माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ०प्र० द्वारा निर्धारित नवीनतम पाठ्यक्रमानुसार

U.P. Series

गणित

कक्षा-9

लेखन
अनुभवी लेखकों के द्वारा

इकाई-1 बीजगणित व लघुगणक
(Algebra and Logarithms)

1

बहुपद
(Polynomials)

अभ्यास 1.1

1. निम्नलिखित फलनों में से बहुपद छाँटकर लिखिए—

(i) $6x^2 - 5x + 1$ (ii) $\sqrt{5}x^3 + \sqrt{2}x$

(iii) $u^{3/2} + 7u^{1/2} + 1$ (iv) $\sqrt{6}t^6 - 1$

(v) $5\sqrt{x} + x^{3/2} + x$ (vi) $y^3 - y^2 + 1$

हल—

(i) फलन $6x^2 - 5x + 1$ एक बहुपद है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद में चर x का घातांक एक ऋणेतर पूर्णांक है। **उत्तर**

(ii) फलन $\sqrt{5}x^3 + \sqrt{2}x$ एक बहुपद है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद में चर x का घातांक एक ऋणेतर पूर्णांक है। **उत्तर**

(iii) फलन $u^{3/2} + 7u^{1/2} + 1$ एक बहुपद नहीं है, क्योंकि इसके पहले पद में चर u का घातांक 3/2 तथा दुसरे पद में चर u का घातांक 1/2 है जो कि एक भिन्नात्मक संख्या है। **उत्तर**

(iv) फलन $\sqrt{6}t^6 - 1$ एक बहुपद है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद में चर t का घातांक एक ऋणेतर पूर्णांक है। **उत्तर**

(v) फलन $5\sqrt{x} + x^{3/2} + x$ एक बहुपद नही है, क्योंकि इसके पहले पद में चर x का घातांक 1/2 तथा दुसरे पद में चर x का घातांक 3/2 है जो कि एक भिन्नात्मक संख्या है। **उत्तर**

(vi) फलन $y^3 - y^2 + 1$ एक बहुपद है, क्योंकि इसके प्रत्येक पद में चर y का घातांक एक ऋणेतर पूर्णांक है। **उत्तर**

2. निम्नलिखित बहुपदों को मानक रूप में लिखिए।

(i) $t^3 - t + t^2 - \sqrt{3}$

(ii) $u^5 + u^2 - \sqrt{5}u + 2u^4$

(iii) $\sqrt{3}x^5 + \sqrt{3}x - \sqrt{2}x^8 + \frac{1}{2}x^2 + 4$

(iv) $y^7 - 4y^5 + \sqrt{3}y + \frac{2}{3}y^2 - y^6 + 3$

हल—

(i) चर t की घातों के अवरोही (घटते क्रम) क्रम में लिखने पर दिए हुए बहुपद का मानक रूप निम्नलिखित है—

$$t^3 + t^2 - t - \sqrt{3}$$ **उत्तर**

(ii) चर u की घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर दिए हुए बहुपद का मानक रूप निम्नलिखित है—

$$u^5 + 2u^4 + u^2 - \sqrt{5}u$$ **उत्तर**

(iii) चर x की घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर दिए हुए बहुपद का मानक रूप निम्नलिखित है—

$$-\sqrt{2}x^8 + \sqrt{3}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x + 4$$ **उत्तर**

(iv) चर y की घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर दिए हुए बहुपद का मानक रूप निम्नलिखित है—

$$y^7 - y^6 - 4y^5 + \frac{2}{3}y^2 + + \sqrt{3}y + 3$$ **उत्तर**

3. निम्न व्यजकों में एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी ज्ञात कीजिए।

(i) $5y^2 + 3y$ — उत्तर— द्विपदी

(ii) 6 — उत्तर— एकपदी

(iii) $6x^6 - 5x^4 + 3x$ — उत्तर— त्रिपदी

(iv) $px^2 + qx + r$ — उत्तर— त्रिपदी

(v) $t^2 + 2t$ — उत्तर— द्विपदी

(vi) $u^6 - \frac{5}{4}u^3 + 7$ — उत्तर— त्रिपदी

(vii) $3x^2 + 2x$ — उत्तर— द्विपदी

(viii) $5t^4$ — उत्तर— एकपदी

अभ्यास 1.2

1. निम्नलिखित बहुपदों की घात बताइए।

(i) $5x + 2$ (ii) 6

(iii) $-4x^3 - 2x^2 + 3$ (iv) $x^2 - 3x + 2x^2 - 5x^3$

(v) $\frac{6}{5}(3t - 5t)$

(vi) $3m^4 - m^2 - 9 - 6m^3 - m^4 + 5 + 6m^3 - 2m^4 + m^2 + 4$

हल—हमें ज्ञात है—

बहुपद की घात = बहुपद में चर के सबसे बड़े घात वाले पद का घातांक

(i) बहुपद $5x + 2$ में चर x के सबसे बड़े घात वाले पद $5x$ का घातांक 1 है
अत: बहुपद $5x + 2$ की घात 1 है। **उत्तर**

(ii) बहुपद 6 माना $p(x) = 6$ अत: $px = 6\times 1 = 6\times x^o = 6x^o$
अत : बहुपद $6x^o$ की घात 0 है। **उत्तर**

(iii) बहुपद $-4x^3 - 2x^2 + 3$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $-4x^3$ का घातांक 3 है, अत: बहुपद $-4x^3 - 2x^2 + 3$ की घात 3 है **उत्तर**

(iv) बहुपद $x^2 - 3x + 2x^2 - 5x^3$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $-5x^3$ का घातांक 3 है, अत: बहुपद $x^2 - 3x + 2x^2 - 5x^3$ की घात 3 है। **उत्तर**

(v) बहुपद $\frac{6}{5}(3t - 5t)$ में चर t की सबसे बड़ी घात वाले पद $(3t - 5t)$ या $(-2t)$ का घातांक 1 है अत: बहुपद $\frac{6}{5}(3t - 5t)$ की घात 1 है। **उत्तर**

(vi) बहुपद $3m^4 - m^2 - 9 - 6m^3 - m^4 + 5 + 6m^3 - 2m^4 + m^2 + 4$ को हल करने पर

$3m^4 - 3m^4 - 6m^3 + 6m^3 - m^2 + m^2 - 9 + 9 = 0$
अत:उपरोक्त बहुपद की कोई घात नहीं है। **उत्तर**

2. यदि $p(m) = 6m^5 + 3m^4 + 8m^3 + 2m^2 - 2m + 6$ तथा
$q(m) = (-3m^2 + 2m + 1)$
तब ज्ञात कीजिए $p(m) + q(m)$ तथा इसकी घात भी बताइए।

हल— $p(m) + q(m) = 6m^5 + 3m^4 + 8m^3 + 2m^2 - 2m + 6 - 3m^3 + 2m + 1$

$$p(m) + q(m) = 6m^5 + 3m^4 + 5m^3 + 2m^2 + 7$$

इस प्रकार प्राप्त हुए $p(m) + q(m)$ बहुपद में चर m की सबसे बड़ी घात वाले पद $6m^5$ का घातांक 5 है।

अत: बहुपद $p(m) + q(m) = 6m^5 + 3m^4 + 5m^3 + 2m^2 + 7$ की घात 5 है। **उत्तर**

3. निम्न बहुपदों का योगफल ज्ञात कर, उनकी घात भी बताइए।

(i) $t^6 - 3t^4$ तथा $t^4 + t^3 + 2t^2 - 6$

हल—माना
$$p(t) = t^6 - 3t^4$$
$$q(t) = t^4 + t^3 + 2t^2 - 6$$
$$p(t) + q(t) = t^6 - 3t^4 + t^4 + t^3 + 2t^2 - 6$$
$$p(t) + q(t) = t^6 + (-3t^4 + t^4) + t^3 + 2t^2 - 6$$
$$= t^6 - 2t^4 + t^3 + 2t^2 - 6$$

चूँकि $p(t) + q(t)$ बहुपद में चर t की सबसे बड़ी घात वाले पद t^6 का घातांक 5 है।
अत: बहुपद $p(t) + q(t) = t^6 - 2t^4 + t^3 + 2t^2 - 6$ की घात 6 है। **उत्तर**

(ii) $m^3 - 3m^2 + 6$ तथा $m^2 - m + 4$

हल—माना
$$p(m) = m^3 - 3m^2 + 6$$
$$q(m) = m^2 - m + 4$$
$$p(m) + q(m) = m^3 - 3m^2 + 6 + m^2 - m + 4$$
$$= m^3 + (-3m^2 + m^2) - m + 6 + 4$$
$$p(m) + q(m) = m^3 - 2m^2 - m + 10$$

चूँकि $p(m)+q(m)$ बहुपद में चर m की सबसे बड़ी घात वाले पद m^3 का घातांक 3 है।

अतः बहुपद $p(m)+q(m)=m^3-2m^2-m+10$ की घात 3 है। **उत्तर**

(iii) $x^4+x^3+2x^2-6$ **तथा** $x^6-3x^4-x^3$

हल—माना $p(x)=x^4+x^3+2x^2-6$

$q(x)=x^6-3x^4-x^3$

$$p(x)+q(x)=x^4+x^3+2x^2-6+x^6-3x^4-x^3$$
$$=x^6+(x^4-3x^4)+(x^3-x^3)+2x^2-6$$
$$p(x)+q(x)=x^6-2x^4+2x^2-6$$

चूँकि $p(x)+q(x)$ बहुपद में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद x^6 का घातांक 6 है।

अतः बहुपद $p(x)+q(x)=x^6-2x^4+2x^2-6$ की घात 6 है। **उत्तर**

(iv) x^5-3x^3-6x+2 **तथा** x^5-3x^3+2x+6

हल—माना $p(x)=x^5-3x^3-6x+2$

$q(x)=x^5-3x^3+2x+6$

$$p(x)+q(x)=x^5-3x^3-6x+2+x^5-3x^3+2x+6$$
$$=(x^5+x^5)+(-3x^3-3x^3)+(-6x+2x)+(2+6)$$
$$p(x)+p(x)=2x^5-6x^3-4x+8$$

चूँकि $p(x)+q(x)$ बहुपद में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद x^5 का घातांक 5 है।

अतः बहुपद $p(x)+q(x)=2x^5-6x^3-4x+8$ की घात 5 है। **उत्तर**

4. नीचे दिए गए पहले बहुपद में से दूसरे बहुपद को घटाइए और अन्तर की घात भी बताइए।

(i) $7x^3+x^2-3x+4;\ 8x^3-3x^2+5x-9$

हल—माना $p(x)=7x^3+x^2-3x+4$

$q(x)=8x^3-3x^2+5x-9$

$$p(x)-q(x)=(7x^3+x^2-3x+4)-(8x^3-3x^2+5x-9)$$
$$=(7x^3+x^2-3x+4)+(-8x^3+3x^2-5x+9)$$
$$=(7x^3-8x^3)+(x^2+3x^2)+(-3x-5x)+(4+9)$$
$$p(x)-q(x)=-x^3+4x^2-8x+13$$

चूँकि बहुपद $p(x)-q(x)$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $-x^3$ का घातांक 3 है।

अतः बहुपद $p(x)-q(x)=-x^3+4x^2-8x+13$ की घात 3 है। **उत्तर**

(ii) $3x^7-2x^2+3;\quad x^6-3x^4+x^2+x$

हल—माना $p(x)=3x^7-2x^2+3$

$q(x)=x^6-3x^4+x^2+x$

$$p(x)-q(x)=(3x^7-2x^2+3)-(x^6-3x^4+x^2+x)$$
$$=(3x^7-2x^2+3)+(-x^6+3x^4-x^2-x)$$
$$=3x^7-x^6+3x^4+(-2x^2-x^2)-x+3$$
$$p(x)-q(x)=3x^7-x^6+3x^4-3x^2-x+3$$

चूँकि बहुपद $p(x)-q(x)$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $3x^7$ का घातांक 7 है।

अतः बहुपद $p(x)-q(x)=3x^7-x^6+3x^4-3x^2-x+3$ की घात 7 है। **उत्तर**

(iii) $6x^3+5x^2+4x-5$; $4x^3-2x^2+7x-6$

हल—माना
$$p(x)=6x^3+5x^2+4x-5$$
$$q(x)=4x^3-2x^2+7x-6$$
$$p(x)-q(x)=(6x^3+5x^2+4x-5)-(4x^3-2x^2+7x-6)$$
$$=(6x^3+5x^2+4x-5)+(-4x^3+2x^2-7x+6)$$
$$=(6x^3-4x^3)+(5x^2+2x^2)+(4x-7x)+(-5+6)$$
$$p(x)-q(x)=2x^3+7x^2-3x+1$$

चूँकि बहुपद $p(x)-q(x)$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $2x^3$ का घातांक 3 है।

अतः बहुपद $p(x)-q(x)=2x^3+7x^2-3x+1$ की घात 3 है। **उत्तर**

(iv) $9-7x-2x^3$; $-3x^5+6x-8$

हल—माना
$$p(x)=9-7x-2x^3$$
$$q(x)=-3x^5+6x-8$$
$$p(x)-q(x)=(9-7x-2x^3)-(-3x^5+6x-8)$$
$$=(9-7x-2x^3)+(3x^5-6x+8)$$
$$=3x^5-2x^3+(-7x-6x)+(8+9)$$
$$p(x)-q(x)=3x^5-2x^3-13x+17$$

चूँकि बहुपद $p(x)-q(x)$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $3x^5$ का घातांक 5 है।

अतः बहुपद $p(x)-q(x)=3x^5-2x^3-13x+17$ की घात 5 है। **उत्तर**

(v) $\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}x+1$; $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x-1$

हल—माना
$$p(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}x+1$$
$$q(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x-1$$
$$p(x)-q(x)=\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}x+1\right)-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x-1\right)$$
$$=\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+1\right)$$
$$=\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{4}x^4\right)+\frac{1}{3}x^2+\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x\right)+(1+1)$$
$$=\frac{2}{4}x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{2}x+2$$
$$p(x)-q(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^2-x+2$$

चूँकि बहुपद $p(x)-q(x)$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद $\frac{1}{2}x^4$ का घातांक 4 है।

अतः बहुपद $p(x)-q(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^2-x+2$ की घात 4 है। **उत्तर**

5. $x^7+4x^3-9x^5-6$ में क्या जोड़ें के योगफल $\frac{1}{2}x^7+2x^5-2x^3+x+1$ प्राप्त हो जाए?

हल—माना बहुपद $x^7+4x^3-9x^5-6$ में $p(x)$ जोड़ने पर योगफल $\frac{1}{2}x^7+2x^5-2x^3+x+1$ प्राप्त होता है।

तब, $x^7+4x^3-9x^5-6+p(x)=\frac{1}{2}x^7+2x^5-2x^3+x+1$

या $p(x)=\frac{1}{2}x^7+2x^5-2x^3+x+1-(x^7+4x^3-9x^5-6)$

$$p(x)=\frac{1}{2}x^7+2x^5-2x^3+x+1-x^7-4x^3+9x^5+6$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^7-x^7\right)+(2x^5+9x^5)+(-2x^3-4x^3)+x+(1+6)$$

$$p(x)=\frac{-1}{2}x^7+11x^5-6x^3+x+7$$

अतः बहुपद $x^7+4x^3-9x^5-6$ में $\left(-\frac{1}{2}x^7+11x^5-6x^3+x+7\right)$ जोड़ने पर योगफल $\frac{1}{2}x^7+2x^5-2x^3+x+1$ प्राप्त हो जाएगा। **उत्तर**

6. y^3+4-y^2 में क्या जोड़े कि योगफल $2y^3+1$ प्राप्त हो जाए?

हल—माना बहुपद y^3+4-y^2 में $p(y)$ जोड़ने पर योगफल $2y^3+1$ प्राप्त होता है।

तब, $y^3+4-y^2+p(y)=2y^3+1$

या $p(y)=2y^3+1-(y^3+4-y^2)$

$$=2y^3+1-y^3-4+y^2$$

$$=(2y^3-y^3)+y^2+(1-4)$$

$$p(y)=y^3+y^2-3$$

अतः बहुपद y^3+4-y^2 में y^3+y^2-3 जोड़ने पर योगफल $2y^3+1$ प्राप्त हो जाएगा। **उत्तर**

7. m^3+5m^2+6m तथा m^3-4m^2-6m+1 के योगफल में से क्या घटाएँ कि अन्तर 1 प्राप्त हो जाए?

हल—माना m^3+5m^2+6m तथा m^3-4m^2-6m+1 के योगफल में से $p(m)$ घटाने पर अन्तर 1 प्राप्त होता है।

तब $(m^3+5m^2+6m)+(m^3-4m^2-6m+1)-p(m)=1$

या $$p(m) = m^3 + 5m^2 + 6m + m^3 - 4m^2 - 6m + 1 - 1$$
$$= (m^3 + m^3) + (5m^2 - 4m^2) + (6m - 6m) + (1 - 1)$$
$$p(m) = 2m^3 + m^2$$

अत: दिए गए बहुपदों के योगफल में से $2m^3 + m^2$ घटानें पर अन्तर 1 प्राप्त हो जाएगा।

उत्तर

8. $3x^3 - x^2 + 4 - 2x$ में से क्या घटाएँ कि $2x - 4 - 3x^2 + x^2$ प्राप्त हो जाए?

हल—माना $3x^3 - x^2 + 4 - 2x$ में से $p(x)$ घटाने पर $2x - 4 - 3x^3 + x^2$ प्राप्त होता है।

तब $3x^3 - x^2 + 4 - 2x - p(x) = 2x - 4 - 3x^3 + x^2$

या $$p(x) = 3x^3 - x^2 + 4 - 2x - (2x - 4 - 3x^3 + x^2)$$
$$= 3x^3 - x^2 + 4 - 2x + (-2x + 4 + 3x^3 - x^2)$$
$$= (3x^3 + 3x^3) + (-x^2 - x^2) + (-2x - 2x) + (4 + 4)$$
$$p(x) = 6x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

अत: $3x^3 - x^2 + 4 - 2x$ में से $6x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ घटाने पर $2x - 4 - 3x^3 + x^2$ प्राप्त हो जाएगा। उत्तर

9. निम्न बहुपदों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $y = 2$ तथा $y^2 - 4y + 4$

हल—माना $p(y) = y - 2$ तथा $q(y) = y^2 - 4y + 4$

$$p(y).q(y) = (y-2)(y^2 - 4y + 4)$$
$$= y(y^2 - 4y + 4) - 2(y^2 - 4y + 4)$$
$$= (y^3 - 4y^2 + 4y) + (-2y^2 + 8y - 8)$$
$$= y^3 + (-4y^2 - 2y^2) + (4y + 8y) - 8$$
$$p(y).q(y) = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$ उत्तर

(ii) $m^3 - m^2 + 4$ तथा $m^2 + 3m + 1$

हल—माना $p(m) = m^3 - m^2 + 4$ तथा $q(m) = m^2 + 3m + 1$

$$p(m).q(m) = (m^3 - m^2 + 4).(m^2 + 3m + 1)$$
$$= m^3(m^2 + 3m + 1) - m^2(m^2 + 3m + 1) + 4(m^2 + 3m + 1)$$
$$= m^5 + 3m^4 + m^3 - m^4 - 3m^3 - m^2 + 4m^2 + 12m + 4$$
$$= m^5 + (3m^4 - m^4) + (m^3 - 3m^3) + (-m^2 + 4m^2) + 12m + 4$$
$$p(m).q(m) = m^5 + 2m^4 - 2m^3 + 3m^2 + 12m + 4$$ उत्तर

(iii) $3x + 5$ तथा $x^3 + x - 7$

हल—माना $p(x) = 3x + 5$ तथा $q(x) = x^3 + x - 7$

$$p(x).q(x) = (3x + 5)(x^3 + x - 7)$$
$$= 3x(x^3 + x - 7) + 5(x^3 + x - 7)$$
$$= 3x^4 + 3x^2 - 21x + 5x^3 + 5x - 35$$
$$= 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + (-21x + 5x) - 35$$
$$p(x).q(x) = 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 16x - 35$$ उत्तर

(iv) x^3-3x^2+2x+1 तथा x^2+4x

हल—माना $p(x)=(x^3-3x^2+2x+1)$ तथा $q(x)=(x^2+4x)$

$$p(x).q(x)=(x^3-3x+2x+1)(x^2+4x)$$
$$=x^3(x^2+4x)-3x^2(x^2+4x)+2x(x^2+4x)+1(x^2+4x)$$
$$=x^5+4x^4-3x^4-12x^3+2x^3+8x^2+x^2+4x$$
$$=x^5+(4x^4-3x^4)+(-12x^3+2x^3)+(8x^2+x^2)+4x$$
$$p(x).q(x)=x^5+x^4-10x^3+9x^2+4x$$ उत्तर

(v) $x+x^2+2x^3$ तथा $x-2$

हल—माना $p(x)=x+x^2+2x^3$ तथा $q(x)=x-2$

$$p(x).q(x)=(x+x^2+2x^3).(x-2)$$
$$=x(x-2)+x^2(x-2)+2x^3(x-2)$$
$$=x^2-2x+x^3-2x^2+2x^4-4x^3$$
$$=(2x^4)+(-4x^3+x^3)+(x^2-2x^2)-2x$$
$$p(x).q(x)=2x^4-3x^3-x^2-2x$$ उत्तर

(vi) $3m+1$ तथा $1+2m-3m^2$

हल—माना $p(m)=3m+1$ तथा $q(m)=1+2m-3m^2$

$$p(m)\cdot q(m)=(3m+1).(1+2m-3m^2)$$
$$=3m(1+2m-3m^2)+1(1+2m-3m^2)$$
$$=3m+6m^2-9m^3+1+2m-3m^2$$
$$=-9m^3+(6m^2-3m^2)+(2m+3m)+1$$
$$p(m).q(m)=-9m^3+3m^2+5m+1$$ उत्तर

(vii) x^4+1+x तथा x^2+2

हल—माना $p(x)=x^4+1+x$ तथा $q(x)=x^2+2$

$$p(x).q(x)=(x^4+1+x).(x^2+2)$$
$$=x^4(x^2+2)+1(x^2+2)+x(x^2+2)$$
$$=x^6+2x^4+x^2+2+x^3+2x$$
$$p(x).q(x)=x^6+2x^4+x^3+x^2+2x+2$$ उत्तर

(viii) y^2+3y+1 तथा y^2+3y+2

हल—माना $p(y)=y^2+3y+1$ तथा $q(y)=y^2+3y+2$

$$p(y).q(y)=(y^2+3y+1).(y^2+3y+2)$$
$$=y^2(y^2+3y+2)+3y(y^2+3y+2)+1(y^2+3y+2)$$
$$=y^4+3y^3+2y^2+3y^3+9y^2+6y+y^2+3y+2$$
$$=y^4+(3y^3+3y^3)+(9y^2+2y^2+y^2)+(6y+3y)+2$$
$$p(y).q(y)=y^4+6y^3+12y^2+9y+2$$ उत्तर

10. $p(x).q(x)$ ज्ञात करके घात भी बताइए जबकि $P(x) = x^2 + 3x + 1$

$q(x) = 3x + x^2$

हल— $p(x) \cdot q(x) = (x^2 + 3x + 1).(3x + x^2)$

$= x^2(3x + x^2) + 3x(3x + x^2) + 1(3x + x^2)$

$= 3x^3 + x^4 + 9x^2 + 3x^3 + 3x + x^2$

$= x^4 + (3x^3 + 3x^3) + (9x^2 + x^2) + 3x$

$p(x).q(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 3x$ उत्तर

बहुपद $p(x).1(x)$ में चर x की सबसे बड़ी घात वाले पद x^4 का घातांक 4 है।

11. $x^3 - x^2 + 2$ व $x + 1$ के गुणनफल में क्या जोड़े कि 1 प्राप्त हो जाए?

हल—माना $x^3 - x^2 + 2$ व $x + 1$ के गुणनफल में $p(x)$ जोड़ने पर 1 प्राप्त होता है।

तब $(x^3 - x^2 + 2)(x + 1) + p(x) = 1$

$p(x) = 1 - (x^3 - x^2 + 2)(x + 1)$

$= 1 - [x^3(x + 1) - x^2(x + 1) + 2(x + 1)]$

$= 1 - [x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + 2x + 2]$

$= 1 - [x^4 - x^2 + 2x + 2]$

$= 1 - x^4 + x^2 - 2x - 2$

$p(x) = -x^4 + x^2 - 2x - 1$

अत: $x^3 - x^2 + 2$ व $x + 1$ के गुणनफल में $-x^4 + x^2 - 2x - 1$ जोड़ने पर 1 प्राप्त हो जाएगा। उत्तर

12. $\{p(x) + q(x)\}.\{p(x) - q(x)\}$ ज्ञात कीजिए।

जबकि $p(x) = x^2 + 6x - 1$

$q(x) = x^2 - 6x$

हल—∵ $p(x) = x^2 + 6x - 1$

$q(x) = x^2 - 6x$

∴ $p(x) + q(x) = x^2 + 6x - 1 + x^2 - 6x$

$= 2x^2 - 1$

तथा $p(x) - q(x) = x^2 + 6x - 1 - (x^2 - 6x)$

$= x^2 + 6x - 1 - x^2 + 6x$

$= 12x - 1$

अत: $\{p(x) + q + (x)\}.\{p(x) - q(x)\}$

$= (2x^2 - 1).(12x - 1)$

$= 2x^2(12x - 1) - 1(12x - 1)$

$= 24x^3 - 2x^2 - 12x + 1$ उत्तर

अभ्यास 1.3

निम्न प्रश्नों में $p(x)$ को $q(x)$ से भाग करके भागफल व शेषफल ज्ञात कीजिए। तथा जाँच कीजिए $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड है या नहीं।

1. $p(x) = 14x^2 + 36x - 60$, $q(x) = x - 2$

हल— $p(x) = 14x^2 + 36x - 60$ घात 2

$q(x) = x - 2$ घात 1

चूँकि $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अतः भाजन सम्भव है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 14x + 64 \\
\hline
x-2 & 14x^2 + 36x - 60 \\
 & \underline{\overset{-}{}14x^2 \underset{+}{-} 28x} \\
 & \qquad 64x - 60 \\
 & \qquad \underline{\overset{-}{}64x \underset{+}{-} 128} \\
 & \qquad\qquad 68
\end{array}
$$

भागफल $g(x) = 14x + 64$

शेषफल $h(x) = 68$

$\because$ यहाँ शेषफल $h(x) \neq 0$

अतः $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। उत्तर

2. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 15$, $q(x) = x - a$

हल— $p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 15$ घात 3

$q(x) = x - a$ घात 1

चूँकि $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अतः भाजन सम्भव है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + (a-4)x + (9 + a^2 - 4a) \\
\hline
x-a & x^3 - 4x^2 + 9x - 15 \\
 & \underline{x^3 \underset{+}{-} ax^2} \\
 & (a-4)x^2 + 9x \\
 & \underline{(a-4)x^2 \underset{+}{-} a(a-4)x} \\
 & (9 + a^2 - 4a)x - 15 \\
 & \underline{(9 + a^2 - 4a)x \underset{+}{-} a(9 + a^2 - 4a)} \\
 & a(9 + a^2 - 4a) - 15
\end{array}
$$

भागफल $q(x) = x^2 + (a-4)x + (9 + a^2 - 4a)$

$\because$ शेषफल $\quad h(x) = a(9 + a^2 - 4a) - 15$

$= 9a + a^3 - 4a^2 - 15$

या $\quad = a^3 - 4a^2 + 9a - 15$

$h(x) \neq 0$

अत: $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। **उत्तर**

3. $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 6, q(x) = x - 1$

हल— $\quad p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 6$ घात 4

$q(x) = x - 1$ घात 1

चूँकि $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$\begin{array}{r|l} & 3x^3 + 7x^2 + 5x + 6 \\ \hline x-1 & 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 6 \\ & \underline{\underset{-}{3x^4} \underset{+}{-} 3x^3} \\ & \quad 7x^3 - 2x^2 \\ & \quad \underline{\underset{-}{7x^3} \underset{+}{-} 7x^2} \\ & \qquad 5x^2 + x \\ & \qquad \underline{\underset{-}{5x^2} \underset{+}{-} 5x} \\ & \qquad\quad 6x - 6 \\ & \qquad\quad \underline{\underset{-}{6x} \underset{+}{-} 6} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

भागफल $g(x) = 3x^3 + 7x^2 + 5x + 6$

$\because$ यहाँ शेषफल $h(x) = 0$ अत: $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड है। **उत्तर**

4. $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, q(x) = x^2 + 2x + 1$

हल— $\quad p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ घात 4

$q(x) = x^2 + 2x + 1$ घात 2

चूँकि $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & \underline{\overset{-}{x^4} \overset{-}{+ 2x^3} \overset{-}{+ x^2}} \\
 & \quad 2x^3 + 5x^2 + 4x \\
 & \quad \underline{\overset{-}{2x^3} \overset{-}{+ 4x^2} \overset{-}{+ 2x}} \\
 & \qquad x^2 + 2x + 1 \\
 & \qquad \underline{\overset{-}{x^2} \overset{-}{+ 2x} \overset{-}{+ 1}} \\
 & \qquad \underline{0}
\end{array}
$$

भागफल $g(x) = x^2 + 2x + 1$

शेषफल $h(x) = 0$

अत: $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है। उत्तर

5. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 2$, $q(x) = x - 2$

हल— $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 2$ घात 3

$q(x) = x - 2$ घात 1

$\because$ $p(x)$ की घात $>$ $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x - 6 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 6x^2 + 2x - 2 \\
 & \underline{\overset{-}{x^3} \overset{+}{- 2x^2}} \\
 & \quad -4x^2 + 2x \\
 & \quad \underline{\overset{+}{-4x^2} \overset{-}{+ 8x}} \\
 & \qquad -6x - 2 \\
 & \qquad \underline{\overset{+}{-6x} \overset{-}{+ 12}} \\
 & \qquad \underline{-14}
\end{array}
$$

भागफल $g(x) = x^2 - 4x - 6$,

शेषफल $h(x) = -14$

चूँकि शेषफल $h(x) \neq 0$

अत: $q(x)$, $p(x)$ की गुणनखण्ड नहीं है। उत्तर

6. $p(t) = t^6 + 3t^2 + 10$, $q(t) = t^3 + 1$

हल— $p(t) = t^6 + 3t^2 + 10$ घात 6

$p(t) = t^3 + 1$ घात 3

$\because$ $p(t)$ की घात > $q(t)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & t^3 - 1 \\
\hline
t^3 + 1 & t^6 + 3t^2 + 10 \\
 & \underline{\underset{-}{t^6} \qquad\qquad \underset{-}{+} t^3} \\
 & \qquad 3t^2 + 10 - t^3 \\
 & \underline{\underset{+}{-}1 \underset{+}{-} t^3} \\
 & \qquad\quad 3t^2 + 11 \\
\end{array}
$$

भागफल $g(t) = t^3 - 1$

शेषफल $h(t) = 3t^2 + 11$

चूँकि शेषफल $h(t) \neq 0$

अत: $q(t), p(t)$ की गुणनखण्ड नहीं है। उत्तर

7. $p(x) = 4x^2 - 8x - 5,\ q(x) = x - 1$

हल— $p(x) = 4x^2 - 8x - 5$ घात 2

$q(x) = x - 1$ घात 1

$\because$ $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x - 4 \\
\hline
x - 1 & 4x^2 - 8x - 5 \\
 & \underline{\underset{-}{4x^2} \underset{+}{-} 4x} \\
 & \qquad -4x - 5 \\
 & \underline{\qquad \underset{+}{-}4x \underset{-}{+} 4} \\
 & \qquad\qquad -9 \\
\end{array}
$$

भागफल $g(x) = 4x - 4$

शेषफल $h(x) = -9$

$\because$ शेषफल $h(x) \neq 0$

अत: $q(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। उत्तर

8. $p(x) = x^2 - 24,\ q(x) = x - 4$

हल— $p(x) = x^2 - 24$ घात 2

$p(x) = x - 4$ घात 1

$\because$ $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ \hline x-4 & x^2-24 \\ & \underset{-}{x^2} \quad \underset{+}{-}4x \\ \hline & \quad 4x-24 \\ & \quad \underset{-}{4x}\underset{+}{-}16 \\ \hline & \qquad -8 \\ \hline \end{array}$$

भागफल $g(x)=x+4$

शेषफल $h(x)=-8$

$\because$ शेषफल $h(x)\neq 0$

अत: $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। **उत्तर**

9. $p(t)=t^5-5t^3-3t^2+5t+3,\ q(t)=t^4-4t-2$

हल— $P(t)=t^5-5t^3-3t^2+5t+3$ घात 5

$q(t)=t^4-4t-2$ घात 4

$\because$ $p(t)$ की घात $>$ $q(t)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$\begin{array}{r|l} & t^3+4t^2+13t+57 \\ \hline t^2-4t-2 & t^5-5t^3-3t^2+5t+3 \\ & \underset{-}{t^5}\underset{+}{-}2t^3 \qquad \underset{+}{-}4t^4 \\ \hline & 4t^4-3t^3-3t^2 \\ & \underset{-}{4t^4}\underset{+}{-}16t^3\underset{+}{-}8t^2 \\ \hline & 13t^3+5t^2+5t \\ & \underset{-}{13t^3}\underset{+}{-}52t^2\underset{+}{-}26t \\ \hline & 57t^2+31t^2+3 \\ & \underset{-}{57t^2}\underset{+}{-}228t\underset{+}{-}114 \\ \hline & 259t+117 \\ \hline \end{array}$$

भागफल $g(x)=t^3+4t^2+13t+57$

शेषफल $h(x)=259t+117$

चूँकि यहाँ शेषफल $h(x)\neq 0$

अत: $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। **उत्तर**

10. $p(y) = y^2 - 4y + 4,\ q(y) = y - 1$

हल— $p(y) = y^2 - 4y + 4$ घात 2

$g(y) = y - 1$ घात 1

$\because$ $p(y)$ की घात > $q(y)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$\begin{array}{r|l} & y-3 \\ \hline y-1 & y^2-4y+4 \\ & \underset{-}{y^2}\underset{+}{-y} \\ \hline & \quad -3y+4 \\ & \quad \underset{+}{-3y}\underset{-}{+3} \\ \hline & \qquad\quad 1 \end{array}$$

भागफल $g(x) = y - 3$

शेषफल $h(x) = 1$

$\because$ शेषफल $h(x) \neq 0$

अत: $q(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। उत्तर

विविध प्रश्नावली

1. निम्नलिखित बहुपदों में त्रिपदी कौन-कौन से हैं?

(i) $5x^3 + 3x^2$ उत्तर— त्रिपदी नहीं है।

(ii) $3m^2 - 5m + 6m^4$ उत्तर— त्रिपदी है।

(iii) $t^2 - 5t + 3$ उत्तर— त्रिपदी है।

(iv) $(x + y)^2$ उत्तर— त्रिपदी है।

(v) $7x$ उत्तर— त्रिपदी नहीं है।

(vi) $x^5 + 4$ उत्तर— त्रिपदी नहीं है।

2. $\{(2z+1)(5z-7)\}$ की घात ज्ञात कीजिए।

हल—$\{2z(5z-7) + 1(5z-7)\}$

$= 10z^2 - 14z + 5z - 7$

$= 10z^2 + (-14z + 5z) - 7$

$= 10z^2 - 9z - 7$

दिए गए बहुपद $10z^2 - 9z - 7$ में चर z की सबसे बड़ी घात, $10z^2$ का घातांक 2 है।
अत: इसकी घात 2 है। उत्तर

3. यदि $p(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x - 10$ व $q(x) = 6x^3 + 4x^2 - 10x + 15$ हो, तो $p(x) + q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $p(x) + q(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x - 10 + 6x^3 + 4x^2 - 10x + 15$

$$= (5x^3+6x^3)+(-7x^2+4x^2)+(-10x+4x)+(-10+15)$$

$$p(x)+q(x) = 11x^3-3x^2-6x+5$$ उत्तर

4. यदि $p(y)=7y^5+4y^3-6y^2+5y+10$ व $g(y)=3y^3+10y^2-6y+8$ तो $p(y)-q(y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल—$p(y)-q(y) = 7y^5+4y^3-6y^2+5y+10-(3y^3+10y^2-6y+8)$

$$= 7y^5+4y^3-6y^2+5y+10+(-3y^3-10y^2+6y-8)$$

$$= 7y^5+(4y^3-3y^3)+(-6y^2-10y^2)+(5y+6y)+(10-8)$$

$$= 7y^5+y^3-16y^2+11y+2$$ उत्तर

5. (x^2+3x+2) व (x^2+3x+1) का गुणनफलन ज्ञात कीजिए।

हल— माना $p(x) = (x^2+3x+2)$

$$q(x) = (x^2+3x+1)$$

$$p(x).q(x) = (x^2+3x+2)(x^2+3x+1)$$

$$= x^2(x^2+3x+1)+3x(x^2+3x+1)+2(x^2+3x+1)$$

$$= x^4+3x^3+x^2+3x^3+9x^2+3x+2x^2+6x+2$$

$$= x^4+(3x^3+3x^3)+(x^2+9x^2+2x^2)+(3x+6x)+2$$

$$p(x).q(x) = x^4+6x^3+12x^2+9x+2$$ उत्तर

6. बहुपद $9x^5+8x^6-9x^2-4x+2$ को मानक रूप में लिखिए।

हल—चर x की घातों के अवरोही क्रम में लिखने पर दिए हुए बहुपद का मानक रूप निम्नलिखित है—

$$8x^6+9x^5-9x^2-4x+2$$ उत्तर

7. यदि $p(x)=4x^2-8x-5$ व $q(x)=6x^2+4x+2$ हो, तो $p(x)+q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $p(x)+q(x) = 4x^2-8x-5+(6x^2+4x+2)$

$$= (4x^2+6x^2)+(-8x+4x)+(-5+2)$$

$$= 10x^2-4x-3$$ उत्तर

8. यदि $p(x)=1-2x-x^2$ व $q(x)=x^3+x^2+x+1$ तो $p(x)-q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $p(x)-q(x) = 1-2x-x^2-(x^3+x^2+x+1)$

$$= 1-2x-x^2+(-x^3-x^2-x-1)$$

$$= (1-1)+(-2x-x)+(-x^2-x^2)-x^3$$

$$= -3x-2x^2-x^3$$

$$p(x)-g(x) = -(x^3+2x^2+3x)$$ उत्तर

9. यदि $f(x)=(x+2)$ व $g(x)=(2x^2+x-1)$ तो $f(x).g(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $f(x).g(x) = (x+2).(2x^2+x-1)$

$$= x(2x^2+x-1)+2(2x^2+x-1)$$

$$= 2x^3 + x^2 - x + 4x^2 + 2x - 2$$
$$= 2x^3 + (x^2 + 4x^2) + (-x + 2x) - 2$$
$$f(x).g(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$ उत्तर

10. यदि $p(x) = 2x^2 - 3x - 5$ व $q(x) = x + 1$ तो $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $p(x) = 2x^2 - 3x - 5$ घात = 2

$q(x) = x + 1$ घात = 1

$\because$ $p(x)$ का घात > $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 5 \\ \hline x+1 & 2x^2 - 3x - 5 \\ & \underline{\underset{-}{2x^2} \underset{-}{+ 2x}} \\ & \quad -5x - 5 \\ & \quad \underline{\underset{+}{-5x} \underset{+}{- 5}} \\ & \quad\quad 0 \end{array}$$

अत: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 2x - 5$ उत्तर

11. यदि $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 18$ व $q(x) = x - 3$ तो $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ज्ञात कीजिए तथा जाँच कीजिए कि क्या $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है?

