண்டறிதல்.
- ❖ பல்வேறு வகையான அளவீட்டளவைகளின் ஒட்டுறவுக்கெழுவைப் பற்றி புரிந்து கொள்ளுதல்
- ❖ சிதறல் விளக்கப்படத்தைப் பயன்படுத்தி பல்வேறு வகையான ஒட்டுறவை வேறுபடுத்த அறிந்து கொள்ளுதல்.
- ❖ கார்ல் பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழு, ஸ்பியர்மானின் தர ஒட்டுறவு, மற்றும் யூலின் தொடர்புக் கெழுவைக் கணக்கிடும் முறை அறிதல்.
- ❖ ஒட்டுறவுக்கெழுவின் உதவியுடன் கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளைப்பற்றி விளக்கமளிக்க அறிந்து கொள்ளுதல்



அறிமுகம்

"உங்களால் இயன்றவரை ஆராய்ந்து பின் தீர்ப்பளியுங்கள்"

இதுவரை ஒரு மாறிக்குப் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியியல் நுட்பங்கள் விளக்கப்பட்டன. பல ஆராய்ச்சி சூழல்களில் ஒருவர் இரு மாறிகளுக்கான நேர்கோட்டுத் தொடர்பினை அறிய இரண்டு மாறிகளையும் ஒரே நேரத்தில் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். அவ்வாறு இருப்பின் அவற்றிற்கு இடையே எவ்வகையான தொடர்பு உள்ளது என்பதைக் காண வேண்டும். இந்த இருமாறி தரவுப் பகுப்பாய்வு என்பது ஒட்டுறவுப் பகுப்பாய்விற்கு வழிவகுக்கிறது. இரண்டு அளவைகளுக்கு இடையே ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு (அல்லது) ஒட்டுறவு உள்ளது எனில், வரைபடத்தில் ஒரு மாறி மேல்நோக்கி அல்லது கீழ்நோக்கி நகர்ந்தால் மற்றொரு மாறியும் மேல்நோக்கி அல்லது கீழ்நோக்கி நகரும்.

ஒட்டுறவுக் கருத்து பின்வரும் பல்வேறு வகையான வினாக்களுக்கு விடையளிக்க உதவும்.

- கற்கும் நேரத்திற்கும் (மணியில்) தேர்வில் பெறப்படும் மதிப்பெண்களுக்கும் இடையே தொடர்பு உள்ளதா?
- விளம்பரத்திற்கு செலவு செய்தல் விற்பனையை அதிகரிக்க உதவுகிறதா?
- X என்பது பெண்களின் வயதையும், Y என்பது அவரின் உயர் இரத்த அழுத்தத்தையும் குறிக்கட்டும். வயதிற்கும், இரத்த அழுத்தத்திற்கும் தொடர்பு உள்ளதா?
- கணவனின் வயதிற்கும் மனைவியின் வயதிற்கும் இடையே தொடர்பு உள்ளதா?
- பொருட்களின் விலைக்கும், தேவைக்கும் இடையே தொடர்பு உள்ளதா?
- மழை அளவிற்கும், நெல் உற்பத்திக்கும் இடையே தொடர்பு உள்ளதா?

4.1 ஒட்டுறவின் வரையறை

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட மாறிகளில் ஒன்றுக்கொன்று இடையேயான தொடர்பினை ஆராய்வதற்குப் பயன்படும் புள்ளியியல் அளவை ஒட்டுறவு ஆகும். இப்பாடத்தில் இரண்டு மாறிகளைப் பற்றி மட்டுமே எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

1. A.M. டட்டில் ஒட்டுறவை இவ்வாறு வரையறுக்கிறார். (A.M. Tuttle)

"இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையேயான மாறுபாட்டினை ஆய்வதே ஒட்டுறவு ஆகும்."

2. யா-கூன்-சௌவின் வரையறை: (Ya-Kun-Chou)

மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை அறிய எடுக்கும் முயற்சியே ஒட்டுறவாகும்.

இரண்டு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் தீவிரத்தை அறியும் முறையே ஒட்டுறவுப் பகுப்பாய்வு ஆகும். மாறிகளுக்கு இடையே அதிக நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருந்தால் அவற்றிற்கு இடையே அதிக ஒட்டுறவு உள்ளது என்றும் மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு மிக மிகக் குறைவு எனில் அவற்றிற்கு இடையே குறைவான ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். ஒட்டுறவுப் பகுப்பாய்வு மூலம் ஒட்டுறவின் வகை மற்றும் தீவிரத்தை அறிந்துகொள்ளலாம். ஒட்டுறவுக் கெழு அல்லது ஒட்டுறவுக் குறியீடு என்பது ஒட்டுறவின் அளவையாகும். இது ஒரு முழுமையான அளவை ஆகும்.

ஒட்டுறவின் பயன்கள்

- இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயான தொடர்பின் வகைகள் மற்றும் தீவிரத்தை அறிய ஒட்டுறவு பயன்படுகிறது.
- மாறிகளுக்கு இடையேயான தொடர்பைப் பற்றிய தீர்க்கமான அறிவால், அறிவியல் மற்றும் தத்துவம் போன்ற துறைகளில் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்பெறும் வளர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கிறது.

4.2 ஒட்டுறவின் வகைகள்

1. **எளிய ஒட்டுறவு:** (நேர்கோட்டு ஒட்டுறவு) எளிய ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை குறிப்பதாகும் இது r_{xy} எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
2. **பகுதி ஒட்டுறவு:** பகுதி ஒட்டுறவு என்பது இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட மாறிகளில், மற்ற மாறிகளின் தாக்கத்தை நீக்கிய பின் ஏதேனும் இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிப்பதாகும். $r_{xy.z \dots}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
3. **பல்சார் ஒட்டுறவு:** பல்சார் ஒட்டுறவு என்பது ஒரு குழுவாக உள்ள மாறிகளுக்கும், அந்த குழுவில் இல்லாத ஒரு மாறிக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிப்பதாகும். $R_{y.(xz \dots)}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

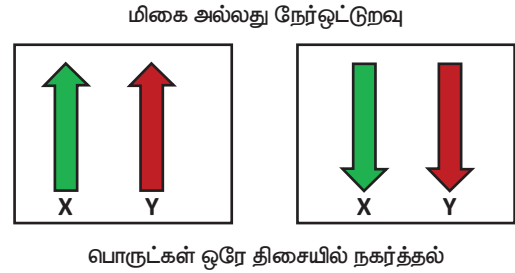
இப்பாடத்தில் எளிய ஒட்டுறவைப் பற்றி மட்டும் அறிந்துக் கொள்ளலாம். மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் தொடர்புடைய பல்சார் மற்றும் பகுதி ஒட்டுறவுகள் பற்றி மேல் வகுப்புகளில் படித்து அறியலாம்.

4.2.1 எளிய ஒட்டுறவு (நேர்கோட்டு ஒட்டுறவு)

இங்கு நாம் தரவுகளாக எடுத்துக் கொள்ளும் இரண்டு தொடர்புடைய மாறிகளில் ஒன்றின் மதிப்பு பொதுவாக 'x' என்றும் மற்ற மாறியின் மதிப்பு 'y' என்றும் குறிக்கப்படுகிறது.

எளிய ஒட்டுறவு ஐந்து வகைப்படும். அவை

1. மிகை ஒட்டுறவு (நேர் ஒட்டுறவு)
2. குறை ஒட்டுறவு (எதிர் ஒட்டுறவு)
3. ஒட்டுறவின்மை
4. முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு
5. முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு

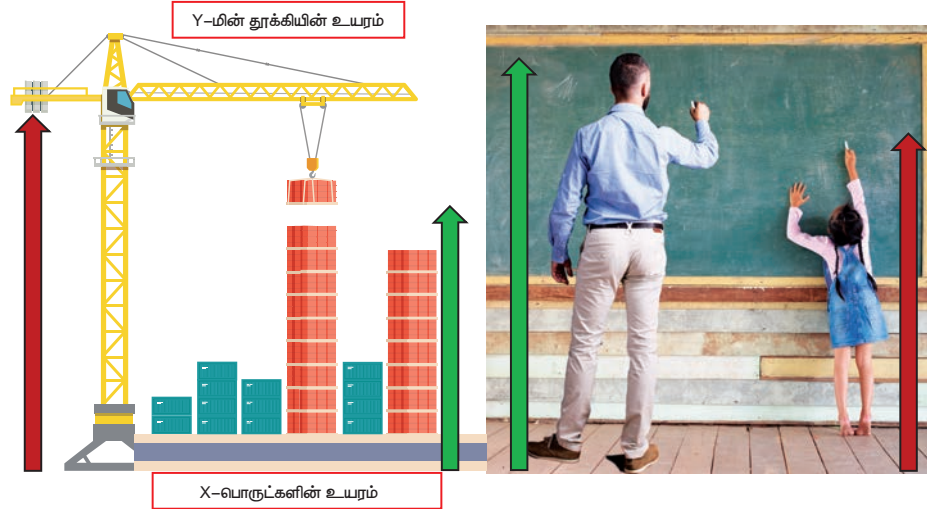


1) மிகை ஒட்டுறவு (நேர் ஒட்டுறவு) Positive correlation: (Direct correlation)

x என்ற மாறியின் பெரிய மதிப்புகள் y என்ற மாறியின் பெரிய மதிப்புகளுடன் தொடர்புடையதாகவும் மற்றும் x என்ற மாறியின் சிறிய மதிப்புகள் y என்ற மாறியின் சிறிய மதிப்புகளுடன் தொடர்புடையதாக இருந்தால் அவ்விரு மாறிகளுக்கு இடையே மிகை ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். மாறாக, இரு மாறிகளும் ஒன்றாக ஒரே திசையில் நகர்ந்தால் அந்த உறவு நேர் ஒட்டுறவு எனப்படும். அதாவது, நேர் ஒட்டுறவு என்பது ஒரு மாறி அதிகரிக்கும் பொழுது மற்ற மாறியும் அதிகரிக்கும் (சராசரியாக) அல்லது ஒரு மாறி குறையும் பொழுது மற்ற மாறியும் குறையும் (சராசரியாக)

எடுத்துக்காட்டாக:

- (i) வருமானம் மற்றும் சேமிப்பு
 - (ii) கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள்
- (அதாவது நேர் உறவு உடையது)



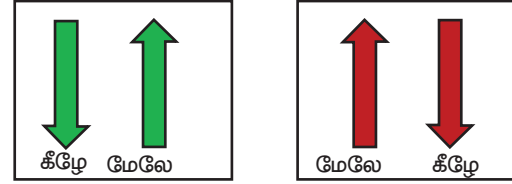
பொருட்களின் உயரம் அதிகரிப்பு / குறைவு என்பதை பொறுத்து மின் தூக்கியின் உயரம் அதிகரிக்கும் / குறையும்

எழுதுபவரின் உயரத்தைப் பொறுத்து எழுதும் இடத்தின் தொடக்கம் அமையும்.

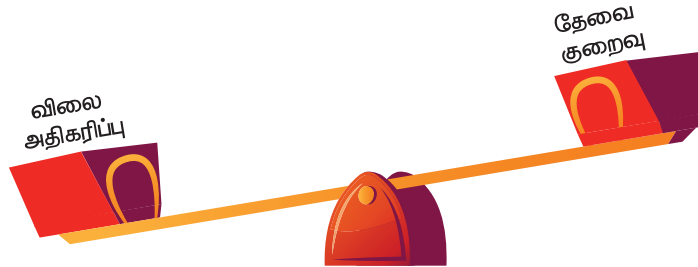
2) குறை ஒட்டுறவு (எதிர் ஒட்டுறவு) (Inverse correlation)

x இன் சிறிய மதிப்புகள் y இன் பெரிய மதிப்புகளுடன் தொடர்புடையதாக இருந்தால் அவ்விரு மாறிகளுக்கு இடையே எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனக் கூறலாம். அதாவது மாறிகள் எதிரெதிர் திசையில் நகர்ந்தால் அம்மாறிகளுக்கிடையே எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனப்படும். அதாவது, கூறின் ஒரு மாறி அதிகரிக்கும் பொழுது மற்ற மாறி குறைகிறது என்றும், ஒரு மாறி குறையும் பொழுது மற்ற மாறி அதிகரிக்கும் என்றும் கூறலாம்.

குறை அல்லது எதிர் ஒட்டுறவு



பொருட்கள் ஒரே எதிரெதிர் திசையில் நகர்த்தல்

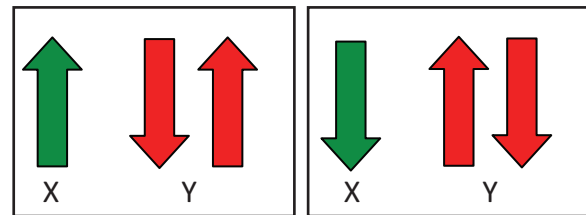


எடுத்துக்காட்டாக:

- விலை மற்றும் தேவை
- வேலையின்மை மற்றும் வாங்கும்திறன் (எதிர் ஒட்டுறவு உடையது)

3) ஒட்டுறவின்மை

x இன் சிறிய மதிப்புகள் y இன் சிறிய அல்லது பெரிய மதிப்புகளுடன் தொடர்புடையதாகவும் மற்றும் x இன் பெரிய மதிப்புகள் y இன் பெரிய அல்லது சிறிய மதிப்புகளுடன் தொடர்புடையதாக இருந்தால் மாறிகளை ஒட்டுறவு அற்றது (ஒட்டுறவின்மை) எனக் கூறலாம். இங்கு $r = 0$.



முக்கிய குறிப்பு: ஒட்டுறவின்மை என்பது சார்பற்றதைக் குறிக்காது 'இரண்டு மாறிகள் சார்பற்றது எனக் கூறாமல் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டு தொடர்பு இல்லை ஆனால் வளை கோட்டு தொடர்பு இருக்கலாம் எனக் கூறவேண்டும்' (specific linear pattern exists but there may be non linear relationship.)

4) முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு

x மற்றும் y என்ற மாறிகளின் மதிப்புகள் விகிதாசார அடிப்படையில் அதிகரித்தாலோ, குறைந்தாலோ அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே முழுமையான நேர் உறவு உள்ளது எனக் கூறலாம்

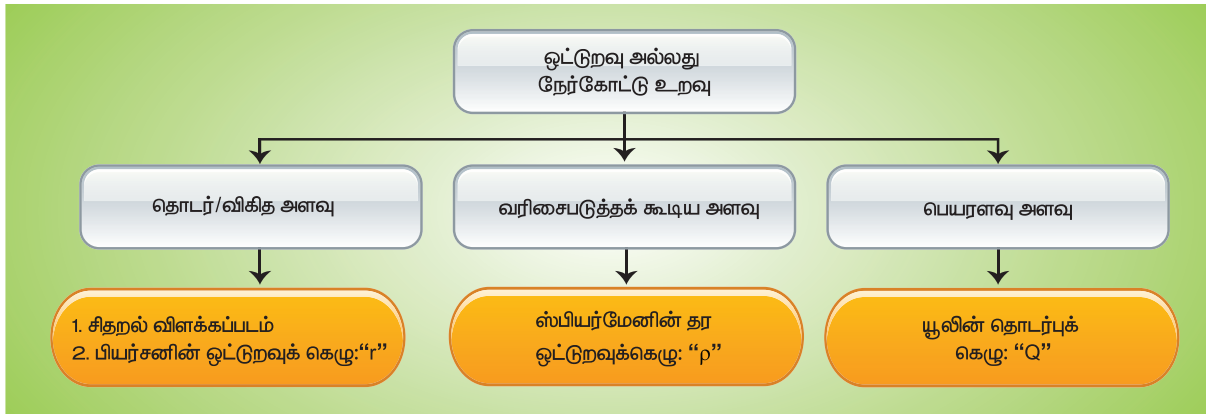
5) முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு

x மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது y இன் மதிப்பு விகிதாசார அடிப்படையில் குறைந்தாலோ, x இன் மதிப்பு குறையும்போது y இன் மதிப்பு விகிதாசார அடிப்படையில் அதிகமானாலோ இருமாறிகளுக்கிடையே முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனக் கூறலாம்.

ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு

மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர் கோட்டு உறவைக் காண்பதே ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வின் நோக்கமாகும். ஒட்டுறவுக் கெழு கணக்கிடும் முறையானது அளவீட்டு அளவைகளான விகித அளவு அல்லது வரிசைப்படுத்தக்கூடிய அளவு அல்லது பெயரளவு அளவு ஆகியவற்றைச் சார்ந்திருக்கும்.