हल— $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 18$ घात = 3

$q(x) = x - 3$ घात = 1

$\because$ $p(x)$ की घात > $q(x)$ की घात

अत: भाजन सम्भव है।

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 6 \\ \hline x-3 & x^3 - 2x^2 + 3x - 18 \\ & \underline{\underset{-}{x^3} \underset{+}{- 3x^2}} \\ & \quad x^2 + 3x \\ & \quad \underline{\underset{-}{x^2} \underset{+}{- 3x}} \\ & \quad\quad 6x + 18 \\ & \quad\quad \underline{\underset{-}{6x} \underset{+}{- 18}} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

भागफल $q(x) = x^2 + x + 6$

शेषफल $h(x) = 0$

अतः $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है। **उत्तर**

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 17 व 18 देखिए।

2

बहुपदों के गुणनखण्ड
(Factors of Polynomials)

अभ्यास 2.1

निम्नलिखित के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए—

1. $7mn - 21m^2n^2$

हल— $7mn - 21m^2n^2$

$$= 7mn - 7 \times 3 \times mn \times mn$$

$$= 7mn(1 - 3mn)$$ उत्तर

2. $a(a-b) - c(a-b) + (a-b)^2$

हल—$a(a-b) - c(a-b) + (a-b)^2$

$$= a(a-b) - c(a-b) + (a-b)(a-b)$$

$$= (a-b)(a-c+a-b)$$

$$= (a-b)(2a-c-b)$$ उत्तर

3. $19ab^2c - 38a^2b$

हल— $19ab^2c - 38a^2b = 19ab^2c - 19 \times 2a^2b$

$$= 19ab(bc - 2a)$$ उत्तर

4. $7a^3b^2c + 21a^2b^3c^2 - 28a^2b^2c^3$

हल— $7a^3b^2c + 21a^2b^3c^2 - 28a^2b^2c^3$

$$= 7a^2b^2c \times a + 7 \times 3 \times a^2b^2c \times bc - 7 \times 4 \times a^2b^2c \times c^2$$

$$= 7a^2b^2c(a + 3bc - 4c^2)$$ उत्तर

5. $p^3qr + pq^3r + pqr^3$

हल— $p^3qr + pq^3r + pqr^3 = pqr \times p^2 + pqr \times q^2 + pqr \times r^2$

$$= pqr(p^2 + q^2 + r^2)$$ उत्तर

6. $xy(a+b)^2 - yz(a+b)$

हल— $xy(a+b)^2 - yz(a+b) = y(a+b) \times x(a+b) - y(a+b) \times z$

$$= y(a+b)\{x(a+b) - z\}$$ उत्तर

7. $a^3b^3 + 2a^2b^2 + a^2b^4$

हल— $a^3b^3 + 2a^2b^2 + a^2b^4 = a^2b^2 \times ab + 2 \times a^2b^2 + a^2b^2 \times b^2$

$$= a^2b^2(ab + 2 + b^2)$$ उत्तर

8. $p^3(a^2-bc)+3p^2(a^2-bc)^2+4p(a^2-bc)$

हल— $p^3(a^2-bc)+3p^2(a^2-bc)^2+4p(a^2-bc)$

$$= p(a^2-bc)\times p^2+p(a^2-bc)\times 3p(a^2-bc)+p(a^2-bc)\times 4$$

$$= p(a^2-bc)\{p^2+3p(a^2-bc)+4\}$$ उत्तर

9. $y^2(p+q+r)^2-y(p+q+r)+y^2(p+q+r)$

हल— $y^2(p+q+r)^2-y(p+q+r)+y^2(p+q+r)$

$$= y(p+q+r)\times y(p+q+r)-y(p+q+r)+y(p+q+r)\times y$$

$$= y(p+q+r)\{y(p+q+r)-1+y\}$$ उत्तर

10. $a(-x^2-y^2+z^2)-b(z^2-x^2-y^2)$

हल— $a(-x^2-y^2+z^2)-b(z^2-x^2-y^2)$

$$= (z^2-x^2-y^2)(a-b)$$ उत्तर

11. $66a(x+y-z)^2-33ab(x+y-z)^2$

हल— $66a(x+y-z)^2-33ab(x+y-z)^2$

$$= 33\times 2\times a(x+y-z)^2-33\times ab(x+y-z)^2$$

$$= 33a(x+y-z)^2(2-b)$$ उत्तर

12. $8a^2b(x+y)^4-20ab(x+y)^2-48ab^2(x+y)^2$

हल— $8a^2b(x+y)^4-20ab(x+y)^2-48ab^2(x+y)^2$

$$= 4\times 2\times ab(x+y)^2\times a(x+y)^2-4\times 5\times ab(x+y)^2$$

$$-4\times 12\times ab(x+y)^2\times b$$

$$= 4ab(x+y)^2\{2a(x+y)^2-5-12b\}$$ उत्तर

अभ्यास 2.2

निम्नलिखित दिए गए व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए—

1. $ab^2+(1+a^2)b+a$

हल— $ab^2+(1+a^2)b+a = ab^2+b+a^2b+a$

$$= b(ab+1)+a(ab+1)$$

$$= (ab+1)(b+a)$$ उत्तर

2. $4a^3-4a^2+a-1$

हल— $4a^3-4a^2+a-1 = (4a^3-4a^2)+(a-1)$

$$= 4a^2(a-1)+(a-1)$$

$$= (a-1)(4a^2+1)$$ उत्तर

3. $a^2x^2+p^2x^2-cp^2-ca^2$

हल— $a^2x^2+p^2x^2-cp^2-ca^2$

$$= (a^2x^2+p^2x^2)-(cp^2+ca^2)$$

$$= x^2(p^2+a^2)-c(p^2+a^2)$$

$$= (p^2+a^2)(x^2-c)$$ उत्तर

4. $mn^2 - 1 - n^2 + m$

हल— $mn^2 - 1 - n^2 + m = (mn^2 - n^2) + (m-1)$

$= n^2(m-1) + 1(m-1)$

$= (m-1)(n^2+1)$ उत्तर

5. $64(a+b)^2 - 8a - 8b$

हल— $64(a+b)^2 - 8a - 8b = 64(a+b)^2 - 8(a+b)$

$= 8 \times 8(a+b)(a+b) - 8(a+b)$

$= 8(a+b)\{8(a+b) - 1\}$ उत्तर

6. $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$

हल— $x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = x^2 + ax + \frac{x}{a} + 1$

$= x(x+a) + \frac{1}{a}(x+a)$

$= (x+a)\left(x + \frac{1}{a}\right)$ उत्तर

7. $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 3a - \frac{3}{a}$

हल— $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 3a - \frac{3}{a}$

$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) - \left(3a + \frac{3}{a}\right)$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a} - 3\right)$ उत्तर

8. $p^2 - \left(m - \frac{1}{m}\right)p - 1$

हल— $p^2 - \left(m - \frac{1}{m}\right)p - 1 = p^2 - mp + \frac{p}{m} - 1$

$= (p^2 - mp) + \left(\frac{p}{m} - 1\right)$

$= p(p-m) + \frac{1}{m}(p-m)$

$= (p-m)\left(p + \frac{1}{m}\right)$ उत्तर

9. $(ap+bq)^2+(bp-aq)^2$

हल— $(ap+bq)^2+(bp-aq)^2$

$$= a^2p^2+b^2q^2+2abpq+b^2p^2+a^2q^2-2abpq$$
$$= (a^2p^2+a^2q^2)+(b^2p^2+b^2q^2)$$
$$= a^2(p^2+q^2)+b^2(p^2+q^2)$$
$$= (p^2+q^2)(a^2+b^2)$$ उत्तर

10. $x^2+3ax+5x+15a$

हल— $$x^2+3ax+5x+15a = (x^2+3ax)+(5x+15a)$$
$$= x(x+3a)+5(x+3a)$$
$$= (x+3a)(x+5)$$ उत्तर

11. $ab(c^2+1)+c(a^2+b^2)$

हल— $$ab(c^2+1)+c(a^2+b^2) = abc^2+ab+a^2c+b^2c$$
$$= (abc^2+b^2c)+(a^2c+ab)$$
$$= bc(ac+b)+a(ac+b)$$
$$= (ac+b)(bc+a)$$ उत्तर

12. $(a^2+b^2)pq+ab(p^2+q^2)$

हल— $(a^2+b^2)pq+ab(p^2+q^2)$

$$= a^2pq+b^2pq+abp^2+abq^2$$
$$= (a^2pq+abp^2)+(b^2pq+abq^2)$$
$$= ap(aq+bp)+bq(bp+aq)$$
$$= (aq+bp)(ap+bq)$$ उत्तर

13. $al+bl+bm+cm+cl+am$

हल— $al+bl+bm+cm+cl+am$

$$= (al+bl+cl)+(am+bm+cm)$$
$$= l(a+b+c)+m(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)(l+m)$$ उत्तर

14. $ax-bx+by+cy-cx-ay$

हल— $ax-bx+by+cy-cx-ay$

$$= (ax-ay)+(by-bx)+(cy-cx)$$
$$= a(x-y)-b(x-y)-c(x-y)$$
$$= (x-y)(a-b-c)$$ उत्तर

अभ्यास 2.3

निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए—

1. $4x^2-25y^2$

हल— $$4x^2-25y^2 = (2x)^2-(5y)^2$$
$$= (2x+5y)(2x-5y)$$ उत्तर

2. $x^4 - 16y^4$

हल— $x^4 - 16y^4 = (x^2)^2 - (4y^2)^2$

$= (x^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2)$

$= (x^2 + 4y^2)\{x^2 - (2y)^2\}$

$= (x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)$ उत्तर

3. $25 - 9z^2$

हल— $25 - 9z^2 = (5)^2 - (3z)^2$

$= (5 + 3z)(5 - 3z)$ उत्तर

4. $x^2 - 1 - 2y - y^2$

हल— $x^2 - 1 - 2y - y^2 = x^2 - (1 + 2y + y^2)$

$= x^2 - (1 + y^2)^2$

$= (x + 1 + y)(x - 1 - y)$ उत्तर

5. $a^2 - 16b^2$

हल— $a^2 - 16b^2 = a^2 - (4b)^2$

$= (a + 4b)(a - 4b)$ उत्तर

6. $(x + y)^2 - 9z^2$

हल— $(x + y)^2 - 9z^2 = (x + y)^2 - (3z)^2$

$= (x + y + 3z)(x + y - 3z)$ उत्तर

7. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{49}{81}$

हल— $\frac{1}{4}x^2 - \frac{49}{81} = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{7}{9}\right)^2$

$= \left(\frac{x}{2} + \frac{7}{9}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{7}{9}\right)$ उत्तर

8. $\frac{25}{9x^2} - 4y^2$

हल— $\frac{25}{9x^2} - 4y^2 = \left(\frac{5}{3x}\right)^2 - (2y)^2$

$= \left(\frac{5}{3x} + 2y\right)\left(\frac{5}{3x} - 2y\right)$ उत्तर

9. $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{b^2}$

हल— $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{b^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2$

$= \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{b}\right)$ उत्तर

10. $a^2-1-2b-b^2$

हल— $a^2-1-2b-b^2 = a^2-(1+2b+b^2)$

$= a^2-(1+b)^2$

$= (a+1+b)(a-1-b)$ उत्तर

11. $x^2-xz+yz-y^2$

हल— $x^2-xz+yz-y^2 = (x^2-y^2)-zx+yz$

$= (x+y)(x-y)-z(x-y)$

$= (x-y)(x+y-z)$ उत्तर

12. $81-a^4$

हल— $81-a^4 = (9)^2-(a^2)^2$

$= (9+a^2)(9-a^2)$

$= (9+a^2)\{(3)^2-a^2\}$

$= (9+a^2)(3+a)(3-a)$ उत्तर

13. x^5y-y^5x

हल— $x^5y-y^5x = xy(x^4-y^4)$

$= xy\{(x^2)^2-(y^2)^2\}$

$= xy\{(x^2+y^2)(x^2-y^2)\}$

$= xy(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ उत्तर

14. a^8-256

हल— $a^8-256 = (a^4)^2-(2^4)^2$

$= (a^2+2^4)(a^4-2^4)$

$= (a^4+2^4)\{(a^2)^2-(2^2)^2\}$

$= (a^4)+2^4\{(a^2+2^2)(a^2-2^2)\}$

$= (a^4+2^4)(a^2+2^2)(a+2)(a-2)$

$= (a^4+16)(a^2+4)(a+2)(a-2)$ उत्तर

15. $16a^2-24a+2bc+9-b^2-c^2$

हल— $16a^2-24a+2bc+9-b^2-c^2$

$= (9+16a^2-24a)+(-b^2-c^2+2bc)$

$= (9+16a^2-24a)-(b^2+c^2-2bc)$

$= (3-4a)^2-(b-c)^2$

$= \{(3-4a)+(b-c)\}\{(3-4a)-(b-c)\}$

$= (3-4a+b-c)(3-4a-b+c)$ उत्तर

16. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$

हल— $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$

$= \{(a+b+c)+(a-b-c)\}\{(a+b+c)-(a-b-c)\}$

$= (a+b+c+a-b-c)(a+b+c-a+b+c)$

$= 2a(2b+2c)$

$= 4a(b+c)$ उत्तर

17. $\left(\frac{16}{81}a^2 - \frac{25}{36}b^2\right) \Big/ \left(\frac{4}{9}a - \frac{5}{6}b\right)$

हल— $\left(\frac{16}{81}a^2 - \frac{25}{36}b^2\right) \Big/ \left(\frac{4}{9}a - \frac{5}{6}b\right)$

$$= \frac{\left\{\left(\frac{4}{9}a\right)^2 - \left(\frac{5}{6}b\right)^2\right\}}{\left(\frac{4}{9}a - \frac{5}{6}b\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{9}a + \frac{5}{6}b\right)\left(\frac{4}{9}a - \frac{5}{6}b\right)}{\left(\frac{4}{9}a - \frac{5}{6}b\right)}$$

$$= \left(\frac{4}{9}a + \frac{5}{b}b\right)$$ उत्तर

निम्नलिखित का मान सूत्र की सहायता से ज्ञात कीजिए—

18. $\frac{4.687 \times 4.687 - 3.333 \times 3.333}{4.687 + 3.333}$

हल— माना $a = 4.687$ व $b = 3.333$

तब $\frac{4.687 \times 4.687 - 3.333 \times 3.333}{4.687 + 3.333}$

$$= \frac{a \times a - b \times b}{a+b}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a+b} \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}$$

$$= a - b$$

a व b का मान रखने पर

$$= 4.687 - 3.333$$

$$= 1.354$$ उत्तर

19. $\dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{25} \times \frac{1}{25}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{25}}$

हल— माना $a = \frac{3}{4}$ व $b = \frac{1}{25}$

तब $\dfrac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{25}\times\frac{1}{25}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{25}}=\dfrac{a\times a-b\times b}{a+b}$

$$=\frac{a^2-b^2}{a+b}\Rightarrow\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}$$

$$=a-b$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{25}\Rightarrow\frac{75-4}{100}$$

$$=\frac{71}{100}$$ उत्तर

20. $\dfrac{0.3261\times 0.3261-0.1150\times 0.1150}{0.2111}$

हल— माना $a=0.3261$ व $b=0.1150$

तब $\dfrac{0.3261\times 0.3261-0.1150\times 0.1150}{0.2111}=\dfrac{a\times a-b\times b}{0.2111}$

$$=\frac{a^2-b^2}{0.2111}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{0.2111}$$

तथा $a+b=0.3261+0.1150=0.4411$

$a-b=0.3261-0.1150=0.2111$

समी० (1) में मान रखने पर $=\dfrac{0.4411\times 0.2111}{0.2111}$

$$=0.4411$$ उत्तर

अभ्यास 2.4

निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए—

1. y^2+5y+6

हल— $5=2+3,\ 6=2\times 3$

$\therefore$ $y^2+5y+6=y^2+(2+3)y+6$

$$=y^2+2y+3y+6$$

$$=y(y+2)+3(y+2)$$

$$=(y+2)(y+3)$$ उत्तर

2. $63y^2-50yz-33z^2$

हल— $ac=63\times(-33)=-2079$

$-2079=(-77)\times 27,\ -50=-77+27$

$\therefore$ $63y^2-50yz-33z^2=63y^2-(-27+77)yz-33z^2$

$$= 63y^2 + 27yz - 77yz - 33z^2$$
$$= 9y(7y+3z) - 11z(7y+3z)$$
$$= (7y+3z)(9y-11z)$$ उत्तर

3. $x^2 + 26x + 153$

हल— $26 = 17 + 9,\ 153 = 17 \times 9$

$$\therefore \quad x^2 + 26x + 153 = x^2 + (17+9)x + 153$$
$$= x^2 + 17x + 9x + 153$$
$$= x(x+17) + 9(x+17)$$
$$= (x+17)(x+9)$$ उत्तर

4. $x^2 - 23x + 132$

हल— $23 = 12 + 11,\ 132 = (-12) \times (-11)$

$$\therefore \quad x^2 - 23x + 132 = x^2 - (12+11)x + 132$$
$$= x^2 - 12x - 11x + 132$$
$$= x(x-12) - 11(x-12)$$
$$= (x-12)(x-11)$$ उत्तर

5. $2x^2 + 7x - 60$

हल— $$ac = 2 \times (-60)$$
$$= -120 - 120 = 15 \times (-8), 7 = 15 - 8$$
$$\therefore \quad 2x^2 + 7x - 60 = 2x^2 + (15-8)x - 60$$
$$= 2x^2 + 15x - 8x - 60$$
$$= x(2x+15) - 4(2x+15)$$
$$= (2x+15)(x-4)$$ उत्तर

6. $19x^2 - 4x - 23$

हल— $ac = 19 \times (-23) = -437$

$$-437 = 19 \times (-23),\ -4 = 19 - 23$$
$$\therefore \quad 19x^2 + 4x - 23 = 19x^2 - (23-19)x - 23$$
$$= 19x^2 - 23x + 19x - 23$$
$$= x(19x-23) + 1(19x-23)$$
$$= (19x-23)(x+1)$$ उत्तर

7. $5 + 32x - 21x^2$

हल— $ac = 5 \times (-21) = -105$

$$-105 = 35 \times (-3), 32 = 35 - 3$$
$$\therefore \quad 5 + 32x - 21x^2 = 5 + (35-3)x - 21x^2$$
$$= 5 + 35x - 3x - 21x^2$$
$$= 5(1+7x) - 3x(1+7x)$$
$$= (1+7x)(5-3x)$$ उत्तर

8. $21x^2 + 53x - 30$

हल— $ac = 21 \times (-30) = -630$

$-630 = 63 \times (-10), 53 = 63 - 10$

$\therefore \quad 21x^2 + 53x - 30 = 21x^2 + (63-10)x - 30$

$= 21x^2 + 63x - 10x - 30$

$= 21x(x+3) - 10(x+3)$

$= (21x - 10)(x+3)$ उत्तर

9. $x^5 - 6x^3 + 5x$

हल— $x[x^4 - 6x^2 + 5]$

माना $x^2 = a, x = \sqrt{a}$ ...(1)

$\therefore \quad x^5 - 6x^3 + 5x = x\{x^4 - 6x^2 + 5\}$

$= \sqrt{a}\{(a^2) - 6a + 5\}$

$-6 = -1 - 5, \ +5 = 1 \times 5$

$= \sqrt{a}\{a^2 - (1+5)a + 5\}$

$= \sqrt{a}(a^2 - a - 5a + 5)$

$= \sqrt{a}\{a(a-1) - 5(a-1)\}$

$= \sqrt{a}(a-1)(a-5)$ ...(2)

समी० (1) से, समी० (2) में a का मान रखने पर

$= x(x^2 - 1)(x^2 - 5)$

$= x(x^2 - 1^2)\{x^2 - (\sqrt{5})^2\}$

$x^5 - 6x^3 + 5x = x(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$ उत्तर

10. $4 + 6x - 10x^2$

हल— $ac = 4 \times (-10) = -40$

$-40 = 4 \times (-10), 6 = -4 + 10$

$\therefore \quad 4 + 6x - 10x^2 = 4 + (10 - 4)x - 10x^2$

$= 4 + 10x - 4x - 10x^2$

$= 2(2 + 5x) - 2x(2 + 5x)$

$= (2 + 5x)(2 - 2x)$ उत्तर

11. $32x^2 - 145x + 162$

हल— $ac = 32 \times 162 = 5184$

$5184 = 64 \times 81, 145 = -64 + 81$

$\therefore \quad 32x^2 - 145x + 162 = 32x^2 - (64 + 81)x + 162$

$= 32x^2 - 64x - 81x + 162$

$= 32x(x-2) - 81(x-2)$

$= (32x - 81)(x - 2)$ उत्तर

12. $3x^2y^2-14xy-49$

हल— $ac=3\times(-49)=-147$

$-147=(-21)\times 7, 14=21-7$

$\therefore \quad 3x^2y^2-14xy-49=3x^2y^2-(21-7)xy-49$

$=3x^2y^2-21xy+7xy-49$

$=3xy(xy-7)+7(xy-7)$

$=(xy-7)(3xy+7)$ उत्तर

13. $5+32(a-b)-21(a-b)^2$

हल— माना $(a-b)=x$ ...(1)

$\therefore 5+32(a-b)-21(a-b)^2=5+32x-21x^2$

अत: $ac=(-21)\times 5=-105$

$-105=(-35)\times 3, 32=35-3$

$\therefore \quad 5+32x-21x^2=5+(35-3)x-21x^2$

$=5+35x-3x-21x^2$

$=5(1+7x)-3x(1+7x)$

$=(1+7x)(5-3x)$ ...(2)

समी० (1) से x का मान समी० (2) में रखने पर

$=\{5-3(a-b)\}\{1+7(a-b)\}$

$\therefore \quad 5+32(a-b)-21(a-b)^2=(5-3a+3b)(1+7a-7b)$ उत्तर

14. $9(x-2y)^2-4(x-2y)-13$

हल— माना $(x-2y)=a$ ...(1)

$\therefore \quad 9(x-2y)^2-4(x-2y)-13=9a^2-4a-13$

अत: $ac=9\times(-13)=-117$

$-117=9\times(-13), 4=13-9$

$\therefore \quad 9a^2-4a-13=9a^2-(13-9)a-13$

$=9a^2-13a+9a-13$

$=a(9a-13)+1(9a-13)$

$=(9a-13)(a+1)$ ...(2)

समी० (1) से a का मान समी० (2) में रखने पर

$=\{9(x-2y)-13\}\{(x-2y)+1\}$

$\therefore \quad 9(x-2y)^2-9(x-2y)-13=(9x-18y-13)(x-2y+1)$ उत्तर

अभ्यास 2.5

निम्नलिखित व्यंजकों में क्या जोड़े कि पूर्ण वर्ग बन जाए?

1. $9x^2+16y^2$

हल— व्यंजक $9x^2+16y^2$ में $\pm 2\sqrt{9x^2\times 16y^2}$

या $\pm 2\times 3x\times 4y=\pm 24xy$ को जोड़ने पर यह पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

2. $1+8a$

हल— $1+8a=(1)^2+2\times 1\times \frac{8a}{2}$

अत: $\left(\frac{8a}{2}\right)^2=\frac{64a^2}{4}=16a^2$ जोड़ने पर व्यंजक $(1+8a)$ पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

3. x^2+9y^2

हल— $x^2+9y^2=(x)^2+(3y)^2$

व्यंजक x^2+9y^2 में $\pm 2\sqrt{x^2\times 9y^2}$

या $\pm 2\times x\times 3y=\pm 6xy$ को जोड़ने पर यह पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

4. x^2+8x

हल— $x^2+8x=(x)^2+(8)x$

दिए व्यंजक में एक पद x का पूर्ण वर्ग तथा दूसरा पद x की एक घात वाला है।

अत: $$\left[\frac{x \text{ का गुणांक}}{2}\right]^2=\left[\frac{8}{2}\right]^2=16$$

$\therefore$ 16 जोड़ने पर व्यंजक (x^2+8x) पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

5. a^2+8a

हल— $a^2+8a=a^2+8(a)$

दिए व्यंजक में एक पद a का पूर्ण वर्ग तथा दूसरा पद a का एक घात वाला है।

अत: $\left[\frac{a \text{ का गुणांक}}{2}\right]^2=\left[\frac{8}{2}\right]^2=16$

$\therefore$ 16 जोड़ने पर व्यंजक (a^2+8a) पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

6. $49x^2-56xy$

हल— $49x^2-56xy=(7x)^2+7x\times(-8y)$

दिए व्यंजक में एक पद $7x$ का पूर्ण वर्ग तथा दूसरा पद $7x$ की एक घात वाला है।

अत: $\left[\frac{7x \text{ का गुणांक}}{2}\right]^2=\left[\frac{-8y}{2}\right]^2=16y^2$

$\therefore$ $16y^2$ जोड़ने पर व्यंजक $(49x^2-56xy)$ पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

7. $9a^2-12ab$

हल— $9a^2-12ab=(3a)^2+3a\times(-4b)$

दिए व्यंजक में एक पद $3a$ का पूर्ण वर्ग तथा दूसरा पद $3a$ की एक घात वाला है।

अत: $$\left[\frac{3a \text{ का गुणांक}}{2}\right]^2=\left[\frac{-4b}{2}\right]^2=4b^2$$

$\therefore$ $4b^2$ जोड़ने पर व्यंजक $(9a^2-12ab)$ पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

8. $a^4+a^2b^2+b^4$

हल— $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2$

$=[(a^2)^2+(b^2)^2]+a^2b^2$

अत: व्यंजक में a^2b^2 या $-3a^2b^2$ को जोड़ने पर यह पूर्ण वर्ग हो जाएगा।

उत्तर

9. $9x^2-30x+81$

हल— $9x^2-30x+81=(3x)^2-30x+(9)^2$

$=(3x)^2+(9^2)-30x$

अत: व्यंजक में $-24x$ या $84\,x$ को जोड़ने पर यह पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

10. $a^2+\dfrac{1}{a^2}+1$

हल— $a^2+\dfrac{1}{a^2}+1=\left\{(a)^2+\left(\dfrac{1}{a}\right)^2\right\}+1$

व्यंजक में 1 या–3 को जोड़ने पर यह पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

11. $16x^2-8xy$

हल— $16x^2-8xy=(4x)^2-4x(2y)$

दिए व्यंजक में एक पद $4x$ का पूर्ण वर्ग तथा दूसरा पद $4x$ की एक घात वाला है।

अत: $\left[\dfrac{4x \text{ का गुणांक}}{2}\right]^2=\left[\dfrac{2y}{2}\right]^2=y^2$

$\therefore$ y^2 जोड़ने पर व्यंजक $(16x^2-8xy)$ पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

12. $4x^2+8xy+9y^2$

हल— $4x^2+8xy+9y^2=(2x)^2+8xy+(3y)^2$

$=[(2x)^2+(3y)^2]+8xy$

अत: व्यंजक में $4xy$ या $-20xy$ को जोड़ने पर यह पूर्ण वर्ग हो जाएगा। उत्तर

निम्नलिखित व्यंजकों को पूर्ण वर्ग बनाकर गुणनखण्ड कीजिए—

13. $a^4-22a^2b^2+b^4$

हल— $a^4-22a^2b^2+b^4=(a^2)^2-22a^2b^2+(b^2)^2$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times a^2\times b^2=2a^2b^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$a^4-22a^2b^2+b^4=(a^2)^2-22a^2b^2+(b^2)^2+2a^2b^2-2a^2b^2$

$=[(a^2)^2+(b^2)^2+2a^2b^2]-22a^2b^2-2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-24a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(2\sqrt{6}ab)^2$

$=(a^2+b^2+2\sqrt{6}ab)(a^2+b^2-2\sqrt{6}ab)$ उत्तर

14. x^4+25y^4

हल— $x^4+25y^4=(x^2)^2+(5y^2)^2$

$\therefore$ पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times x^2\times 5y^2=10x^2y^2$ को जोड़ने व घटाने पर

$$x^4+25y^2=(x^2)^2+(5y^2)^2+10x^2y^2-10x^2y^2$$
$$=[(x^2)^2+(5y^2)^2+10x^2y^2]-10x^2y^2$$
$$=(x^2+5y^2)^2-(\sqrt{10}xy)^2$$
$$=(x^2+5y^2+\sqrt{10}xy)(x^2+5y^2-\sqrt{10}xy)$$ उत्तर

15. $64x^4+81y^4$

हल— $64x^4+81y^4=(8x^2)^2+(9y^2)^2$

$\therefore$ पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times 8x^2\times 9y^2=144x^2y^2$ को जोड़ने व घटाने पर

$$64x^4+81y^4=(8x^2)^2+(9y^2)^2+144x^2y^2-144x^2y^2$$
$$=[(8x^2)^2+(9y^2)^2+144x^2y^2]-144x^2y^2$$
$$=(8x^2+9y^2)^2-(12xy)^2$$
$$=(8x^2+9y^2+12xy)(8x^2+9y^2-12xy)$$ उत्तर

16. $x^4-14x^2y^2+y^4$

हल— $x^4-14x^2y^2+y^4=(x^2)^2-14x^2y^2+(y^2)^2$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times x^2\times y^2=2x^2y^2$ को जोड़ने व घटाने पर

$$x^4-14x^2y^2+y^4=(x^2)^2-14x^2y^2+(y^2)^2+2x^2y^2-2x^2y^2$$
$$=[(x^2)^2+(y^2)^2+2x^2y^2]-16x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(4xy)^2$$
$$=(x^2+y^2+4xy)(x^2+y^2-4xy)$$ उत्तर

17. x^5y+9xy^5

हल— $$x^5y+9xy^5=xy[x^4+9y^4]$$

$\therefore$ $$x^4+9y^4=(x^2)^2+(3y^2)^2$$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times x^2\times 3y^2=6x^2y^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$$(x^2)^2+(3y^2)^2=(x^2)^2+(3y^2)^2+6x^2y^2-6x^2y^2$$
$$=(x^2+3y^2)^2-6x^2y^2$$
$$=(x^2+3y^2)^2-(\sqrt{6}xy)^2$$

अतः समी० (1) से

$$x^5y+9xy^5=xy[(x^2+3y^2)^2-(\sqrt{6}xy)]$$
$$=xy(x^2+3y^2+\sqrt{6}xy)(x^2+3y^2-\sqrt{6}xy)$$ उत्तर

18. a^4+2a^2+9

हल— $a^4+2a^2+9=(a^2)^2+2a^2+(3)^2$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times a^2\times 3=6a^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$$a^4+2a^2+9=(a^2)^2+2a^2+(3)^2+6a^2-6a^2$$
$$=[(a^2)^2+(3)^2+6a^2]-6a^2+2a^2$$
$$=(a^2+3)^2-(4a^2)$$
$$=(a^2+3)^2-(2a)^2$$
$$=(a^2+3+2a)(a^2+3-2a)$$ उत्तर

19. $(a+b)^4+(a+b)^2+1$

हल— माना $a+b=x$ ...(1)

$$\therefore \quad (a+b)^4+(a+b)^2+1=x^4+x^2+1$$
$$=(x^2)^2+x^2+1$$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times x^2\times 1=2x^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$$(x^2)^2+x^2+1=(x^2)^2+x^2+1+2x^2-2x^2$$
$$=[(x^2)^2+1+2x^2]-2x^2+x^2$$
$$=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x) \quad ...(2)$$

समी० (1) से x का मान समी० (2) में रखने पर

$$\therefore \quad (a+b)^4+(a+b)^2+1$$
$$=((a+b)^2+1+(a+b))((a+b)^2+1-(a+b))$$ उत्तर

20. x^4-3x^2+9

हल— $x^4-3x^2+9=(x^2)^2-3x^2+(3)^2$

$\therefore$ पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times x^2\times 3=6x^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$$(x^4-3x^2+9)=(x^2)^2-3x^2+(3)^2+6x^2-6x^2$$
$$=[(x^2)^2+(3)^2+6x^2]-6x^2-3x^2$$
$$=(x^2+3)^2-9x^2$$
$$=(x^2+3)^2-(3x)^2$$
$$=(x^2+3+3x)(x^2+3-3x)$$ उत्तर

21. $9a^4-a^2b^2+16b^4$

हल— $9a^4-a^2b^2+16b^4=(3a^2)^2-a^2b^2+(4b^2)^2$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times 3a^2\times 4b^2=24a^2b^2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$$9a^4-a^2b^2+16b^4=(3a^2)^2-a^2b^2+(4b^2)^2+24a^2b^2-24a^2b^2$$
$$=[(3a^2)^2+(4b^2)+24a^2b^2]-24a^2b^2-a^2b^2$$
$$=(3a^2+4b^2)^2-25a^2b^2$$
$$=(3a^2+4b^2)^2-(5ab)^2$$
$$=(3a^2+4b^2+5ab)(3a^2+4b^2-5ab)$$ उत्तर

22. $a^4+\frac{1}{a^4}+1$

हल— $a^4+\frac{1}{a^4}+1=(a^2)^2+(1/a^2)^2+1$

पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2\times a^2\times 1/a^2=2$ को जोड़ने तथा घटाने पर

$$a^4+1/a^4+1=(a^2)^2+(1/a^2)^2+1+2-2$$
$$=[(a^2)^2+(1/a^2)^2+2]+1-2$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 1^2$$

$$a^4 + 1/a^4 + 1 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$$

ज्ञात हुए व्यंजक $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right)$ को पुन: पूर्ण वर्ग बनाकर हल किया जा सकता है। अत:

प्राप्त व्यंजक $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$ में से $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right)$ को पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $2 \times a \times 1/a = 2$ को जोड़ने व घटाने पर

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 + 2 - 2\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$$

$$= \left\{\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) - 1\right\}\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$$

$$= \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 1\right\}\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$$

$$= \left(a + \frac{1}{a} + 1\right)\left(a + \frac{1}{a} - 1\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$$ उत्तर

अभ्यास 2.6

निम्नलिखित के गुणखण्ड कीजिए—

1. $8a^3 + 125b^3$

हल—
$$8a^3 + 125b^3 = (2a)^3 + (5b)^3$$
$$= (2a + 5b)\{(2a)^2 + (5b)^2 - (2a \times 5b)\}$$
$$= (2a + 5b)(4a^2 + 25b^2 - 10ab)$$ उत्तर

2. $x^3y + 216y$

हल—
$$x^3y + 216y = y(x^3 + 216)$$
$$= y\{(x)^3 + (6)^3\}$$
$$= y(x+6)\{x^2 + (6)^2 - (x \times 6)\}$$
$$= y(x+6)(x^2 + 36 - 6x)$$ उत्तर

3. $x^6 + \frac{1}{y^6}$

हल—
$$x^6 + \frac{1}{y^6} = (x^2)^3 + \left(\frac{1}{y^2}\right)^3$$
$$= \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left\{(x^2)^2 + \frac{1}{(y^2)^2} - \left(x^2 \times \frac{1}{y^2}\right)\right\}$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{y^4}-\frac{x^2}{y^2}\right)$$ उत्तर