புள்ளியியல் கருவியை தேர்வு செய்தல்



ஒட்டுறவு காணும் முறைகள்:

1. சிதறல் விளக்கப்படம்
2. கார்ல் பியர்சனின் விலக்கப் பெருக்கு ஒட்டுறவுக்கெழு : 'r'
3. ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவுக்கெழு: 'ρ'
4. யூலின் தொடர்புக் கெழு: 'Q'

குறிப்பு

உயர்வரிசை பரிமாணமுள்ள பெயரளவு மாறிகளுக்கு சார்பற்ற பண்புகள் பற்றி அறிய, கைவர்க்க சோதனை பயன்படுத்தப்படுகிறது. (பாடம் 2 ஐப் பார்க்கவும்)

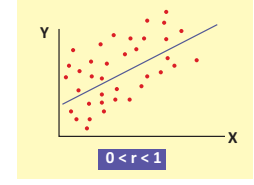
4.3 சிதறல் விளக்கப்படம்

சிதறல் விளக்கப்படம் என்பது இரு மாறிகளைக் கொண்ட தரவுகளைப் படங்கள் மூலம் விளக்கும் எளிய முறையாகும். ஒரு மாறியை X -அச்சிலும் மற்ற மாறியை Y -அச்சிலும் குறிக்க வேண்டும். புள்ளிகள் வரிசை சோடிகளாக இருபரிமாண வரைபடத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் படம் சிதறல் விளக்கப்படம் எனப்படும். இப்புள்ளிகளின் போக்கு திசை, இருமாறிகளுக்கு இடையேயான ஒட்டுறவின் வகைகளைக் காட்டுகிறது.



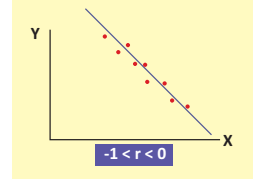
1) நேர் ஒட்டுறவு (மிகை ஒட்டுறவு)

ஒரு தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது கீழ் முனையிலிருந்து வலது மேல் முனை நோக்கி பட்டை போன்ற அமைப்பில் அமைந்திருந்தால் அந்த இரு மாறிகளுக்கு இடையே நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனக் கூறலாம்.



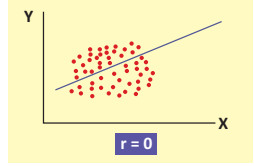
2) எதிர் ஒட்டுறவு (குறை ஒட்டுறவு)

ஒரு தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது மேல் முனையிலிருந்து வலது கீழ் முனை நோக்கி பட்டை போன்ற அமைப்பில் அமைந்திருந்தால் அந்த இரு மாறிகளுக்கிடையே எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனக் கூறலாம்.



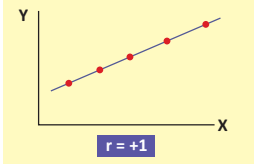
3) ஒட்டுறவின்மை

தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் தளம் முழுவதும் சிதறி இருக்குமானால் அவ்விரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை எனக் கூறலாம்.



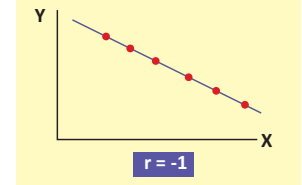
4) முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு:

தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் கீழ் இடது முனையிலிருந்து மேல் வலது முனை வரையிலும் ஒர் நேர்கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் இரு மாறிகளுக்கிடையே முழுமையான நேர் உறவு உள்ளது எனக் கூறலாம்.



5) முழுமையான எதிர் உறவு

தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது மேல் முனையிலிருந்து வலது கீழ் முனை வரை ஒர் நேர் கோட்டின் மேல் அமைந்திருந்தால் இரு மாறிகளுக்கிடையே முழுமையான எதிர் உறவு உள்ளது எனக்கூறலாம்.



4.3.1 சிதறல் விளக்கப்படத்தின் நிறைகள்

நிறைகள்

- இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவைப் பற்றி அறிய இது எளிய மற்றும் கணக்கிட வேண்டியிராத முறையாகும்.
- இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
- இரு மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்பதில் இது முதல் படியாகும்.
- பார்த்த மாத்திரத்திலேயே இது நேர் ஒட்டுறவா, எதிர் ஒட்டுறவா, அல்லது ஒட்டுறவின்மை உடையதா என தோராயமாக அறிய இயலும்.

குறைகள்

- முன்னால் குறிப்பிட்டது போன்று நாம் ஒட்டுறவின் திசையைப் பற்றிய அறிவை பெறமுடியும். ஆனால் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பின் தீவிரத்தை அறிய இயலாது.
- கணித சூத்திரம் எதையும் பெற்றிருக்கவில்லை.

4.4 கார்ல் பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழு

இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு தொடர்பு இருக்குமெனில் அந்த தொடர்பின் அளவு ஒட்டுறவு கெழுவினைப் பயன்படுத்தி அளவிடப்படுகிறது.

உடன் மாறுபாட்டளவை (covariance)

X, Y என்ற மாறிகளுக்கிடையேயான உடன்மாறுபாட்டளவை (X, Y) ஓர் இருமாறி இயல்நிலை வாய்ப்பு மாறிகளின், $V(X)$ மற்றும் $V(Y)$ இன் மதிப்புகள் உள்ளது எனில் X மற்றும் Y -க்கு இடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவை

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$ என்பன (X, Y) பெறும் n மதிப்புகள் எனில் X மற்றும் Y இடையேயான மாதிரி மதிப்புகளின் உடன்மாறுபாட்டளவை இவ்வாறு கணக்கிடப்படலாம்.

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

4.4.1 கார்ல் பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழு (Karl Pearson's coefficient of correlation)

X மற்றும் Y என்பன நேர்கோட்டுடன் தொடர்புடையவைகளாகவும் (X, Y) என்பன ஈருறுப்பு இயல்நிலைப் பரவலையுடையதாகவும் உள்ளது எனில் X மற்றும் Y இடையேயான மாதிரி மதிப்புகளின் ஒட்டுறவுக்கெழு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

இது கார்ல் பியர்சான் என்பவரால் வரையறுக்கப்பட்ட விலக்கப்பெருக்கு ஒட்டுறவுக்கெழு (Karl Pearson's product moment correlation) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n$ என்ற n சோடி வாய்ப்பு மதிப்புகளுக்கு, X மற்றும் Y க்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்

$$r(X, Y) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2}}$$

அல்லது அதற்குச் சமமான,

$$r(X, Y) = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}$$

4.4.2 பண்புகள்

1. x, y இன் ஒட்டுறவுக் கெழுவும், y, x இன் ஒட்டுறவுக் கெழுவும் சமம். அதாவது, $r_{xy} = r_{yx}$.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது X, Y இன் அலகுகளைச் சார்ந்திராது.

3. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதிமாற்றத்தாலோ அல்லது அளவு மாற்றத்தாலோ பாதிக்கப்படுவதில்லை.

$$u_i = \frac{x_i - A}{c}, v_i = \frac{y_i - B}{d} \text{ மேலும் } c \neq 0, d \neq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \text{ எனில்}$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n u_i v_i - \sum_{i=1}^n u_i \sum_{i=1}^n v_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2}}$$

இங்கு A, B என்பது உத்தேச மதிப்புகளாகும்.

குறிப்பு: பிரிவின் இடைவெளி அளவுகள் சமமில்லை எனில் $c = 1, d = 1$ என எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

விளக்கம்

ஒட்டுறவுக் கெழு -1 க்கும் +1 க்கும் இடையே அமையும் அதாவது, $-1 \leq r \leq 1$

- r ஒரு மிகை மதிப்பு எனில் நேர் ஒட்டுறவைக்குறிக்கும் (மிகை ஒட்டுறவு).
- r ஒரு குறை மதிப்பு எனில் எதிர் ஒட்டுறவைக் குறிக்கும் (குறை ஒட்டுறவு)
- $r = +1$, எனில் அது முழுமையான நேர் ஒட்டுறவைக் குறிக்கும்
- $r = -1$, எனில் அது முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவைக் குறிக்கும்.
- $r = 0$, மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவின்மையை குறிக்கும்.
- $|r| \geq 0.7$ எனில் ஒட்டுறவு அதிக அளவு உள்ளது எனக் கூறலாம். விளக்கமளிக்கும் பொழுது "அதிகமானது" என்ற உரிச்சொல்லைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.
- X மற்றும் Y சார்பற்றவை எனில் $r_{xy} = 0$ எனலாம். ஆனால் மறுதலையானது உண்மை இல்லை என்பதனைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

பின் வரும் தரவுகளில் தந்தை மற்றும் மகனின் உயரங்கள் (அங்குலம்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தந்தை மற்றும் மகனின் உயரங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை கார்ல் பியர்சான் ஒட்டுறவுக் கெழு முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தந்தையின் உயரம்	65	66	67	67	68	69	70	72
மகனின் உயரம்	67	68	65	68	72	72	69	71

தீர்வு:

x = தந்தையின் உயரம்

y = மகனின் உயரம்.

தரவுகள் விகித அளவில் உள்ளது (ratio scale). எனவே, நாம் கார்ல் பியர்சான் முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}$$

கணக்கீடு

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
65	67	4225	4489	4355
66	68	4356	4624	4488
67	65	4489	4225	4355
67	68	4489	4624	4556
68	72	4624	5184	4896
69	72	4761	5184	4968
70	69	4900	4761	4830
72	71	5184	5041	5112
544	552	37028	38132	37560

$$r = \frac{8 \times 37560 - 544 \times 552}{\sqrt{8 \times 37028 - (544)^2} \sqrt{8 \times 38132 - (552)^2}} = 0.603$$

விளக்கம்: தந்தை, மகனுக்கு இடையே உள்ள உயரம் நேர் உறவு உடையது. அதாவது சராசரியாக தந்தை உயரமாக இருந்தால் மகனும் உயரமாக இருக்கலாம் மற்றும் தந்தை குள்ளமாக இருந்தால் மகனும் குள்ளமாக இருக்கலாம்.

சுருக்குமுறை

$$A = 68, B = 69, c = 1, d = 1$$

x_i	y_i	$u_i = (x_i - A)/c$ $= x_i - 68$	$v_i = (y_i - B)/d$ $= y_i - 69$	u_i^2	v_i^2	$u_i v_i$
65	67	-3	-2	9	4	6
66	68	-2	-1	4	1	2
67	65	-1	-4	1	16	4
67	68	-1	-1	1	1	1
68	72	0	3	0	9	0
69	72	1	3	1	9	3
70	69	2	0	4	0	0
72	71	4	2	16	4	8
மொத்தம்		0	0	36	44	24

$$r = \frac{n \sum u_i v_i - \sum u_i \sum v_i}{\sqrt{n \sum u_i^2 - \left(\sum u_i \right)^2} \sqrt{n \sum v_i^2 - \left(\sum v_i \right)^2}}$$

$$r = \frac{8 \times 24 - 0 \times 0}{\sqrt{8 \times 36 - (0)^2} \sqrt{8 \times 44 - (0)^2}}$$

$$r = \frac{8 \times 24}{\sqrt{8 \times 36} \sqrt{8 \times 44}} = 0.603$$

குறிப்பு: நேரடிமுறை மற்றும் சுருக்குமுறை இரண்டிலும் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்புகள் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

ஒரு பாடத்தில் இரண்டு தேர்வில் 7 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தரவுகளுக்கான ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிட்டு விளக்கம் அளிக்கவும்.

தேர்வு 1 (x)	12	9	8	10	11	13	7
தேர்வு 2 (y)	14	8	6	9	11	12	3

தீர்வு:

x -தேர்வு 1-ன் மதிப்பெண்கள் மற்றும் y -தேர்வு 2-ன் மதிப்பெண்கள்

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	12	14	144	196	168
	9	8	81	64	72
	8	6	64	36	48
	10	9	100	81	90
	11	11	121	121	121
	1	12	169	144	156
	7	3	49	9	21
மொத்தம்	70	63	728	651	676

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2}}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 70 \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 728 \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = 676$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 63 \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 651 \quad n = 7$$

$$r = \frac{7 \times 676 - 70 \times 63}{\sqrt{[7 \times 728 - 70^2]} \times \sqrt{[7 \times 651 - 63^2]}}$$

$$= \frac{4732 - 4410}{\sqrt{[5096 - 4900]} \times \sqrt{[7 \times 651 - 3969]}}$$

$$= \frac{322}{\sqrt{196} \times \sqrt{588}} = \frac{322}{14 \times 24.25} = \frac{322}{339.5} = 0.95$$

விளக்கம்: தேர்வு-1, மற்றும் தேர்வு-2 இவற்றிற்கிடைய அதிகமான நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது. முதல் தேர்வை நன்றாக செய்துள்ள மாணவர் தேர்வு 2 ஐயும் நன்றாகச் செய்துள்ளார். மற்றும் தேர்வு-1 ஐ நன்றாகச் செய்யாத மாணவர் தேர்வு 2 ஐயும் நன்றாகச் செய்யவில்லை.

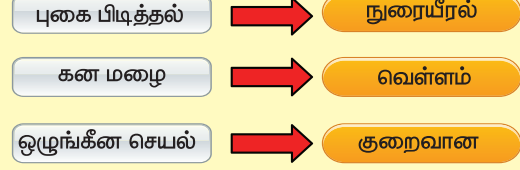
மேலும் மாணவர்கள் இத்தீர்வினை சுருக்கு முறையைப் பயன்படுத்தியும் சரிபார்க்கலாம்.

4.4.3 ஒட்டுறவுக்கெழுவின் வரம்புகள்

ஒட்டுறவு ஒரு சக்திவாய்ந்த கருவி எனினும், அதைப் பயன்படுத்துவதில் சில வரம்புகள் உள்ளன.

1. விளிம்பு மதிப்புகள் ஒட்டுறவுக் கெழுவை அதிகமாக பாதிக்கிறது. நாம் தரவுகளில் விளிம்பு மதிப்புகள் ஏதேனும் இருந்தால், r இன் மதிப்பைக் கொண்டு முடிவெடுப்பதில் கவனமாக இருக்க வேண்டும். பொருத்தமான முடிவெடுக்க வேண்டும் எனில் விளிம்பு மதிப்புகளை நீக்கியபின் கணக்கீடு செய்ய வேண்டும்.
2. ஒட்டுறவு என்பதை சாதாரண தொடர்பு எனக் கூற இயலாது. ஒரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றம் மற்ற மாறியில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்துவதாகும்.

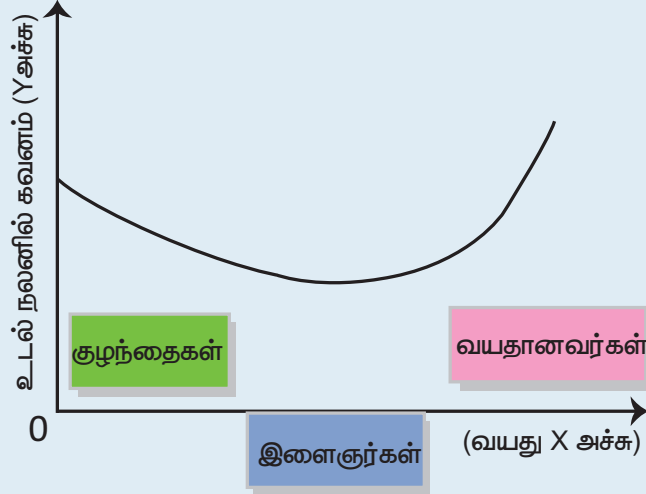
காரண-காரியம்



குறிப்பு

1. ஒட்டுறவின்மை ($r = 0$) என்பது "நேர்கோட்டுத் தொடர்பின்மை"யை குறிக்கும். ஆனால் வளைகோட்டு தொடர்பு இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: வயதும், உடல்நலனில் கவனமும் தொடர்புடையதாகும். நடுத்தர வயதுடையவர்களை விட, குழந்தைகளுக்கும் வயதானவர்களுக்கும் உடல்நலனில் அதிக கவனம் தேவை. இதைப் பின்வரும் படத்தில் காணலாம்.



எனினும் இத்தரவிற்கு நேர்க்கோட்டு ஒட்டுறவு r கணக்கிட்டால் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கலாம். அதன்படி வயது மற்றும் உடல்நலனுக்கிடையே ஒட்டுறவின்மையை குறிக்கிறது, ஆனால் இவற்றிற்கிடையே வளைகோட்டு தொடர்பு இருக்கும்.

2. ஸ்பூரியஸ் ஒட்டுறவு: 'ஸ்பூரியஸ்' என்ற லத்தீன் சொல்லிற்கு 'தவறு' அல்லது 'ஒழுங்கற்றது' என்று பொருள். 'ஸ்பூரியஸ் ஒட்டுறவு' என்பது உண்மையான தொடர்பு இல்லாதபோது ஒட்டுறவுக்கெழுவிருந்து பெறப்பட்ட தொடர்பாகும்.