4. $64a^3+8b^3$

हल— $64a^3+8b^3=(4a)^3+(2b)^3$

$=(4a+2b)\{(4a)^2+(2b)^2-(4a\times 2b)\}$

$=(4a+b)(16a^2+4b^2-8ab)$ उत्तर

5. $8(x+y)^3+27(x+y)^3$

हल— $8(x+y)^3+27(x+y)^3=\{2(x+y)\}^3+\{3(x+y)\}^3$

$=\{2(x+y)+3(x+y)\}\{2(x+y)\}^2$

$+\{3(x+y)\}^2-\{2(x+y)\times 3(x+y)\}$

$=\{2x+2y+3x+3y\}\{4(x^2+y^2+2xy)\}$

$+\{9(x^2+y^2+2xy)\}-6(x^2+y^2+2xy)$

$=(5x+5y)(4x^2+4y^2+8xy+9x^2+9y^2$

$+18xy-6x^2-6y^2-12xy)$

$=(5x+5y)(7x^2+7y^2+14xy)$ उत्तर

6. xy^7+x^7y

हल— $xy^7+x^7y=xy(y^6+x^6)$

$=xy\{(y^2)^3+(x^2)^3\}$

$=xy(y^2+x^2)\{(y^2)^2+(x^2)^2-(y^2\times x^2)\}$

$=xy(y^2+x^2)(y^4+x^4-y^2x^2)$ उत्तर

7. $a^4+125a+a^2+5a$

हल— $a^4+125a+a^2+5a=a(a^3+125)+a(a+5)$

$=a(a^3+5^3)+a(a+5)$

$=a[(a+5)\{a^2+5^2-(5\times a)\}]+a(a+5)$

$=a\{(a+5)(a^2+25-5a)\}+a(a+5)$

$=a(a+5)\{(a^2+25-5a+1)\}$

$=a(a+5)(a^2+26-5a)$ उत्तर

8. $64a^3+8b^3-16a-8b$

हल— $64a^3+8b^3-16a-8b=(4a)^3+(2b)^3-16a-8b$

$=(4a+2b)\{(4a)^2+(2b)^2-(4a\times 2b)\}-16a-8b$

$=(4a+2b)(16a^2+4b^2-8ab)-4(4a+2b)$

$=(4a+2b)(16a^2+4b^2-8ab-4)$ उत्तर

9. $a^2b^5+a^5b^2-a^3b^2-b^3a^2$

हल— $a^2b^5+a^5b^2-a^3b^2-b^3a^2=a^2b^2(a^3+b^3)-a^3b^2-b^3a^2$

$=a^2b^2(a+b)(a^2+b^2-ab)-a^2b^2(a+b)$

$=a^2b^2(a+b)(a^2+b^2-ab-1)$ उत्तर

10. $8(a+b)^3+27(a-b)^3$

हल— $8(a+b)^3+27(a-b)^3=\{2(a+b)\}^3+\{3(a-b)\}^3$

$=\{2(a+b)+3(a-b)\}[\{2(a+b)\}^2+\{3(a-b)\}^2$

$-\{2(a+b)\times 3(a-b)\}]$

$=(2a+2b+3a-3b)[\{4(a^2+b^2+2ab)\}+\{9(a^2+b^2-2ab)\}$

$-\{6(a^2-b^2)\}]$

$=(5a-b)(4a^2+4b^2+8ab+9a^2+9b^2-18a)-6a^2+6b^2)$

$=(5a-b)(7a^2+19b^2-10ab)$ उत्तर

11. $8xy^{10}+8x^{10}y$

हल— $8xy^{10}+8x^{10}y=8xy(y^9+x^9)$

$=8xy\{(y^3)^3+(x^3)^3\}$

$=8xy(y^3+x^3)\{(y^3)^2+(x^3)^2-y^3x^3\}$

$=8xy(y+x)(y^2+x^2-yx)\{(y^2)^3+(x^2)^3-y^3x^3\}$

$=8xy(y+x)(y^2+x^2-yx)[(y^2+x^2)\{(y^2)^2+(x^2)^2-y^2x^2\}-y^3x^3]$

$=8xy(y+x)(y^2+x^2-yx)[(y^2+x^2)(y^4+x^4-x^2y^2)-y^3x^3]$

$=8xy(y+x)(y^2+x^2-yx)\{y^6+y^2x^4-x^2y^4+x^6-x^4y^2$

$+x^2y^4-y^3x^3\}]$

$=8xy\{(y+x)(y^2+x^2-yx)(y^6+x^6-x^3y^3)\}$ उत्तर

12. a^9+b^9

हल— $a^9+b^9=(a^3)^3+(b^3)^3$

$=(a^3+b^3)\{(a^3)^2+(b^3)^2-a^3b^3\}$

$=(a+b)(a^2+b^2-ab)(a^6+b^6-a^3b^3)$ उत्तर

13. $(1331)(x)^3+(1000)(y^3)$

हल— $(1331)(x)^3+(1000)(y^3)=(11x)^3+(10y)^3$

$=(11x+10y)\{(11x)^2+(10y)^2-(11x\times 10y)\}$

$=(11x+10y)(121x^2+100y^2-110xy)$ उत्तर

14. $(2a+1)^3+(2a-1)^3$

हल— $(2a+1)^3+(2a-1)^3=(2a+1+2a-1)$

$\{(2a+1)^2+(2a-1)^2-(2a+1)\times(2a-1)\}$

$=(4a)\{4a^2+1+4a+4a^2+1-4a-(4a^2-1)\}$

$=4a(8a^2+2-4a^2+1)$

$=4a(4a^2+3)$ उत्तर

15. सूत्र की सहायता से निम्नलिखित व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए।

$$\frac{1.53\times 1.53\times 1.53+0.23\times 0.23\times 0.23}{1.53\times 1.53-1.53\times 023+0.23\times 0.23}$$

हल— $\dfrac{(1.53\times1.53\times1.53)+(0.23\times0.23\times0.23)}{(1.53\times1.53)-(1.53\times0.23)+(0.23\times0.23)}$

$$=\frac{(1.53)^3+(0.23)^3}{(1.53)^2-(1.53\times0.23)+(0.23)^2}$$

$$=\frac{(1.53+0.23)\{(1.53)^2+(0.23)^2-(1.53\times0.23)\}}{(1.53)^2-(1.53\times0.23)+(0.23)^2}$$

$$=1.53+0.23$$

$$=1.76$$ उत्तर

अभ्यास 2.7

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए—

1. a^6-b^6

हल— $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$

$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$

$$=(a+b)(a^2+b^2-ab)(a-b)(a^2+b^2+ab)$$

या $=(a+b)(a-b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$ उत्तर

2. $x^3-\dfrac{1}{x^3}$

हल— $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+x\times\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+2-2+1\right\}$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1^2\right\}$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$$ उत्तर

3. x^3-27y^3

हल— $x^3-27y^3=(x)^3-(3y)^3$

$$=(x-3y)\{x^2+(3y)^2+(3y\times x)\}$$

$$=(x-3y)(x^2+9y^2+3xy)$$ उत्तर

4. x^9-y^9

हल— $x^9-y^9=(x^3)^3-(y^3)^3$

$$=(x^3-y^3)\{(x^3)^2+(y^3)^2+(x^3\times y^3)\}$$

$$=(x-y)(x^2+y^2+xy)(x^6+y^6+x^3y^3)$$ उत्तर

5. $ab^4 - ba^4$

हल— $ab^4 - ba^4 = ab(b^3 - a^3)$

$= ab\{(b-a)(b^2 + a^2 + (a \times b)\}$

$= ab(b-a)(b^2 + a^2 + ab)$ उत्तर

6. $\left[x + \frac{1}{x}\right]^3 - \left[x - \frac{1}{x}\right]^3$

हल— $\left[x + \frac{1}{x}\right]^3 - \left[x - \frac{1}{x}\right]^3 = \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)\right\}$

$\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \times \left(x - \frac{1}{x}\right)\right\}$

$= \left(x + \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x} + x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{2}{x}\left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ उत्तर

7. $x^3y^3 - 512$

हल— $x^3y^3 - 512 = (xy)^3 - (8)^3$

$= (xy - 8)\{(xy)^2 + (8)^2 + (xy \times 8)\}$

$= (xy - 8)(x^2y^2 + 64 + 8xy)$ उत्तर

8. $a^3 - b^3 + a^2 - b^2$

हल— $a^3 - b^3 + a^2 - b^2 = (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2)$

$= (a-b)(a^2 + b^2 + ab) + (a+b)(a-b)$

$= (a-b)(a^2 + b^2 + ab + a + b)$ उत्तर

9. $108x^7y^4 - 4000x^4y^7$

हल— $108x^7y^4 - 4000x^4y^7 = 4x^4y^4(27x^3 - 1000y^3)$

$= 4x^4y^4\{(3x)^3 - (10y)^3\}$

$= 4x^4y^4[(3x - 10y)\{(3x)^2 + (10y)^2 + (3x \times 10y)\}]$

$= 4x^4y^4(3x - 10y)(9x^2 + 100y^2 + 30xy)$ उत्तर

10. $343x^3 - 14x + 6y - 27y^3$

हल— $343x^3 - 14x + 6y - 27y^3 = (343x^3 - 27y^3) - 14x + 6y$

$= \{(7x)^3 - (3y)^3\} - 14x + 6y$

$= (7x - 3y)\{(7x)^2 + (3y)^2 + (7x \times 3y)\} - 2(7x - 3y)$

$= (7x - 3y)(49x^2 + 9y^2 + 21xy) - 2(7x - 3y)$

$= (7x - 3y)(49x^2 + 9y^2 + 21xy - 2)$ उत्तर

विविध प्रश्नावली

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए—

1. $4x^2y-2x^4$

हल— $4x^2y-2x^4=2x^2(2y-x^2)$ उत्तर

2. $x^{12}-y^{12}$

हल— $x^{12}-y^{12}=(x^6)^2-(y^6)^2$

$=(x^6+y^6)(x^6-y^6)$

$=[\{(x^2)^3+(y^2)^3\}\{(x^2)^3-(y^2)^3\}]$

$=(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)(x^2-y^2)(x^4+y^4+x^2y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^4+y^4-x^2y^2)(x^4+y^4+x^2y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^4+y^4-x^2y^2)(x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2+x^2y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^4+y^4-x^2y^2)\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)(x^4+y^4-x^2y^2)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$ उत्तर

3. $9a^2b(a-b)^2-3a^2(a-b)^3$

हल— $9a^2b(a-b)^2-3a^2(a-b)^3=3a^2(a-b)^2\{3b-(a-b)\}$

$=3a^2(a-b)^2(3b-a+b)$

$=3a^2(a-b)^2(4b-a)$ उत्तर

4. a^3+a-3a^2-3

हल— $a^3+a-3a^2-3=a(a^2+1)-3(a^2+1)$

$=(a^2+1)(a-3)$ उत्तर

5. $x^2-1-2y-y^2$

हल— $x^2-1-2y-y^2=x^2-(1+2y+y^2)$

$=x^2-(1+y)^2$

$=(x+1+y)(x-1-y)$ उत्तर

6. $x^2-32xy-105y^2$

हल— $x^2-32xy-105y^2=x^2-(35xy-3xy)-105y^2$

$=x^2-35xy+3xy-105y^2$

$=x(x-35y)+3y(x-35y)$

$=(x-35y)(x+3y)$ उत्तर

7. $x^2-7x+12$

हल— $x^2-7x+12=x^2-(4+3)x+12$

$=x^2-4x-3x+12$

$=x(x-4)-3(x-4)$

$=(x-4)(x-3)$ उत्तर

8. $x^4 - 29x^2 + 100$

हल—
$$\begin{aligned} x^4 - 29x^2 + 100 &= x^4 - (25+4)x^2 + 100 \\ &= x^4 - 25x^2 - 4x^2 + 100 \\ &= x^2(x^2 - 25) - 4(x^2 - 25) \\ &= (x^2 - 25)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 - 5^2)(x^2 - 2^2) \\ &= (x+5)(x-5)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$
उत्तर

9. $7a^2b - 14ab^2 - 21b^3$

हल—
$$\begin{aligned} 7a^2b - 14ab^2 - 21b^3 &= 7b(a^2 - 2ab - 3b^2) \\ &= 7b\{a^2 - (3-1)ab - 3b^2\} \\ &= 7b(a^2 - 3ab + ab - 3b^2) \\ &= 7b\{a(a-3b) + b(a-3b)\} \\ &= 7b(a-3b)(a+b) \end{aligned}$$
उत्तर

10. $8 + 6x - 5x^2$

हल—
$$8 + 6x - 5x^2 = -(5x^2 - 6x - 8)$$
$$5 \times (-8) = -40$$
$$(-10) \times 4 = -40, 10 - 4 = 6$$
$$\begin{aligned} &= -\{5x^2 - (10-4)x - 8\} \\ &= -(5x^2 - 10x + 4x - 8) \\ &= -\{5x(x-2) - 4(x-2)\} \\ &= -(x-2)(5x+4) \end{aligned}$$
या $= (-2+x)(-5x-4)$ उत्तर

पूर्ण वर्ग बनाकर गुणनखण्ड कीजिए—

11. $x^2 + 26x + 153$

हल— $x^2 + 26x + 153 = x^2 + 2 \times 13 \times x + 153$

$\therefore$ पूर्ण वर्ग बनाने के लिए ± 169 जोड़ने पर

अतः
$$\begin{aligned} x^2 + 26x + 153 &= x^2 + 2 \times 13 \times x + 169 - 169 + 153 \\ &= (x+13)^2 - 16 \\ &= (x+13)^2 - 4^2 \\ &= (x+13+4)(x+13-4) \\ &= (x+17)(x+9) \end{aligned}$$
उत्तर

12. $x^4 + 4y^4$

हल— $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2$

$\therefore$ पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें $\pm 2 \times x^2 \times 2y^2 = \pm 4x^2y^2$ जोड़ना होगा।

अतः $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2$

$$= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$$
$$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$$ उत्तर

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए।

13. $8x^2y^5 + 27x^5y^2$

हल— $8x^2y^5 + 27x^5y^2 = x^2y^2(8y^3 + 27x^3)$
$$= x^2y^2\{(2y)^3 + (3x)^3\}$$
$$= x^2y^2[(2y+3x)\{(2y)^2 + (3x)^2 - (2y \times 3x)\}]$$
$$= x^2y^2\{(2y+3x)(4y^2 + 9x^2 - 6xy)\}$$ उत्तर

14. $x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x}$

हल— $x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)$
$$= \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)\left\{x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x \times \frac{1}{x}\right)\right\}\right] + \left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 + 1\right)$$
$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$ उत्तर

15. $64x^6 - y^6$

हल— $64x^6 - y^6 = (2x)^6 - y^6$
$$= \{(2x)^3\}^2 - (y^3)^2$$
$$= \{(2x)^3 + y^3\}\{(2x)^3 - y^3\}$$
$$= [(2x + y)\{(2x)^2 + y^2 - (2x \times y)\}]$$
$$[(2x - y)\{(2x)^2 + y^2 + (2x \times y)\}]$$
$$= (2x + y)(4x^2 + y^2 - 2xy)(2x - y)(4x^2 + y^2 + 2xy)$$ उत्तर

16. $a^{12} - b^{12}$

हल— $a^{12} - b^{12} = (a^6)^2 - (b^6)^2$
$$= (a^6 + b^6)(a^6 - b^6)$$
$$= \{(a^2)^3 + (b^2)^3\}\{(a^2)^3 - (b^2)^3\}$$
$$= [(a^2 + b^2)\{(a^2)^2 + (b^2)^2 - (a^2 \times b^2)\}][(a^2 - b^2)\{(a^2)^2$$
$$+ (b^2)^2 + (a^2 \times b^2)\}]$$
$$= (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^4 + b^4 + a^2b^2)$$

$$= (a^2+b^2)(a+b)(a-b)(a^4+b^4-a^2b^2)(a^4+b^4+2a^2b^2 - 2a^2b^2+a^2b^2)$$

$$= (a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)\{(a^2+b^2)^2-a^2b^2\}$$

$$= (a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$

उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 30 व 31 देखिए।

3

शेषफल प्रमेय व गुणनखण्ड प्रमेय
(Remainder Theorem and Factor Theorem)

अभ्यास 3.1

1. x^2+5x-2 को $(x-1)$ से भाग देने पर क्या शेषफल प्राप्त होता है?

हल— शेषफल प्रमेय से,

माना $p(x)=x^2+5x-2$ में $x-1=0$

या $x=1$ रखने पर

शेषफल $= p(1)$

$=(1)^2+5(1)-2$

$=1+5-2$

$=6-2=4$

शेषफल $= 4$ **उत्तर**

2. यदि $p(x)=2x^3+4x^2-5x-10$ हो, तो सिद्ध कीजिए $(x+2), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

हल— $p(x)=2x^3+4x^2-5x-10$

यदि $x+2=0$ या $x=-2$, $p(x)$ में रखने पर $p(x)=0$ तब $(x+2), p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$\therefore \quad p(-2)=2(-2)^3+4(-2)^2-5(-2)-10$

$=2\times(-8)+(4\times4)+10-10$

$=-16+16+10-10$

$p(-2)=0$

अर्थात् हम कह सकते है $(x+2), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

3. यदि $p(x)=3x^3+2x^2-4+1$ हो, तो शेषफल ज्ञात कीजिए, जबकि $p(x)$ को निम्नलिखित के द्वारा भाग किया गया हो।

(i) $(x-1)$ (ii) $(x-2)$ (iii) $(x+1)$

हल— (i) $(x-1)$

शेषफल प्रमेय से

$p(x)=3x^3+2x^2-4+1$ में $x-1=0$ या $x=1$ रखने पर

शेषफल $= p(1)$

$= 3(1)^3 + 2(1)^2 - 4 + 1$

$= 3 + 2 - 4 + 1$

$= 6 - 4$

शेषफल $= 2$ उत्तर

(ii) $(x - 2)$

शेषफल प्रमेय से

$p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4 + 1$ में $x - 2 = 0$ या $x = 2$ रखने पर

शेषफल $= p(2)$

$= 3(2)^3 + 2(2)^2 - 4 + 1$

$= 24 + 8 - 4 + 1$

$= 33 - 4$

शेषफल $= 29$ उत्तर

(iii) $(x + 1)$

शेषफल प्रमेय से

$p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4 + 1$ में $x + 1 = 0$ या $x = -1$ रखने पर

शेषफल $= p(-1)$

$= 3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 4 + 1$

$= -3 + 2 - 4 + 1$

$= -7 + 3$

शेषफल $= -4$ उत्तर

4. $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 2$ को $(x + 2)$ से भाग देने पर शेषफल को शेषफल प्रमेय की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल—शेषफल प्रमेय से

$p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 2$ में $x + 2 = 0$ या $x = -2$ रखने पर

शेषफल $= p(-2)$

$= (-2)^3 - (-2)^2 + 4(-2) - 2$

$= -8 - 4 - 8 - 2$

शेषफल $= -22$ उत्तर

5. सिद्ध कीजिए $(x - 4)$, व्यंजक $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ का एक गुणनखण्ड है।

हल—$p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

यदि $x - 4 = 0$ या $x = 4, p(x)$ में रखने पर $p(x) = 0$ तब $(x - 4)$, व्यंजक $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$\therefore \quad p(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 9(4) - 4$

$= 64 - 96 + 36 - 4$

$p(4) = 100 - 100$

$p(4) = 0$

अर्थात् हम कह सकते हैं $(x-4)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

6. $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ को $(x-2)$ से भाग देने पर शेषफल को शेषफल प्रमेय की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल—शेषफल प्रमेय से $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ में $x - 2 = 0$ या $x = 2$ रखने पर

$$p(2) = (2)^4 + 2(2)^3 - 3(2)^2 + 2 - 1$$
$$= 16 + 16 - 12 + 2 - 1$$
$$= 34 - 13$$
$$p(2) = 21$$

उत्तर

7. व्यंजक $2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ को $(2x-1)$ से भाग देने पर शेषफल को शेषफल प्रमेय की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल—शेषफल प्रमेय से $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ में $2x - 1 = 0$

या $x = \frac{1}{2}$ रखने पर

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 1 + 1$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-2}{4}$$
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

उत्तर

8. यदि $p(x) = 2x^3 + 6x - 6$ तथा $q(x) = (x+1)$ तो ज्ञात कीजिए $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।

हल—$p(x) = 2x^3 + 6x - 6$

यदि $q(x) = (x+1) = 0$ या $x = -1$, $p(x)$ में रखने पर $p(x) = 0$ तब $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$$\therefore \quad p(-1) = 2(-1)^3 + 6(-1) - 6$$
$$= -2 - 6 - 6$$
$$p(-1) = -14$$
$$\because \quad p(-1) \neq 0$$

अर्थात् $q(x)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

9. यदि $p(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 6$ तथा $q(x) = x - 3$ तो ज्ञात कीजिए कि $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।

हल—$p(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 6$

यदि $q(x) = x - 3 = 0$ या $x = 3$, $p(x)$ में रखने पर $p(x) = 0$ तब $q(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

$\therefore \quad p(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 7(3) + 6$

$= 27 - 54 + 21 + 6$

$= 54 - 54$

$p(3) = 0$

अर्थात् $q(x), p(x)$ का गुणनखण्ड है।

10. ज्ञात कीजिए $q(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।

यदि $p(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$

$q(x) = x + \frac{1}{2}$

हल—$p(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$

यदि $q(x) = x + \frac{1}{2} = 0$ या $x = -\frac{1}{2}$ रखने पर $p(x) = 0$ तब $q(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^5 - \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{-1}{32} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{-1 - 2 - 4 - 8 + 16 - 32}{32}$$

$$= \frac{-47 + 16}{32}$$

$$p\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-31}{32}$$

$$\because \quad p\left(\frac{-1}{2}\right) \neq 0$$

अर्थात् $q(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

11. यदि निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक का एक गुणनखण्ड $(x-2)$ हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $x^3 - 3x^2 - 4a - 4$

(ii) $2x^3 + 4a^2 - 5x - 10$

हल—(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4a - 4$

दिया है— $(x-2), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $p(2) = 0$

$(2)^3 - 3(2)^2 - 4a - 4 = 0$

$8 - 12 - 4a - 4 = 0$

$-4a - 8 = 0$

$4a = -8$

$$a = \frac{-8}{4} = -2$$

$$a = -2$$ उत्तर

(ii) $p(x) = 2x^3 + 4a^2 - 5x - 10$

दिया है— $(x-2), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $p(2) = 0$

$$2(2)^3 + 4a^2 - 5(2) - 10 = 0$$

$$16 + 4a^2 - 10 - 10 = 0$$

$$4a^2 - 4 = 0$$

$$4a^2 = 4$$

$$a^2 = 1$$

या $a = 1$ उत्तर

12. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक का एक गुणनखण्ड $(x+a)$ हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $-x^3 - ax^2 + 6x - a + 1$

(ii) $x^4 - a^2x^2 + 9x + 6$

हल— (i) $p(x) = -x^3 - ax^2 + 6x - a + 1$

दिया है—$(x+a), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $p(-a) = 0$

$$-(-a)^3 - a(-a)^2 + 6(-a) - a + 1 = 0$$

$$a^3 - a^3 - 6a - a + 1 = 0$$

$$-7a + 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{7} \Rightarrow a = -\frac{1}{7}$$ उत्तर

(ii) $p(x) = x^4 - a^2x^2 + 9x + 6$

दिया है— $(x+a), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $p(-a) = 0$

$$(-a)^4 - a^2(-a)^2 + 9(-a) + 6 = 0$$

$$a^4 - a^4 - 9a + 6 = 0$$

$$-9a + 6 = 0$$

$$a = \frac{-6}{9}$$

$\Rightarrow$ $$a = \frac{-2}{3}$$ उत्तर

13. b का मान ज्ञात कीजिए, यदि $(x-b)$, $p(x)=x^4-bx^3+12x-b+1$ का एक गुणनखण्ड है।

हल—$p(x)=x^4-bx^3+12x-b+1$

दिया है— $(x-b)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $$p(b)=0$$

$$(b)^4-b(b^3)+12(b)-b+1=0$$
$$b^4-b^4+12b-b+1=0$$
$$11b-1=0$$
$$b=\frac{1}{11}$$ उत्तर

14. b का मान ज्ञात कीजिए, यदि $(x-b), p(x)=x^5-bx^4+3x+b-2$ का एक गुणनखण्ड है।

हल—$p(x)=x^5-bx^4+3x+b-2$

दिया है—$(x-b), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $$p(b)=0$$

$$(b)^5-\mathrm{b}(b)^4+3(b)+b-2=0$$
$$b^5-b^5+3b+b-2=0$$
$$4b-2=0$$
$$b=\frac{2}{4}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$ उत्तर

15. यदि $q(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तब p का मान ज्ञात कीजिए।

$$q(x)=(x-2)$$
$$p(x)=3x^3-2x^2+5p-5$$

हल— $$p(x)=3x^3-2x^2+5p-5$$

व $$q(x)=(x-2)$$

दिया है— $q(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $$p(2)=0$$

$$3(2)^3-2(2)^2+5p-5=0$$
$$24-8+5p-5=0$$
$$5p+11=0$$
$$p=-\frac{11}{5}$$ उत्तर

16. यदि $q(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

$$q(x)=(x+2)$$
$$p(x)=4x^4+2x^3+2kx^2+3x+9$$

हल— $$p(x)=4x^4+2x^3+2kx^2+3x+9$$
$$q(x)=(x+2)$$

दिया है— $q(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $p(-2)=0$

$$4(-2)^4+2(-2)^3+2k(-2)^2+3(-2)+9=0$$

$$64-16+8k-6+9=0$$

$$73-22+8k=0$$

$$8k+51=0$$

$$k=\frac{-51}{8}$$ उत्तर

अभ्यास 3.2

शेषफल प्रमेय की सहायता से गुणनखण्ड कीजिए।

1. x^3-7x-6

हल— अचर पद, $6=1\times2\times3$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर,

शेषफल $=(1)^3-7(1)-6$

$=1-7-6=1-13=-12$

दिए बहुपद में $x=-1$ रखने पर

शेषफल $=(-1)^3-7(-1)-6$

$=-1+7-6$

$=7-7=0$

$\therefore$ $(x+1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore$ $x^3-7x-6=(x+1)A$ ...(1)

$$A=\frac{x^3-7x-6}{(x+1)}=x^2-x-6$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर,

$$x^3-7x-6=(x+1)(x^2-x-6)$$

$$=(x+1)(x^2-3x+2x-6)$$

$$=(x+1)\{x(x-3)+2(x-3)\}$$

$$=(x+1)(x-3)(x+2)$$ उत्तर

2. $2x^3-3x^2+1$

हल— अचर पद, 1

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर

शेषफल $=2(1)^3-3(1)^2+1$

$=2-3+1\Rightarrow3-3\Rightarrow0$

$\therefore (x-1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)A$ ...(1)

$$A = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x-1)} = 2x^2 - x - 1$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर,

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(2x^2 - x - 1)$$
$$= (x-1)(2x^2 - 2x + x - 1)$$
$$= (x-1)\{2x(x-1) + 1(x-1)\}$$
$$= (x-1)(x-1)(2x+1)$$ उत्तर

3. $\mathbf{x^3 - 7x + 6}$

हल—अचर पद, $6 = 1 \times 2 \times 3$

दिए गए बहुपद में $x = 1$ रखने पर,

शेषफल $= (1)^3 - 7(1) + 6$

$= 1 - 7 + 6 \Rightarrow 7 - 7$

शेषफल $= 0$

$\therefore (x-1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad x^3 - 7x + 6 = (x-1)A$ ...(1)

$$A = \frac{x^3 - 7x + 6}{(x-1)} = x^2 + x - 6$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर,

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$
$$= (x-1)(x^2 + 3x - 2x - 6)$$
$$= (x-1)\{x(x+3) - 2(x+3)\}$$
$$= (x-1)(x+3)(x-2)$$ उत्तर

4. $\mathbf{x^3 - 30x^2 - x + 30}$

हल—अचर पद, $30 = 1 \times 2 \times 3 \times 5$

दिए गए बहुपद में $x = 1$ रखने पर,

शेषफल $= (1)^3 - 30(1)^2 - (1) + 30$

$= 1 - 30 - 1 + 30$

शेषफल $= 0$

$\therefore (x-1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad x^3 - 30x^2 - x + 30 = (x-1)A$ ...(1)

$$A = \frac{x^3 - 30x^2 - x + 30}{(x-1)} = x^2 - 29x - 30$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर,

$$x^3-30x^2-x+30=(x-1)(x^2-29x-30)$$
$$=(x-1)(x^2-30x+x-30)$$
$$=(x-1)\{x(x-30)+1(x-30)\}$$
$$=(x-1)(x-30)(x+1)$$ उत्तर

5. $x^3-7x^2+14x-8$

हल—अचर पद, $8=1\times2\times4$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर,

शेषफल $=(1)^3-7(1)^2+14(1)-8$

$=1-7+14-8\Rightarrow15-15$

शेषफल $=0$

$\therefore$ $(x-1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore$ $x^3-7x^2+14x-8=(x-1)A$ ...(1)

$$A=\frac{x^3-7x^2+14x-8}{(x-1)}=x^2-6x+8$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$x^3-7x^2+14x-8=(x-1)(x^2-6x+8)$$
$$=(x-1)(x^2-4x-2x+8)$$
$$=(x-1)\{x(x-4)-2(x-4)\}$$
$$=(x-1)(x-4)(x-2)$$ उत्तर

6. $12x^3-7x^2+19$

हल—अचर पद, $19=1\times19$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर,

शेषफल $=12(1)^3-7(1)^2+19$

$=12-7+19=31-7$

शेषफल $=24$

पुन: दिए गए बहुपद में $x=-1$ रखने पर,

शेषफल $=12(-1)^3-7(-1)^2+19$

$=-12-7+19\Rightarrow19-19$

शेषफल $=0$

$\therefore$ $(x+1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore 12x^3-7x^2+19=(x+1)A$ ...(1)

$$A=\frac{12x^3-7x^2+19}{(x+1)}=12x^2-19x+19$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$12x^3-7x^2+19=(x+1)(12x^2+19x+19)$$ उत्तर

7. $x^3+6x^2+11x+6$

हल—अचर पद, $6=1\times2\times3$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर,

शेषफल $=(1)^3+6(1)^2+11(1)+6$

$=1+6+11+6$

$=23$

पुनः दिए बहुपद में $x=-1$ रखने पर

शेषफल $=(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6$

$=-1+6-11+6\Rightarrow12-12$

शेषफल $=0$

$\therefore (x+1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore x^3+6x^2+11x+6=(x+1)A$ ...(1)

$$A=\frac{x^3+6x^2 11x+6}{(x+1)}=x^2+5x+6$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर,

$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x^2+3x+2x+6)$

$=(x+1)\{x(x+3)+2(x+3)\}$

$=(x+1)(x+3)(x+2)$ **उत्तर**

8. $x^3+7x^2-21x-27$

हल—अचर बहुपद, $27=1\times3\times9$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर

शेषफल $=(1)^3+7(1)^2-21(1)-27$

$=1+7-21-27\Rightarrow8-48$

$=-40$

पुनः दिए बहुपद में $x=-1$ रखने पर,

शेषफल $=(-1)^3+7(-1)^2-21(-1)-27$

$=-1+7+21-27$

$=28-28$

शेषफल $=0$

$\therefore (x+1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$x^3+7x^2-21x-27=(x+1)A$ ...(1)

$$A=\frac{x^3+7x^2-21x-27}{(x+1)}$$

$=x^2+6x-27$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$x^3+7x^2-21x-27=(x+1)(x^2+6x-27)$$
$$=(x+1)(x^2+9x-3x-27)$$
$$=(x+1)\{x(x+9)-3(x+9)\}$$
$$=(x+1)(x+9)(x-3)$$ उत्तर

9. $\boldsymbol{x^3+8x^2+19x+12}$

हल—अचर पद, $12=1\times2\times2\times3$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर

शेषफल $=(1)^3+8(1)^2+19(1)+12$

$=1+8+19+12$

शेषफल $=40$

पुन: दिए गए बहुपद में $x=-1$ रखने पर

शेषफल $=(-1)^3+8(-1)^2+19(-1)+12$

$=-1+8-19+12$

$=20-20$

शेषफल $=0$

$\therefore$ $(x+1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$$x^3+8x^2+19x+12=(x+1)A \quad \ldots(1)$$

$$A=\frac{x^3+8x^2+19x+12}{(x+1)}=x^2+7x+12$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$x^3+8x^2+19x+12=(x+1)(x^2+7x+12)$$
$$=(x+1)(x^2+3x+4x+12)$$
$$=(x+1)\{x(x+3)+4(x+3)\}$$
$$=(x+1)(x+3)(x+4)$$ उत्तर

10. $\boldsymbol{x^3+6x^2+5x-12}$

हल—अचर पद, $12=1\times2\times2\times3$

दिए गए बहुपद में $x=1$ रखने पर

शेषफल $=(1)^3+6(1)^2+5(1)-12$

$=1+6+5-12$

$=12-12$

शेषफल $=0$

$\therefore$ $(x-1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

$\therefore$ $$x^3+6x^2+5x-12=(x-1)A \quad \ldots(1)$$

$$A = \frac{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}{(x-1)}$$

$$= x^2 + 7x + 12$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x-1)(x^2 + 7x + 12)$$

$$= (x-1)(x^2 + 3x^2 + 4x + 12)$$

$$= (x-1)\{x(x+3) + 4(x+3)\}$$

$$= (x-1)(x+3)(x+4)$$ उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 39 देखिए।

4

एक चर राशि वाले रैखिक समीकरण
(Linear Equations in One Variable)

अभ्यास 4.1

1. समीकरण $5x-3=2x+4$ का हल क्या होगा?

हल—
$$5x-3=2x+4$$
$$5x-2x=4+3$$ [पक्षान्तरण करने पर]
$$3x=7$$
$$x=\frac{7}{3}$$ उत्तर

2. समीकरण $3(y-2)=y+8$ में y का मान ज्ञात कीजिए

हल—
$$3(y-2)=y+8$$
$$3y-6=y+8$$
$$3y-y=8+6$$ [पक्षान्तरण करने पर]
$$2y=14$$
$$y=\frac{14}{2} \Rightarrow y=7$$ उत्तर

3. निम्नलिखित समीकरणों में कौन-कौन से रैखिक समीकरण हैं?

(i) $(9x+5)=(2x-4)$

हल—
$$9x+5=2x-4$$
$$9x-2x=-4-5$$ [पक्षान्तरण करने पर]
$$7x=-9$$
$$7x+9=0$$

यह एक रैखिक समीकरण है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक घातीय है। उत्तर

(ii) $x^2+5=1-x$

हल—
$$x^2+5=1-x$$
$$x^2+x=1-5$$ [पक्षान्तरण करने पर]
$$x^2+x=-4$$
$$x^2+x+4=0$$

यह एक रैखिक समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक द्विघातीय है।

उत्तर

(iii) $2u+\frac{1}{u}=3$

हल— $2u+\frac{1}{u}=3$

$\frac{2u^2+1}{u}=3$

$2u^2+1=3u$

$2u^2-3u=-1$ [पक्षान्तरण करने पर]

$2u^2-3u+1=0$

यह एक रैखिक समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'u' एक द्विघातीय है। उत्तर

(iv) $(u-1)^2=u^2-2$

हल— $(u-1)^2=u^2-2$

$u^2+1-2u=u^2-2$

$u^2-2u-u^2=-2-1$ [पक्षान्तरण करने पर]

$-2u=-3$

$2u-3=0$

यह एक रैखिक समीकरण है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'u' एक घातीय है। उत्तर

(v) $x+2+5x=-2$

हल— $x+2+5x=-2$

$x+5x=-2-2$ [पक्षान्तरण करने पर]

$6x=-4$

$6x+4=0$

यह एक रैखिक समीकरण है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक घातीय है। उत्तर

(vi) $x^2+5x=x^2+8$

हल— $x^2+5x=x^2+8$

$x^2+5x-x^2=8$ [पक्षान्तरण करने पर]

$5x=8$

$5x-8=0$

यह एक रैखिक समीकरण है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक घातीय है। उत्तर

(vii) $(y+1)(y-9)=y+5$

हल— $(y+1)(y-9)=y+5$

$y^2-9y+y-9=y+5$

$y^2-9y+y-y=5+9$ [पक्षान्तरण करने पर]

$y^2-9y=14$

$y^2-9y-14=0$

यह एक रैखिक समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'y' एक द्विघातीय है। **उत्तर**

(viii) $x+2=x^2-2$

हल— $x+2=x^2-2$

$x^2-x=-2-2$ [पक्षान्तरण करने पर]

$x^2-x=-4$

$x^2-x+4=0$

यह एक रैखिक समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक द्विघातीय है। **उत्तर**

(ix) $(6x+2)+(6x-7)=0$

हल— $(6x+2)+(6x-7)=0$

$6x+6x=7-2$ [पक्षान्तरण करने पर]

$12x=5 \Rightarrow 12x-5=0$

यह एक रैखिक समीकरण है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक घातीय है। **उत्तर**

(x) $2x+4=x^2-4$

हल— $2x+4=x^2-4$

$-x^2+2x=-4-4$ [पक्षान्तरण करने पर]

$-x^2+2x=-8$

$x^2-2x-8=0$

यह एक रैखिक समीकरण नहीं है, क्योंकि इसमें प्रयुक्त चर 'x' एक द्विघातीय है। **उत्तर**

4. सिद्ध कीजिए कि चर राशि का दिया गया मान, समीकरण का हल है अथवा नहीं—

(i) $2y+6=5y+12, \quad y=-2$

हल—समीकरण में $y=-2$ रखने पर

L.H.S. $=2(-2)+6=-4+6=2$

R.H.S. $=5(-2)+12=-10+12=2$

L.H.S. = R.H.S.

अत: $y=-2$ दिए हुए समीकरण का हल है। **उत्तर**

(ii) $2x+4=2x, \quad x=4$

हल—समीकरण में $x=4$ रखने पर

L.H.S. $=2(4)+4=8+4=12$

R.H.S. $=2(4)=8$

L.H.S. $\neq$ R.H.S.

अत: $x=4$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

(iii) $6x-2=x-3, \quad x=-\frac{1}{5}$

हल—समीकरण में $x=-\frac{1}{5}$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = 6\left(\frac{-1}{5}\right)-2=\frac{-6}{5}-2=\frac{-6-10}{5}=\frac{-16}{5}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{-1}{5}\right)-3=\frac{-1}{5}-3=\frac{-1-15}{5}=-\frac{16}{5}$$

L.H.S. = R.H.S.

अत: $x=-\frac{1}{5}$ दिए हुए समीकरण का हल है। उत्तर

(iv) $12-3(y-2)=y+8, \quad y=-1$

हल—समीकरण में $y=-1$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = 12-3(-1-2)=12-3(-3)=12+9=21$$

$$\text{R.H.S.} = (-1)+8=7$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

अत: $y=-1$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। उत्तर

(v) $(x+2)+(x-3)=x+7, \quad x=0$

हल—समीकरण में $x=0$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = (0+2)+(0-3)=2-3=-1$$

$$\text{R.H.S.} = 0+7=7$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

अत: $x=0$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। उत्तर

(vi) $\frac{1}{4}[3x-1+3]=2, \quad x=2$

हल—समीकरण में $x=2$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{4}\{3(2)-1+3\}=\frac{1}{4}(6-1+3)=\frac{1}{4}(9-1)=\frac{8}{4}=2$$

$$\text{R.H.S.} = 2$$

L.H.S. = R.H.S.