4.5 ஸ்பியர்மான் தர ஒட்டுறவுக்கெழு

தரவானது வரிசை அளவில் (Ordinal Scale) இருந்தால் ஸ்பியர்மானின் தர ஒட்டுறவுக்கெழு பயன்படுத்தப்படுகிறது. இது கிரேக்க எழுத்து ρ (ரோ) எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

போட்டிகளில் அகமதிப்பிடல் (Subjectivity) தரவுகளுக்கு ஸ்பியர்மேனின் ஒட்டுறவு கணக்கிடப்படலாம். தரவுகளுக்கு (Data), தரத்தை (rank) ஏறுவரிசையிலோ அல்லது இறங்குவரிசையிலோ குறிக்க வேண்டும்.

ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவுக் கெழு வாய்ப்பாடு

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

இங்கு $D_i = R_{1i} - R_{2i}$

R_{1i} = முதல் தரவின் i -வது தரம்

R_{2i} = இரண்டாவது தரவின் i -வது தரம்

n = ஜோடி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

விளக்கம்

ஸ்பியர்மானின் ஒட்டுறவுக் கெழு என்பது ஜோடித் தரவுகளின் (paired data) ஓரியல்பு தொடர்பின் வளமையை அறியும் புள்ளியியல் கருவியாகும். இதன் விளக்கம், பியர்சானின் விளக்கத்தை ஒத்திருக்கும். ρ வின் மதிப்பு ± 1 க்கு அருகில் இருந்தால் ஓரியல்பு தொடர்பு தீவிரமாக உள்ளது எனலாம்.

மிகை வீச்சு	குறை வீச்சு
0.01 லிருந்து 0.19 வரை: "மிகவும் பலவீனமான உடன்பாடு"	(-0.01) லிருந்து (-0.19) வரை: "மிகவும் பலவீனமான கருத்து வேறுபாடு/முரண்பாடு"
0.20 லிருந்து 0.39 வரை: "பலவீனமான உடன்பாடு"	(-0.20) லிருந்து (-0.39) வரை: "பலவீனமான கருத்து வேறுபாடு/முரண்பாடு"
0.40 லிருந்து 0.59 வரை: "மிதமான உடன்பாடு"	(-0.40) லிருந்து (-0.59) வரை: "மிதமான கருத்து வேறுபாடு/முரண்பாடு"
0.60 லிருந்து 0.79 வரை: "அதிகமான உடன்பாடு"	(-0.60) லிருந்து (-0.79) வரை: "அதிகமான கருத்து வேறுபாடு/முரண்பாடு"
0.80 லிருந்து 1.0 வரை: "மிகவும் அதிகமான உடன்பாடு"	(-0.80) லிருந்து (-1.0) வரை: "மிகவும் அதிகமான கருத்து வேறுபாடு/முரண்பாடு"

எடுத்துக்காட்டு 4.3

10 வகைப் பூக்களுக்கான அழகுப்போட்டியில் இரண்டு நடுவர்களின் தரங்கள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நடுவர் A	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
நடுவர் B	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

இரண்டு நடுவர்களுக்கு இடையேயான உடன்பாட்டின் தீவிரத்தை, தர ஒட்டுறவுக் கெழுவைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு:

நடுவர் A அளிக்கும் தரம் (R_{1i})	நடுவர் B அளிக்கும் தரம் (R_{2i})	$D_i = R_{1i} - R_{2i}$	D_i^2
1	6	-5	25
6	4	2	4
5	9	-4	16
10	8	2	4
3	1	2	4
2	2	0	0
4	3	1	1
9	10	-1	1
7	5	2	4
8	7	1	1
$n = 10$	$n = 10$		$\sum_{i=1}^n D_i^2 = 60$

இங்கு $n = 10$ மற்றும் $\sum_{i=1}^n D_i^2 = 60$

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 60}{10(10^2 - 1)} = 1 - \frac{360}{10(99)} = 1 - \frac{360}{990} = 0.636$$

விளக்கம்: நடுவர்கள் A, B க்கு இடையேயான உடன்பாட்டின் மதிப்பு 0.636. நடுவர்களுக்கு இடையே பூக்களை மதிப்பிடுதலில் "அதிகமான உடன்பாடு" உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

பின் வரும் தரவுகளுக்கு, ஸ்பியர்மான் தர ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

மாணவர்கள்	1	2	3	4	5
தமிழ் மதிப்பெண்	75	40	52	65	60
ஆங்கில மதிப்பெண்	25	42	35	29	33

தீர்வு:

தமிழ்		ஆங்கிலம்		$D_i = R_{1i} - R_{2i}$	D_i^2
மதிப்பெண்	தரம் (R_{1i})	மதிப்பெண்	தரம் (R_{2i})		
75	1	25	5	-4	16
40	5	42	1	4	16
52	4	35	2	2	4
65	2	20	4	-2	4
60	3	33	3	0	0
					40

இங்கு $\sum_{i=1}^n D_i^2 = 40$ மற்றும் $n = 5$

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 40}{5(5^2 - 1)} = 1 - \frac{240}{5(24)} = -1$$

விளக்கம்: இந்த முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு (-1) ஆனது இரண்டு பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் முழுமையாக முரண்படுவதைக் காட்டுகிறது. தமிழில் மிக அதிக மதிப்பெண் பெற்ற மாணவன் ஆங்கிலத்தில் மிகக் குறைந்த மதிப்பெண் பெற்றுள்ளான். மேலும் தமிழில் மிக குறைந்த மதிப்பெண் பெற்ற மாணவன் ஆங்கிலத்தில் மிக அதிக மதிப்பெண் பெற்றுள்ளான்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

ஒரு கூட்டு பங்கு நிறுவனத்தின் சாதாரண பங்குகளின் விலைகள், முன்னுரிமைப் பங்குகளின் விலைகளின் குறியீட்டெண்கள் பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டுகள்	2013	2014	2015	2016	2017	2008	2009
சாதாரண பங்குகள்	97.5	99.4	98.6	96.2	95.1	98.4	97.1
முன்னுரிமைப் பங்குகள்	75.1	75.9	77.1	78.2	79	74.6	76.2

தர ஒட்டுறவு முறையைப் பயன்படுத்தி சாதாரண பங்குகளுக்கும் முன்னுரிமைப் பங்குகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு:

சாதாரண பங்குகள்	முன்னுரிமைப் பங்குகள்	R_{1i}	R_{2i}	$D_i = R_{1i} - R_{2i}$	D_i^2
97.5	75.1	4	6	-2	4
99.4	75.9	1	5	-4	16
98.6	77.1	2	3	-1	1
96.2	78.2	6	2	4	16
95.1	79.0	7	1	6	36
98.4	74.6	3	7	-4	16
97.1	76.2	5	4	1	1
					$\sum_{i=1}^n D_i^2 = 90$

இங்கு $n = 7$ மற்றும் $\sum_{i=1}^n D_i^2 = 90$ தர ஒட்டுறவுக் கெழு.

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n(n^2 - 1)} \\ &= 1 - \frac{6 \times 90}{7(7^2 - 1)} = 1 - \frac{540}{7 \times 48} = 1 - \frac{540}{336} = 1 - 1.6071 = -0.6071 \end{aligned}$$

விளக்கம்: சாதாரண பங்குகளுக்கும், முன்னுரிமை பங்குகளுக்கும் இடையே எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது. சாதாரண பங்குகளுக்கும், முன்னுரிமை பங்குகளுக்கும் இடையே அதிகமான முரண்பாடு உள்ளது.

4.5.1 சமமான தரங்கள் (அல்லது) மீண்டும் மீண்டும் வரும் தரவுகள்

இரண்டு (அல்லது) அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு சமமான மதிப்புகள் இருப்பின், தரம் அளித்தல் என்பது கடினமானது. அப்பொழுது, அம்மதிப்புகளுக்கு சமமான தரம் இல்லாதபோது கொடுக்கும் தரங்களின் சராசரியைத் தரமாக குறிப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு மதிப்புகளுக்கு 8 ஆம் இடம் அளித்தால், $\frac{8+9}{2}=8.5$ என பொதுவான தரம் அம்மதிப்புகளுக்கு அளிக்க வேண்டும். அடுத்த தரம் 10 ஆகும். மூன்று மதிப்புகளின் தரம் 8 எனில் அவற்றிற்கு $\frac{8+9+10}{3}=9$ என பொதுவான தரம் அளிக்க வேண்டும். அடுத்த தரம் 11 ஆகும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு சமமான மதிப்புகள் இருப்பின் வேறுவிதமான வாய்பாட்டை பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\rho = 1 - 6 \left[\frac{\sum D_i^2 + \frac{1}{12}(m_1^3 - m_1) + \frac{1}{12}(m_2^3 - m_2) + \dots}{n(n^2 - 1)} \right]$$

இங்கு m_i என்பது சம தரங்கள் பெற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

பின்வரும் தரவுகள், 8 மாணவர்கள் வணிகவியல் மற்றும் கணிதவியல் பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களைக் குறிக்கிறது. இவற்றின் தர ஒட்டுறவுக்கெழுவைக் கணக்கிடுக.

வணிகவியல் மதிப்பெண்கள்	15	20	28	12	40	60	20	80
கணிதவியல் மதிப்பெண்கள்	40	30	50	30	20	10	30	60

தீர்வு:

வணிகவியல் மதிப்பெண்கள் (X)	தரவு (R_{1i})	கணிதவியல் மதிப்பெண்கள் (Y)	தரவு (R_{2i})	$D_i = R_{1i} - R_{2i}$	D_i^2
15	2	40	6	-4	16
20	3.5	30	4	-0.5	0.25
28	5	50	7	-2	4
12	1	30	4	-3	9
40	6	20	2	4	16
60	7	10	1	6	36
20	3.5	30	4	-0.5	0.25
80	8	60	8	0	0
				மொத்தம்	$\sum D^2 = 81.5$

$$\rho = 1 - 6 \left[\frac{\sum D_i^2 + \frac{1}{12}(m_1^3 - m_1) + \frac{1}{12}(m_2^3 - m_2) + \dots}{n(n^2 - 1)} \right]$$

திரும்பவும் வரும் தரங்கள்

வணிகவியலில் 20 என்பது 3 மற்றும் 4 வது தரத்திற்கு இரண்டு முறை மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது. ஆகையால் அத்தரங்களுக்குச் சராசரியான 3.5 ஒதுக்கப்படவேண்டும் மேலும் $m_1 = 2$.

$$\text{அத்தரங்களின் சராசரி} = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

$$m_1 = 2$$

கணிதத்தில் (Y) 30 என்பது 3,4,5 தரத்திற்கு 3 முறை வந்துள்ளதால் அதன் சராசரியான 4 ஐ மூன்று தரத்திற்கு வழங்கவேண்டும் மேலும் $m_2 = 3 = \frac{3+4+5}{3} = 4$

$$\rho = 1 - 6 \left[\frac{81.5 + \frac{1}{12}(2^3 - 2) + \frac{1}{12}(3^3 - 3)}{8(8^2 - 1)} \right]$$

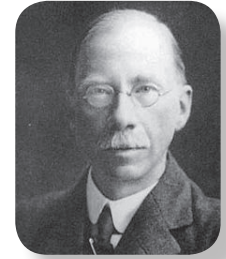
$$= 1 - 6 \left[\frac{81.5 + 0.5 + 2}{504} \right] = 1 - \frac{504}{504} = 0$$

விளக்கம்: வணிகவியல் மற்றும் கணித பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்கு இடையே ஒட்டுறவு இல்லை.

4.6 யூலின் தொடர்புக் கெழு

யூலின் தொடர்புக் கெழு என்பது இரு நிலைகளைக் கொண்ட இரு பண்புகள் A, B க்கு இடையே உள்ள தொடர்பினைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது. பண்புகளுக்கான எடுத்துக்காட்டு: மது அருந்துதல், புகைபிடித்தல், குருட்டுத்தன்மை, நேர்மை முதலியன.

உட்னியூல் (Udny Yule) ஒரு இங்கிலாந்து நாட்டைச் சேர்ந்த புள்ளியியலாளர். இவர் வின்செஸ்டர் கல்லூரியிலும், இலண்டனில் உள்ள பல்கலைக்கழகக் கல்லூரியிலும் கல்வி கற்றார். செய்முறை இயற்பியலில் ஒரு வருட நீண்ட ஆராய்ச்சிக்குப்பின் இவர் மீண்டும் 1893 இல் பல்கலைக்கழகக் கல்லூரியில் கார்ல் பியர்சானுக்கு செய்முறையாளராக பணிபுரியச் சென்றார். பியர்சான் புள்ளியியலில் பணி புரிவதுவங்கினார். யூலும் அவரை இப்புதியபுலத்தில் பின்பற்றினார். யூல் ஓர் அருமையான எழுத்தாளர் மற்றும் ராயல் புள்ளியியல் சமூகத்தில் செயலாற்றி சிறந்த தங்கப்பதகத்தினை 1911 இல் பெற்றார். அதன் தலைவராக 1924-26 இல் பணியாற்றினார். தொடர்புகளுக்கிடையேயான கருத்துகளுக்கு காரணமானவராக விளங்கினார்.



உட்னி யூல்
(1871-1951)

தொடர்புக்கெழு

யூலின் தொடர்புக்கு பண்புகளுக்கிடையேயான தொடர்பின் தீவிரம் மற்றும் திசையினை அளக்கிறது. தொடர்பு என்பது பண்புகளுக்கிடையேயான உடன்பாட்டின் அளவைக்குறிப்பதாகும்.

இரு மாறிகளின் 2×2 நேர்வுப் பட்டியல் வடிவம்

பண்பு A ↓	பண்பு B		மொத்தம்
	உண்டு B	இல்லை β	
உண்டு A	(AB)	(Aβ)	(A)
இல்லை α	(αB)	(αβ)	(α)
மொத்தம்	(B)	(β)	N

$$\text{யூலின் தொடர்புக் கெழு: } Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

குறிப்பு 1: மிகைகாண் நிலை α வுடன் இந்த α வினை ஒப்பிடக்கூடாது.

குறிப்பு 2: (AB): AB பண்பளவையின் எண்ணிக்கையாகும்.

கெழுவின் வீச்சு -1 இலிருந்து +1 வரை இருக்கும். -1 இலிருந்து 0 வரை உள்ள மதிப்புகள், மாறிகளின் எதிரிடைத் தொடர்பை குறிக்கின்றன. 0 இலிருந்து +1 வரை உள்ள மதிப்புகள் மாறிகளின் நேரிடைத் தொடர்பை குறிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

1800 மாணவர்கள் கலந்துக் கொண்ட ஒரு போட்டித் தேர்வில் 625 பேர் வெற்றி பெற்றனர். தனிப் பயிற்சி பெற்ற 300 பேரில் 180 பேர் வெற்றி பெற்றனர். தனிப்பயிற்சியின் பயன்பாட்டை மதிப்பிடுக.

தீர்வு:

$$N = 1800$$

A: வெற்றி பெற்ற மாணவர்கள்,

α: தோல்வியுற்ற மாணவர்கள்

B: தனிப்பயிற்சி பெற்ற மாணவர்கள்,

β: தனிப்பயிற்சி பெறாத மாணவர்கள்

$$(A) = 625, (B) = 300, (AB) = 180$$

	B	β	மொத்தம்
A	180	445	625
α	120	1055	1175
மொத்தம்	300	1500	N = 1800

$$\begin{aligned} \text{யூலின் தொடர்புக் கெழு: } Q &= \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)} \\ &= \frac{180 \times 1055 - 445 \times 120}{180 \times 1055 + 445 \times 120} \\ &= \frac{189900 - 53400}{189900 + 53400} \\ &= \frac{136500}{243300} \\ &= 0.561 > 0 \end{aligned}$$

விளக்கம்: தேர்வில் வெற்றி பெற்றமைக்கும் தனிபயிற்சி வகுப்பிற்கும் இடையே நேரிடைத் தொடர்பு உள்ளது. தனிபயிற்சி வகுப்பு தேர்விற்கு பயனுள்ளதாக உள்ளது.

குறிப்பு: நேர்வு பட்டியலைப் பயன்படுத்தி தரவுகளின் பொருத்தமுடையமை அறிதல்

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கு 2×2 நேர்வு பட்டியலை அமைக்கவும். ஏதேனும் ஒரு கட்ட நிகழ்வெண் குறையெண்ணாக இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட தரவுகள் பொருத்தமுடையவை அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 4.8

பொருத்தமுடையமைச் சரிபார்: $N = 100$, $(A) = 75$, $(B) = 60$, $(AB) = 15$.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கீழ்க்கண்ட நேர்வு பட்டியலில் குறிக்கவும்.