अत: $x=2$ दिए हुए समीकरण का हल है। उत्तर

(vii) $4x-\frac{1}{2}=3x+\frac{1}{2}, \quad x=\frac{3}{2}$

हल—समीकरण में $x=\frac{3}{2}$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = 4\left(\frac{3}{2}\right)\frac{-1}{2}=\frac{12}{2}-\frac{1}{2}=\frac{12-1}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\text{R.H.S.} = 3\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9+1}{2}=\frac{10}{2}$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

अतः $x = \frac{3}{2}$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

(viii) $\frac{3+5x}{1+x} = 4 - x, \quad x = -2$

हल—समीकरण में $x = -2$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = \frac{3+5(-2)}{1+(-2)} = \frac{3-10}{1-2} = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$\text{R.H.S.} = 4-(-2) = 4+2 = 6$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

अतः $x = -2$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

(ix) $2u - 2(u-4) = 2u, \quad u = 4$

हल—समीकरण में $u = 4$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = 2(4) - 2(4-4) = 8 - 0 = 8$$

$$\text{R.H.S.} = 2(4) = 8$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अतः $u = 4$ दिए हुए समीकरण का हल है। **उत्तर**

(x) $\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}x = 63 - 3x, \quad x = 7$

हल—समीकरण में $x = 7$ रखने पर

$$\text{L.H.S.} = \frac{5}{2}(7) + \frac{7}{2}(7) = \frac{35}{2} + \frac{49}{2} = \frac{35+49}{2} = \frac{84}{2} = 42$$

$$\text{R.H.S.} = 63 - 3(7) = 63 - 21 = 42$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अतः $x = 7$ दिए हुए समीकरण का हल है। **उत्तर**

5. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $5x - 10 = 15$

हल— $5x - 10 = 15$

$5x = 15 + 10$ [पक्षान्तरण करने पर]

$5x = 25$

$x = \frac{25}{5} \Rightarrow x = 5$ **उत्तर**

(ii) $2 + 7x = 30$

हल— $2 + 7x = 30$

$7x = 30 - 2$ [पक्षान्तरण करने पर]

$7x = 28$

$x = \frac{28}{7} \Rightarrow x = 4$ **उत्तर**

(iii) $3(u-1)=9$

हल— $3(u-1)=9$

$3u-3=9$ [पक्षान्तरण करने पर]

$3u=9+3$

$3u=12$

$u=\frac{12}{3} \Rightarrow u=4$ उत्तर

(iv) $4(3x+1)=4(x+7)$

हल— $4(3x+1)=4(x+7)$

$12x+4=4x+28$

$12x-4x=28-4$ [पक्षान्तरण करने पर]

$8x=24$

$x=\frac{24}{8} \Rightarrow x=3$ उत्तर

(v) $\sqrt{3}-2x=2\sqrt{3}-4x$

हल— $\sqrt{3}-2x=2\sqrt{3}-4x$

$-2x+4x=2\sqrt{3}-\sqrt{3}$ [पक्षान्तरण करने पर]

$2x=\sqrt{3}$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

(vi) $\frac{u}{3}-\frac{u}{9}=1$

हल— $\frac{u}{3}-\frac{u}{9}=1$

$\frac{3u-u}{9}=1$ [पक्षान्तरण करने पर]

$2u=9 \Rightarrow u=\frac{9}{2}$ उत्तर

(vii) $2(3x+1)=2x+1$

हल— $2(3x+1)=2x+1$

$6x+2=2x+1$

$6x-2x=1-2$ [पक्षान्तरण करने पर]

$4x=-1$

$x=\frac{-1}{4}$ उत्तर

(viii) $3+(6x-x)=18$

हल— $3+(6x-x)=18$

$$3+5x=18$$

$$55x=18-3$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$5x=15$$

$$x=\frac{15}{5}\Rightarrow x=3$$ उत्तर

(ix) $8(3-x)-(2x-6)=(2x+4)-(25-5x)$

हल— $8(3-x)-(2x-6)=(2x+4)-(25-5x)$

$$24-8x-2x+6=2x+4-25+5x$$

$$-10x+30=7x-21$$

$$-10x-7x=-21-30$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$-17x=-51$$

$$x=\frac{51}{17}\Rightarrow x=3$$ उत्तर

(x) $25-19x-\{3-(4-5x)\}=3x-(6x-5)$

हल— $25-19x-\{3-(4-5x)\}=3x-(6x-5)$

$$25-19x-(3-4+5x)=3x-6x+5$$

$$25-19x-(-1+5x)=-3x+5$$

$$25-19x+1-5x=-3x+5$$

$$-5x-19x+3x=5-26$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$-24x+3x=-21$$

या $$-21x=-21$$

$$x=\frac{21}{21}\Rightarrow x=1$$ उत्तर

(xi) $\frac{4}{(x-1)}+\frac{3}{(x-2)}=\frac{7}{(x-3)}$

हल— $\frac{4}{(x-1)}+\frac{3}{(x-2)}=\frac{7}{(x-3)}$

$$\frac{4(x-2)+3(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{7}{(x-3)}$$

$$4(x-2)(x-3)+3(x-1)(x-3)=7(x-1)(x-2)$$

$$4(x^2-3x-2x+6)+3(x^2-3x-x+3)=7(x^2-2x-x+2)$$

$$4(x^2-5x+6)+3(x^2-4x+3)=7(x^2-3x+2)$$

$$4x^2-20x+24+3x^2-12x+9=7x^2-21x+14$$

$$7x^2-32x+33=7x^2-21x+14$$

$$7x^2 - 32x - 7x^2 + 21x = 14 - 33$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$-11x = -19$$

$$x = \frac{19}{11}$$ उत्तर

(xii) $\frac{x-2}{5} + \frac{x+2}{4} = \frac{x+2}{10}$

हल—
$$\frac{x-2}{5} + \frac{x+2}{4} = \frac{x+2}{10}$$

$$\frac{4(x-2)+5(x+2)}{20} = \frac{x+2}{10}$$

$$10\{4(x-2)+5(x+2)\} = 20(x+2)$$

या
$$4(x-2)+5(x+2) = 2(x+2)$$

$$4x - 8 + 5x + 10 = 2x + 4$$

$$4x + 5x - 2x = 4 + 8 - 10$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$ उत्तर

(xiii) $5y + 3(4 - 2y) = 2(3y - 5)$

हल—
$$5y + 3(4 - 2y) = 2(3y - 5)$$

$$5y + 12 - 6y = 6y - 10$$

$$5y - 6y - 6y = -10 - 12$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$5y - 12y = -22$$

$$-7y = -22$$

$$y = \frac{22}{7}$$ उत्तर

(xiv) $\frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2}$

हल—
$$\frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4x - 9x}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-5x}{12} = \frac{3}{2}$$

$$-10x = 36$$

$$x = \frac{-36}{10} \Rightarrow x = \frac{-18}{5}$$ उत्तर

(xv) $2x+5=3x-\left(\frac{3x-4}{2}\right)$

हल— $2x+5=3x-\left(\frac{3x-4}{2}\right)$

$2x+5=\frac{6x-3x+4}{2}$

$2x+5=\frac{3x+4}{2}$ [पक्षान्तरण करने पर]

$2(2x+5)=3x+4$

$4x+10=3x+4$

$4x-3x=4-10$

$x=-6$ **उत्तर**

(xvi) $(\sqrt{5}+2)u-2\sqrt{5}=4$

हल— $(\sqrt{5}+2)u-2\sqrt{5}=4$

$(\sqrt{5+2})u=4+2\sqrt{5}$ [पक्षान्तरण करने पर]

$(\sqrt{5}+2)u=2(\sqrt{5}+2)$

$u=2\frac{(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)}$

$u=2$ **उत्तर**

(xvii) $\frac{2x}{3}-x=\frac{x}{2}-\frac{5}{6}$

हल— $\frac{2x}{3}-x=\frac{x}{2}-\frac{5}{6}$

$\frac{2x}{3}-x-\frac{x}{2}=-\frac{5}{6}$ [पक्षान्तरण करने पर]

$\frac{4x-6x-3x}{6}=\frac{-5}{6}$

$\frac{4x-9x}{6}=\frac{-5}{6}$

$\frac{-5x}{6}=\frac{-5}{6}\Rightarrow x=1$ **उत्तर**

(xviii) $5(x-1)+4(x+1)=2(x+10)$

हल— $5(x-1)+4(x+1)=2(x+10)$

$5x-5+4x+4=2x+20$

$5x+4x-2x=20+5-4$ [पक्षान्तरण करने पर]

$9x-2x=25-4$

$7x=21$

$$x=\frac{21}{7} \Rightarrow x=3$$ उत्तर

(xix) $8(x-2)=\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$

हल—

$$8(x-2)=\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$$

$$8x-16=\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$$

$$8x-\frac{2x}{3}=\frac{1}{2}+16$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$\frac{24x-2x}{3}=\frac{1+32}{2}$$

$$\frac{22x}{3}=\frac{33}{2}$$

$$x=\frac{33}{2}\times\frac{3}{22}$$

$$x=\frac{3\times 3}{2\times 2} \Rightarrow x=\frac{9}{4}$$ उत्तर

(xx) $\frac{1}{20}\{5(3x+2)+4(2x-15)\}=\frac{3x}{20}$

हल—

$$\frac{1}{20}\{5(3x+2)+4(2x-15)\}=\frac{3x}{20}$$

$$\frac{1}{20}(15x+10+8x-60)=\frac{3x}{20}$$

$$\frac{1}{20}(23x-50)=\frac{3x}{20}$$

या

$$23x-50=3x$$

$$23x-3x=50$$ [पक्षान्तरण करने पर]

$$20x=50$$

$$x=\frac{50}{20}$$

$$x=\frac{5}{2}$$ उत्तर

अभ्यास 4.2

1. एक संख्या और उसके आधे का योग 15 है। तो संख्या ज्ञात कीजिए।

हल—माना संख्या x है।

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $x+\frac{x}{2}=15$

$$\frac{2x+x}{2}=15$$

$$\frac{3x}{2}=15$$

$$3x=15\times 2$$

$$3x=30 \Rightarrow x=\frac{30}{3}$$

$$x=10$$ उत्तर

2. दो क्रमागत संख्याओं का योग 51 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल—माना दो क्रमागत, संख्याएँ x व $(x+1)$ है।

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $x+x+1=51$

$$2x+1=51$$

$$2x=51-1$$

$$2x=50$$

$$x=\frac{50}{2} \Rightarrow x=25$$

व $x+1=25+1=26$

अतः दो क्रमागत संख्याएँ $=25, 26$ उत्तर

3. दो संख्याओं का योगफल 40 तथा उनका अन्तर 10 है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल—माना पहली, संख्या $=x$

$\therefore$ प्रश्नानुसार, दोनों संख्याओं का योगफल $=40$

$\therefore$ दूसरी संख्या $=40-x$

प्रश्नानुसार, दोनों संख्याओं का अन्तर $=10$

अतः $x-(40-x)=10$

$$x-40+x=10$$

$$2x=10+40$$

$$2x=50$$

$$x=\frac{50}{2} \Rightarrow x=25$$

व $40-x=40-25=15$

अतः संख्याएँ $=25, 15$ उत्तर

4. दो संख्याओं का योगफल 50 है। यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या की $\frac{2}{3}$ गुनी हो, तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल—माना पहली संख्या $=x$

व दूसरी संख्या $=\frac{2}{3}x$

प्रश्नानुसार, $x+\frac{2}{3}x=50$

$$\frac{3x+2x}{3}=50$$

$$5x=50\times 3$$

$$5x=150$$

$$x=\frac{150}{5}\Rightarrow x=30$$

व $\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\times 30=20$

अत: संख्याएँ $=30, 20$ उत्तर

5. किसी भिन्न का हर उसके अंश से 8 अधिक है। यदि भिन्न के अंश तथा हर दोनों में 1 जोड़ दिया जाए, तो उनका मान $\frac{1}{5}$ हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल—माना भिन्न का अंश x है।

तब भिन्न का हर $=x+8$

अत: भिन्न $=\frac{x}{x+8}$

प्रश्नानुसार, $\frac{x+1}{(x+8)+1}=\frac{1}{5}$

$$\frac{x+1}{x+9}=\frac{1}{5}$$

$$5(x+1)=x+9$$

$$5x+5=x+9$$

$$5x-x=9-5$$

$$4x=4\Rightarrow x=1$$

अशं $=x=1$

हर $=x+8=1+8=9$

$\therefore$ भिन्न $=\frac{1}{9}$ उत्तर

6. एक संख्या दो अंकों से बनी है। दहाई का अंक, इकाई के अंक से 4 गुना है। अंकों का स्थान परिवर्तन करने से बनी नई संख्या, दी गई संख्या से 54 कम है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल—माना इकाई का अंक x है।

दहाई का अंक $=4x$

मूल संख्या $=10\times$ दहाई का अंक + इकाई का अंक

$$=10\times 4x+x$$

$$=40x+x$$

$= 41x$

अंकों का परिवर्तन करने पर

दहाई का अंक $= x$

इकाई का अंक $= 4x$

इन अंकों से बनी नई संख्या

$= 10\times$ दहाई का अंक + इकाई का अंक

$= 10\times x + 4x$

$= 10x + 4x$

$= 14x$

प्रश्नानुसार, नई संख्या = मूल संख्या − 54

$14x = 41x - 54$

$41x - 14x = 54$

$27x = 54$

$x = \frac{54}{27} \Rightarrow x = 2$

अत: इकाई का अंक $= x = 2$

दहाई का अंक $= 4x = 4\times 2 = 8$

अर्थात् संख्या $= 82$ **उत्तर**

7. दो संख्याओं का अन्तर 642 है। बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग देने पर भागफल 8 तथा शेषफल 19 आता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल—माना दो संख्याएँ x व y है। (जहाँ x बड़ी तथा y छोटी संख्या है)

प्रश्नानुसार, $x - y = 642$ ...(1)

तथा भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$x = y\times 8 + 19$

$x = 8y + 19$

$x - 8y = 19$ ...(2)

समी० (1) व समी० (2) से,

$$\begin{array}{r} x - y = 642 \\ x - 8y = 19 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 7y = 623 \end{array}$$

$y = \frac{623}{7} \Rightarrow y = 89$

समी० (1) में y का मान रखने पर,

$x - 89 = 642$

$x = 642 + 89$

$x = 731$

अतः संख्याएँ = 89,731 **उत्तर**

8. 5 वर्ष पहले सुरेश की आयु अपने पुत्र की आयु से 7 गुनी थी। वर्तमान से 5 वर्ष बाद सुरेश की आयु अपने पुत्र की आयु की तीन गुनी हो जायगी वर्तमान में सुरेश और उसके पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।

हल—माना 5 वर्ष पहले पुत्र की आयु = x वर्ष

$\because$ 5 वर्ष पहले सुरेश की आयु = $7\times$ पुत्र की आयु

$\therefore$ 5 वर्ष पहले सुरेश की आयु = $7x$ वर्ष

तथा पुत्र की वर्तमान आयु = $(x+5)$ वर्ष

$\therefore$ सुरेश की वर्तमान आयु = $(7x+5)$ वर्ष

5 वर्ष बाद पुत्र की आयु = $(x+5)+5$ वर्ष = $x+10$ वर्ष

$\therefore$ 5 वर्ष बाद सुरेश की आयु = $(7x+5)+5 = 7x+10$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

5 वर्ष बाद सुरेश की आयु = $3\times$5 वर्ष बाद पुत्र की आयु

$$(7x+10) = 3\times(x+10)$$

$$7x+10 = 3x+30$$

$$7x-3x = 30-10$$

$$4x = 20$$

$$x = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 5$$

अतः सुरेश की वर्तमान आयु = $7x+5 = (7\times5)+5 = 35+5 = 40$ वर्ष

पुत्र की वर्तमान आयु = $x+5 = 5+5 = 10$ वर्ष **उत्तर**

9. श्याम की आयु उसके पिता की आयु से आधी है। बीस वर्ष पूर्व पिता की आयु श्याम की आयु की 6 गुनी थी। श्याम तथा उसके पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल—माना श्याम के पिता की वर्तमान आयु = x वर्ष

$\therefore$ श्याम की वर्तमान आयु = $\frac{x}{2}$ वर्ष

20 वर्ष पूर्व

श्याम के पिता की आयु = $x-20$ वर्ष

श्याम की आयु = $\left(\frac{x}{2}-20\right)$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

20 वर्ष पूर्व श्याम के पिता की आयु = $6\times$20 वर्ष पूर्व श्याम की आयु

$$x-20 = 6\left[\frac{x}{2}-20\right]$$

$$x-20 = \frac{6x}{2}-120$$

$$x - \frac{6x}{2} = -120 + 20$$

$$x - 3x = -100$$

$$-2x = -100$$

$$x = 100/2 \Rightarrow x = 50$$

∴ श्याम के पिता की वर्तमान आयु $= x = 50$ वर्ष

श्याम की वर्तमान आयु $= \frac{x}{2} = \frac{50}{2} = 25$ वर्ष **उत्तर**

10. एक आयताकार खेत का परिमाप 80 मीटर है। खेत की लम्बाई 2 मीटर कम करने पर तथा चौड़ाई 2 मीटर बढ़ाने पर क्षेत्रफल 36 मीटर^2 अधिक हो जाता है। खेत की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना खेत की लम्बाई x मीटर है

आयताकार खेत का परिमाप = 80 मीटर

2(लम्बाई + चौड़ाई) = 80 मीटर

2 (x + चौड़ाई) = 80 मीटर

x+ चौड़ाई = 40 मीटर

चौड़ाई = $(4 - x)$ मीटर

खेत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= x(40 - x)$ मीटर^2

2 मीटर कम करने पर लम्बाई $= (x - 2)$ मीटर

2 मीटर बढ़ाने पर चौड़ाई $= (40 - x) + 2 = (42 - x)$ मीटर

तब परिवर्तित खेत का क्षेत्रफल $= (x - 2) \times (42 - x)$ मीटर^2

प्रश्नानुसार, नया क्षेत्रफल = पुराना क्षेत्रफल + 36

$$(x - 2)(42 - x) = x(40 - x) + 36$$

$$42x - x^2 - 84 + 2x = 40x - x^2 + 36$$

$$-x^2 + x^2 + 42x + 2x - 40x = 36 + 84$$

$$4x = 120$$

$$x = \frac{120}{4} \Rightarrow x = 30$$

अतः खेत की लम्बाई $x = 30$ मीटर

खेत की चौड़ाई $= (40 - x) = 40 - 30 = 10$ मीटर **उत्तर**

11. त्रिभुज ABC का कोण A शेष दोनों कोणों के योग के बराबर है। साथ ही कोण B तथा कोण C में 1 : 1 का अनुपात है। तीनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार $\angle A = \angle B + \angle C$

तथा $\angle B : \angle C = 1:1$

$$\frac{\angle B}{\angle C} = \frac{1}{1}$$

$$\angle B = \angle C \Rightarrow \angle B - \angle C = 0 \qquad ...(1)$$

हम जानते है— $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$$(\angle B + \angle C) + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$2(\angle B + \angle C) = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C = 90^\circ \qquad ...(2)$$

समी० (1) व समी० (2) से,

$$\angle B - \angle C = 0$$

$$\angle B + \angle C = 90^\circ$$

$$- \quad - \quad -$$

$$-2\angle C = -90^\circ$$

$$\angle C = \frac{90^\circ}{2}$$

$$\angle C = 45^\circ$$

समी० (1) में $\angle C$ का मान रखने पर,

$$\angle B - 45^\circ = 0$$

$$\angle B = 45^\circ$$

तथा $\because$ $\angle A = \angle B + \angle C$

$$= 45^\circ + 45^\circ$$

$$\angle A = 90^\circ$$

अत: $\angle A = 90^\circ, \angle B = 45^\circ = \angle C = 45^\circ$ उत्तर

12. बंटी और बबलू मिलकर किसी काम को 18 दिन मे कर सकते हैं। बंटी अकेला उस काम को 30 दिन में कर सकता है, तो बबलू अकेला उसे कितने दिन में कर सकेगा?

हल—माना बबलू अकेला इस काम को x दिन में पूरा करेगा।

$\therefore$ बबलू का एक दिन का काम $= \frac{1}{x}$

दिया है— बंटी का 1 दिन का काम $= \frac{1}{30}$

अत: दोनों का 1 दिन काम $= \frac{1}{x} + \frac{1}{30}$

परन्तु दोनों मिलकर 1 काम को पूरा करते है = 18

दोनों का 1 दिन का काम $= \frac{1}{18}$

$\therefore$ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{30} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{18} - \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{5-3}{90}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{90}$$
$$2x=90$$
$$x=\frac{90}{2}\Rightarrow 45$$

अतः बबलू अकेला इस काम को पूरा करेगा $= x$ दिन $= 45$ दिन **उत्तर**

13. राम के काम करने की क्षमता श्याम से आधी है। राम और श्याम एक काम को 16 दिन में पूरा करते हैं, तो राम अकेला उस काम को कितने दिन में पूरा करेगा?

हल—माना श्याम अकेला उस काम को x दिन में पूरा करेगा।

श्याम का 1 दिन का काम $=\frac{1}{x}$

तब राम अकेला उस काम को $2x$ दिन में पूरा करेगा ।

राम का 1 दिन का काम $=\frac{1}{2x}$

दिया है— दोनों मिलकर एक काम को पूरा करते हैं $= 16$

दोनों का 1 दिन का काम $=\frac{1}{16}$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{16}$$
$$\frac{2+1}{2x}=\frac{1}{16}$$
$$\frac{3}{2x}=\frac{1}{16}$$
$$2x=16\times 3$$
$$x=\frac{48}{2}\Rightarrow x=24$$

अतः राम अकेला इस काम को पूरा करेगा $= x$ दिन $= 24$ दिन **उत्तर**

14. एक कार एक निश्चित दूरी की यात्रा 6 घण्टे में पूरी करती है। यह आधी दूरी 40 किमी/घण्टा की चाल से तथा शेष दूरी 60 किमी/घण्टा की चाल से चलती है। यात्रा की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना यात्रा की दूरी $= x$ किमी

दिया है—कार आधी दूरी $\left(\frac{x}{2}\right)$ 40 किमी/घण्टा की चाल से तय करती है

अर्थात् चाल $=\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

समय $(t_1)=\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}=\frac{x/2}{40}$

तथा शेष दूरी $\left(x-\frac{x}{2}\right)$ 60 किमी/घण्टा की चाल से तय करती है

अर्थात् समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

समय $(t_2)=\frac{(x-x/2)}{60}$

प्रश्नानुसार,

कार x किमी की कुल दूरी 6 घण्टे में पूरी करती है।

अतः कुल समय $(t)=t_1+t_2$

$$6=\frac{x/2}{40}+\frac{(x-x/2)}{60}$$

$$6=\frac{x/2}{40}+\frac{x/2}{60}$$

$$6=\frac{x}{80}+\frac{x}{120}$$

$$6=\frac{3x+2x}{240}$$

$$6=\frac{5x}{240}$$

$$x=\frac{6\times 240}{5}\Rightarrow 6\times 48$$

अतः यात्रा की दूरी $= x = 288$ किमी **उत्तर**

15. राजू घर से अपने स्कूल 10 किमी/घण्टा की चाल से साइकिल पर गया और 9 किमी/घण्टा चाल से साइकिल पर ही वापस आया। महेश ने दोनों ओर यात्रा साइकिल पर 12 किमी/घण्टा की चाल से तय की। तुलना करने पर पता चला कि महेश को राजू से 10 मिनट कम समय लगा। अतः उनके घर से स्कूल की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना घर से स्कूल की दूरी $= x$ किमी

अतः राजू को घर से स्कूल जाने में लगा समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

समय $=\frac{x}{10}$ घण्टे

पुनः राजू को स्कूल से घर आने में लगा समय $=\frac{x}{9}$ घण्टे

अतः आने जाने में लगा कुल समय $=\left(\frac{x}{10}+\frac{x}{9}\right)$ घण्टे

$$=\frac{9x+10x}{90}=\frac{19x}{90} \text{ घण्टे}$$

इसी प्रकार महेश को घर से स्कूल जाने में लगा समय $=\frac{x}{12}$ घण्टे

तथा महेश को स्कूल से घर आने में लगा समय $= \frac{x}{12}$ घण्टे

अतः आने जाने में लगा कुल समय $= \left(\frac{x}{12} + \frac{x}{12}\right)$ घण्टे

$$= \frac{2x}{12} = \frac{x}{6} \text{ घण्टे}$$

∵ महेश को राजू की आपेक्षा 10 मिनट (अर्थात् $= \frac{10}{60}$ घण्टे $= \frac{1}{6}$ घण्टे कम समय लगा)

∴ प्रश्नानुसार $\frac{19x}{90} - \frac{x}{6} = \frac{1}{6}$

$$\frac{19x - 15x}{90} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4x}{90} = \frac{1}{6}$$

$$4x = \frac{90}{6} \Rightarrow x = \frac{90}{6 \times 4}$$

$$x = \frac{15}{4}$$

अतः घर से स्कूल की दूरी $x = 3.75$ किमी उत्तर

16. एक स्टीमर धारा के अनुकूल जाते हुए एक स्थान से दूसरे स्थान तक पहुँचने में 4 घण्टे का समय लेता है और वह यह दूरी धारा के प्रतिकूल जाते हुए 5 घण्टे में तय करता है। धारा की चाल 2 किमी/घण्टा हो, तो दोनों स्थानों के बीच की दूरी तथा स्टीमर की चाल ज्ञात कीजिए।

हल—माना स्टीमर की चाल $= x$ किमी/घण्टा

तथा कुल दूरी $= y$ किमी

∵ धारा की चाल $= 2$ किमी/घण्टा

अतः धारा के अनुकूल स्टीमर की चाल $= (x+2)$ किमी/घण्टा

धारा के प्रतिकूल स्टीमर की चाल $= (x-2)$ किमी/घण्टा

तथा धारा के अनुकूल

कुल दूरी = सापेक्ष चाल × समय

$$y = (x+2) \times 4$$

$$y = 4x + 8 \quad \ldots(1)$$

धारा के प्रतिकूल

कुल दूरी = सापेक्ष चाल × समय

$$y = (x-2) \times 5$$

$$y = 5x - 10 \quad \ldots(2)$$

समी० (1) व समी० (2) से

$$4x + 8 = 5x - 10$$

$$5x - 4x = 10 + 8$$
$$x = 18$$

x का मान समी० (1) में रखने पर

$$y = 4 \times 18 + 8$$
$$y = 72 + 8 \Rightarrow y = 80$$

अतः स्टीमर की चाल $x = 18$ किमी/घण्टा

कुल दूरी $y = 80$ किमी उत्तर

17. दो वायुयान एक नगर से विपरीत दिशाओं में यात्रा आरम्भ करते हैं। एक वायुयान की औसत चाल दूसरे वायुयान की औसत चाल से 40 किमी/घण्टा अधिक है। 5 घण्टे बाद दोनों वायुयानों के बीच की दूरी 3400 किमी है। प्रत्येक वायुयान की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

हल—माना पहले वायुयान की औसत चाल $= x$ किमी/घण्टा

दूसरे वायुयान की औसत चाल $= x + 40$ किमी/घण्टा

पहले वायुयान द्वारा 5 घण्टे में तय दूरी = चाल × समय

$$= x \times 5$$
$$= 5x \text{ किमी}$$

दूसरे वायुयान द्वारा 5 घण्टे में तय

$$\text{दूरी} = (x + 40) \times 5$$
$$= 5x + 200 \text{ किमी}$$

प्रश्नानुसार,

5 घण्टे में दोनों वायुयानों की बीच की दूरी = 3400

या $5x + 5x + 200 = 3400$

या $10x + 200 = 3400$

या $10x = 3400 - 200$

या $10x = 3200$

या $x = \dfrac{3200}{10} = 320$

तथा $x + 40 = 320 + 40 = 360$

अतः पहले व दूसरे वायूयान की चाल क्रमशः 320 किमी/घण्टा व 360 किमी/घण्टा उत्तर

18. एक कार को 70,000 में बेचने पर एक व्यक्ति को 20% लाभ हुआ। कार का क्रय मूल्य बताइए।

हल—कार को बेचा गया = 70,000 में

अर्थात् विक्रय मूल्य = 70,000

लाभ = 20%

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{100}{100 + \text{लाभ}\%} \times \text{विक्रय मूल्य}$$

$$= \frac{100}{100+20} \times 70{,}000$$

$$= \frac{100}{120} \times 70{,}000$$

$$= \frac{5}{6} \times 70{,}000$$

$$= \frac{5}{3} \times 35000$$

क्रय मूल्य $= \frac{175000}{3} \Rightarrow 58333.33$

अत: कार का क्रय मूल्य = 58333.33 लगभग **उत्तर**

19. गाँधी जयन्ती के अवसर पर खादी भण्डार सभी सूती कपड़ों पर 20% की और सिले-सिलाए कपड़ों पर 25% की छूट देता है। काजल ने एक गाऊन ₹ 400 में खरीदा। गाऊन का अंकित मूल्य बताइए।

हल—माना गाऊन का अंकित विक्रय मूल्य x है।

गाऊन पर छूट की राशि = अंकित मूल्य का 25%

$$= ₹ x \times \frac{25}{100}$$

$$= ₹ \frac{x}{4}$$

छूट के बाद गाऊन का देय मूल्य = ₹ $x - \frac{x}{4} \Rightarrow ₹ \frac{3x}{4}$

$$\therefore \quad \frac{3x}{4} = 400$$

$$3x = 400 \times 4$$

$$x = \frac{400 \times 4}{3} \Rightarrow x = 533.33$$

अत: गाउन का अंकित मूल्य $x = 533.33$ रूपए **उत्तर**

20. एक व्यक्ति ने कुल ₹ 30,000 की पूँजी लगाई। इसका कुछ भाग 10% वार्षिक की दर पर तथा शेष 15% वार्षिक ब्याज की दर पर लगाया। यदि उसे कुल वार्षिक ₹ 4500 ब्याज मिला हो, तो ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक दर पर उसने कितना धन लगाया?

हल—व्यक्ति का कुल धन = ₹30,000

माना 10% वार्षिक ब्याज की दर पर लगाया धन = ₹x

∴ इस धन पर 1 वर्ष में प्राप्त ब्याज

$$= \frac{\text{मूलधन} \times \text{वार्षिक दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$= \frac{x \times 10 \times 1}{100} = \frac{10x}{100}$$

शेष धन (₹$30{,}000 - x$) है जिसे व 15% वार्षिक ब्याज की दर पर लगाता है।

अत: इस धन पर 1 वर्ष में प्राप्त ब्याज

$$= \frac{(30{,}000 - x) \times 15 \times 1}{100}$$

$$= \frac{15(30{,}000 - x)}{100}$$

प्रश्नानुसार, कुल वार्षिक ब्याज = 4,500

$$\frac{10x}{100} + \frac{15(30{,}000 - x)}{100} = 4{,}500$$

$$10x + 15(30{,}000 - x) = 4{,}500 \times 100$$

$$10x + 4{,}50{,}000 - 15x = 4{,}50{,}000$$

$$10x - 15x = 4{,}50{,}000 - 4{,}50{,}000$$

$$-5x = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore \quad 30{,}000 - x = 30{,}000 - 0 = 30{,}000$$

अत: 10% पर 0

15% पर 30000 रुपए — उत्तर

विविध प्रश्नावली

1. $3x + \frac{2}{3} = 2x + 1$ **को हल कीजिए।**

हल—

$$3x + \frac{2}{3} = 2x + 1$$

$$\frac{9x + 2}{3} = 2x + 1$$

$$9x + 2 = 3(2x + 1)$$

$$9x + 2 = 6x + 3$$

$$9x - 6x = 3 - 2$$

$$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

उत्तर

2. $(\sqrt{5} + 3)x + 4 = 2\sqrt{5} + 10$ **हल कीजिए।**

हल—

$$(\sqrt{5} + 3)x + 4 = 2\sqrt{5} + 10$$

$$(\sqrt{5} + 3)x = 2\sqrt{5} + 10 - 4$$

$$(\sqrt{5} + 3)x = 2\sqrt{5} + 6$$

$$(\sqrt{5} + 3)x = 2(\sqrt{5} + 3)$$

$$x = \frac{2(\sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{5} + 3)}$$

$$x = 2$$

उत्तर

3. तीन क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का योगफल 153 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल—माना तीन क्रमागत संख्याएँ $x(x+1)$ व $(x+2)$ हैं।

प्रश्नानुसार, $x+x+1+x+2=153$

$$3x+3=153$$
$$3(x+1)=153$$
$$x+1=\frac{153}{3}$$
$$x+1=51$$
$$x=51-1$$
$$x=50$$
$$x+1=50+1=51$$
$$x+2=50+2=52$$

अत: संख्याएँ $=50, 51, 52$ उत्तर

4. एक भिन्न का अंश उसके हर से 3 कम है। यदि उसके अशं और हर में 5 जोड़ दें, तो भिन्न का मान हो $\frac{3}{4}$ जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल—माना भिन्न का हर x है।

तब भिन्न का अंश $=x-3$

अत: भिन्न $=\frac{x-3}{x}$

प्रश्नानुसार, $\frac{(x-3)+5}{(x+5)}=\frac{3}{4}$

$$4=\{(x-3)+5\}=3(x+5)$$
$$4(x-3)+20=3x+15$$
$$4x-12+20=3x+15$$
$$4x-3x=15+12-20$$
$$x=27-20 \Rightarrow x=7$$

हर $=x=7$

अंश $=x-3=7-3=4$

$\therefore$ भिन्न $=\frac{4}{7}$ उत्तर

5. शीला की वर्तमान आयु अपने पिता की आयु की $\frac{1}{3}$ है। 12 वर्ष बाद शीला की आयु अपने पिता की आयु की $\frac{1}{2}$ हो जाएगी। प्रत्येक की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल—माना शीला के पिता की वार्तमान आयु $=x$ वर्ष

$\therefore$ शीला की वर्तमान आयु $=\frac{1}{3}x$ वर्ष

12 वर्ष बाद

शीला के पिता की आयु = $(x+12)$ वर्ष

शीला की आयु = $\left(\frac{1}{3}x+12\right)$ वर्ष

प्रश्नानुसार $\left(\frac{x}{3}+12\right)=\frac{1}{2}(x+12)$

$$\frac{x+36}{3}=\frac{x+12}{2}$$

$$2(x+36)=3(x+12)$$

$$2x+72=3x+36$$

$$3x-2x=72-36$$

$$x=36$$

अत: शीला के पिता की वर्तमान आयु = x वर्ष = 36 वर्ष

शीला की वर्तमान आयु = $\frac{x}{3}$ वर्ष = $\frac{36}{3}$ = 12 वर्ष **उत्तर**

6. ΔABC के कोणों की माप क्रमश: $x^\circ, (x+10)^\circ$ तथा $(x+29^\circ)$ है, प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल—माना $\angle A=x^\circ, \angle B=(x+10)^\circ$ तथा $\angle C=(x+29^\circ)^\circ$

हम जानते हैं ΔABC में $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

अत: $x+x+10^\circ+x+29^\circ=180^\circ$

$$3x+39^\circ=180^\circ$$

$$3x=180^\circ-39^\circ$$

$$3x=141^\circ$$

$$x=\frac{141^\circ}{3} \Rightarrow x=47^\circ$$

अत: $x^\circ=47^\circ$

$$(x+10)^\circ=(47+10)^\circ=57^\circ$$

$$(x+29)^\circ=(47+29)^\circ=76^\circ$$ **उत्तर**

7. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $4x-7=2x+9$

हल— $4x-7=2x+9$

$$4x-2x=9+7$$

$$2x=16$$

$$x=\frac{16}{2} \Rightarrow x=8$$ **उत्तर**

(ii) $2x+(3x-2)=3x+5$

हल— $$2x+(3x-2)=3x+5$$
$$2x+3x-2=3x+5$$
$$2x+3x-3x=5+2$$
$$2x=7 \Rightarrow \frac{7}{2}$$ उत्तर

(iii) $\frac{2}{(x+1)}+\frac{1}{(x-1)}=\frac{3}{x}$

हल— $$\frac{2}{(x+1)}+\frac{1}{(x-1)}=\frac{3}{x}$$
$$\frac{2(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{3}{x}$$
$$2x(x-1)+x(x+1)=3(x+1)(x-1)$$
$$2x^2-2x+x^2+x=3x^2-3x+3x-3$$
$$3x^2-x=3x^2-3$$
$$x=3$$ उत्तर

(iv) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{3}=\frac{x-3}{6}$

हल— $$\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{3}=\frac{x-3}{6}$$
$$\frac{3(x-1)+2(x-3)}{6}=\frac{x-3}{6}$$
$$3(x-1)+2(x-3)=x-3$$
$$3x-3+2x-6=x-3$$
$$5x-9=x-3$$
$$5x-x=9-3$$
$$4x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{4}$$
$$x=\frac{3}{2}$$ उत्तर

8. दो क्रमागत सम संख्याओं का योगफल 94 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल—माना दो क्रमागत सम संख्याएँ हैं। $x, (x+2)$ हैं।

प्रश्नानुसार, $x+x+2=94$
$$2x+2=94$$
$$2(x+1)=94$$
$$x+1=\frac{94}{2}$$
$$x+1=47$$

$$x = 47 - 1 \Rightarrow x = 46$$

$\therefore$ $$x + 2 = 46 + 2 = 48$$

अतः संख्याएँ = 46, 48 उत्तर

9. दो अंकों की एक संख्या का दहाई का अंक इकाई के अंक से दो गुना है। अंकों का स्थान परिवर्तित करने पर बनी संख्या दी हुई संख्या से 27 कम है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल—माना इकाई का अंक $= x$

दहाई का अंक $= 2x$

मूल संख्या $= 10\times$ दहाई का अंक + इकाई का अंक

$$= 10 \times 2x + x$$

$$= 20x + x \Rightarrow 21x$$

अंकों का स्थान परिवर्तित करने पर

दहाई का अंक $= x$

इकाई का अंक $= 2x$

इन अंकों से बनी नई संख्या

$= 10\times$ दहाई का अंक + इकाई का अंक

$$= 10 \times x + 2x$$

$$= 10x + 2x \Rightarrow 12x$$

प्रश्नानुसार, नई संख्या = मूल संख्या -27

$$12x = 21x - 27$$

$$12x - 21x = -27$$

$$-9x = -27$$

$$x = \frac{27}{9} \Rightarrow x = 3$$

अतः इकाई का अंक $= 3$

दहाई का अंक $= 2 \times 3 = 6$

तथा संख्या = 63 उत्तर

10. कमल अपनी पुत्री से 52 वर्ष बड़े हैं। 4 वर्ष पश्चात् कमल की आयु पुत्री की आयु के दुगने से 8 वर्ष अधिक हो जायेगी। कमल तथा उसकी पुत्री की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल—माना कमल की पुत्री की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

कमल की वर्तमान आयु $= (x + 52)$ वर्ष

4 वर्ष पश्चात्

कमल की पुत्री की आयु $= (x + 4)$ वर्ष

कमल की आयु $= \{(x + 52) + 4\}$ वर्ष

प्रश्नानुसार, $(x + 52) + 4 = 2(x + 4) + 8$

$$x + 56 = 2x + 8 + 8$$

$$2x - x = 56 - 16$$
$$x = 40$$
$$\therefore \quad x + 52 = 40 + 52 = 92$$

अत: कमल की पुत्री की वर्तमान आयु = 40 वर्ष

कमल की वर्तमान आयु = 92 वर्ष उत्तर

11. चतुर्भुज $ABCD$ के कोणों की माप क्रमश: $x°(3x - 30)°, 2x°$ तथा $(4x + 10)°$ है, तो चतुर्भुज के चारों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

हल—माना $\angle A = x°, \angle B = (3x - 30)°$

$\angle C = 2x°, \angle D = (4x + 10)°$

हम जानते हैं चतुर्भुज $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

अत: $x + 3x - 30 + 2x + 4x + 10 = 360$

$$10x - 20 = 360$$
$$10x = 360 + 20$$
$$10x = 380$$
$$x = \frac{380}{100} \Rightarrow = 38$$

अत: $x° = 38°$

$$(3x - 30)° = (3 \times 38 - 30)$$
$$= 114 - 30 = 84°$$
$$2x° = 2 \times 38 = 76°$$
$$(4x + 10)° = (4 \times 38 + 10)$$
$$= (152 + 10) = 162°$$

अत: कोणों की माप = 38°, 84°, 76° व 162° उत्तर

12. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 4 सेमी अधिक है। आयत का परिमाप उसकी चौड़ाई से 11 सेमी अधिक है। आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना आयत की चौड़ाई = x सेमी

आयत की लम्बाई = $x + 4$ सेमी

अत: आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$$= 2(x + 4 + x)$$
$$= 2(2x + 4)$$

प्रश्नानुसार, $2(2x + 4) = x + 11$

$$4x + 8 = x + 11$$
$$4x - x = 11 - 8$$
$$3x = 3$$
$$x = 1, x + 4 = 1 + 4 = 5$$

अतः आयत की चौड़ाई $= x = 1$ सेमी

आयत की लम्बाई $= x + 4 = 1 + 4 = 5$ सेमी उत्तर

13. राम अपने घर से ऑफिस 12 किमी/घण्टे की चाल से जाता है, तथा वापिस 9 किमी/घण्टे की चाल से आता है। यदि राम को कुल 2 घण्टे 20 मिनट का समय लगता है, तो घर से ऑफिस की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना घर से ऑफिस के बीच की दूरी x है।

राम की घर से ऑफिस जाने की चाल = 12 किमी/घण्टा

तथा राम की ऑफिस से घर आने की चाल = 9 किमी/घण्टा

दिया है— आने जाने में लगा कुल समय = 2 घण्टे + 20 मिनट

$$= 2 \text{ घण्टे} + \frac{20}{60} \text{ घण्टे}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{3}\right) \text{ घण्टे}$$

$$= \frac{7}{3} \text{ घण्टे}$$

राम को घर से ऑफिस जाने में लगा समय

$$t_1 = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

$$t_1 = \frac{x}{12}$$

तथा ऑफिस से घर आने में लगा समय

$$t_2 = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{x}{9}$$

प्रश्नानुसार, राम के ऑफिस आने-जाने में लगा कुल समय $= \frac{7}{3}$ घण्टे

या $$t_1 + t_2 = \frac{7}{3}$$

या $$\frac{x}{12} + \frac{x}{9} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{3x + 4x}{36} = \frac{7}{3}$$

या $$\frac{7x}{36} = \frac{7}{3}$$

या $$x = \frac{36 \times 7}{7 \times 3}$$

$$= 12 \text{ किमी}$$

अतः घर से ऑफिस के बीच की दूरी $x = 12$ किमी उत्तर

14. सुरेश ने दो बकरी 15,000 में क्रय की एक बकरी को उसने 10% लाभ लेकर बेचा तथा दूसरी बकरी को 12% हानि पर बेचकर भी 400 का लाभ कमा लिया हो, तो प्रत्येक बकरी का क्रय मूल्य बताइए।

हल—दोनों बकरियों की कुल कीमत = ₹15,000

माना पहली बकरी की कीमत = ₹ x

$\therefore$ दूसरी बकरी की कीमत = ₹ $(15000 - x)$

पहली बकरी का लाभ = क्रय मूल्य × 10%

$$= x \times 10 \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{x}{10}$$

दूसरी बकरी की हानि = $(15,000 - x) \times 12\%$

$$= (15,000 - x) \times \frac{12}{100}$$

$$= (15,000 - x) \times \frac{3}{25}$$

$$= \frac{45,000 - 3x}{25}$$

कुल लाभ = पहली बकरी का लाभ – दूसरी बकरी की हानि

$$400 = \frac{x}{10} - \frac{(45,000 - 3x)}{25}$$

$$400 = \frac{5x - 2(45,000 - 3x)}{50}$$

$$400 \times 50 = 5x - 90,000 + 6x$$

$$20,000 = 11x - 90,000$$

$$11x = 20,000 + 90,000$$

$$x = \frac{1,10,000}{11}$$

$$x = 10,000$$

$$15,000 - x = 15,000 - 10,000 = ₹\ 5,000$$

अतः पहली बकरी की कीमत = x = ₹ 10,000

दूसरी बकरी की कीमत $= (15,000 - x)$

$= 15,000 - 10,000$

$=$ ₹ 5,000 उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 53 व 54 देखिए।

5

घातांक व लघुगणक
(Indices and Logarithms)

अभ्यास 5.1

1. $a^9 \div a^5$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल— $$\frac{a^9}{a^5} = \frac{a^4 \times a^5}{a^5} = a^4$$ उत्तर

2. यदि $a^{3/2} = 125$ **तो** x **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल— $$a^{3/2} = 125$$
$$x = (125)^{2/3}$$
$$x = (5^3)^{2/3}$$
$$x = 5^2$$
$$x = 25$$ उत्तर

3. $(81)^{3/2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल— $$(81)^{3/2} = (3\times3\times3\times3)^{3/2}$$
$$= (3^4)^{3/2}$$
$$= (3^2)^3$$
$$= 3^6 \Rightarrow 729$$ उत्तर

4. निम्नलिखित में जहाँ पर भी करणी चिह्न या ऋणात्मक घातांक हो तो उन्हें हटाते हुए सरल कीजिए।

(i) $(\sqrt{8})^{-2/3}$

हल— $$(\sqrt{8})^{-2/3} = (8^{1/2})^{-2/3}$$
$$= ((2^3)^{1/2})^{-2/3}$$
$$= (2^{1/2})^{-2/3} \Rightarrow (2^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}$$ उत्तर

(ii) $(125)^{-1/3} \times \sqrt[3]{8}$

हल— $$(125)^{-1/3} \times \sqrt[3]{8} = (5^3)^{-1/3} \times (8)^{1/3}$$
$$= (5^{-1}) \times (2^3)^{1/3}$$
$$= (5^{-1}) \times (2)^1$$

$$= \frac{1}{5} \times 2$$

$$= \frac{2}{5}$$ उत्तर

(iii) $(\sqrt{8})^{-3}(\sqrt{2})^{-3}$

हल— $\{\sqrt{8})^{-3}(\sqrt{2})^{-3} = (8^{1/2})^{-3} \times (2^{1/2})^{-3}$

$$= \{(2^3)^{1/2}\}^{-3} \times (2^{-3/2})$$

$$= (2^{3/2})^{-3}(2)^{-3/2} \Rightarrow (2^{-9/2})(2)^{-3/2}$$

$$= (2^{-12/2}) \Rightarrow (2^{-6}) = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$ उत्तर

(iv) $(\sqrt{8})^{-7}(\sqrt{4})^{-5}$

हल— $(\sqrt{8})^{-7}(\sqrt{4})^{-5} = (8^{1/2})^{-7}(4^{1/2})^{-5}$

$$= \{(2^3)^{1/2}\}^{-7}\{(2^2)^{1/2}\}^{-5}$$

$$= (2^{3/2})^{-7}(2^{2/2})^{-5}$$

$$= (2^{-21/2})(2^{-5})$$

$$= (2)^{-21/2-5} \Rightarrow 2^{\frac{-21-10}{2}}$$

$$= 2^{-31/2}$$

$$= 1/2^{31/2}$$ उत्तर

5. निम्नलिखित को भिन्नात्मक घातांक में प्रकट कीजिए।

(i) $\sqrt[3]{x^2}$

हल— $\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{1/3} = x^{2/3}$ उत्तर

(ii) $\sqrt{c\sqrt{a}}$

हल— $\sqrt{c\sqrt{a}} = \sqrt{c(a)^{1/2}}$

$$= (c^{1/2})(a^{1/4})$$ उत्तर

6. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(256)^{1/4}$

हल— $(256)^{1/4} = [(2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2)]^{1/4}$

$$= (2^8)^{1/4}$$

$$= (2^{8/4}) = (2^2) = 4$$ उत्तर

(ii) $(125)^{-2/3}$

हल— $(125)^{-2/3} = [(5\times5\times5)]^{-2/3}$

$$= (5^3)^{-2/3}$$

$$= (5)^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

$$=\frac{1}{25}$$ उत्तर

(iii) $\sqrt[3]{19683}$

हल— $\sqrt[3]{19683}=[3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3]^{1/3}$

$$=(3^9)^{1/3}$$
$$=3^3$$
$$=27$$ उत्तर

7. धनात्मक घातांक वाले पदों में व्यक्त कीजिए।

(i) $a^{-6/7}$

हल— $a^{-6/7}=\frac{1}{a^{6/7}}$ उत्तर

(ii) $\sqrt[4]{b^{-9}}$

हल— $\sqrt[4]{b^{-9}}=(b^{-9})^{1/4}$

$$=(b^{-9/4})\Rightarrow\frac{1}{b^{9/4}}$$ उत्तर

(iii) $\frac{y^{-5}}{y^{-1/2}}$

हल— $\frac{y^{-5}}{y^{-1/2}}=\frac{1}{(y^{-1/2})(y^5)}$

$$=\frac{1}{y^{-1/2+5}}$$
$$=\frac{1}{(y)^{\frac{-1+10}{2}}}\Rightarrow\frac{1}{y^{9/2}}$$ उत्तर

या $\frac{y^{-5}}{y^{-1/2}}=\frac{\frac{1}{y^{+5}}}{\frac{1}{y^{/2}}}$

$$=\frac{y^{1/2}}{y^5}$$ उत्तर

8. x, y को धन वास्तविक संख्याएँ मानते हुए निम्नलिखित को सरल कीजिए।

(i) $\sqrt{x^{-4}y^3}$

हल— $\sqrt{x^{-4}y^3}=(x^{-4}y^3)^{1/2}$

$$=(x^{-4})^{1/2}(y^3)^{1/2}$$
$$=(x^{-2})(y)^{3/2}$$

$$= \frac{y^{3/2}}{x^2}$$ उत्तर

(ii) $(\sqrt{x^{-6}})^5$

हल— $$(\sqrt{x^{-6}})^5 = ((x^{-6})^{1/2})^5$$
$$= (x^{-3})^5$$
$$= x^{-15} = \frac{1}{x^{15}}$$ उत्तर

(iii) $(x^{-1/2}y^{-2/3})^2$

हल— $$(x^{-1/2}y^{-2/3})^2 = (x^{-1/2})^2(y^{-2/3})^2$$
$$= (x^{-1})(y^{-4/3})$$
$$= \frac{1}{xy^{4/3}}$$ उत्तर

(iv) $\sqrt[3]{xy^4} \div \sqrt{x^4 y}$

हल— $$\sqrt[3]{xy^4} \div \sqrt{x^4 y} = (xy^4)^{1/3} \div (x^4 y)^{1/2}$$
$$= x^{1/3}y^{4/3} \div x^{4/2}y^{1/2}$$
$$= x^{1/3}y^{4/3} \div x^2 y^{1/2}$$
$$\frac{x^{1/3}y^{4/3}}{x^2 y^{1/2}}$$
$$= x^{1/3-2}y^{4/3-1/2}$$
$$= x^{\frac{1-6}{3}}y^{\frac{8-3}{6}}$$
$$= x^{-5/3}y^{5/6}$$
$$= \frac{y^{5/6}}{x^{5/3}}$$ उत्तर

9. यह मानकर कि x, y, z धन वास्तविक संख्याएँ है और सभी घातांक परिमेय संख्याएँ है, दिखाइए कि

(i) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

हल— $$\text{L.H.S.} = \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$$
$$= (x^a \times x^{-b})^{a+b} \times (x^b \times x^{-c})^{b+c} \times (x^c \times x^{-a})^{c+a}$$
$$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})c+a$$
$$= (x^{a^2-b^2}) \times (x^{b^2-c^2}) \times (x^{c^2-a^2})$$

$$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$$

$$= x^0$$

$$= 1 \text{ R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

(ii) $(x^a)^{b-c} \cdot (x^b)^{c-a} \cdot (x^c)^{a-b} = 1$

हल— $\text{L.H.S.} = (x^a)^{b-c} \cdot (x^b)^{c-a} \cdot (x^c)^{a-b}$

$$= x^{ab-ac} \cdot x^{bc-ba} \cdot x^{ca-cb}$$

$$= x^{ab-ac+bc-ba+ca-cb}$$

$$= x^0$$

$$= 1 \text{ R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

(iii) $\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{(a-b)} \times \left(\dfrac{x}{y}\right)^{(b-c)}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{(a-c)}} = a$

हल— $\text{L.H.S.} = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{(a-b)} \times \left(\dfrac{x}{y}\right)^{(b-c)}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{(a-c)}}$

$$= \frac{(xy^{-1})^{(a-b)} \times (xy^{-1})^{(b-c)}}{(xy^{-1})^{(a-c)}}$$

$$= \frac{\{x^{(a-b)} y^{(b-a)}\} \times \{x^{(b-c)} y^{(c-b)}\}}{\{x^{(a-c)} y^{(c-a)}\}}$$

$$= \{a^{(a-b)} y^{(b-a)}\} \times \{x^{(b-c)} y^{(c-b)}\} \times \{x^{(a-c)} y^{(c-a)}\}-1$$

$$= x^{(a-b)} \times y^{(b-a)} \times x^{(b-c)} \times y^{(c-b)} \times x^{(c-a)} \times y^{(a-c)}$$

$$= x^{a-b+b-c+c-a}\, y^{b-a+c-b+a-c}$$

$$= x^0 y^0$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

(iv) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{1/ab}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{1/bc}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{1/ca}=1$

हल— $\text{L.H.S.}=\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{1/ab}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{1/bc}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{1/ca}$

$$=(x^a x^{-b})^{1/ab}(x^b x^{-c})^{1/bc}(x^c x^{-a})^{1/ca}$$

$$=(x^{1/b}x^{-1/a})(x^{1/c}x^{-1/b})(x^{1/a}x^{-1/c})$$

$$=x^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}$$

$$=x^0$$

$$=1=\text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

10. यदि $xyz=1$ तो सिद्ध कीजिए।

$$\frac{1}{1+x+y^{-1}}+\frac{1}{1+y+z^{-1}}+\frac{1}{1+z+x^{-1}}=1$$

हल— $\text{L.H.S.}=\frac{1}{1+x+y^{-1}}+\frac{1}{1+y+z^{-1}}+\frac{1}{1+z+x^{-1}}$

$$=\frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+z+\frac{1}{x}}$$

$\because xyz=1$

$$=\frac{1}{\left(1+x+\frac{1}{y}\right)}+\frac{1}{1+y+xy}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{y+xy+1}{y}}+\frac{1}{(1+y+xy)}+\frac{1}{\frac{xy+1+y}{xy}}$$

$$=\frac{y}{y+xy+1}+\frac{1}{1+y+xy}+\frac{xy}{xy+1+y}$$

$$=\frac{(y+1+xy)}{(y+xy+1)}$$

$$=1=\text{R.H.S.}$$

L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

11. यदि $a^x=b, b^y=c$ तथा $c^z=a$ है तो सिद्ध कीजिए कि $xyz=1$

हल— $\because a^x=b$ या $b=a^x$

दोनों पक्षों के घात y लेने पर

$$b^y=(a^x)^y$$

$$b^y = a^{xy} \quad ...(1)$$

परन्तु दिया है कि $b^y = c$

$\therefore$ समीकरण (1) में $b^y = c$ रखने पर

$$c = a^{xy} \quad ...(2)$$

परन्तु $c^z = a$ या $a = c^z$

अतः समीकरण (2) में $a = c^z$ रखने पर

$$c = (c^z)^{xy}$$
$$c = c^{xyz}$$
$$c^1 = c^{xyz}$$
$$1 = xyz$$
$$xyz = 1$$

इति सिद्धम्

अभ्यास 5.2

1. $\log_3 243$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— माना $\log_3 243 = x$

$$3^x = 243$$
$$3^x = (3)^5$$
$$x = 5$$

उत्तर

2. $\log_{10} 0.1 = -1$ का घांताकीय रूप ज्ञात कीजिए।

हल— $$\log_{10} 0.1 = -1$$
$$10^{-1} = 0.1$$

उत्तर

3. $\log\left(\frac{4\times 9}{11}\right)$ का मान क्या होगा?

हल— $$\log\left(\frac{4\times 9}{11}\right) = \log(4\times 9) - \log 11$$
$$= \log(2^2) + \log(3^2) - \log 11$$
$$= 2\log 2 + 2\log 3 - \log 11$$

उत्तर

4. निम्नलिखित को लघुगणक के रूप में लिखिए।

(i) $5^0 = 1$

हल— $$5^0 = 1$$
$$\log_5 1 = 0$$

उत्तर

(ii) $2^{-6} = \frac{1}{64}$

हल— $$2^{-6} = \frac{1}{64}$$
$$\log_2\left(\frac{1}{64}\right) = -6$$

उत्तर

(iii) $10^4 = 10000$

हल— $10^4 = 10000$

$\log_{10}(10000) = 4$ उत्तर

(iv) $10^{-2} = 0.01$

हल— $10^{-2} = 0.01$

$\log_{10}(0.01) = -2$ उत्तर

5. निम्नलिखित को घांताकीय रूप में लिखिए।

(i) $\log_4 64 = 3$

हल— $\log_4 64 = 3$

$4^3 = 64$ उत्तर

(ii) $\log_{10}(0.0001) = -4$

हल— $\log_{10}(0.0001) = -4$

$10^{-4} = 0.0001$ उत्तर

(iii) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

हल— $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$2^{-3} = \frac{1}{8}$ उत्तर

(iv) $\log_5 125 = 3$

हल— $\log_5 125 = 3$

$5^3 = 125$ उत्तर

6. $\log_9(2187)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— माना $\log_9(2187) = x$

$$9^x = 2187$$
$$9^x = (3)^7$$
$$(3^2)^x = 3^7$$
$$3^{2x} = 3^7$$
$$2x = 7$$
$$x = \frac{7}{2}$$ उत्तर

7. सिद्ध कीजिए—

$\log(abc) = \log a + \log b + \log c$

हल— माना $\log a = x$

$10^x = a$ ...(1)

$\log b = y$

$10^y = b$ ...(2)

$$\log c = z$$
$$10^z = c$$

समीकरण (1), समीकरण (2) व समीकरण (3) से

$$10^x \times 10^y \times 10^z = abc$$
$$10^{x+y+z} = abc$$

या $\log_{10} abc = x + y + z$

या $\log(abc) = \log a + \log b + \log c$ इति सिद्धम

8. सिद्ध कीजिए—

$$\mathbf{\log(p^4 q^5 r^6) = 4\log p + 5\log q + 6\log r}$$

हल— L.H.S. $= \log(p^4 q^5 r^6)$

$$= \log p^4 + \log q^5 + \log r^6$$
$$= 4\log p + 5\log q + 6\log r$$
$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

9. लघुगणक का मान ज्ञात कीजिए—

(i) 128 का 2 आधार पर

हल— माना $\log_2 128 = x$

$$2^x = 128$$
$$2^x = 2^7$$
$$x = 7$$

उत्तर

(ii) 0.00001 का 10 आधार पर

हल— माना $\log_{10}(0.00001) = x$

$$10^x = 0.00001$$
$$10^x = \frac{1}{100000}$$
$$10^x = \frac{1}{(10^5)}$$
$$10^x = 10^{-5}$$
$$x = -5$$

उत्तर

(iii) $\frac{1}{49}$ का 7 आधार पर

हल— माना $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = x$

$$7^x = \frac{1}{49}$$
$$7^x = \left(\frac{1}{7^2}\right)$$
$$7^x = 7^2$$
$$x = -2$$

उत्तर

10. निम्नलिखित को $\log_2$ तथा $\log_3$ के पदों में लिखिए—

(i) $\log 54$

हल— $\log 54 = \log(2\times3\times3\times3)$

$= \log(2\times3^3)$

$= \log 2+\log 3^3$

$= \log 2+3\log 3$ उत्तर

(ii) $\log 144$

हल— $\log 144 = \log(2\times2\times2\times2\times3\times3)$

$= \log(2^4\times3^2)$

$= \log 2^4+\log 3^2$

$= 4\log 2+2\log 3$ उत्तर

(iii) $\log \frac{16}{27}$

हल— $\log \frac{16}{27} = \log\left(\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3}\right)$

$= \log\left(\frac{2^4}{3^3}\right)$

$= \log 2^4-\log 3^3$

$= 4\log 2-3\log 3$ उत्तर

(iv) $\log 12^2$

हल— $\log 12^2 = 2\log 12$

$= 2\log(2\times2\times3)$

$= 2\log(2^2\times3)$

$= 2[\log 2^2+\log 3]$

$= 2[2\log 2+\log 3]$

$= 4\log 2+2\log 3$ उत्तर

11. निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $\log 36+\log 27$

हल— $\log 36+\log 27$

$= \log(36\times27)$

$= \log(2^2\times3^2\times3^3)$

$= \log(2^2\times3^5)$

$= \log 2^2+\log 3^5$

$= 2\log 2+5\log 3$ उत्तर

(ii) $\log 24 + \log 12 - \log 27$

हल—$\log 24 + \log 12 - \log 27$

$$= \log(24 \times 12) - \log(27)$$
$$= \log(2^3 \times 3 \times 2^2 \times 3) - \log(3^3)$$
$$= \log(2^5 \times 3^2) - \log(3^3)$$
$$= 5\log 2^5 + \log 3^2 - \log 3^3$$
$$= 5\log 2 + 2\log 3 - 3\log 3$$
$$= 5\log 2 - \log 3$$

उत्तर

(iii) $\log 25 + \log 45 - \log 10$

हल— $\log 25 + \log 45 - \log 10$

$$= \log(25 \times 45) - \log 10$$
$$= \log(5^2 \times 3^2 \times 5) - \log(2 \times 5)$$
$$= \log(5^3 \times 3^2) - [\log 2 + \log 5]$$
$$= \log 5^3 + \log 3^2 - \log 2 - \log 5$$
$$= 3\log 5 + 2\log 3 - \log 2 - \log 5$$
$$= 2\log 5 + 2\log 3 - \log 2$$

उत्तर

(iv) $\log \frac{a^2}{bc} + \log \frac{b^2}{ac} + \log \frac{c^2}{ab}$

हल— $\log \frac{a^2}{bc} + \log \frac{b^2}{ac} + \log \frac{c^2}{ab}$

$$= \log\left[\frac{a^2}{bc} \times \frac{b^2}{ac} \times \frac{c^2}{ab}\right]$$
$$= \log[1]$$
$$= 0$$

उत्तर

12. सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\log 26 = \log 2 + \log 13$

हल— L.H.S. $= \log 26$

$$= \log(2 \times 13)$$
$$= \log 2 + \log 13$$
$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(ii) $\log 576 = 6\log 2 + 2\log 3$

हल— L.H.S. $= \log 576$

$$= \log(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3)$$
$$= \log(2^6 \times 3^2)$$
$$= \log 2^6 + \log 3^2 = 6\log 2 + 2\log 3$$
$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(iii) $\log\left(\frac{16}{25}\right) = 4\log 2 - 2\log 5$

हल—
$$\text{L.H.S.} = \log\left(\frac{16}{25}\right)$$
$$= \log\left(\frac{2\times2\times2\times2}{5\times5}\right)$$
$$= \log\left(\frac{2^4}{5^2}\right)$$
$$= \log 2^4 - \log 5^2$$
$$= 4\log 2 - 2\log 5$$
$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(iv) $\log\frac{15}{16} + \log\frac{2}{5} - \log\frac{3}{8} = 0$

हल—
$$\text{L.H.S.} = \log\frac{15}{16} + \log\frac{2}{5} - \log\frac{3}{8}$$
$$= \log\left[\frac{3\times5}{2\times2\times2\times2}\right] + \log\left[\frac{2}{5}\right] - \log\left[\frac{3}{2\times2\times2}\right]$$
$$= \log\left[\frac{3\times5}{2^4}\right] + \log\left[\frac{2}{5}\right] - \log\left[\frac{3}{2^3}\right]$$
$$= \log 3 + \log 5 - \log 2^4 + \log 2 - \log 5 - \log 3 + \log 2^3$$
$$= \log 3 + \log 5 - 4\log 2 + \log 2 - \log 5 - \log 3 + 3\log 2$$
$$= 0$$
$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(v) $\log\frac{70}{33} + \log\frac{2}{135} - \log\frac{7}{18} = 3\log 2 - 2\log 3 - \log 11$

हल—
$$\text{L.H.S.} = \log\frac{70}{33} + \log\frac{2}{135} - \log\frac{7}{18}$$
$$= \log\left[\frac{2\times5\times7}{3\times11}\right] + \log\left[\frac{2}{5\times3\times3\times3}\right] - \log\left[\frac{7}{3\times3\times2}\right]$$
$$= \log\left[\frac{2\times5\times7}{3\times11}\right] + \log\left[\frac{2}{5\times3^3}\right] - \log\left[\frac{7}{3^2\times2}\right]$$
$$= \log 2 + \log 5 + \log 7 - \log 3 - \log 11 + \log 2 - \log 5 - \log 3^3 - \log 7 + \log 3^2 + \log 2$$
$$= \log 2 + \log 5 + \log 7 - \log 3 - \log 11 + \log 2 - \log 5 - 3\log 3 - \log 7 + 2\log 3 + \log 2$$
$$= 3\log 2 - 2\log 3 - \log 11$$
$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(vi) $\frac{1}{2}\log 9 + 2\log 6 + \frac{1}{4}\log 81 - \log 12 = 3\log 3$

हल—L.H.S. $= \frac{1}{2}\log 9 + 2\log 6 + \frac{1}{4}\log 81 - \log 12$

$$= \frac{1}{2}\log[3\times 3] + 2\log[2\times 3] + \frac{1}{4}\log[3\times 3\times 3\times 3] - \log[2\times 2\times 3]$$

$$= \frac{1}{2}\log[3^2] + 2\log[2\times 3] + \frac{1}{4}\log[3^4] - \log[2^2\times 3]$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\log 3 + 2[\log 2 + \log 3] + \frac{1}{4}\times 4\log 3 - \log 2^2 - \log 3$$

$$= \log 3 + 2\log 2 + 2\log 3 + \log 3 - 2\log 2 - \log 3$$

$$= 3\log 3$$

$= \text{R.H.S.}$ इति सिद्धम्

13. ***x*** **का मान ज्ञात कीजिए यदि—**

(i) $\log[(x+4)(x-4)] = \log 33$

हल— $\log[(x+4)(x-4)] = \log 33$

$$\log(x^2 - 4) = \log 33$$

$$x^2 - 16 = 33$$

$$x^2 = 49$$

$$x = 7$$

उत्तर

(ii) $\log x = \log \frac{144}{12}$

हल— $\log x = \log \frac{144}{12}$

$$\log x = \frac{\log(12)^2}{\log 12}$$

$$\log x = \frac{2\log 12}{\log 12}$$

$$\log_{10} x = 2 \qquad [\because \log_{10} m = a$$

$$x = 10^2 \qquad 10^a = m]$$

$$x = 100$$

उत्तर

14. यदि $\log\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}[\log(a) + \log(b)]$ **हो तो सिद्ध कीजिए** $a = b$

हल—दिया है— $\log\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}[\log a + \log b]$

$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}[\log a + \frac{1}{2}\log b]$$

या $$\log\left(\frac{a+b}{2}\right)=\log a^{1/2}+\log b^{1/2}$$

$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right)=\log(a^{1/2}b^{1/2})$$

या $$\log\left(\frac{a+b}{2}\right)=\log(ab)^{1/2}$$

$$\frac{a+b}{2}=(ab)^{1/2}$$

वर्ग करने पर $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=(ab^{1/2})^2$$

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=ab$$

$$a^2+b^2+2ab=4ab$$

$$a^2+b^2+2ab-4ab=0$$

$$a^2+b^2-2ab=0$$

$$(a-b)^2=0$$

$$a-b=0$$ इति सिद्धम्

15. यदि $\log(3a-2)+\log(3a+2)=5\log 2$ तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $$\log(3a-2)+\log(3a+2)=5\log 2$$

$$\log[(3a-2)\times(3a+2)]=\log 2^5$$

$$\log\{(3a)^2-2^2\}=\log 2^5$$

$$(3a)^2-4=2^5$$

$$9a^2-4=32$$

$$3a^2=32+4$$

$$a^2=\frac{32+4}{9}$$

$$a^2=\frac{36}{9}$$

$$a^2=4$$

$$a=2$$ उत्तर

16. यदि $\log 2=0.310$ तथा $\log 7=0.8451$ हो तो $\log 28$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $$\log 28=\log[2\times 2\times 7]$$

$$=\log[2^2\times 7]$$

$$=\log 2^2+\log 7$$

$$=2\log 2+\log 7$$

$$=2(0.3010)+(0.8451)$$

$$=0.6020+.8451=1.4471$$ उत्तर

अभ्यास 5.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को मानक रूप में लिखिए—

(i) 4.143

हल— $4.143 = 4.143 \times 10^0$ उत्तर

(ii) 13.23

हल— $13.23 = 1.323 \times 10^1$ उत्तर

(iii) 142.6

हल— $142.6 = 1.426 \times 10^2$ उत्तर

(iv) 236900

हल— $236900 = 2.369 \times 10^5$ उत्तर

(v) 0.02134

हल— $0.02134 = 2.134 \times 10^{-2}$ उत्तर

2. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए, जिनमें 10 की घात का कोई गुणनखण्ड न हो—

(i) 4.9×10^3

हल— $4.9 \times 10^3 = 4.9 \times 1000$

$= 4900.00$ उत्तर

(ii) 7.049×10^{-1}

हल— $7.049 \times 10^{-1} = 7.049 \times \frac{1}{10}$

$= 0.7049$ उत्तर

(iii) 6.339×10^5

हल— $6.339 \times 10^5 = 6.339 \times 100000$

$= 633900.000$ उत्तर

(iv) 6.1430×10^2

हल— $6.1430 \times 10^2 = 6.1430 \times 100$

$= 614.30$ उत्तर

(v) 3.1205×10^{-2}

हल— $3.1205 \times 10^{-2} = 3.1205 \times \frac{1}{100}$

$= 0.03105$ उत्तर

अभ्यास 5.4

1. log 65631.6 का पूर्णांश क्या होगा?

हल— 65641.6 के पूर्णांश में 5 अंक है।

$\therefore$ log का पूर्णांश $= 5 - 1 = 4$ उत्तर

2. यदि $\log x = 7.3435$ तो संख्या x में दशमलव बिन्दु के पहले अंकों की संख्या क्या होगी?

हल—लघुगणक 7.3435 का पूर्णांश = 7

∴ संख्या में दशमलव बिन्दु के पहले कुल अंक $= 7+1 = 8$ **उत्तर**

3. निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणकों में पूर्णांश केवल अंक देखकर बताइए—

(i) 46 **हल**— $2-1=1$

(ii) 625.78 **हल**— $3-1=2$

(iii) 1245.63 **हल**— $4-1=3$

(iv) 7 **हल**— $1-1=0$

(v) 0.00009 **हल**— $-5=\bar{5}$

(vi) 0.0045 **हल**— $-3=\bar{3}$

4. लघुगणक सारणी की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक ज्ञात कीजिए—

(i) 8154

हल— log 8154 का पूर्णांश $4-1=3$

अब लघुगणक सारणी में संख्या 81 के सामने 5 के स्तम्भ में प्रविष्ट

मान $= 9112+2 = 9114$

अपूर्णांश $= 0.9114$

$\log 8154 = 3+0.9114 = 3.9114$ **उत्तर**

(ii) 74.32

हल— log 74.32 का पूर्णांश $= 2-1=1$

लघुगणक सारणी में संख्या 74 के सामने 3 के स्तम्भ में प्रविष्ट

मान $= 8710+1 = 9711$

अपूर्णांश $= 0.98711$

$\log 74.32 = 1+0.8711 = 1.8711$ **उत्तर**

(iii) 134.5

हल— log 134.5 का पूर्णांश $= 3-1=2$

लघुगणक सारणी में संख्या 13 के सामने 4 के स्तम्भ में

प्रविष्ट मान $= 127+16 = 1287$

अपूर्णांश $= 0.1287$

$\log 134.5 = 2+0.1287 = 2.1287$ **उत्तर**

(iv) 44.12

हल— log 44.12 का पूर्णांश $= 2-1=1$

लघुगणक सारणी में 44 के सामने 1 के स्तम्भ में

प्रविष्ट मान $= 6444+2 = 6446$

अपूर्णांश = 0.6446

$\log 44.12 = 1 + 0.6446 = 1.6446$ उत्तर

(v) 0.4312

हल— $\log 0.4312 = \log \frac{4312}{10000}$

$= \log 4312 - \log 10000$

$= 3.6337 - \log 10^4$

$= 3.6337 - 4 \log 10$

$= 3.6337 - 4 \times 1$

$= 3.6337 - 4$

$= \bar{1}.6337$ उत्तर

(vi) 0.0062

हल— $\log 0.0062 = \log \frac{62}{10000}$

$= \log 62 - \log 10000$

$= \log 62 - \log 10^4$

$= \log 62 - 4 \log 10$

$= 1.7924 - 4 \times 1$

$= 1.7924 - 4$

$= \bar{3}.7924$ उत्तर

(vii) 3.241

हल— $\log 3.241$ का पूर्णांश $= 1 - 1 = 0$

लघुगणक सारणी में संख्या 32 के सामने 4 के स्तम्भ में

प्रविष्ट मान = 5105 + 1 = 5106

अपूर्णांश = 0.5106

$\log 3.241 = 0.5106$ उत्तर

(viii) 0.5698

हल— $\log 0.5698 = \frac{\log 5698}{\log 10000}$

$= \log 5698 - \log 10000$

$= \log 5698 - \log 10^4$

$= \log 5698 - 4 \log 10$

$= 3.7758 - 4 \times 1$

$= 3.7758 - 4$

$= \bar{1}.7758$ उत्तर

(ix) 0.00002613

हल— $\log 0.00002613 = \frac{\log 2613}{\log 100000000}$

$= \log 2613 - \log 100000000$

$= \log 2613 - \log 10^8$

$= \log 2613 - 8\log 10$

$= 3.4171 - 8\times 1$

$= 3.4171 - 8$

$= \bar{5}.4171$ **उत्तर**

5. $\log 452.24 = 2.2402$ तो निम्न संख्याओं के लघुगणक ज्ञात कीजिए।

45224, 45.224, 0.045224

हल—हम जानते है कि यदि विभिन्न संख्याओं में अंक एक समान तथा एक ही क्रम में है तो उन सभी संख्याओं के लघुगणकों के अपूर्णांश बराबर होते हैं।

$\therefore$ दी गई प्रत्येक संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश 2402 होगा।

अत: $\log 45224 = 4.2402$

$\log 45.224 = 1.2402$

$\log 0.045224 = \bar{2}.2402$ **उत्तर**

6. $\log 34167 = 4.2116$ तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए। जिनके लघुगणक निम्नलिखित हैं—

$0.2116, 1.2116, \bar{2}.2116$

हल—चूँकि दिए गए लघुगणकों में अपूर्णांश समान हैं तथा दिया है—

$\log 34167 = 4.2116$

अत: संख्याएँ निम्न होगी—

$0.2116 = 3.4167$

$1.2116 = 34.167$

$\bar{2}.2116 = 0.034167$ **उत्तर**

7. निम्नलिखित संख्याओं के प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए—

(i) 0.730

हल— माना $\log x = 0.730$

$x = \text{anti}\log(0.730)$

$\because$ पूर्णांश $= 0$

तथा अपूर्णांश $= .730$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर .730 के संगत संख्या = 5370

$\because$ पूर्णांश = 2 $\therefore$ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर से $0+1=1$

अंकों के बाद लगेगा।

$x = \text{anti log } 0.730$

$x = 5.370$ उत्तर

(ii) 0.4221

हल— माना $\log x = 00.4221$

$x = \text{anti log } (0.4221)$

$\because$ पूर्णांश = 0

तथा अपूर्णांश = .4221

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर .4221 के संगत संख्या = (2642 + 1) = 2643

$\because$ पूर्णांश = 0 $\therefore$ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर से 0 + 1 = 1 अंकों के बाद लगेगा।

$x = \text{anti log } (0.4221)$

$= 2.643$ उत्तर

(iii) $\bar{9}.8562$

हल— माना $\log x = \bar{9}.8562$

$x = \text{anti log } (\bar{9}.8562)$

$\because$ पूर्णांश = $\bar{9}$ (ऋणात्मक)

अपूर्णांश = .8562

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर 8562 के संगत संख्या = (7178 + 3) = 7181

$\because$ पूर्णांश = $\bar{9}$ $\therefore$ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर से (9 – 1) = 8 शून्य लगाकर उससे पहले लगेगा।

अत: $x = \text{anti log } (\bar{9}.8562)$

$= 0.000000007181$ उत्तर

(iv) –2.7485

हल—माना $\log x = -2.7485$

अपूर्णांश को धनात्मक बनाने के लिए

$\log x = -1 - 2 + 1 - 0.7485$

$= -3 + 0.2515$

$\log x = \bar{3}.2515$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर 0.2515 के संगत संख्या = 1784

$\because$ log का पूर्णांश $\bar{3}$ या – 3

$\therefore$ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर (3 – 1) = 2 शून्य लगाकर उससे पहले लगेगा।

अत: $x = \text{anti log } (\bar{3}.2515)$

$= .001784$ उत्तर

8. दी गई प्रत्येक संख्या किसी संख्या का लघुगणक है। प्रत्येक को $p + \log m$ के रूप में लिखिए, जहाँ p पूर्णांश तथा $\log m$ अपूर्णांश है। वह संख्या ज्ञात कीजिए—

(i) 2.4561

हल— माना $\log x = 2.4561$

$x = \text{anti log } 2.4561$

∵ पूर्णांश $(p) = 2$, अपूर्णांश $(\log m) = 0.4561$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर 0.4561 के संगत संख्या = 2859

∵ पूर्णांश 2 है ∴ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर से $2+1=3$ अंकों के बाद लगेगा।

$$x = \text{anti}\log 2.4561$$

$$x = 285.9$$ उत्तर

(ii) –1.1086

हल— माना $\log x = -1.1086$

अपूर्णांश को धनात्मक बनाने के लिए

$$\log x = -1+1-1-0.1086$$

$$\log x = -2+(1-0.1086)$$

$$\log x = -2+0.8914$$

$$\log x = \bar{2}.8914$$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर 0.8914 के संगत संख्या = 7787

∵ पूर्णांश $(p) = \bar{2}$ या -2

∴ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर $(2-1)=1$ शून्य लगाकर उससे पहले लगेगा।

$$x = 0.07787$$ उत्तर

(iii) –3.4235

हल— माना $\log x = -3.4235$

अपूर्णांश को धनात्मक बनाने के लिए

$$\log x = -1+1-3-0.4235$$

$$= -4+(1-0.4235)$$

$$= -4+0.5765$$

$$= \bar{4}.5765$$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर .5765 के संगत संख्या = 3771