	B	β	மொத்தம்
A	15	60	75
α	45	-20	25
மொத்தம்	60	40	$N = 100$

இங்கு $(\alpha\beta) = -20$

விளக்கம்: நேர்வு பட்டியலில் ஒரு கட்ட நிகழ்வெண் குறையெண்ணாக உள்ளது. எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகள் பொருத்தமுடையது அல்ல.

நினைவில் கொள்க

- ❖ ஒட்டுறவு என்பது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்கோட்டுத் தொடர்பை பற்றிக் கற்பதாகும். ஒட்டுறவு என்பது "காரணம்" அல்ல சில நேரங்களில் ஒட்டுறவு என்பது "ஸ்பூரியஸ்" ஆகவும் இருக்கலாம்.
- ❖ ஒட்டுறவுக் கெழு -1 க்கும் $+1$ க்கும் இடையே அமையும்.
- ❖ பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது விகித அளவில் உள்ள தரவுகளின் தொடர்பின் வகைகளைப் பற்றியும் தொடர்பின் தீவிரத்தையும் அளிக்கிறது.
- ❖ ஸ்பியர்மான் ஒட்டுறவு இரண்டு வரிசை அளவு மாறிகளின் (ordinal variables) தொடர்பைக் கணக்கிடுகிறது.
- ❖ 2×2 நேர்வு பட்டியலில் உள்ள தொடர்பு பண்புகளை அறிய யூலின் தொடர்புக் கெழு பயன்படுகிறது



பயிற்சிகள் 4

I. மிகச் சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:



- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் உடன்மாறுபாட்டளவை காண உதவும் புள்ளியியல் கருவி
(அ) மாறுபாட்டளவை (ஆ) நிகழ்தகவு
(இ) ஒட்டுறவுக் கெழு (ஈ) கோட்டக் கெழு
- "ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு என்பது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை அளவிடும் முயற்சி" என்ற வரையறையை கூறியவர்.
(அ) ஏ.எம். டட்டில் (ஆ) யா-குன்-செள
(இ) ஏ.எல். பெளலி (ஈ) கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன்
- இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே நேர்கோட்டு உறவு இல்லை என்பதைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.
(அ) நேர்ஒட்டுறவு (ஆ) எதிர் ஒட்டுறவு
(இ) ஒட்டுறவின்மை (ஈ) ஸ்பூரியஸ் ஒட்டுறவு
- குறிக்கப்பட்ட எல்லா புள்ளிகளும் இடது மேல் முனையிலிருந்து வலது கீழ்முனை வரை ஒரு நேர் கோட்டில் அமைந்திருந்தால் அதனை பின்வருமாறு கூறலாம்
(அ) முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு (ஆ) முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு
(இ) நேர் ஒட்டுறவு (ஈ) எதிர் ஒட்டுறவு
- $r = +1$ எனில் இந்த ஒட்டுறவைப் பின்வருமாறு கூறலாம்
(அ) முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு (ஆ) முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு
(இ) நேர் ஒட்டுறவு (ஈ) எதிர் ஒட்டுறவு
- ஒட்டுறவுக்கெழு அமையும் இடைவெளி
(அ) $-1 \leq r \leq 0$ (ஆ) $-1 < r < 1$ (இ) $0 \leq r \leq 1$ (ஈ) $-1 \leq r \leq 1$
- தர ஒட்டுறவுக்கெழு
(அ) $1 + \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n^3 - n}$ (ஆ) $1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n^3 - n}$ (இ) $1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^2}{n^3 + n}$ (ஈ) $1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n D_i^3}{n(n^2 - 1)}$
- $\sum D^2 = 0$, எனில் தர ஒட்டுறவு
(அ) 0 (ஆ) 1 (இ) 0.5 (ஈ) -1
- தர ஒட்டுறவை உருவாக்கியவர்
(அ) பியர்சான் (ஆ) ஸ்பியர்மான்
(இ) பூல் (ஈ) ஃபிஷர்
- விலக்கப் பெருக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு என்பது
(அ) $r = \frac{\sigma_x \sigma_y}{\text{COV}(x, y)}$ (ஆ) $r = \sqrt{\sigma_x \sigma_y}$ (இ) $r = \frac{\text{COV}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$ (ஈ) $r = \frac{\text{COV}(x, y)}{\sigma_{xy}}$



11. சிறந்த செயற்பாட்டினைப் பாதிக்கக்கூடிய காரணிகளைக் கண்டு அதைக் கட்டுப்படுத்துதல் _____ ன் நோக்கமாகும்.
(அ) சராசரி (ஆ) ஒட்டுறவு (இ) திட்ட விலக்கம் (ஈ) கோட்ட அளவை
12. ஒரு குழுவில் உள்ளவர்களின் உயரம் மற்றும் எடை என்பது _____ ஒட்டுறவு.
(அ) நேர் (ஆ) எதிர்
(இ) பூஜியம் (ஈ) நேர் மற்றும் எதிர் இரண்டும்
13. வரிசை அளவு (ordinal scale) உடைய இருமாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பு பற்றியது
(அ) எ.எம். டட்டில் தர ஒட்டுறவு (ஆ) கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன் தர ஒட்டுறவு
(இ) கார்ல் பியர்சனின் தர ஒட்டுறவு (ஈ) ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவு
14. இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள அளவையியல் தொடர்பின் வரைபட விளக்கம் _____ ஆகும்.
(அ) சிதறல் விளக்கப்படம் (ஆ) பட்டை விளக்கப்படம்
(இ) பெரிட்டோ வரைபடம் (ஈ) வட்ட விளக்கப்படம்
15. _____ இரு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை அளப்பது.
(அ) திட்ட விலக்கம் (ஆ) ஒட்டுறவு
(இ) விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (ஈ) இடைநிலை அளவு
16. மாறிகள் x மற்றும் y ன் ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் சமச்சீர் எனில்
(அ) $r_{xy} = r_{yx}$ (ஆ) $r_{xy} > r_{yx}$ (இ) $r_{xy} < r_{yx}$ (ஈ) $r_{xy} \neq r_{yx}$
17. $\text{cov}(x, y) = 0$ எனில் இதன் விளக்கம்
(அ) x மற்றும் y க்கு கிடையே நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது
(ஆ) x மற்றும் y க்கு கிடையே எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது
(இ) x மற்றும் y க்கு கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை
(ஈ) இவற்றில் எதுவும் இல்லை
18. தரவுகள் _____ அளவையில் இருந்தால் தர ஒட்டுறவு பயன்படுத்தப்படும்.
(அ) விகித (ஆ) வரிசை (இ) பெயர் (ஈ) விகிதம் மற்றும் பெயர்
19. $r = 0$ எனில் $\text{cov}(x, y) =$
(அ) 0 (ஆ) +1 (இ) -1 (ஈ) α
20. $\text{cov}(x, y) = \sigma_x \sigma_y$ எனில்
(அ) $r = 0$ (ஆ) $r = -1$ (இ) $r = +1$ (ஈ) $r = \alpha$



II. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்களில்) குறுகிய விடைதருக:

21. ஒட்டுறவு என்றால் என்ன?
22. 'ஏ.எம். டட்டில்' இன் ஒட்டுறவு பற்றிய வரையறையை எழுதுக.
23. ஒட்டுறவின் பல்வேறு வகைகளை எழுதுக?
24. எளிய ஒட்டுறவின் வகைகளை எழுதுக?
25. ஒட்டுறவின்மை பற்றி நீவீர் அறிவதுயாது?
26. ஸ்பூரியஸ் ஒட்டுறவு பற்றி நீவீர் அறிவது யாது.
27. சிதறல் விளக்கப்படம் என்றால் என்ன?
28. உடன் மாறுபாட்டளவையை வரையறு.
29. தர ஒட்டுறவை வரையறு.
30. $\sum D^2 = 0$ எனில் ஸ்பியர் மேனின் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவின் முடிவினை விளக்குக.
31. எடுத்துக்காட்டு தருக (i) நேர் ஒட்டுறவு
(ii) எதிர் ஒட்டுறவு (iii) ஒட்டுறவின்மை
32. இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை எனில் r இன் மதிப்பு என்ன?
33. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு +1 என இருப்பின் உனது விளக்கத்தைக் கூறுக.