∵ पूर्णांश $(p) = \bar{4}$ या -4

∴ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर $(4-1)=3$ शून्य लगाकर उससे पहले लगेगा।

$$x = 0.0003771$$ उत्तर

(iv) – 4.4326

हल— माना $\log x = -4.4326$

अपूर्णांश को धनात्मक बनाने के लिए

$$\log x = -1+1-4-.4326$$

$$= -5+(1-.4326)$$

$$= -5+0.5674$$

$$= \bar{5}.5674$$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर 0.5674 के संगत संख्या = 3693

∵ पूर्णांश $(p) = \bar{5}$ या -5

∴ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर $(5-1) = 4$ शून्य लगाकर उससे पहले लगेगा।

$$x = 0.00003693$$ उत्तर

(v) – 0.72

हल—माना $\log x = -0.72$

अपूर्णांश को धनात्मक बनाने के लिए

$$\log x = -1 + (1 - 0.72)$$
$$= -1 + 0.28$$
$$\log x = \bar{1}.28$$

प्रतिलघुगणक सारणी में देखने पर 0.28 के संगत संख्या = 1905

∵ पूर्णांश $(p) = \bar{1}$ या -1

∴ दशमलव बिन्दु बाँयी ओर $(1-1) = 0$ शून्य लगाकर उससे पहले लगेगा।

$$x = 0.1905$$ उत्तर

अभ्यास 5.5

1. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

(i) 523.6 × 0.0045

हल—माना $x = 523.6 \times 0.0045$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log x = \log[523.6 \times 0.0045]$$
$$\log x = \log 523.6 + \log 0.0045$$
$$= 2.7190 + \bar{3}.6532$$
$$= 2 + 0.7190 + (-3 + 0.6532)$$
$$= 2 + 0.7190 - 3 + 0.6532$$
$$= -1 + 1.3722$$
$$\log x = 0.3722$$
$$x = \text{anti} \log 0.3722$$
$$x = 2.356$$ उत्तर

(ii) 6.3 × 1.29

हल—माना $x = 6.3 \times 1.29$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log x = \log[6.3 \times 1.29]$$
$$= \log 6.3 + \log 1.29$$
$$= 0.7993 + 0.1106$$

$$\log x = 0.9099$$
$$x = \text{anti} \log 0.9099]$$
$$x = 8.127$$ उत्तर

(iii) $2.605 \div 0.0045$

हल—माना $x = 2.605 \div 0.0045$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log x = \log[2.605 \div 0.0045]$$
$$\log x = \log 2.605 - \log 0.0045$$
$$= 0.4158 - \bar{3}.6532$$
$$= 0.4158 - (-3 + 0.6532)$$
$$= 0.4158 + 3 - 0.6532$$
$$= 3 - 0.2374$$
$$\log x = 2.7626$$
$$x = \text{anti} \log 2.7626]$$
$$= 578.9$$ उत्तर

(iv) $\frac{4}{3} \times 3.142 \times (1.5)^3$

हल—माना $x = \frac{4}{3} \times 3.142 \times (1.5)^3$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log x = \log\left[\frac{4}{3} \times 3.142 \times (1.5)^3\right]$$
$$= \log 4 - \log 3 + \log 3.142 + 3 \log 1.5$$
$$= .6021 - .4771 + .4972 + (3 \times .1761)$$
$$= .6276 - .4771 + .4972 + .5283$$
$$\log x = 1.6276 - .4771$$
$$\log x = 1.1505$$
$$x = \text{anti} \log (1.1505)$$
$$x = 14.15$$ उत्तर

(v) $\frac{(7.93) \times (2.65)^2}{\sqrt{31.89}}$

हल—माना $x = \frac{(7.93) \times (2.65)^2}{\sqrt{31.89}}$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log x = \log\left[\frac{(7.93) \times (2.65)^2}{\sqrt{31.89}}\right]$$

$$= \log(7.93) + 2\log 2.65 - \frac{1}{2}\log 32.89$$

$$= 0.08993 + 2 \times 0.432 - \frac{1}{2}(1.5036)$$

$$= 0.8993 + 0.8464 - 0.7518$$

$$= 1.7457 - 0.7518$$

$$\log x = 0.9939$$

$$x = \text{anti}\log(0,9939)$$

$$x = 9.860$$ उत्तर

(vi) $\left(\frac{41.32 \times 20.18}{12.69}\right)^{1/2}$

हल—माना $x = \left(\frac{41.32 \times 20.18}{12.69}\right)^{1/2}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x = \log\left(\frac{41.32 \times 20.18}{12.69}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[\frac{41.32 \times 20.18}{12.69}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\log 41.32 + \log 20.18 - \log 12.69]$$

$$= \frac{1}{2}[1.6162 + 1.3049 - 1.1035]$$

$$= \frac{1}{2}[2.9211 - 1.1035]$$

$$\log x = \frac{1.8176}{2}$$

$$\log x = 0.9088$$

$$x = \text{anti}\log(0.9088)$$

$$x = 8.106$$ उत्तर

(vii) $\frac{(1.23)^{1.5}}{11.2 \times 23.5}$

हल—माना $x = \frac{(1.23)^{1.5}}{11.2 \times 23.5}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x = \log\left[\frac{(1.23)^{1.5}}{11.2 \times 23.5}\right]$$

$$= \log(1.23)^{1.5} - [\log 11.2 + \log 23.5]$$
$$= 1.5\log(1.23) - \log 11.2 - \log 23.5$$
$$= (1.5 \times 0.0899) - (1.0492 - 1.3711)$$
$$= (1.5 \times 0.0899) - (1.0492 - 1.3711)$$
$$= 0.13485 - 2.4203$$
$$\log x = -2.2854$$
$$= -2 - 0.2854$$
$$= -2 - 1 + (1 - 0.2854)$$
$$= -3 + 0.7146$$
$$\log x = \bar{3}.7146$$
$$x = \text{anti} \log (\bar{3}.7146)$$
$$x = 0.005183$$ उत्तर

(viii) $\sqrt{\dfrac{(60.24)^5 \times \sqrt{60}}{(4.5)^7 \sqrt{21}}}$

हल—माना $x = \sqrt{\dfrac{(60.24)^5 \times \sqrt{60}}{(4.5)^7 \sqrt{21}}}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x = \log \sqrt{\frac{(60.24)^5 \times \sqrt{60}}{(4.5)^7 \sqrt{21}}}$$
$$= \log\left(\frac{(60.245)^5 \times \sqrt{60}}{(4.5)^7 \sqrt{21}}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2}[[\log(60.24)^5 + \log \sqrt{60}]] - [\log(4.5)^7 + \log \sqrt{21}]$$
$$= \frac{1}{2}\left[5\log(60.24) + \frac{1}{2}\log 60\right] - \left[7\log(4.5) + \frac{1}{2}\log 21\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(5 \times 1.7799) + \left(\frac{1}{2} \times 1.7782\right)\right] - \left[(7 \times 0.6532) + \left(\frac{1}{2} \times 1.3222\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}[8.8995 + 0.8891] - [4.5724 + 0.6611]$$
$$= \frac{1}{2}[9.7886 - 5.2335]$$
$$\log x = \frac{4.5551}{2}$$
$$\log x = 2.2775$$
$$x = \text{anti} \log 2.2775$$
$$x = 189.4$$ उत्तर

2. 5^{15} का लघुगणक लिखिए और इसकी सहायता से बताइए कि 5^{15} में अंकों की संख्या कितनी है?

हल— log लेने पर $= \log 5^{15}$

$$= 15 \log 5$$
$$= 15 \times 0.6990$$
$$= 10.485$$

5^{15} के लघुगणक का पूर्णांश 10 है

$$= 10 + 1 = 11$$ उत्तर

3. 12 का घनमूल दशमलव के दो स्थान तक ज्ञात कीजिए।

हल— माना $x = \sqrt[3]{12}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x = \log 12^{1/3}$$
$$\log x = \frac{1}{3} \log 12$$
$$= \frac{1}{3} \log[2^2 \times 3]$$
$$= \frac{1}{3}[\log 2^2 + \log 3]$$
$$= \frac{1}{3}(2 \times 0.3010) + (0.4771)$$
$$= \frac{1}{3}[0.6020 + 0.4771]$$
$$= \frac{1}{3}[1.0791]$$
$$\log x = 0.3597$$
$$x = \text{anti log}\ (0.3597)$$
$$x = 2.290$$ उत्तर

4. यदि $10^x = 500$ तो दशमलव के दो अंकों तक का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $10^x = 500$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log 10^x = \log 500$$
$$x \log 10 = \log[5 \times 100]$$
$$x \log 10 = \log 5 + \log 100$$
$$x \log 10 = \log 5 + \log 10^2$$
$$x \log 10 = \log 5 + 2 \log 10$$
$$x \times 1 = \log 5 + 2$$
$$x = 0.690 + 2$$
$$x = 2.6990$$ उत्तर

5. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left[\dfrac{(48.5)^2}{(2.3)^2+(5.9)^3}\right]^{1/3}$

हल—माना $x=\left[\dfrac{(48.5)^2}{(2.3)^2\times(5.9)^3}\right]^{1/3}$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log x=\log\left[\frac{(48.5)^2}{(2.3)^2\times(5.9)^3}\right]^{1/3}$$

$$=\frac{1}{3}[\log(48.5)^2-\log(2.3)^2-\log(5.9)^3]$$

$$=\frac{1}{3}[2\log(48.5)-2\log(2.3)-3\log(5.9)]$$

$$=\frac{1}{3}[(2\times1.6857)-(2\times0.3617)-(3\times0.7709)]$$

$$=\frac{1}{3}[3.3714-0.7234-2.3127]$$

$$=\frac{1}{3}[3.3714-3.0361]$$

$$=\frac{1}{3}\times0.3353$$

$$\log x=0.1118$$

$$x=\text{anti}\log(0.1118)$$

$$x=1.293$$ उत्तर

(ii) $\sqrt[3]{\dfrac{(45.4)^2}{(3.2)^2\times(5.6)^2}}$

हल— माना $x=\left[\dfrac{(45.4)^2}{(3.2)^2\times(5.6)^3}\right]^{1/3}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x=\log\left[\frac{(45.4)^2}{(3.2)^2\times(5.6)^3}\right]^{1/3}$$

$$=\frac{1}{3}[\log(45.4)^2-\log\{(3.2)^2\times(5.6)^3\}]$$

$$=\frac{1}{3}[2\log(45.4)-\{\log(3.2)^2+\log(5.6)^3\}]$$

$$= \frac{1}{3}[2\log(45.4) - 2\log(3.2) - 3\log(5.6)]$$

$$= \frac{1}{3}[(2\times 1.6571) - (2\times 0.5051) - (3\times 0.7482)]$$

$$= \frac{1}{3}[3.3142 - 1.0102 - 2.2446]$$

$$= \frac{1}{3}[3.3142 - 3.2548]$$

$$= \frac{0.0594}{3}$$

$$\log x = 0.0198$$

$$x = \text{anti log } (0.0198)$$

या $x = \text{anti log } (0.02)$

$x = 1.047$ उत्तर

(iii) $\frac{\sqrt{(1.23)^3}}{11.2\times 23.5}$

हल—माना $x = \frac{\sqrt{(1.23)^3}}{11.2\times 23.5}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x = \log\left[\frac{\sqrt{(1.23)^3}}{(11.2)\times(23.5)}\right]$$

$$= \log\left[\frac{(1.23)^{3/2}}{(11.2)\times(23.5)}\right]$$

$$= \log(1.23)^{3/2} - \log[(11.2)\times(23.5)]$$

$$= \frac{3}{2}\log(1.23) - [\log(11.2) + \log(23.5)]$$

$$= \frac{3}{2}\log(1.23) - \log(11.2) - \log(23.5)$$

$$= \frac{3}{2}\times(0.0899) - (1.0492) + (1.3711)$$

$$= 0.13485 - (2.4203)$$

$$\log x = -2.28545$$

$$= -2 - 0.28545$$

$$= -2 - 1 + 1 - 28545$$

$$\log x = -3 + 0.7145$$

$$\log x = \bar{3}.7145$$

$$x = \text{anti log } \bar{3}.7145$$

$$x = 0.005182$$ उत्तर

अभ्यास 5.6

1. ₹ 1000 का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 10 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल— $p = ₹1000, n = 10$ वर्ष, $x = 5\%$ चक्रवृद्धि ब्याज = ?

$$A = p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}$$

$$A = 1000\left(\frac{105}{100}\right)^{10}$$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log A = \log\left[1000\left(\frac{105}{100}\right)^{10}\right]$$

$$\log A = \log 1000 + 10[\log 105 - \log 100]$$

$$\log A = \log 10^3 + 10\log 105 - 10\log 10^2$$

$$= 3\log 10 + 10\log 105 - 10\times 2\log 10$$

$$= (3\times 1) + (10\times 2.0212) - (20\times 1)$$

$$= 3 + 20.212 - 20$$

$$\log A = 3.212$$

$$A = \text{anti log } 3.212$$

$$A = 1629$$

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन − मूलधन

$$= 1629 - 1000$$

चक्रवृद्धि ब्याज = ₹ 629 उत्तर

2. कितने समय में 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ₹ 250 का मिश्रधन ₹ 1377 हो जाएगा?

हल— $n = ?, r = 4\%,\quad p = ₹\,250, A = ₹\,1377$

$$A = p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$1377 = 250\left(1+\frac{4}{100}\right)^n$$

$$1377 = 250\left(\frac{104}{100}\right)^n$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log 1377 = \log\left[250\left(\frac{104}{100}\right)^n\right]$$

$$\log 1377 = \log 250 + n[\log 104 - \log 100]$$

$$= \log\left(\frac{1000}{4}\right) + n[\log 104 - \log 100]$$

$$= \log 1000 - \log 4 + n[\log(104) - \log 100]$$

$$\log 1377 = \log 10^3 - \log 4 + n[\log 104 - \log 10^2]$$

$$\log 1377 = 3\log 10 - \log 4 + n[\log 104 - 2\log 10]$$

$$3.1389 = 3\times 1 - 0.6020 + n[2.0170 - 2\times 1]$$

$$3.1389 = 3 - 0.6020 + n[2.0170 - 2]$$

$$3.1389 = 3 - 0.6020 + 0.0170n$$

$$n\times 0.0170 = 3.1389 - 3 + 0.6020$$

$$n\times 0.0170 = 0.7409$$

$$n = \frac{0.7409}{0.0170}$$

$n = 43.58$ वर्ष लगभग **उत्तर**

3. कितने प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ₹ 8000 का मिश्रधन 3 वर्षों में ₹ 9261 हो जाएगा?

हल— $p = 8000, n = 3, A = 9261, r = ?$

$$A = p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$9261 = 8000\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log 9261 = \log\left[8000\left(1+\frac{r}{100}\right)^3\right]$$

$$= \log 8000 + 3\log\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= \log 8000 + 3\log\left(\frac{100+r}{100}\right)$$

$$\log 9261 = \log(2^3\times 10^3) + 3\log\left(\frac{100+r}{100}\right)$$

$$\log 9261 = \log 2^3 + \log 10^3 + 3[\log(100+r) - \log 10^2]$$
$$\log 9261 = 3\log 2 + 3\log 10 + 3[\log(100+r) - 2\log 10]$$
$$3.9666 = (3\times 0.3010) + (3\times 1) + 3[\log(100+r) - (2\times 1)]$$
$$3.9666 = 0.9030 + 3 + 3\log(100+r) - 6$$
$$3.9666 - 0.9030 - 3 + 6 = 3\log(100+r)$$
$$6.0636 = 3\log(100+r)$$
$$\log(100+r) = \frac{6.0636}{3}$$
$$\log(100+r) = 2.0212$$
$$100 + r = \text{anti}\log 2.0212$$
$$100 + r = 105$$
$$r = 105 - 100$$
$$r = 5\%$$

उत्तर

4. एक मोबाईल फोन ₹ 12500 के नगद भुगतान पर या मात्र ₹ 4500 नकद और शेष ₹ 850 प्रतिमाह की 11 किस्तों के भुगतान पर उपलब्ध है। इस किस्त योजना में ग्राहक द्वारा दी गई ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल—फोन का नकद मूल्य = ₹ 12500

फोन का नकद भुगतान = ₹ 45000

किस्तों का मूल्य = 580×11 = ₹ 9350

किस्त योजना में फोन का मूल्य = 4500 + 9350

= ₹ 13850

ब्याज = 13860 − 12500

= ₹ 1350

प्रत्येक माह में देय मूलधन का विवरण

पहले माह का मूलधन = 12500 − 4500 = 8000

दूसरे माह का मूलधन = 8000 − 850 = 7150

तीसरे माह का मूलधन = 7150 − 850 = 6300

चौथे माह का मूलधन = 6300 − 850 = 5450

पाँचवे माह का मूलधन = 5450 − 850 = 4600

छठे माह का मूलधन = 4600 − 850 = 3750

साँतवे माह का मूलधन = 3750 − 850 = 2900

आठवे माह का मूलधन = 2900 − 850 = 2050

नौवे माह का मूलधन = 2050 − 850 = 1200

दसवें माह का मूलधन = 1200 − 850 = 350

ग्यारहवें माह का मूलधन = 30 − 850 = −500

कुल मूलधन = 54250 − 13000 = ₹ 41250

स्पष्ट है कि ग्यारहवें माह में 500 ब्याज के रूप में दी गई किस्त है।

हम मान सकते है कि मूलधन ₹ 41250 तथा पहले माह के लिए लिया गया जिसका ब्याज ₹ 1350 है।

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$1350 = \frac{41250 \times \text{दर}}{100 \times 12}$$

$$\text{दर} = \frac{1350 \times 100 \times 12}{41250}$$

दोनों ओर log लेने पर $= \log\left[\frac{1350 \times 100 \times 12}{41250}\right]$

या $\log(\text{दर}) = \log 1350 + \log 100 + \log 12 - \log 41250$

$$= 3.1303 + 2 + 1.0792 - 4.6154$$

$$= 6.2095 - 4.6154$$

$$\log(\text{दर}) = 1.5941$$

$$(\text{दर}) = \text{anti} \log(1.5941)$$

$$(\text{दर}) = 39.27\%$$

उत्तर

5. किसी शहर की जनसंख्या 1450000 थी। प्रतिवर्ष के अन्त में वह 2% की दर से घटने लगी। 2 वर्ष के बाद उसकी जनसंख्या बताइए।

हल— $p_n = p_o\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

जहाँ $r = 2\%, n = 2$ वर्ष, $p_o = 1450000$

$$p_n = 1450000\left(1 - \frac{2}{100}\right)^2$$

$$= 145 \times 10^4\left(\frac{100-2}{100}\right)^2$$

$$p_n = 145 \times 10^4\left(\frac{98}{100}\right)^2$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log p_n = \log\left[145 \times 10^4\left(\frac{98}{100}\right)^2\right]$$

$$= \log 145 + \log 10^4 + \log\left(\frac{98}{100}\right)^2$$

$$= \log 145 + \log 10^4 + 2[\log 98 - \log 100]$$

$$= \log 145 + 4\log 10 + 2[\log 98 - 2\log 10]$$

$$= 2.1614 + (4\times 1) + 2[\bar{1}.9912 - (2\times 1)]$$
$$= \bar{2}.1614 + 4 + [\bar{1}.9912 - 2]$$
$$= 6.1614 + 2(-0.0088)$$
$$= 6.1614 - 0.0176$$
$$\log p_n = 6.1438$$
$$p_n = anti\log 6.1438$$
$$p_n = 1393000$$
उत्तर

6. पाकिस्तान की जनसंख्या में प्रतिवर्ष के प्रारम्भ में 5% की वृद्धि होती है। यदि वर्ष 2005 में उसकी जनसंख्या 1149×10^4 हो, तो वर्ष 2015 में उसकी जनसंख्या क्या होगी?

हल— माना वर्ष 2015 में पाकिस्तान की जनसंख्या = p'

$r = 5\%, p = 1149\times 10^4\ n = 10$ वर्ष

$$p' = p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$
$$= 1149\times 10^4\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}$$
$$p' = 1149\times 10^4\left(\frac{100+5}{100}\right)^{10}$$
$$p' = 1149\times 10^4\left(\frac{105}{100}\right)^{10}$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log p' = \log\left[1149\times 10^4\left(\frac{105}{100}\right)^{10}\right]$$
$$\log p' = \log\left[11490000\left(\frac{21}{20}\right)^{10}\right]$$
$$\log p' = \log[11490000] + 10\log\left[\frac{21}{20}\right]$$
$$= \log[11490000] + 10[\log 21 - \log 20]$$
$$= 7.0604 + 10(1.3222 - 1.3010)$$
$$= 7.0604 + (10\times 0.0212)$$
$$= 7.0604 + 0.212$$
$$\log p' = 7.2724$$
$$p' = \text{anti}\log 7.2724$$
$$p' = 18730000$$
$$p' = 1873\times 10^4$$
उत्तर

7. एक कार का मूल्य ₹100000 है। इसका अवमूल्यन 4% प्रति वर्ष की दर से होता है। प्रत्येक वर्ष के अवमूल्यन का परिकलन उस वर्ष के आरम्भ के मूल्य पर करते हैं। 8 वर्ष पश्चात् कार का घटा हुआ मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल— माना 8 वर्ष बाद कार का घटा मूल्य = p'

तथा वर्तमान में कार का मूल्य $p =$ ₹100000

r (दर) $= 4\%, n = 8$ वर्ष

$$p' = p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$

$$= 100000\left(1-\frac{4}{100}\right)^8$$

$$= 10^5\left(\frac{100-4}{100}\right)^8$$

$$p' = 10^5\left(\frac{96}{100}\right)^8$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log p' = \log\left[10^5\left(\frac{96}{100}\right)^8\right]$$

$$= \log 10^5 + \log\left(\frac{96}{100}\right)^8$$

$$= 5\log 10 + 8[\log 96 - \log 100]$$

$$= 5\times1 + 8[1.9823 - 2]$$

$$= 5 + 8\times1.9823 - 8\times2$$

$$= 5 + 15.8584 - 16$$

$$= 20.8584 - 16$$

$$\log p' = 4.8584$$

$$p' = \text{anti}\log 4.8584$$

$p' =$ ₹72180 **उत्तर**

8. एक साइकिल ₹6500 में खरीदी गई, जिसका अवमूल्यन प्रति वर्ष 3% की दर से होता है। प्रत्येक वर्ष के अवमूल्यन का परिकलन उस वर्ष के प्रारम्भ के मूल्य पर किया जाता है। 6 वर्ष पश्चात् साइकिल का घटा हुआ मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल— माना 6 वर्ष पश्चात् साइकिल का घटा मूल्य = p'

$p =$ ₹6500, $r = 3\%, n = 6$ वर्ष, $p' = ?$

$$p' = p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$

$$= 6500\left(1-\frac{3}{100}\right)^6$$

$$= 6500\left(\frac{100-3}{100}\right)^6$$

$$p' = 6500\left(\frac{97}{100}\right)^6$$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log p' = \log\left[6500\left(\frac{97}{100}\right)^6\right]$$

$$= \log 6500 + \log\left(\frac{97}{100}\right)^6$$

$$= \log 6500 + 6[\log 97 - 2\log 10]$$

$$= 3.8129 + 6\times(1.9868) - 6(2\times 1)$$

$$= 3.8129 + 11.9208 - 12$$

$$= 15.7337 - 12$$

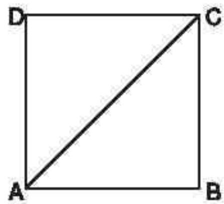
$$\log p' = 3.7337$$

$$p' = \text{anti}\log 3.72337$$

$p' =$ ₹5417 उत्तर

9. एक वर्ग की भुजा 15 सेमी है। वर्ग का क्षेत्रफल व विकर्ण ज्ञात कीजिए।

हल— वर्ग $ABCD$ की भुजा = 15 सेमी



वर्ग का क्षेत्रफल (A) = (भुजा)^2

$$A = (15)^2$$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log A = \log(15)^2$$

$$= 2\log 15$$

$$= 2\times 1.1761$$

$$= 2.3522$$

$$A = \text{anti}\log 2.3522$$

$A = 225.0$ मीटर^2

अत: क्षेत्रफल $A = 225$ मीटर^2

माना वर्ग का विकर्ण $AC = x$

ΔABC में $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$x^2 = (15)^2 + (1.5)^2$$

$$x^2 = 2(15)^2$$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x^2 = \log[2(15)^2]$$
$$2\log x = \log 2 + 2\log 15$$
$$2\log = 0.3010 + 2\times 1.1761$$
$$= 0.03010 + 2.3522$$
$$2\log x = 2.6532$$
$$\log x = \frac{2.6532}{2}$$
$$\log x = 1.3266$$
$$x = \text{anti}\log 1.3266$$
$$x = 21.21 \text{ सेमी}$$

अत: क्षेत्रफल $A = 225$ मीटर^2

विकर्ण $x = 21.21$ सेमी **उत्तर**

10. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमश: 95 मीटर व 121 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल— समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2}$ दोनों विकर्णों का गुणनफल

$$A = \frac{1}{2}(95\times 121)$$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log A = \log\left[\frac{1}{2}(95\times 121)\right]$$
$$= \log\frac{1}{2} + \log 95 + \log 121$$
$$= \log 1 - \log 2 + \log 95 + \log 121$$
$$= 0 - 0.3010 + 1.9777 + 2.0828$$
$$= 4.0605 - 0.3010$$
$$\log A = 3.7595$$
$$\log A = \text{anti}\log(3.7595)$$
$$A = 5748 \text{ मीटर}$$

उत्तर

11. एक आयताकार मैदान की भुजाओं की लम्बाइयों का अनुपात 3 : 2 है। यदि मैदान का क्षेत्रफल 80000 मीटर^2 है, तो मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल— आयताकर मैदान की भुजाओं की लम्बाइयों में अनुपात = 3 :2

माना लम्बाई = $3x$

$\therefore$ चौड़ाई = $2x$

$\therefore$ आयताकार मैदान का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई

$$80000 = 3x \times 2x$$
$$80000 = 6x^2$$

$$x^2 = \frac{80000}{6}$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log(x^2) = \log\left(\frac{80000}{6}\right)$$

$$2\log x = \log 80000 - \log 6$$

$$2\log x = 4.9031 - 0.7782$$

$$2\log x = 4.1249$$

$$\log x = \frac{4.1249}{2}$$

$$\log x = 2.06245$$

$$x = \text{anti}\log 2.06245$$

$$x = 115.4$$

अत: $\text{लम्बाई} = 3x = 3\times 115.4 = 346.2$ मीटर

$\text{चौड़ाई} = 2x = 2\times 115.4 = 230.8$ मीटर

आयताकार मैदान का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$$= 2(346.2 + 230.8)$$

$$= 2\times 577.0$$

$= 1154$ मीटर **उत्तर**

विविध प्रश्नावली

1. $\log\frac{25}{18} + \log\frac{9}{5} - \log\frac{5}{2}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल— $\log\frac{25}{18} + \log\frac{9}{5} - \log\frac{5}{2}$

$$= \log[25] - \log[18] + \log[9] - \log[5] - [\log(5) - \log(2)]$$

$$= \log[5\times 5] - \log[2\times 3\times 3] + \log[3\times 3] - \log[5] - \log[5] + \log[2]$$

$$= \log[5] + \log[5] - \log[2] - \log[3] - \log[3] + \log[3] + \log[3] - \log[5] - \log[5] + \log[2]$$

$= 0$ **उत्तर**

2. यदि $\log 5^{x-5} = \log 125$ **तो** x **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल—

$$\log 5^{x-5} = \log 125$$

$$\log 5^{x-5} = \log(5)^3$$

$$(x-5)\log 5 = 3\log 5$$

$$(x-5) = 3$$

$$x = 3+5$$

$x = 8$ **उत्तर**

3. log 144 का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\log 144 = \log(12)^2$

$= 2\log(12)$

$= 2\log(4\times3)$

$= 2[\log 4 + \log 3]$

$= 2[0.6021 + 0.4771]$

$= 2[10792]$

$= 21584$ उत्तर

4. log 2435.78 का पूर्णांश ज्ञात कीजिए।

हल— 2435.78 के पूर्णांक में 4 अंक है।

$\therefore$ log का पूर्णांश $= 4 - 1 = 3$ उत्तर

5. $\log\left[\frac{4\times5\times8}{7}\right]$ का मान कीजिए।

हल— $\log\left[\frac{4\times5\times8}{7}\right] = \log 4 + \log 5 + \log 8 - \log 7$

$= 0.6021 + 0.6990 + 0.9031 - 0.8451$

$= 2.2042 - 0.8451$

$= 1.3591$ उत्तर

6. $\log_{10} 2.178$ में पूर्णांश तथा अपूर्णांश बताइए।

हल— 2.178 के पूर्णांक में 1 संख्या है।

$\therefore$ log का पूर्णांश $= 1 - 1 = 0$

तथा अपूर्णांश $= .178$ उत्तर

7. लघुगणक की सहायता से ज्ञात कीजिए।

7.85×81.63

हल—माना $x = 7.85\times 81.63$

दोनों ओर log लेने पर

$\log x = \log[7.85\times 81.63]$

$\log x = \log 7.85 + \log 81.63$

$\log x = 0.8949 + 1.9119$

$\log = 1.8068$

$x = \text{anti}\log 2.8068$

$x = 640.9$ उत्तर

8. $\log_{10} 24$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $\log_{10} 2 = 0.30$ व $\log_{10} 3 = 0.4771$

हल— $\log(24) = \log(2\times2\times2\times3)$

$= \log(2^3\times3)$

$= \log 2^3 + \log 3$

$= 3\log 2 + \log 3$

$= (3 \times .3010) + 0.4771$

$= 0.9030 + 0.4771$

$= 1.3801$ **उत्तर**

9. यदि log 487226 = 5.3353 हो तो log 487.226 का मान ज्ञात कीजिए।

हल—हम जानते है कि यदि विभिन्न संख्याओं में अंक एक समान तथा एक ही क्रम में है तो उन सभी संख्याओं के लघुगणकों के अपूर्वांश बराबर होते है।

∴ दी गई संख्या के लघुगणक का अपूर्वांश .3353 होगा।

अत: $\log 487.226 = 2.3353$ **उत्तर**

10. $\log x = 256.2$ में प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल— $\log x = 256.2$

$x = \text{anti} \log 256.2$

$x = 1585$ **उत्तर**

11. 3 का घनमुल ज्ञात कीजिए।

हल—माना $x = \sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$

दोनों ओर log लेने पर

$$\log x = \log(3)^{1/3}$$

$$\log x = \frac{1}{3} \log 3$$

$$\log x = \frac{1}{3}[0.4771]$$

$$\log x = 0.1590$$

$$x = \text{anti} \log (0.1590)$$

$$x = 1.442$$ **उत्तर**

12. 4500 का 3% वार्षिक ब्याज की दर से 4 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल— $p = 4500, r = 3\%, n = 4$ वर्ष $A = ?$

$$A = p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$= 4500\left(1 + \frac{3}{100}\right)^4$$

$$= 4500\left(\frac{100+3}{100}\right)^4$$

$$A = 4500\left(\frac{103}{100}\right)^4$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log A = \log 4500\left(\frac{103}{100}\right)^4$$

$$= \log 4500 + 4[\log 103 - \log 100]$$

$$= \log 4500 + 4\log 103 - 4\log 10^2$$

$$= \log 4500 + 4\log 103 - 8\log 10$$

$$= (3.6532) + (4 \times 2.0128) - (8 \times 1)$$

$$= 3.6532 + 8.0512 - 8$$

$$= 11.7044 - 8$$

$$\log A = 3.7044$$

$$A = \text{anti}\log 3.7044$$

$$A = 5063$$

उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 82 देखिए।

इकाई-2 त्रिकोणमिति (Trigonometry)

6

त्रिकोणमिति
(Trigonometry)

अभ्यास 6.1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर लिखिए—

(i) 45° का रेडियन मान क्या होगा?

हल— $180° = \pi$ रेडियन

$1° = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$45° = \frac{\pi}{180} \times 45°$ रेडियन

$= \frac{\pi}{4}$ रेडियन **उत्तर**

(ii) $\frac{2\pi}{3}$ त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ पर 80 π चलने पर केन्द्र पर अन्तरित कोण का रेडियन मान ज्ञात कीजिए।

हल— केन्द्र पर अन्तरित कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}}$ सूत्र से

अन्तरित कोण $= \frac{80\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{80\pi}{2\pi} \times 3$

$= 40 \times 3 = 120° = 120° \times \frac{\pi}{180°}$ रेडियन

या $= \frac{2\pi}{3}$ रेडियन **उत्तर**

(iii) 50 मीटर त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ पर 10 π मीटर चलने पर केन्द्र पर अन्तरित कोण का रेडियन मान ज्ञात कीजिए।

हल— माना अन्तरित कोण $= \theta$

केन्द्र पर अन्तरित कोण = $\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}}$ सूत्र से

$$\theta = \frac{10\pi}{50} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{5}$$ उत्तर

(iv) 135° का रेडियन मान क्या होगा?

हल— $180° = \pi$ रेडियन

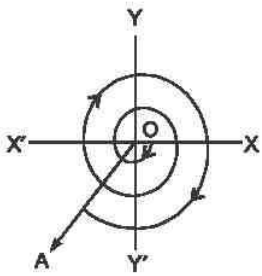
$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$135° = 135° \times \frac{\pi}{180°} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \text{ रेडियन}$$

2. चित्र द्वारा निम्नलिखित कोणों को दर्शाइए—

(i) – 852°

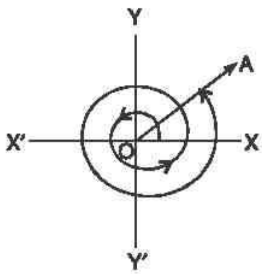


हल— $-852° = -(2\times360°) + (-132°)$

$$= -(2\times360°) - 132°$$

अत: परिक्रामी रेखा OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से आरम्भ कर दक्षिणावर्त घूमकर दो पूरा चक्कर लगाकर फिर उसी दिशा में 132° घूमेंगी। इस प्रकार OA की अन्तिम स्थित तृतीय चतुर्थांश में होगी।

(ii) 730°

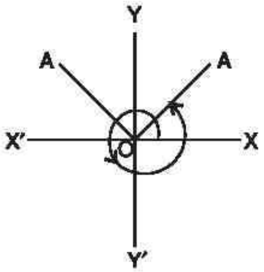


हल— $730° = (2 \times 360°) + 10°$

अतः परिक्रामी रेखा OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से आरम्भ कर वामावर्त घूमकर दो चक्कर पूरा लगाकर फिर उसी दिशा में 10° घूमेगी।

इस प्रकार OA की अन्तिम स्थित प्रथम चतुर्थांश में होगी।

(iii) 425°



हल— $$425° = (1 \times 360°) + 65°$$

अतः परिक्रामी रेखा OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से आरम्भ पर वामावर्त घूमकर एक चक्कर पूरा लगाकर फिर उसी दिशा में 65° घूमेगी। इस प्रकार OA की अन्तिम स्थित प्रथम चतुर्थांश में होगी।

3. + 450° का कोण बनाने वाली रेखा किस चतुर्थांश में स्थित होगी?

हल— $$450° = 1 \times 360° + 90°$$

अर्थात् कोण बनाने वाली रेखा प्रथम चतुर्थांश में स्थित होगी।

4. – 780° का कोण बनाने वाली रेखा किस चतुर्थांश में स्थित होगी?

हल— $$-780° = -(2 \times 360°) - 60°$$

अर्थात् कोण बनाने वाली रेखा चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित होगी।

5. 10 सेमी त्रिज्या वाले किसी वृत्त के केन्द्र पर $\frac{\pi}{2}$ कोण अन्तरित करने वाली चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना चाप की लम्बाई $= x$ सेमी

$$\text{केन्द्र पर अन्तरित कोण} = \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}} \text{ सूत्र से}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10\pi}{2}$$

$\therefore$ चाप की लम्बाई $x = 5\pi$ **उत्तर**

6. किसी त्रिभुज का एक कोण 30° तथा दूसरा $\frac{\pi}{4}$ रेडियन हैं, तो तीसरे कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है— त्रिभुज का एक कोण = 30° या $\frac{\pi}{6}$ रेडियन

त्रिभुज का दूसरा कोण $= \frac{\pi}{4}$ रेडियन

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= \pi$

माना तीसरा कोण $= \theta$

अतः $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \theta = \pi$

$$\frac{5\pi}{12} + \theta = \pi \Rightarrow \theta = \pi - \frac{5\pi}{12}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{12}$$ उत्तर

7. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 15 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा कितने रेडियन का कोण बनेगा?

हल—माना कोण $= \theta$

केन्द्र पर अन्तरित कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}}$ सूत्र से

$$\theta = \frac{15}{5}$$

$\theta = 3$ रेडियन

8. किसी वृत्त में 20 सेमी लम्बाई का चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल—माना वृत्त की त्रिज्या $= r$ सेमी

केन्द्र पर अन्तरित कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}}$ सूत्र से

$$= \frac{20}{60^\circ}$$

$$= \frac{20}{\pi/3}$$

$$= \frac{20 \times 3}{\pi}$$

$= \frac{60}{\pi}$ सेमी उत्तर

9. किसी समकोण त्रिभुज में दो न्यून कोणों का अन्तर 30° है। कोणों का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए।

हल—माना त्रिभुज में दो न्यून कोण $= x$ तथा y

तथा दिया है— एक कोण समकोण अर्थात् $z = 90^\circ$

व $x - y = 30^\circ$

या $x = 30^\circ + y$

हम जानते हैं $x + y + z = 180^\circ$

x तथा z का मान रखने पर,

$$(30° + y) + y + 90° = 180°$$
$$2y + 120° = 180°$$
$$2y = 180° - 120°$$
$$2y = 60°$$
$$y = 60°/2 \quad \Rightarrow y = 30°$$
$$= 30° \times \frac{\pi}{180°} \text{ रेडियन}$$
$$= \frac{\pi}{6} \text{ रेडियन}$$

तथा $x - y = 30°$

$\Rightarrow$ $x = 30° + 30°$

$\Rightarrow$ $x = 60°$

अत: $x = 60° \times \frac{\pi}{180°}$ रेडियन

$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{3}$ रेडियन

कोण $= \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ उत्तर

अभ्यास 6.2

1. व्यंजक ($\sin^2 A.\sec^2 A$) का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $$\sin^2 A.\sec^2 A = \sin^2 A \times \frac{1}{\cos^2 A}$$
$$= \tan^2 A$$ उत्तर

2. यदि $\cos\theta = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b}}$ हो, तो $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल—∴ $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\right)^2$$
$$= 1 - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right)$$
$$= \frac{b-(b^2 - a^2)}{b^2}$$

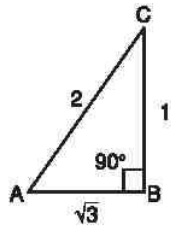
$$= \frac{b^2 - b^2 + a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{a}{b}$$ उत्तर

3. यदि किसी ΔABC में $\sin A = \frac{1}{2}$, $\angle B = 90°$ हो, तो $\cos A$, $\tan A$, $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए। चित्र भी दर्शाइए।



हल— $\therefore$ $\sin A = \frac{1}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

पाइथागोरस प्रमेय से, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= (2)^2 - (1)^2$$

$$AB^2 = 4 - 1$$

$$AB^2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{3}$$

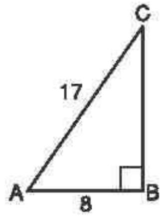
$$\therefore \quad \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

अतः $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ उत्तर

4. यदि $\cos A = \frac{8}{17}$ हो, तो $\sin A$ व $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल— $\because$ $\cos A = \frac{8}{17} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$= (17)^2 - (8)^2 \quad \Rightarrow 289 - 64$$

$$BC^2 = 225$$

$$\Rightarrow \quad BC = 15$$

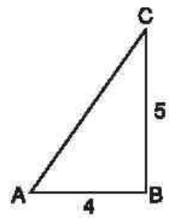
$\therefore \quad \sin A = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{15}{17}$

$\therefore \quad \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{15/17}{8/17} = \dfrac{15}{8}$

अतः $\quad \sin A = \dfrac{15}{17}, \tan A = \dfrac{15}{8}$ उत्तर

5. यदि $\cos A = \dfrac{4}{5}$ हो, तो $\sin^2 A$, $\text{cosec}^2 A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because \quad \cot A = \dfrac{4}{5} = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$



पाइथागोरस प्रमेय से

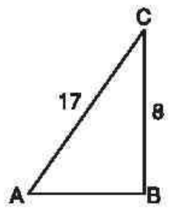
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (4)^2 + (5)^2$$
$$= 16 + 25 = 41$$
$$AC = \sqrt{41}$$

$\therefore \quad \sin^2 A = \left(\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)^2 = \dfrac{25}{41}$

$\therefore \quad \text{cosec}^2 A = \left(\dfrac{1}{\sin^2 A}\right) = \dfrac{25}{41}$ उत्तर

6. यदि $\sin A = \dfrac{8}{17}$ हो, तो $[\tan A + \cot A]$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because \quad \sin A = \dfrac{8}{17} = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$



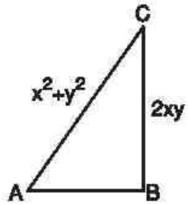
पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$
$$= (17)^2 - (8)^2$$
$$= 289 - 64 = 225$$
$$AB^2 = 225 \Rightarrow AB = 15$$
$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{17}$$
$$\tan = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{8/17}{15/17} = \frac{8}{15}$$
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{8/15} = \frac{15}{8}$$

अतः $\quad \tan A + \cot A = \dfrac{8}{15} + \dfrac{15}{8}$

$$\frac{64+225}{120}=\frac{289}{120}$$ उत्तर

7. यदि $\sin A = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ तब $\tan A$ व $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल— $\because$ $\sin A = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

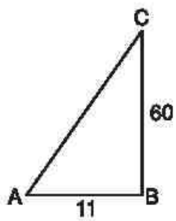
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$
$$= (x^2+y^2)^2 - (2xy)^2$$
$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2$$
$$AB^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2-y^2)^2$$
$$AB = (x^2-y^2)$$

$\therefore$ $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$\therefore$ $\tan A = \frac{2xy}{x^2-y^2}$, $\cos A = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ उत्तर

8. यदि $\tan A = \frac{60}{11}$ तब $(\sin^2 A - \cos^2 A)$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल— $\because$ $\tan A = \frac{60}{11} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (11)^2 + (60)^2$$
$$121 + 3600 = 3721$$
$$AC^2 = 3721 \quad \Rightarrow AC = \sqrt{3721}$$

$\therefore$ $\sin^2 A = \left(\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right)^2 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{60}{\sqrt{3721}}\right)^2 = \frac{3600}{3721}$

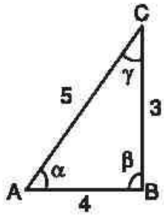
$\therefore$ $\cos^2 A = \left(\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{11}{\sqrt{3721}}\right)^2 = \frac{121}{3721}$

अत: $\sin^2 A - \cos^2 A = \frac{3600}{3721} - \frac{121}{3721} = \frac{3600-121}{3721}$

$$= \frac{3479}{3721}$$ उत्तर

9. यदि $\sec\beta = \frac{5}{4}$ तब सिद्ध कीजिए—

$$\frac{\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{\sin\beta}{\sec\beta}$$



हल— ∴ $\sec\beta = \frac{5}{4}$

या $\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$

∵ $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\sin^2\beta = \frac{9}{25}$$

⇒ $\sin\beta = \frac{3}{5}, \quad \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{3/5}{4/5}$

$$\tan\beta = 3/4$$

अत: $\text{L.H.S.} = \frac{\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{3/4}{1+(3/4)^2}$

$$= \frac{3/4}{1+\frac{9}{16}}$$

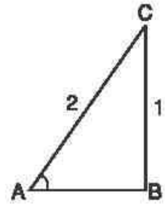
$$= \frac{3/4}{\frac{16+4}{16}} = \frac{3/4}{25/16} = \frac{3\times16}{25\times4} = \frac{12}{25}$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{\sin\beta}{\sec\beta} = \frac{3/5}{5/4} = \frac{3\times4}{5\times5} = \frac{12}{25}$$

∴ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

10. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ तब $3\cos A - 4\cos^3 A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— ∴ $\sin A = \frac{1}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$



पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= (2)^2 - (1)^2$$

$$= 4 - 1 = 3$$

$$AB = \sqrt{3}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}/2$$

अतः $= 3\cos A - 4\cos^3 A$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

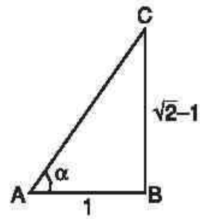
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4 \times 3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$3\cos A - 4\cos^3 A = 0$ उत्तर

11. यदि $\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$ तब सिद्ध कीजिए—

$$\sin\alpha . \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



हल— $\because$ $\tan\alpha = \sqrt{2} - 1 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2$$

$$= 1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2}$$

$$= 4 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$AC = \sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$

$\therefore$ $\sin\alpha = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}$,

$$\cos\alpha = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}$$

सिद्ध करना है—$\sin\alpha . \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\text{L.H.S.} = \sin\alpha . \cos\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}} \times \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}$$

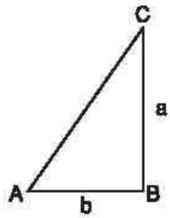
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

12. यदि $\cot A = \frac{b}{a}$ तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{b \sec A}{a \operatorname{cosec} A} = 1$$



हल— ∵ $\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = b^2 + a^2$$
$$AC = \sqrt{b^2 + a^2}$$
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{a}$$

सिद्ध करना है— $\frac{b}{a} \frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A} = 1$

$$\text{L.H.S.} = \frac{b}{a} \frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A}$$
$$= \frac{b}{a} \times \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} \times \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$
$$= 1 = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

13. (i) यदि $\sin A - \operatorname{cosec} A = \sqrt{5}$ तब $\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— ∵ $\sin A - \operatorname{cosec} A = \sqrt{5}$

या $(\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 = (\sqrt{5})^2$

$$\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A - 2 \sin A \operatorname{cosec} A = 5$$
$$\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A - 2 \sin A \times \frac{1}{\sin A} = 5$$
$$\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A - 2 = 5$$
$$\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = 5 + 2$$
$$\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = 7$$

उत्तर

(ii) $\tan^2 a + \cot^2 A = ?$ यदि $\tan A + \cot A = 10$

हल— ∵ $\tan A + \cot A = 10$

या $(\tan A + \cot A)^2 = (10)^2$

$$\tan^2 A + \cot^2 A + 2 \tan A \times \cot A = 100$$
$$\tan^2 A + \cot^2 A + 2 \times \tan A \times \frac{1}{\tan A} = 100$$
$$\tan^2 A + \cot^2 A + 2 = 100$$

$$\tan^2 A + \cot^2 A = 100 - 2$$
$$\tan^2 A + \cot^2 A = 98$$

(iii) $\sin^2 A + \text{cosec}^2 A = ?$ **यदि** $\sin - \text{cosec}\, A = \sqrt{3}$

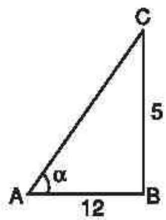
हल— $\sin A - \text{cosec}\, A = \sqrt{3}$

या $(\sin A - \text{cosec}\, A)^2 = (\sqrt{3})^2$

$$\sin^2 A + \text{cosec}^2 A - 2\sin A \,\text{cosec}\, A = 3$$
$$\sin^2 A + \text{cosec}^2 A - 2 = 3$$
$$\sin^2 A + \text{cosec}^2 A = 3 + 2$$
$$\sin^2 A + \text{cosec}^2 A = 5$$ उत्तर

14. यदि $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ **हो तब सिद्ध कीजिए** $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha \sec^2\alpha$

हल— $\because$ $\tan\alpha = \frac{5}{12} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$



पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (12)^2 + (5)^2$$
$$AC^2 = 144 + 25$$
$$AC^2 = 169$$

$\Rightarrow$ $AC = \sqrt{169} = 13$

$\therefore$ $\sin\alpha = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$, $\sec\alpha = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$

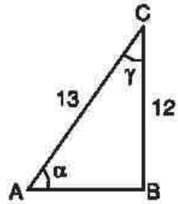
सिद्ध करना है— $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha \sec^2\alpha$

$$\text{L.H.S.} = \tan^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$
$$= \frac{25}{144} - \frac{25}{169}$$
$$= 25\left\{\frac{169 - 144}{144 \times 169}\right\}$$
$$= \frac{25 \times 25}{144 \times 169} \quad = \frac{625}{24336}$$
$$\text{R.H.S.} = \sin^4\alpha \sec^2\alpha$$
$$= \left(\frac{5}{13}\right)^4 \left(\frac{13}{12}\right)^2$$
$$= \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{13 \times 13 \times 13 \times 13} \times \frac{13 \times 13}{12 \times 12}$$

$$= \frac{625}{144 \times 169} = \frac{625}{24336}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **इति सिद्धम्**

15. (i) यदि $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ तब सिद्ध कीजिए—



$$\sin\alpha . \sin\gamma = \cos\alpha . \cos\gamma$$

हल— $\because$ $\sin\alpha = \frac{12}{13} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$
$$= (13)^2 - (12)^2$$
$$= 169 - 144$$
$$AB^2 = 25 \Rightarrow AB = \sqrt{25}$$
$$AB = 5$$
$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}, \quad \sin\gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$

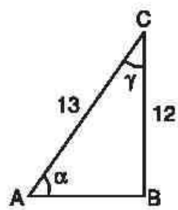
सिद्ध करना है— $\sin\alpha . \sin\gamma = \cos\alpha . \cos\gamma$

$$\text{L.H.S.} = \sin\alpha . \sin\gamma$$
$$= \frac{12}{13} . \frac{5}{13}$$
$$= \frac{60}{169}$$
$$\text{R.H.S.} = \cos\alpha . \cos\gamma$$
$$= \frac{5}{13} . \frac{12}{13} = \frac{60}{169}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. **इति सिद्धम्**

16. (ii) यदि $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ तब $\tan\alpha . \tan\gamma$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because$ $\sin\alpha = \frac{12}{13} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$



पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$
$$= (13)^2 - (12)^2$$
$$AB^2 = 169 - 144 \Rightarrow AB^2 = 25$$
$$AB = \sqrt{25}$$
$$AB = 5$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13},\quad \sin\gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13},\quad \cos\gamma = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$

अत: $\tan\alpha, \tan\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$

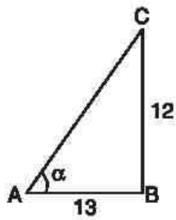
$$= \frac{12/13}{5/13} . \frac{5/13}{12/13}$$

$$= \frac{12}{5} , \frac{5}{12}$$

$$= 1$$ उत्तर

16. यदि $\cot\alpha = \frac{13}{12}$ तब सिद्ध कीजिए—

$$\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{312}{25}$$



हल— $\because$ $\cot\alpha = \frac{13}{12} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

पाइथागोरस प्रमेय से $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= (13)^2 + (12)^2$$

$$= 169 + 144$$

$$AC^2 = 313 \Rightarrow AC = \sqrt{313}$$

$\therefore$ $\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{\sqrt{313}}, \cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{\sqrt{313}}$

सिद्ध करना है— $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{312}{25}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2\times(12/\sqrt{313})(13/\sqrt{313})}{\left(\frac{13}{\sqrt{313}}\right)^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{313}}\right)^2}$$

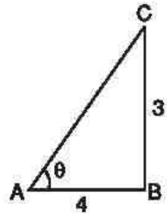
$$= \frac{\frac{24\times13}{313}}{\frac{169}{313} - \frac{144}{313}} = \frac{\frac{312}{313}}{\frac{25}{313}}$$

$$= \frac{312}{25} = \text{R.H.S.}$$ इति सिद्धम्

17. यदि $\cot\theta = \frac{4}{3} =$ हो तब $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because$ $\cot\theta = \frac{4}{3} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

पाइथागोरस प्रमेय से



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (4)^2 + (3)^2$$
$$= 16 + 9 = 25$$
$$AC = \sqrt{25} \Rightarrow AC = 5$$

∴ $\sin\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{5}$

अत: $= \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\dfrac{1-3/5}{1+3/5}} = \dfrac{(5-3)/5}{(5+3)/5}$

$$= \sqrt{\frac{2/5}{8/2}} = \sqrt{\frac{2}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$ उत्तर

18. निम्नलिखित व्यंजकों को हल कीजिए।

(i) $\cos A \cdot \text{cosec}\, A \cdot \cot A \cdot \tan^2 A$

हल— $\cos A \cdot \text{cosec}\, A \cdot \cot A \cdot \tan^2 A$

$$= \cos A \cdot \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= 1$$ उत्तर

(ii) $\sec A \cdot \sin A \cdot \cot A$

हल— $\sec A \cdot \sin A \cdot \cot A$

$$= \frac{1}{\cos A} \cdot \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= 1$$ उत्तर

19. सिद्ध कीजिए।

(i) $\tan A \cdot \sec A \cdot \cos^2 A = \sin A$

हल— L.H.S. $= \tan A \cdot \sec A \cdot \cos^2 A$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{1}{\cos A} \cdot \cos^2 A$$

$$= \frac{\sin A \cdot \cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$= \sin A =$ R.H.S. इति सिद्धम्

(ii) $\text{cosec}\, A \cdot \cot A \cdot \sec A = \text{cosec}^2 A$

हल— L.H.S. $= \text{cosec}\, A \cdot \cot A \cdot \sec A$

$$= \frac{1}{\sin A} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \frac{1}{\cos A}$$

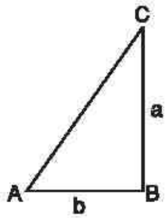
$$= \frac{1}{\sin^2 A}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 A = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

20. यदि $\cot A = \frac{b}{a}$ तब सिद्ध कीजिए—

$$\frac{a \sin A + b \cos A}{a \sin A - b \cos A} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$



हल— $\because$ $\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= b^2 + a^2$$

$$AC = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$\therefore$ $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}, \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}$

सिद्ध करना है— $\frac{a \sin A + b \cos A}{a \sin A - b \cos A} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{a \sin A + b \cos A}{a \sin A - b \cos A}$$

$$= \frac{a\left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right) + b\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)}{a\left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right) - b\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}}{\frac{a^2}{\sqrt{b^2 + b^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}}$$

$$= \frac{\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}}{\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

अभ्यास 6.3

1. cosec 60° का मान बताइए।

हल— $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. tan 30° का मान क्या है?

हल— $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. sin 45° + cos 45° का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$ उत्तर

4. $\frac{\sec 30^\circ + \text{cosec} 60^\circ}{4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\frac{\sec 30^\circ + \text{cosec } 60^\circ}{4}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{4} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ उत्तर

5. यदि $A = 0^\circ$ तो $\cot 5A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\cot 5A = \cot 5 \times 0^\circ$ $[\because A = 0^\circ]$

$$= \cot 0^\circ$$

$$= \infty$$ उत्तर

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए

7. $\sin 60^\circ - \cot 30^\circ + 15 \cos 90^\circ$

हल— $\sin 60^\circ - \cot 30^\circ + 15\cos 90^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + (15 \times 0)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$ उत्तर

8. $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - 4 \tan^2 \frac{\pi}{6}$

हल— $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{4} - 4 \tan^2 \frac{\pi}{6}$

या $$= \sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ - 4 \tan^2 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} = \frac{3+6-16}{12} = \frac{9-16}{12}$$

$$= \frac{-7}{12}$$ उत्तर

9. $\tan\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}$

हल— $\tan\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}$

या

$$= \tan 60^\circ \operatorname{cosec}^2 45^\circ + \sec^2 60^\circ \tan 45^\circ$$

$$= \sqrt{3} \times (\sqrt{2})^2 + (2)^2 \times (1)$$

$$= 2\sqrt{3} + 4$$

$$= 2(\sqrt{3} + 2)$$ उत्तर

10. $\frac{1 + 2\tan^2 \pi/4}{1 - 2\tan^2 \pi/4}$

हल— $\frac{1 + 2\tan^2 \pi/4}{1 - 2\tan^2 \pi/4} = \frac{1 + 2\tan^2 45^\circ}{1 - 2\tan^2 45^\circ}$

$$= \frac{1 + 2(1)^2}{1 - 2(1)^2}$$

$$= \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$ उत्तर

11. $\frac{\tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$

हल— $\frac{\tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\tan 60^\circ \cos 30^\circ \sin 30^\circ}{2\sin 60^\circ}$

$$= \frac{(\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}/2) \times (1/2)}{2 \times (\sqrt{3}/2)}$$

$$= \frac{3/4}{2\sqrt{3}/2} = \frac{3 \times 2}{2\sqrt{3} \times 4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$ उत्तर

12. $\frac{\tan^2 60^\circ + \cot^2 45^\circ}{5\tan 60^\circ}$

हल— $\frac{\tan^2 60^\circ + \cot^2 45^\circ}{5\tan 60^\circ} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}{5 \times \sqrt{3}}$

$$= \frac{3+1}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{5\sqrt{3}}$$ उत्तर

निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए—

13. $\frac{1}{\tan 30^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{1+30^\circ} = \text{cosec} 30^\circ$

हल—

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{\tan 30^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{1}{1/\sqrt{3}} + \frac{1/2}{1+\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})+1}{(2+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}+3+1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+4}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}$$

$$= 2$$

$$\text{R.H.S.} = \text{cosec } 30^\circ = 2$$ इति सिद्धम्

14. $\frac{1}{4}(\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ) = 0$

हल— $\text{L.H.S.} = \frac{1}{4}(\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

15. $2\cos^2 45^\circ - 1 = \cos 90^\circ$

हल— $\text{L.H.S.} = 2\cos^2 45^\circ - 1$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{R.H.S.} = \cos 90^\circ$$

$$= 0$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

16. $\sqrt{\dfrac{1-\cos 2(30^\circ)}{2}} = \sin 30^\circ$

हल— $$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1-\cos 2(30^\circ)}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1/2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$
$$\text{R.H.S.} = \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{2}$$
$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

17. $\dfrac{31}{8}\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ = \dfrac{1}{8}$

हल— $$\text{L.H.S.} = \frac{31}{8}\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ$$
$$= \frac{31}{8}\times(1)^2 - (2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{31}{8} - 4 + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{31-32+2}{8} = \frac{1}{8} = \text{R.H.S.}$$
इति सिद्धम्

18. $2\tan 45^\circ = \sin 90^\circ + \sin 90^\circ \cdot \tan^2 45^\circ$

हल— $$\text{L.H.S.} = 2\tan 45^\circ$$
$$= 2\times 1 = 2$$
$$\text{R.H.S.} = \sin 90^\circ + \sin 90^\circ \cdot \tan^2 45$$
$$= 1 + 1\times(1)^2$$
$$= 1+1 = 2$$
$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

19. $(1-\tan 30^\circ)\cos 60^\circ = (1+\tan 30^\circ)(1-\sin 60^\circ)$

हल— $$\text{L.H.S.} = (1-\tan 30^\circ)\cos 60^\circ$$
$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{2}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{R.H.S.} = (1+\tan 30^\circ)(1-\sin 60^\circ)$$
$$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{2\sqrt{3}-3+2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

20. $\frac{1}{5}[\sin^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ] = \frac{1}{2}[\sec^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ]$

हल—
$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{5}[\sin^2 60^\circ + \tan^2 60^\circ]$$
$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{3}{4}+3\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{3+12}{4}\right] = \frac{15}{5\times 4}$$
$$= \frac{3}{4}$$
$$\text{R.H.S.} = \frac{1}{2}[\sec^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{4-1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

21. यदि $\theta = 45^\circ$ तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan^2\theta$$

हल—
$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos 2(45^\circ)}{1+\cos 2(45^\circ)} \quad [\because \theta = 45^\circ]$$
$$= \frac{1-\cos 90^\circ}{1+\cos 90^\circ} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$
$$\text{R.H.S.} = \tan^2\theta$$
$$= \tan^2 45^\circ \quad [\because \theta = 45^\circ]$$

$$= (1)^2$$
$$= 1$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

22. यदि $\theta = 60°$ सिद्ध कीजिए—

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = 2\left(1-\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}\right)$$

हल—
$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1-\sin 60°}{\cos 60°} \qquad [\therefore \theta = 60°]$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{(2-\sqrt{3})/2}{1/2}$$
$$= (2-\sqrt{3})$$
$$\text{R.H.S.} = 2\left[1-\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}\right]$$
$$= 2\left[1-\frac{1}{\operatorname{cosec} 60°}\right] \qquad [\because \theta = 60°]$$
$$= 2\left[1-\frac{1}{2/\sqrt{3}}\right]$$
$$= 2\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$= (2-\sqrt{3})$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

23. यदि $\cos 90° = 2\cos^2 A - 1$ तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है— $\cos 90° = 2\cos^2 A - 1$
$$0 = 2\cos^2 A - 1$$
या
$$2\cos^2 A = 1$$
$$\cos^2 A = \frac{1}{2}$$
या
$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos A = \cos 45°$$
$$A = 45°$$
उत्तर

24. यदि $\sin 60° = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— दिया है—
$$\sin 60° = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)=2\times 2\tan\theta$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}\tan^2\theta=4\tan\theta$$

$$\sqrt{3}\tan^2\theta-4\tan^2\theta+\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}\tan^2\theta-3\tan\theta-\tan\theta+\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta-\sqrt{3})-1(\tan\theta-\sqrt{3})=0$$

$$(\tan\theta-\sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta-1)=0$$

अत: $\tan\theta=\sqrt{3},\ \sqrt{3}\tan\theta=1$

$$\tan\theta=\tan 60^\circ,\ \tan\theta=1/\sqrt{3}$$

$$\theta=60^\circ,\ \tan\theta=\tan 30^\circ$$

$$\theta=30^\circ$$

$\therefore$ $\theta=60^\circ$ या 30° उत्तर

25. सिद्ध कीजिए—

$1-2\sin^2 45^\circ=2\cos^2 45^\circ-1$

हल— L.H.S. $=1-2\sin^2 45^\circ$

$$=1-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1-2\times\frac{1}{2}=1-1=0$$

R.H.S. $=2\cos^2 45^\circ-1$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

अभ्यास 6.4

1. $\frac{\tan 37^\circ}{\cot 53^\circ}$ का मान क्या होगा?

हल— $\frac{\tan 37^\circ}{\cot 53^\circ}=\frac{\tan(90^\circ-53^\circ)}{\cot 53^\circ}=\frac{\cot 53^\circ}{\cot 53^\circ}$

$$=1$$ उत्तर

2. $\sin(90^\circ-\theta)$ का मान लिखिए।

हल— $\cos\theta$

3. $\cos 135^\circ$ का मान क्या होगा?

हल— $\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)$

$$=(-\sin 45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

4. $\tan 35^\circ=\frac{16}{25^\circ}$ तो $\tan 55^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\tan 55^\circ = \tan(90^\circ - 35^\circ)$

$= \cot 35^\circ$

$= \frac{1}{\tan 35^\circ} = \frac{1}{16/25} = \frac{25}{16}$ $\left[\because \text{ दिया है—} \tan 35^\circ = \frac{16}{25}\right]$

$\therefore \tan 55^\circ = \frac{25}{16}$ उत्तर

5. यदि $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ है, तो $\sin 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए

हल— $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ)$

$= \cos 15^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ उत्तर

6. यदि $\cos 58^\circ = \frac{x}{y}$ है, तो $\sec 58^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\sec 58^\circ = \frac{1}{\cos 58^\circ} = \frac{y}{x}$ उत्तर

7. हल कीजिए—

$$\sin(180^\circ-\theta)\cdot\sin(90^\circ-\theta) - \cos(180^\circ-\theta)\cdot\cos(90^\circ+\theta)$$

हल— $\sin(180^\circ-\theta)\cdot\sin(90^\circ-\theta) - \cos(180^\circ-\theta)\cdot\cos(90^\circ+\theta)$

$= \sin\theta\cdot\cos\theta - (-\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)$

$= \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta$

$= 0$ उत्तर

8. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin 240^\circ$

हल— $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ)$

$= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

(ii) $\tan 330^\circ$

हल— $\tan 330^\circ = \tan(180^\circ + 150^\circ)$

$= \tan 150^\circ$

$= \tan(90^\circ + 60^\circ)$

$= -\cot 60^\circ$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(iii) $\text{cosec}(-150^\circ)$

हल— $\text{cosec}(-150^\circ) = -\text{cosec}150^\circ$

$= -\text{cosec}(90^\circ + 60^\circ)$

$= -\sec 60^\circ = -2$ उत्तर

(iv) sec 120°

हल— $\sec 120° = \sec(90°+30°)$

$= -\text{cosec } 30° = -2$ उत्तर

9. सिद्ध कीजिए— $\frac{\text{cosec } 53°}{\sec 37°} = 1$

हल— $\text{L.H.S.} = \frac{\text{cosec } 53°}{\sec 37°}$

$= \frac{\text{cosec }(90°-37°)}{\sec 37°}$

$= \frac{\sec 37°}{\sec 37°}$

$= 1 = \text{R.H.S.}$ इति सिद्धम्

10. सिद्ध कीजिए— $\frac{\sin 15° + \sin 75°}{\cos 15° + \cos 75°} = 1$

हल— $\text{L.H.S.} = \frac{\sin 15° + \sin 75°}{\cos 15° + \cos 75°}$

$= \frac{\sin(90°-75°) + \sin(90°-15°)}{\cos 15° + \cos 75°}$

$= \frac{\cos 75° + \cos 15°}{\cos 15° + \cos 75°}$

या $= \frac{(\cos 15° + \cos 75°)}{(\cos 15° + \cos 75°)}$

$= 1 = \text{R.H.S.}$ इति सिद्धम्

11. सिद्ध कीजिए— $\tan 240° + \sin 120° = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

हल— $\text{L.H.S.} = \tan 240° + \sin 120°$

$= \tan(180°+60°) + \sin(90°+30°)$

$= \tan 60° + \cos 30°$

$= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \text{R.H.S.}$ इति सिद्धम्

निम्नलिखित में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए—

12. (i) cot 315°

हल— $\cot 315° = \cot(180°+135°)$

$= \cot 135°$

$= \cot(90°+45°)$

$= -\tan 45° = -1$ उत्तर

(ii) tan 135°

हल— $\tan 135^\circ = \tan(90^\circ + 45^\circ)$

$= -\cot 45^\circ = -1$ उत्तर

13. (i) sin 225°

हल— $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ)$

$= -\sin 45^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ उत्तर

(ii) tan 240°

हल— $\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ)$

$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ उत्तर

14. (i) sin(–585°)

हल— $\sin(-585^\circ) = -\sin 585^\circ$

$= -\sin(180^\circ + 405^\circ)$

$= -(-\sin 405^\circ)$

$= \sin(180^\circ + 225^\circ)$

$= -\sin 225^\circ$

$= -\sin(180^\circ + 45^\circ)$

$= -(-\sin 45^\circ)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ उत्तर

(ii) cos(–390°)

हल— $\cos(-390^\circ) = \cos 390^\circ$

$= \cos(180^\circ + 210^\circ)$

$= -\cos 210^\circ$

$= -[\cos(180^\circ + 30^\circ)]$

$= -(-\cos 30^\circ)$

$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

15. (i) sin 120° sec 150°

हल— $\sin 120^\circ \sec 150^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ)\sec(90^\circ + 60^\circ)$

$= (\cos 30^\circ)(-\operatorname{cosec} 60^\circ)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= -1$ उत्तर

(ii) tan 210° tan(–30°)

हल— $\tan 210^\circ \tan(-30^\circ) = \tan(180^\circ + 30^\circ)(-\tan 30^\circ)$

$= -\tan 30^\circ \cdot \tan 30^\circ$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$ उत्तर

16. सिद्ध कीजिए—

$$\cos(180°+A) + \cos A - \sin(270°-A) + \sin(270°+A) = 0$$

हल— L.H.S. $= \cos(180°+A) + \cos A - \sin(270°-A) + \sin(270°+A)$

$= -\cos A + \cos A - \sin(180°+90°-A) + \sin(180°+90°+A)$

$= -\{-\sin(90°-A)\} + \{-\sin(90°+A)\}$

$= \sin(90°-A) - \sin(90°+A)$

$= \cos A - \cos A$

$= 0 =$ R.H.S. इति सिद्धम्

17. $\sin\theta + \cos(90°-\theta) + \sin(180°-\theta) - \sin(180°+\theta) = 4\sin\theta$

हल— L.H.S. $= \sin\theta + \cos(90°-\theta) + \sin(180°-\theta) - \sin(180°+\theta)$

$= \sin\theta + \sin\theta + \sin\theta - (-\sin\theta)$

$= 3\sin\theta + \sin\theta$

$= 4\sin\theta$

$=$ R.H.S. इति सिद्धम्

18. $\dfrac{\sin(180°-A)\cos(180°-A)}{-\tan A} = 1 - \sin^2 A$

हल— L.H.S. $= \dfrac{\sin(180°-A)\cos(180°-A)}{-\tan A}$

$= \dfrac{\sin A(-\cos A)}{\dfrac{-\sin A}{\cos A}}$

$= \dfrac{-\sin A\cos^2 A}{-\sin A} = \cos^2 A$

R.H.S. $= 1 - \sin^2 A$

$= \cos^2 A$ $[\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1]$

$\therefore$ L.H.S. $=$ R.H.S. इति सिद्धम्

19. $\dfrac{\tan 20°}{\cot 70°} + \dfrac{\cot 54°}{\tan 36°} = 2$

हल— L.H.S. $= \dfrac{\tan 20°}{\cot 70°} + \dfrac{\cot 54°}{\tan 36°}$

$= \dfrac{\tan(90°-70°)}{\cot 70°} + \dfrac{\cot(90°-36°)}{\tan 36°}$

$= \dfrac{\cot 70°}{\cot 70°} + \dfrac{\tan 36°}{\tan 36°}$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 = \text{R.H.S.}$$ इति सिद्धम्

20. $\dfrac{-\cot 30^\circ}{\tan 60^\circ} + \dfrac{2\sin 43^\circ}{\cos 47^\circ} = \sqrt{2}\sin 45^\circ$

हल—

$$\text{L.H.S.} = \frac{-\cot 30^\circ}{\tan 60^\circ} + \frac{2\sin 43^\circ}{\cos 47^\circ}$$

$$= \frac{-\cot(90^\circ - 60^\circ)}{\tan 60^\circ} + \frac{2\sin(90^\circ - 47^\circ)}{\cos 47^\circ}$$

$$= \frac{-\tan 60^\circ}{\tan 60^\circ} + \frac{2\cos 47^\circ}{\cos 47^\circ}$$

$$= -1 + 2 = 1$$

$$\text{R.H.S.} = \sqrt{2}\sin 45^\circ$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

21. $\dfrac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos\theta} - \dfrac{\cot\theta}{\tan(90^\circ+\theta)} - \dfrac{\sin(180^\circ+\theta)}{\sin\theta} = 3$

हल—

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos\theta} - \frac{\cot\theta}{\tan(90^\circ+\theta)} - \frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{\cot\theta}{(-\cot\theta)} - \frac{(-\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\cot\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$= 1 + 1 + = 3 = \text{R.H.S.}$$ इति सिद्धम्

22. $\tan(90^\circ+A) + \tan(90^\circ-A) = \tan(270^\circ+A) + \cot(180^\circ+A)$

हल—

$$\text{L.H.S.} = \tan(90^\circ+A) + \tan(90^\circ-A)$$

$$= -\cot A + \cot A = 0$$

$$\text{R.H.S.} = \tan(270^\circ+A) + \cot(180^\circ+A)$$

$$= \tan(180^\circ+90^\circ+A) + \cot A$$

$$= \tan\{180^\circ+(90^\circ+A)\} + \cot A$$

$$= \tan(90^\circ+A) + \cot A$$

$$= -\cot A + \cot A = 0$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

23. (i) $\tan(180^\circ+\theta) = \cot(90^\circ-\theta)$

हल—

$$\text{L.H.S.} = \tan(180^\circ+\theta)$$

$$= \tan\theta$$

$$\text{R.H.S.} = \cot(90^\circ-\theta) = \tan\theta$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

(ii) $\cos(90°-A) = \sin(180°-A)$

हल— L.H.S. $= \cos(90°-A) = \sin A$

R.H.S. $= \sin(180°-A) = \sin A$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्

24. $\tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{5\pi}{6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{5\pi}{6}$

या $= \tan\frac{5\times 180°}{6} + \cot\frac{5\times 180°}{6}$

$= \tan 150° + \cot 150°$

$= \tan(90°+60°) + \cot(90°+60°)$

$= -\cot 60° - \tan 60°$

$= \frac{-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{-1-3}{\sqrt{3}} = \frac{-4}{\sqrt{3}}$ उत्तर

25. $\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4}$

$= \sin\frac{7\times 180°}{4} - \cos\frac{7\times 180°}{4}$

$= \sin 315° - \cos 315°$

$= \sin(180°+135°) - \cos(180°+135°)$

$= -\sin 135° - (-\cos 135°)$

$= -\sin(90°+45°) + \cos(90°+45°)$

$= -\cos 45° + (-\sin 45°)$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

$= -\sqrt{2}$ उत्तर

26. सिद्ध कीजिए—

$$\cot(270°-\theta)\cdot(-\tan\theta) + \operatorname{cosec}(270°-\theta)\operatorname{cosec}(270°+\theta) = 1$$

हल— L.H.S. $\cot(270°-\theta)\cdot(-\tan\theta) + (\operatorname{cosec}(270°-\theta))\operatorname{cosec}(270°+\theta)$

$= \cot(180°+90°-\theta)(-\tan\theta) + \operatorname{cosec}(180°+90°-\theta)$
$\operatorname{cosec}(180°+90°+\theta)$

$= \cot\{180°+(90°-\theta)\}(-\tan\theta) + \operatorname{cosec}\{180°+(90°-\theta)\}$
$\operatorname{cosec}\{180°+(90°+\theta)\}$

$= \cot(90°-\theta)(-\tan\theta) + \{-\operatorname{cosec}(90°-\theta)\}\{-\operatorname{cosec}(90°+\theta)\}$

$= \tan\theta(-\tan\theta) + (-\sec\theta)(-\sec\theta)$

$= -\tan^2\theta + \sec^2\theta$

$= 1 \, [\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta]$

$=$ R.H.S. इति सिद्धम्

27. (i) यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}$ तो $\cos 2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \cos 60^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$

$\therefore \quad \cos 2\theta = \cos 2\times 60^\circ$

$= \cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ)$

$= -\sin 30^\circ = \frac{-1}{2}$ उत्तर

(ii) यदि $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ तो $(\sec 6\theta)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sec\theta = \sec 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$

$\therefore \quad (\sec 6\theta)^2 = (\sec 6\times 30^\circ)^2$

$= (\sec 180^\circ)^2$

$= (\sec(90^\circ + 90^\circ))^2$

$= (-\operatorname{cosec} 90^\circ)^2$

$= (-1)^2 = 1$ उत्तर

अभ्यास 6.5

1. सूर्य का उन्नयन कोण 60° होने पर एक मीनार की परछाई 10 मीटर नापी गई तब मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना सूर्य का उन्नयन कोण 60° होने पर मीनार PB की परछाई AB है।

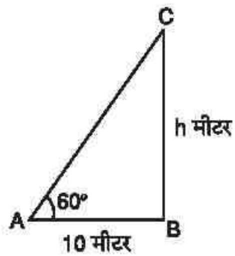
तब $\angle BAP = 60^\circ$

प्रश्नानुसार, मीनार की परछाई $AB = 10$ मीटर

माना मीनार की ऊँचाई h मीटर हैं।

$\therefore$ समकोण ΔABP में, $\tan 60^\circ = \frac{PB}{AB}$

$\sqrt{3} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10\sqrt{3}$

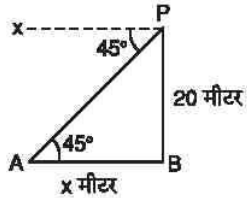


अत: मीनार की ऊँचाई $h = 10\sqrt{3}$ मीटर उत्तर

2. 20 मीटर ऊँचे एक पुल से किसी नाव का अवनमन कोण 45° हैं। पुल के आधार से नाव की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना पुल P तथा नाव A है। माना पुल P के नीचे एक बिन्दु B (आधार) हैं।