III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்றொடர்களில்) சுருக்கமான விடைதருக:

34. ஒட்டுறவின் எவையேனும் மூன்று பயன்களை எழுதுக
35. கார்ல் பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரையறு.
36. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு 0 மற்றும் +1க்கு இடையில் அமையும் பொழுது அதன் விளக்கத்தை எழுதுக.
37. ஒட்டுறவின் ஏதேனும் மூன்று பண்புகளை எழுதுக.
38. தர ஒட்டுறவுக் கெழு $r = 0.8$, $\sum D^2 = 3$ எனில் n இன் மதிப்புகாண்க
39. சிதறல் விளக்கப்படத்தில் ஏதேனும் மூன்று நிறைகளை எழுதுக.
40. $\text{cov}(x, y) = 18.6$, x இன் மாறுபாடு = 20.2, y -ன் மாறுபாடு = 23.7 எனில் r இன் மதிப்பு காண்க.
41. வழக்கமான குறியீடுகளில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் பொருத்தமுடைமையை ஆராய்க. $N = 1000$, $(A) = 600$, $(B) = 500$, $(AB) = 50$.

IV. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக:

42. ஒட்டுறவின் பல்வேறு வகைகளை விவரி.
43. சிதறல் விளக்கப்படத்தை விவரி.
44. பின் வரும் தரவுகளுக்கு கார்ல் பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிட்டு விளக்கம் தருக.

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	15	16	14	13	11	12	10	8	9

45. பின்வரும் தரவுகளுக்கு கார்ல் பியர்சானின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

கூலி	100	101	102	102	100	99	97	98	96	95
வாழ்க்கைச் செலவு	98	99	99	97	95	92	95	94	90	91

கூலியும் வாழ்க்கைச் செலவும் எவ்வாறு தொடர்புடையது எனக் காண்க.

46. 6 மாணவர்களின் புள்ளியியல் மற்றும் கணிதவியல் பாடங்களின் மதிப்பெண்களுக்குகிடையே உள்ள (மொத்த மதிப்பெண் 10) கார்ல் பியர்சான் ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

மாணவர்	1	2	3	4	5	6
புள்ளியியல்	7	4	6	9	3	8
கணிதவியல்	8	5	4	8	3	6

47. ஒரு நகரத்தில் சந்தை ஆய்வில் தரத்தின் அடிப்படையில் தேநீர் மற்றும் காப்பியின் விலை நிலவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையிலான தர ஒட்டுறவைக் காண்க.

தேநீர் விலை	88	90	95	70	60	75	50
காப்பியின் விலை	120	134	150	115	110	140	100

48. பின்வரும் விலை மற்றும் அளிப்பு பற்றிய தரவுகளுக்கு ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவை கணக்கிடுக.

விலை	4	6	8	10	12	14	16	18
அளிப்பு	10	15	20	25	30	35	40	45

49. சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 5 கல்லூரி மாணவர்களின் தமிழ், ஆங்கில மதிப்பெண்கள் பின் வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஸ்பியர்மேனின் தர ஒட்டுறவை காண்க.

தமிழ்	85	60	73	40	90
ஆங்கிலம்	93	75	65	50	80

50. பின்வரும் தரவுகளுக்கு ஸ்மேனின் தர ஒட்டுறவைக் காண்க.

x	53	98	95	81	75	71	59	55
y	47	25	32	37	30	40	39	45

51. பின்வரும் தரவுகளுக்கு தரமுறையைப் பயன்படுத்தி ஒட்டுறவுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

தமிழ் மதிப்பெண்	29	24	25	27	30	31
ஆங்கில மதிப்பெண்	29	19	30	33	37	36

52. பின்வரும் தரவுகளுக்கு தர ஒட்டுறவுக்கெழுவை கணக்கிடுக.

x	49	34	41	10	17	17	66	25	17	58
y	14	14	25	7	16	5	21	10	7	20

53. பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து ஹெப்பாடிடிஸ் B (Hepatitis B) என்ற நோயை தடுக்க தடுப்பூசி, தடுப்பு முறையாக ஏற்றுக்கொள்ளலாமா? "1500 பேர் கொண்ட பகுதியில் 400 பேரை ஹெப்பாடிடிஸ் B என்ற நோய் தாக்கியது. 750 பேர் தடுப்பூசி போட்டுக் கொண்டனர் அவர்களில் 75 பேரை அந்த நோய் தாக்கியது".



விடைகள்

- I**
- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (இ) | 2. (ஆ) | 3. (இ) | 4. (ஆ) | 5. (அ) |
| 6. (ஈ) | 7. (ஆ) | 8. (ஆ) | 9. (ஆ) | 10. (ஆ) |
| 11. (ஆ) | 12. (அ) | 13. (ஈ) | 14. (அ) | 15. (ஆ) |
| 16. (அ) | 17. (இ) | 18. (ஆ) | 19. (அ) | 20. (இ) |

II 30. $r = 1$

III 38. $n = 10$

40. $r = 0.85$

41. $(\alpha\beta) = -50$, கொடுக்கப்பட்ட தரவுகள் பொருத்தமுடையன அல்ல

IV 44. $r = 0.95$ அதிக நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது

45. $r = 0.847$ கூலிக்கும், வாழ்க்கைச் செலவுக்கும் இடையே அதிக நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது.

46. $r = 0.8081$. புள்ளியியல் மற்றும் கணிதவியல் மதிப்பெண்களுக்கு இடையே அதிக நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது.

47. $\rho = 0.8929$ தேநீர் மற்றும் காபியின் விலைகளுக்கு இடையே அதிக நேர் ஒட்டுறவு உள்ளது.

48. $\rho = 1$ (முழுமையான நேர் ஒட்டுறவு)

49. $\rho = 0.8$

50. $\rho = -0.905$ x மற்றும் y க்கு இடையே அதிக எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது.

51. $\rho = -0.78$ தமிழ் மற்றும் ஆங்கில மதிப்பெண்களுக்கு இடையே எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது.

52. $\rho = +0.733$

53. தடுப்பூசி போட்டமைக்கும், நோய் தாக்கப்பட்டதற்கும் இடையே எதிரிடைத் தொடர்பு உள்ளது. தடுப்பூசி போடாமல் இருப்பதற்கும், நோய் தாக்கப்படாமல் இருப்பதற்கும் இடையே நேரிடைத் தொடர்பு உள்ளது. எனவே ஹெப்பாடிடிஸ் B யை தடுக்கும் முறையாக தடுப்பூசி போடுதலை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

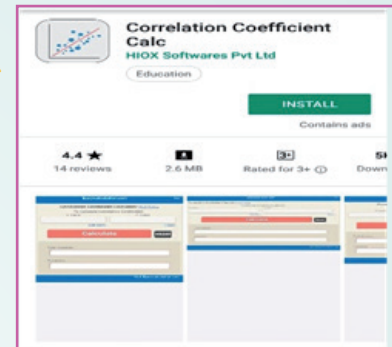


ICT CORNER

CORRELATION ANALYSIS

STATS IN YOUR PALM

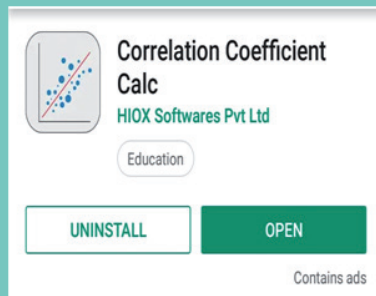
This activity is to calculate
Correlation Coefficient



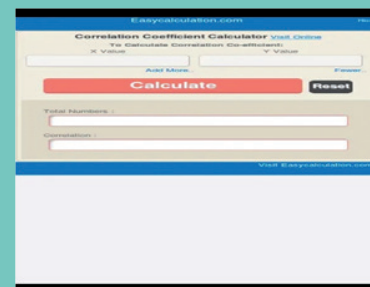
Steps:

- This is an android app activity. Open the browser and type the URL given (or) scan the QR code. (Or) search for “**Correlation Coefficient**” in google play store.
- (i) Install the app and open the app, (ii) To calculate Correlation Co-efficient in put the the values of X and Y in the given box (iii) Then click “**CALCULATE**” we will get the result.

Step-1



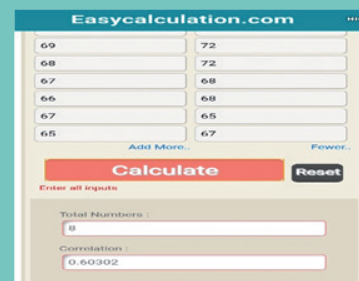
Step-2



Step-3



Result



Pictures are indicatives only*

URL:

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hiox.CreliCoefficientCalcu>



B236_12_STATIST
ICS_TM