प्रश्नानुसार, पुल की ऊँचाई $PB = 20$ मीटर तथा P से नाव A का अवनमन कोण $= 45°$



$\therefore \quad \angle XPA = \angle BAP = 45°$

जहाँ PX क्षैतिज है।

माना पुल के आधार B से नाव की दूरी x मीटर है।

तब $AB = x$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔABP में, $\tan 45° = \dfrac{PB}{AB}$

$$1 = \frac{20}{x}$$

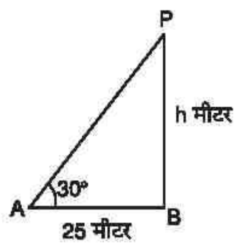
$$x = 20 \text{ मीटर}$$

अतः पुल के आधार से नाम की दूरी = 20 मीटर **उत्तर**

3. एक पेड़ के आधार से 25 मीटर दूर स्थित बिन्दु पर उसकी चोटी का उन्नयन कोण 30° बनता है तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना एक पेड़ BP है, जिसकी ऊँचाई h मीटर है।

तथा पेड़ के आधार B से 25 मीटर दूर स्थित बिन्दु A से पेड़ की चोटी का उन्नयन कोण $= 30°$



$\therefore \quad \angle BAP = 30°$

$\therefore$ समकोण ΔABP में,

$$\tan 30° = \frac{PB}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{25}$$

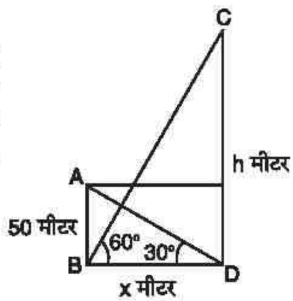
$$h = \frac{25}{\sqrt{3}} \text{ मीटर}$$

$\therefore$ वृक्ष की ऊँचाई $= \dfrac{25}{\sqrt{3}}$ मीटर **उत्तर**

4. एक खम्भे के आधार बिन्दु से मकान की चोटी का उन्नयन कोण 60° है और मकान के आधार से खम्भे की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। यदि खम्भा 50 मीटर लम्बा हो, तो मकान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना AB एक खम्भा हैं जिसकी ऊँचाई 50 मीटर है। खम्भे के आधार B से एक मकान CD की चोटी C का उन्नयन कोण 60° है जबकि मकान के आधार बिन्दु D से खम्भे की चोटी A का उन्नयन कोण 30° है। खम्भे के आधार B से मकान के आधार D की दूरी $BD = x$ है।

माना मकान की ऊँचाई $= h$ मीटर



$\therefore$ समकोण ΔABD में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{x}$$

$$x = 50\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

पुन: समकोण ΔBCD में, $\tan 60^\circ = \frac{CD}{BD}$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{h}{50\sqrt{3}}$$

या $$h = 50\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

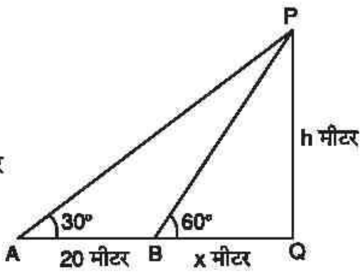
$$= 50 \times 3$$

$$h = 150 \text{ मीटर}$$

$\therefore$ मकान की ऊँचाई $= 150$ मीटर उत्तर

5. एक बिन्दु से एक पेड़ की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। पेड़ की ओर 20 मीटर चलने के बाद पेड़ की चोटी का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना बिन्दु A तथा बिन्दु B से पेड़ PQ की चोटी के उन्नयन कोण क्रमश: 30° तथा 60° है।



$\therefore$ $$\angle QAP = 30^\circ$$

तथा $$\angle QBP = 60^\circ$$

प्रश्नानुसार, $$AB = 20 \text{ मीटर}$$

माना पेड़ PQ की ऊँचाई $= h$ मीटर

तथा $$BQ = x \text{ मीटर}$$

$\therefore$ समकोण ΔBQP में, $\tan 60^\circ = \frac{PQ}{BQ}$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \text{ या } x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

पुन: समकोण ΔAQP में, $\tan 30^\circ = \frac{PQ}{AQ}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{AB + BQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20 + x}$$

या $$20 + x = \sqrt{3}h$$

x का मान रखने पर, $20 + \frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}h$

$$\frac{-h}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}h = 20$$

$$\frac{3h-h}{\sqrt{3}}=20$$

$$\frac{2h}{\sqrt{3}}=20$$

$$h=\frac{20\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

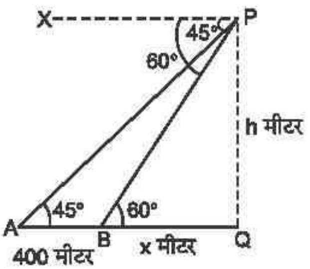
$\therefore$ पेड़ की ऊँचाई $h=10\sqrt{3}$ मीटर

या $=10\times 1.732$

$=17.32$ मीटर उत्तर

6. एक कृत्रिम उपग्रह दो मकानों के ऊपर उड़ रहा है। मकानों के बीच की क्षैतिज दूरी 400 मीटर है। यदि किसी समय उपग्रह से एक ही दिशा में दोनों मकानों के अवनमन कोण 45° तथा 60° हैं तो उपग्रह की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना एक दूसरे से 400 मीटर की दूरी पर A तथा B दो मकान हैं। दोनों मकान उपग्रह P के एक ही ओर स्थित हैं। यदि उपग्रह की क्षैतिज धरातल से लम्बवत् ऊँचाई $PQ=h$ मीटर



तथा उपग्रह से मकान A का अवनमन को $\angle XPA$ तथा B मकान का अवनमन कोण $\angle XPB$ क्रमशः 45° तथा 60° हों तब $\angle PAQ=45°$ तथा $\angle PBQ=60°$

माना दूरी $BQ=x$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔPAQ में,

$$\tan PAQ=\frac{PQ}{AQ}$$

$$\tan 45°=\frac{h}{AB+BQ}$$

$$1=\frac{h}{400+x}$$

$$400+x=h \qquad \ldots(1)$$

पुनः समकोण $\angle PQB$ में, $\tan 60°=\frac{PQ}{BQ}$

$$\sqrt{3}=\frac{h}{x}$$

$$x=\frac{h}{\sqrt{3}} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$h-\frac{h}{\sqrt{3}}=400+x-x$$

$$h\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=400$$

$$h\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)=400$$

$$h=\frac{400\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$h=\frac{400\times\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}\times\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{400\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(3-1)}$$

$$=\frac{400\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=200(3+\sqrt{3})$$

$$=200(3+1.732)$$

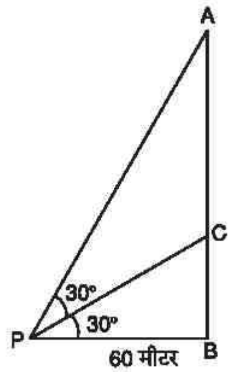
$$=600+346.4$$

$$=946.4$$

∴ उपग्रह की ऊँचाई $h = 946.4$ मीटर उत्तर

7. दो मंजिली एक मीनार भूमि पर स्थित है। मीनार के आधार से 60 मीटर क्षैतिज दूरी पर स्थित एक बिन्दु पर दोनों मंजिल 30° माप के समान कोण बनाती है। मीनार की ऊपरी मंजिल की माप ज्ञात कीजिए।

हल—माना दो मंजिली मीनार AB की मंजिल AC तथा CB है। माना मीनार के आधार B से 60 मीटर क्षैतिज दूरी पर स्थित बिन्दु P पर दोनों मंजिल 30° माप के समान कोण अन्तरित करती है।



∴ प्रश्नानुसार, $PB = 60$ मीटर

$$\angle BPC = 30^\circ$$

$$\angle CPA = 30^\circ$$

∴ समकोण ΔCBP में, $\tan 30^\circ = \frac{CB}{PB}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{CB}{PB} \text{ या } CB=\frac{PB}{\sqrt{3}}$$

पुनः समकोण ΔABP में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{PB}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{AC+CB}{PB}$$

या $$AC+CB = PB\sqrt{3}$$

$$AC = PB\times\sqrt{3} - CB$$

$$= PB\times\sqrt{3} - \frac{PB}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3PB-PB}{\sqrt{3}} = \frac{2PB}{\sqrt{3}} = \frac{2\times 60}{\sqrt{3}}$$

या $$= \frac{2\times 3\times 2\times 10}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$$

$\therefore$ मीनार की ऊपरी मंजिल की माप $AC = 40\sqrt{3}$ मीटर

$= 40\times 1732$

$= 6928$ मीटर **उत्तर**

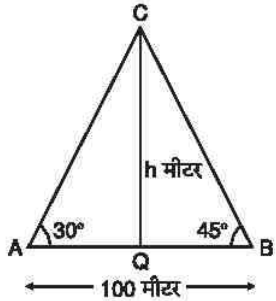
8. दो पत्थरों के बीच की दूरी 100 मीटर है। इन पत्थरों के मध्य एक ऊँचा वृक्ष है। चूँकि दोनों पत्थर समतल भूमि पर हैं अतः वृक्ष की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 45° बनते हैं। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

जहाँ A व B दो पत्थर तथा CQ वृक्ष की ऊँचाई है।

हल—दिया है— A तथा B दो पत्थरों के बीच की दूरी 100 मीटर है। इनके बीच एक ऊँचा वृक्ष है।

$\therefore$ प्रश्नानुसार, पत्थरों के बीच की दूरी $AB = 100$ मीटर, पत्थर A से वृक्ष की चोटी C का उन्नयन कोण $= 30^\circ$ तथा पत्थर B से वृक्ष की चोटी C का उन्नयन कोण $= 45^\circ$

$\therefore \angle QAC = 30^\circ$ तथा $\angle QBC = 45^\circ$



माना वृक्ष की ऊँचाई $CQ = h$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔBQC में, $\tan 45^\circ = \frac{CQ}{QB}$

$$1 = \frac{CQ}{QB} \Rightarrow h = QB$$

पुनः समकोण ΔAQC में, $\tan 30^\circ = \frac{CQ}{AQ}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{AB-QB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100-h}$$

$$h\sqrt{3} = 100-h$$

या $$h\sqrt{3}+h = 100 \Rightarrow h(\sqrt{3}+1) = 100$$

या $$h(\sqrt{3}+1) = 100$$

$$h = \frac{100}{(\sqrt{3}+1)}$$

या
$$h = \frac{100}{(\sqrt{3}+1)} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{100(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$= \frac{100(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$

$$= 50(\sqrt{3}-1)$$

$\therefore$ वृक्ष की ऊँचाई $h = 500(\sqrt{3}-1)$ मीटर

$$= 50(1.732-1)$$

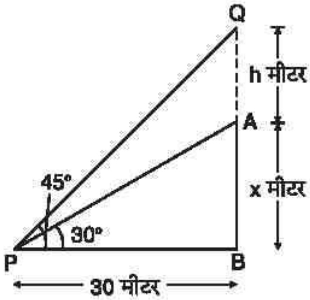
$$= 50 \times 0.732$$

$h = 36.60$ मीटर उत्तर

9. एक अपूर्ण मकान के आधार से 30 मीटर दूर स्थित किसी बिन्दु से मकान के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। ज्ञात कीजिए कि मकान को कितनी ऊँचाई तक और बनाया जाए कि उसी बिन्दु पर शिखर का उन्नयन कोण 45° हो जाए।

हल—माना कि भूमि के क्षैतिज समतल पर $AB = x$ मीटर ऊँचाई का एक मकान है जिसका आधार B है। B से 30 मीटर दूर किसी बिन्दु P से मकान के शिखर A का उन्नयन कोण 30° है।

$\therefore$ समकोण ΔABP में,



$$\tan APB = \frac{AB}{PB}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{30^\circ}$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{3}} \quad \text{या } x = \frac{30\sqrt{3}}{3}$$

$x = 10\sqrt{3}$ मीटर

माना मकान को h मीटर तक और ऊँचा बनाने पर मकान के शिखर Q का समतल के बिन्दु P पर उन्नयन को $\angle QPB = 45^\circ$ हो जाता है।

अतः समकोण ΔQPB में, $\tan 45^\circ = \frac{QB}{PB}$

$$1 = \frac{QA+AB}{30}$$

$$30 = x + h$$

$$h = 30 - x$$

x का मान रखने पर,

$$\begin{aligned} h &= 30 - 10\sqrt{3} \\ &= 30 - 10 \times 1.732 \\ &= 30 - 17.32 \\ &= 12.68 \end{aligned}$$

अतः मकान को 12.68 मीटर और ऊँचा बनाया जाए। उत्तर

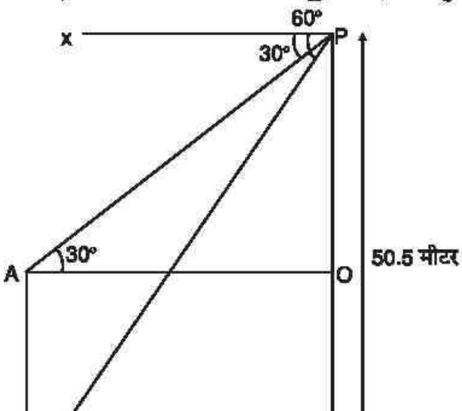
10. एक चिमनी तथा एक मीनार एक ही समतल पर खड़े हैं। मीनार की चोटी से चिमनी के शीर्ष एवं आधार से अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। यदि मीनार की ऊँचाई 50.5 मीटर है।

हल—माना मीनार PQ की चोटी P से चिमनी AB के शीर्ष A एवं आधार B से अवनमन कोण क्रमशः 30° तथा 60° हैं।

तब $\angle XPA = \angle OAP = 30°$

तथा $\angle XPB = \angle QBP = 60°$

PX क्षैतिज तथा O, A के ठीक सामने मीनार PQ पर एक बिन्दु है



प्रश्नानुसार, मीनार की ऊँचाई $PQ = 50.5$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔBQP में, $\tan 60° = \frac{PQ}{BQ}$

$$\sqrt{3} = \frac{PQ}{BQ}$$

या $$BQ = \frac{PQ}{\sqrt{3}} \quad \ldots(1)$$

पुनः समकोण ΔAOP में, $\tan 30° = \frac{PO}{AO} = \frac{PO}{BQ}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{PO}{BQ}$$

या $$BQ = PO \times \sqrt{3} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\frac{PQ}{\sqrt{3}} = PO \times \sqrt{3}$$

$$PO = \frac{PQ}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{PQ}{3}$$

या $PO = \frac{50.5}{3}$ मीटर $= 16.83$

अत: चिमनी की ऊँचाई $= AB = PQ - PO$

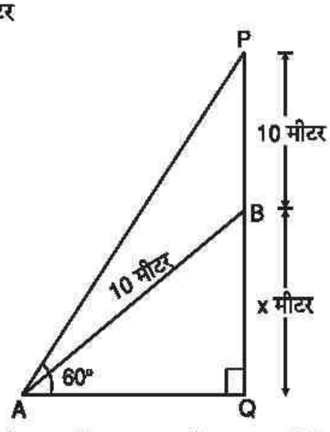
$$AB = 50.5 - 16.83$$

$AB = 33.66$ मीटर (लगभग) उत्तर

11. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी एक बिजली के खम्भे की चोटी से 10 मीटर नीचे तक पहुँचती है। यदि सीढ़ी के निचले सिरे पर खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण 60° हो, तो खम्भे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना सीढ़ी AB, बिजली के खम्भे PQ की चोटी P से 10 मीटर नीचे बिन्दु B तक पहुँचती है।

अत: $PB = 10$ मीटर



प्रश्नानुसार, सीढ़ी की लम्बाई $AB = 10$ मीटर तथा सीढ़ी के निचले सिरे A से खम्भे के शिखर P का उन्नयन कोण $= 60°$

$\therefore$ $$\angle QAP = 60°$$

माना $BQ = x$ मीटर

$\because$ ΔAQP के तीनों कोणों का योगफल $= 180°$

$\therefore$ $$60° + 90° + \angle APQ = 180°$$

$$150° + \angle APQ = 180°$$

$$\angle APQ = 180° - 150°$$

$$\angle APQ = 30^\circ$$

$\because \Delta APB$ में $\quad PB = AB$

$$\angle PAB = \angle APB \text{ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण]}$$

$$\angle PAB = \angle APQ = 30^\circ \quad [\because \angle APB = \angle APQ]$$

$$\angle QAB = \angle QAP - \angle PAB$$

$$= 60 - 30^\circ = 30^\circ$$

$\therefore$ समकोण ΔQAB में $\sin(\angle QAB) = \frac{BQ}{AB}$

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{1} = 5$$

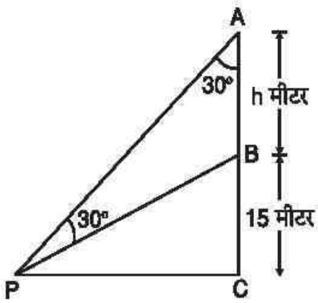
अत: खम्भे की ऊँचाई $= PQ = PB + BQ$

$$= (10 + x) \text{ मीटर}$$

$$= 10 + 5$$

$PQ = 15$ मीटर उत्तर

12. चित्र में AB किसी मीनार के ऊपर लगा झण्डे का डण्डा है तथा BC मीनार है जहाँ $BC = 15$ मीटर है। $\angle BAP$ तथा $\angle APB$ दोनों 30° है। डण्डे AB की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल—दिया है— मीनार $BC = 15$ मीटर

मीनार BC पर लगा डण्डा $= AB$

$$\angle BAP = \angle APB = 30^\circ$$

माना डण्डे AB की ऊँचाई $= h$ मीटर

अत: समकोण ΔACP में

$$\angle CPA + \angle PAC + \angle ACP = 180^\circ$$

$$\angle CPA + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle CPA = 180^\circ - (120^\circ)$$

$$\angle CPA = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \angle CPA = \angle CPB + \angle BPA$$

$$60^\circ = \angle CPB + 30^\circ$$

$$\angle CPB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

अत: समकोण ΔBCP में $\tan 30^\circ = \dfrac{BC}{PC}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{PC} \Rightarrow PC = 15\sqrt{3}$$

पुन: समकोण ΔACP में $\tan 60^\circ = \dfrac{AC}{PC}$

$$\sqrt{3} = \frac{AB+BC}{PC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h+15}{15\sqrt{3}}$$

$$h+15 = 15 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

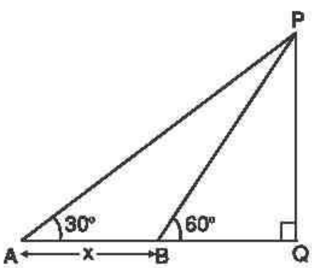
$$h+15 = 45$$

$$h = 45 - 15 = 30$$

अत: डण्डे की ऊँचाई = 30 मीटर उत्तर

13. किसी समय एक नाव से एक पेड़ के शिखर का उन्नयन कोण 30° देखा गया। नाव द्वारा पेड़ की ओर 6 मिनट चलने के बाद शिखर का उन्नयन कोण 60° हो गया। नाव को पेड़ तक पहुँचने में कितना समय और लगेगा?

हल—माना पेड PQ है जिसका शिखर P है। माना नाव की प्रथम स्थिति A से पेड़ के शिखर P का उन्नयन कोण 30° है।



$\therefore \quad \angle QAP = 30^\circ$

तथा माना 6 मिनट चलने के बाद नाव की द्वितीय स्थिति B से पेड़ के शिखर P का उन्नयन कोण 60° है।

$$\angle QBP = 60^\circ$$

हम चित्र से स्पष्ट देख सकते हैं कि ΔPAB का बहिष्कोण PBQ है जो दो अन्त: सम्मुख कोणों APB तथा BAP के योगफल के बराबर होगा।

अर्थात् $\quad \angle PBQ = \angle APB + \angle BAP$

या $\quad 60^\circ = \angle APB + 30^\circ$

$$\angle QPB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$\therefore \Delta PAB$ मे $\quad \angle BAP = \angle APB \quad [= 30^\circ]$

$PB = AB$ [बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ हैं]

माना $\quad PB = AB = x$

∴ समकोण ΔBQP में,

$$\cos 60^\circ = \frac{BQ}{PB}$$

या $$\frac{1}{2} = \frac{BQ}{x}$$

या $$BQ = \frac{x}{2}$$

अत: हम कह सकते है कि नाव को पेड़ तक पहुँचने में BQ अर्थात् $\frac{x}{2}$ दूरी और तय करनी होगी यदि $AB = x$ है।

∵ AB अर्थात् x दूरी चलने में नाव को लगा समय = 6 मिनट

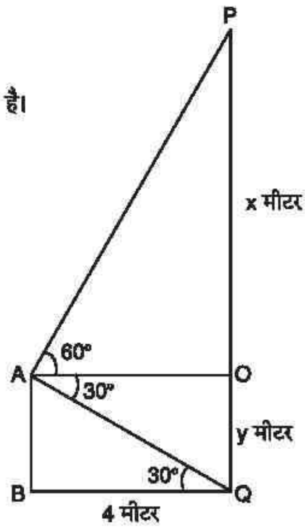
∴ BQ अर्थात् $\frac{x}{2}$ दूरी चलने में नाव को लगा समय $= \frac{6}{2}$ मिनट

= 3 मिनट

अत: नाव को पेड़ तक पहुँचने में 3 मिनट और लगेगें। **उत्तर**

14. एक मकान की खिड़की A से एक झण्डे के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा झण्डे के आधार का अवनमन कोण 30° है। यदि मकान से झण्डे के आधार की दूरी 4 मीटर है तो झण्डे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [प्रयोग करें $\sqrt{3} = 1.732$]

हल—माना मकान की खिड़की A से झण्डे PQ के शिखर P का उन्नयन कोण 60° तथा आधार Q का अवनमन कोण 30° है।



अत: $$\angle OAP = 60^\circ$$
$$\angle OAQ = \angle BQA = 30^\circ$$

जहाँ O, A के ठीक सामने झण्डे PQ पर एक बिन्दु है।

माना $PO = x$ मीटर

$QO = y$ मीटर

प्रश्नानुसार, मकान से झण्डे की क्षैतिज दूरी

$BQ = AO = 4$ मीटर

∴ समकोण ΔAPO में,

$$\tan 60^\circ = \frac{PO}{AO}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

पुन: समकोण ΔAOQ में, $\tan 30^\circ = \frac{QO}{AO}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{4}$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

अतः झण्डे की ऊँचाई $PQ = PO + OQ$

$$PQ = (x + y) \text{ मीटर}$$
$$= \left(4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \text{ मीटर}$$
$$= \left(\frac{12\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{3}\right) \text{ मीटर}$$
$$= \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \text{ मीटर}$$
$$= \frac{16 \times 1.732}{3} \text{ मीटर}$$
$$= \frac{27.712}{3} \text{ मीटर}$$
$$PQ = 9.237 \text{ मीटर}$$

उत्तर

विविध प्रश्नावली

1. $\frac{1}{2}\pi$ रेडियन को अंश में परिवर्तित करने पर क्या मान प्राप्त होगा?

हल— $\therefore$ π रेडियन $= 180^\circ$

$\because$ $\frac{1}{2}\pi$ रेडियन $= 180^\circ \times \frac{1}{2}$

$= 90^\circ$ उत्तर

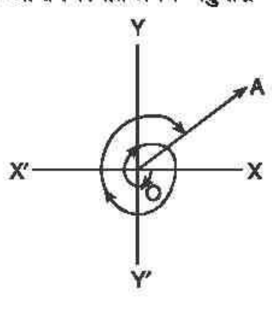
2. -700° का कोण बनाने वाली रेखा की स्थिति किस चतुर्थांश में है?

हल— $-700^\circ = -(1 \times 360^\circ) + (-340)$

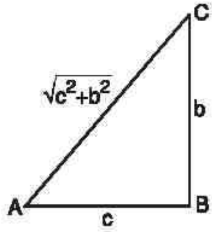
$= -(1 \times 360^\circ) - 340$

अतः परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से आरम्भ कर दक्षिणावर्त्त घूमकर एक पूरा चक्कर लगाकर फिर उसी दिशा में 340° घूमेगी।

इस प्रकार OA की अन्तिम स्थिति प्रथम चतुर्थांश में होगी।



3. यदि $\tan A = \frac{b}{c}$ है तो $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल— ∵ $$\tan A = \frac{b}{c} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

पाइथागोरस प्रमेय से— $$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= c^2 + b^2$$
$$AC = \sqrt{c^2 + b^2}$$
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\sqrt{c^2+b^2}}{c}$$
$$\sec A = \sqrt{\frac{c^2+b^2}{c}}$$ उत्तर

4. यदि $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, तो A का मान क्या होगा?

हल— ∵ $$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin A = \sin 60^\circ$$
$$A = 60^\circ$$ उत्तर

5. $\cos 300^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $$\cos 300^\circ = \cos(180^\circ + 120^\circ)$$
$$= -\cos 120^\circ$$
$$= -\cos(90^\circ + 30^\circ)$$
$$= -(-\sin 30^\circ)$$
$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$ उत्तर

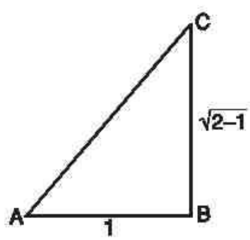
6. $\sin(180^\circ - A)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ उत्तर

7. $\cot A . \sin A . \sec A$ को सरल कीजिए।

हल— $$\cot A . \sin A . \sec A$$
$$= \frac{\cos A}{\sin A} . \sin A . \frac{1}{\cos A}$$
$$= 1$$ उत्तर

8. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ है तो सिद्ध कीजिए—
$$\sin A . \cos A = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



हल— ∵ $$\tan A = \sqrt{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

पाइथागोरस प्रमेय से, $$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= (1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2$$

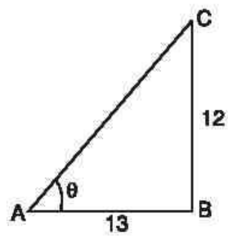
$$= 1+2+1-2\sqrt{2}$$
$$= 4-2\sqrt{2}$$
$$= 2(2-\sqrt{2})$$
$$AC^2 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$
$$\sin A.\cos A = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

∴ सिद्ध करना है—

$$\text{L.H.S.} = \sin A.\cos A$$
$$= \frac{BC}{AC} \times \frac{AB}{AC}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}} \times \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

9. यदि $\tan\theta = \frac{12}{13}$ तो $\frac{2\sin\theta.\cos\theta}{\cos^2-\sin^2\theta} = ?$



हल— ∵ $\tan\theta = \frac{12}{13} - \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

पाइथागोरस प्रमेय से, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= (13)^2 + (12)^2$$
$$= 169+144$$
$$AC^2 = 313 \Rightarrow AC = \sqrt{313}$$

∴ $\sin\theta = \frac{12}{\sqrt{313}}, \cos\theta = \frac{13}{\sqrt{313}}$

∴ $$\frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta} = \frac{2\times\frac{12}{\sqrt{313}}\times\frac{13}{\sqrt{313}}}{\left(\frac{13}{\sqrt{313}}\right)^2-\left(\frac{12}{\sqrt{313}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2\times12\times13}{313}}{\frac{169-144}{313}} = \frac{\frac{2\times12\times13}{313}}{\frac{25}{313}}$$

$$= \frac{312}{25}$$

उत्तर

10. $\tan\frac{7\pi}{4}+\cot\frac{7\pi}{4}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल— $\tan\frac{7\pi}{4}+\cot\frac{7\pi}{4}$

$$=\tan\frac{7\times180^\circ}{4}+\cot\frac{7\times180^\circ}{4}$$

$$=\tan 315^\circ+\cot 315^\circ$$

$$=\tan(180^\circ+135^\circ)+\cot(180^\circ+135^\circ)$$

$$=\tan 135^\circ+\cot 135^\circ$$

$$=\tan(90^\circ+45^\circ)+\cot(90^\circ+45^\circ)$$

$$=(-\cot 45^\circ)+(-\tan 45^\circ)$$

$$=-1-1$$

$$=-2$$

उत्तर

11. 6 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 15 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा कितने रेडियन का कोण बनेगा?

हल— अभीष्ट कोण = $\dfrac{\text{वृत्तीय पथ पर चली गई दूरी (चाप)}}{\text{वृत्तीय पथ की त्रिज्या}}$

$$=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

$$=2\frac{1}{2}\text{ रेडियन}$$

उत्तर

12. सिद्ध कीजिए— $\cot(270^\circ+A)=-\tan A$

हल— L.H.S. $=\cot(270^\circ+A)$

$$=\cot(180^\circ+90^\circ+A)$$

$$=\cot(90^\circ+A)$$

$$=-\tan = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

13. $\dfrac{\sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ}{\tan^2 60^\circ}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल— $\dfrac{\sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ}{\tan^2 60^\circ}$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{3}=\frac{2/2}{3}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

उत्तर

14. यदि $\tan A = 1$ तथा $\tan B = \sqrt{3}$ तो मान ज्ञात कीजिए—

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B$$

हल— $\tan A = 1$ तथा $\tan B = \sqrt{3}$

$\tan A = \tan 45°$ $\tan B = \tan 60°$

$A = 45°$ $B = 60°$

$\therefore$ $\cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \cos 45° \cos 60° - \sin 45° \sin 60°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$ उत्तर

15. यदि $\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$ तो $(\cos\theta + \sec\theta)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल— $\because$ $\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

या $\sec\theta - \cos\theta = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(\sec\theta - \cos\theta)^2 = (-\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

$$\sec^2\theta + \cos^2\theta - 2\sec\theta\cos\theta = 2 + 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}$$

या $\sec^2\theta + \cos^2\theta - 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

दोनों ओर 4 जोड़ने पर,

$$\sec^2\theta + \cos^2\theta - 2 + 4 = 5 - 2\sqrt{6} + 4$$

$$\sec^2\theta + \cos^2\theta + 2 = 9 - 2\sqrt{6}$$

या $\sec^2\theta + \cos^2\theta + 2 \times \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos\theta = 9 - 2\sqrt{6}$

या $\sec^2\theta + \cos^2\theta + 2\sec\theta\cos\theta = 9 - 2\sqrt{6}$

या $(\sec\theta + \cos\theta)^2 = (9 - 2\sqrt{6})$ उत्तर

16. सिद्ध कीजिए—

$$\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60° = 1$$

हल— $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60° = 1$

$$\text{L.H.S.} = \sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos 60°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

$$= 1 = \text{R.H.S.}$$ इति सिद्धम्

17. $2\sin\theta+\cos(90^\circ+\theta)+\sin(180^\circ+\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

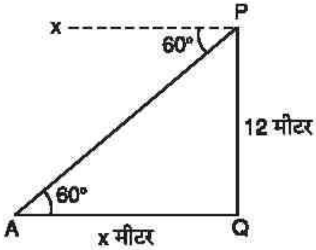
हल— $2\sin\theta+\cos(90^\circ+\theta)+\sin(180^\circ+\theta)$

$$= 2\sin\theta+(-\sin\theta)+(-\sin\theta)$$
$$= 2\sin\theta-\sin\theta-\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta-2\sin\theta$$
$$= 0$$

उत्तर

18. यदि 12 मीटर ऊँचे पुल से एक नाव का अवनमन कोण 60° बन रहा हो, तो नाव पुल के आधार से कितनी दूरी पर स्थित है?

हल—माना बिन्दु P पर पुल, जिसकी समतल (Q) से ऊँचाई 12 मीटर है तथा बिन्दु A पर नाव है तथा $AQ = x$ मीटर



अतः प्रश्नानुसार, पुल की ऊँचाई = 12 मीटर

तथा P से A का अवनमन कोण = 60°

अतः समकोण ΔAQP में,

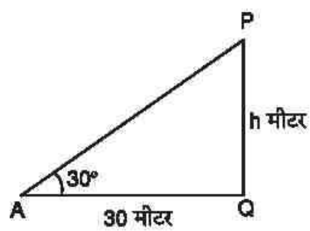
$$\tan 60^\circ = \frac{PQ}{AQ}$$
$$\sqrt{3} = \frac{12}{x}$$
$$x = \frac{12}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

अतः नाव की पुल के आधार से $x = 4\sqrt{3}$ दूरी मीटर

उत्तर

19. उस खम्भे की ऊँचाई ज्ञात करो, जिसके आधार से 30 मीटर की दूरी से देखने पर उसकी चोटी का उन्नयन कोण 30° बनता है।

हल—माना खम्भा PQ है जिसके आधार Q से 30 मीटर की दूरी पर बिन्दु A से खम्भे की चोटी P का उन्नयन कोण 30° है।



माना $PQ = h$ मीटर

प्रश्नानुसार, $AQ = 30$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔAQP में,

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{AQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}}, \Rightarrow \frac{30\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3}$$

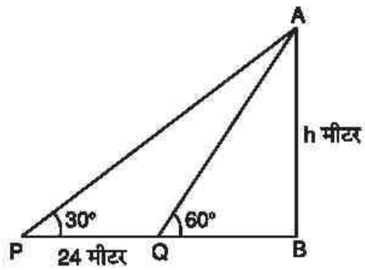
$$h = 10\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

या $$h = 10\times 1.732$$

$$h = 17.32 \text{ मीटर}$$ उत्तर

20. किसी स्थान से एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 24 मीटर चलने पर शिखर का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल—माना मीनार AB है। बिन्दु P से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° तथा मीनार की ओर 24 मीटर चलने पर बिन्दु Q पर उन्नयन कोण 60° हो जाता है।



माना $AB = h$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔQBA में, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{QB}$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{QB}$$

$$QB = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad \ldots(1)$$

पुनः समकोण ΔPBA में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{PB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{PQ+QB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{24+\frac{h}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\frac{24\sqrt{3}+h}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h\sqrt{3}}{24\sqrt{3}+h}$$

$$24\sqrt{3}+h = 3h$$

$$3h - h = 24\sqrt{3}$$

$$2h = 24\times\sqrt{3}$$

$$h = 12\sqrt{3}$$

$$h = 12\times 1.732$$

$$h = 20.78 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $h = 20.78$ मीटर उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 114 देखिए।

इकाई-3 ज्यामिति (Geometry)

7

त्रिभुजों में असमिका सम्बन्ध
(Inequal Relations in Triangles)

अभ्यास 7.1

1. त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर न हो, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण कैसा होगा?

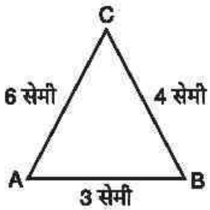
हल—बड़ा **उत्तर**

2. एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज में बाकी दोनों कोण कितने-कितने अंश के होगें?

हल—चूँकि त्रिभुज समकोण समद्विबाहु है, अतः दोनों कोण $45°–45°$ के होंगे। **उत्तर**

3. ΔABC में $AB = 3$ सेमी, $BC = 4$ सेमी, तथा $AC = 6$ सेमी है। त्रिभुज के सबसे बड़े तथा सबसे छोटे कोणों के नाम बताइए।

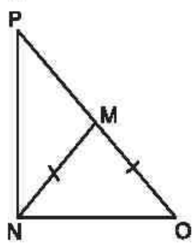
हल—दिया है— $AB = 3$ सेमी, $BC = 4$ सेमी तथा $AC = 6$ सेमी



$\therefore$ त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा के सामने का कोण सबसे बड़ा अर्थात $\angle B$ तथा सबसे छोटी भुजा के सामने का कोण सबसे छोटा अर्थात $\angle C$ अतः $\angle B$ सबसे बड़ा कोण तथा $\angle C$ सबसे छोटा कोण **उत्तर**

4. नीचे दिए गए चित्र में भुजा MN = भुजा MO। तब सिद्ध कीजिए—

$$OP > NP$$



हल—दिया है— ΔPNO में PO पर कोई बिन्दु M है।

तथा $MN = MO$

सिद्ध करना है— $OP > NP$

उपपत्ति— ΔPNO में $MN = MO$

$\angle MNO = \angle MON$

[Δ की समान भुजाओं के सामने के कोण]

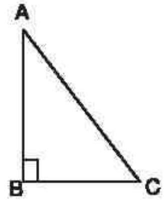
किन्तु $\angle PNO > \angle MNO$

$\therefore$ $\angle PNO > \angle MON$ $(\because \angle MON = \angle MON)$

या $\angle PNO > \angle PON$

$OP > NP$ इति सिद्धम्

5. ΔABC में B एक समकोण है अर्थात् $\angle B = 90°$ तब सिद्ध कीजिए—



$$AB < AC$$

हल—दिया है— $\angle B = 90°$

सिद्ध करना है— $AB < AC$

उपपत्ति— ΔABC में $\angle ABC = 90°$

ΔABC में, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [तीनों कोणों का योग = 180°]

$$\angle A + 90° + \angle C = 180°$$

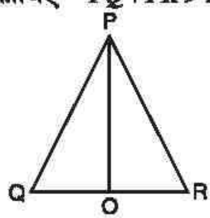
$$\angle A + \angle C = 180° - 90°$$

$$\angle A + \angle C = 90°$$

या $\angle C < \angle B$ या $\angle B > \angle C$

$\therefore$ $AB < AC$ [Δ में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी] इति सिद्धम्

6. ΔPQR में सिद्ध कीजिए— $PQ + PR > 2PO$ (जहाँ PO = माध्यिका)



हल—दिया है— ΔPQR तथा PO माध्यिका

सिद्ध करना है— $PQ + PR > 2PO$

उपपत्ति— $\because$ $\angle POQ, \Delta POR$ का बहिष्कोण है।

$$\angle POQ > \angle PRO$$

$$PQ > PO \quad \ldots(1)$$

इसी प्रकार $\angle POR, \Delta POQ$ का बहिष्कोण है।

$$\angle POR > \angle PQO$$

$$PR > PO \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

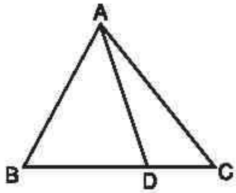
$$PQ + PR > PO + PO$$

$$PQ + PR > 2PO$$

इति सिद्धम्

7. ΔABC में भुजा BC पर कोई बिन्दु D है। सिद्ध कीजिए कि—

$$AB + BC + CA > 2AD$$



हल—दिया है— ΔABC में BC पर D बिन्दु है।

सिद्ध करना है— $AB+BC+CA>2AD$

उपपत्ति— $\because$ Δ की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

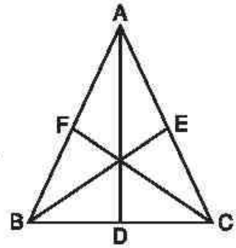
$\therefore$ ΔABD में $AB+BD>AD$ ...(1)

तथा ΔACD में $DC+AC>AD$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से $AB+BD+DC+AC>2AD$

$$AB+BC+AC>2AD$$ इति सिद्धम्

8. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का परिमाप तीनों माध्यिकाओं के योगफल से अधिक होता है।



हल—दिया है—ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF हैं।

सिद्ध करना है— Δ का परिमाप > माध्यिकाओं का योग

अर्थात $AB+BC+AC>AD+BE+CF$

उपपत्ति— किसी Δ में दो भुजाओं का योग माध्यिका के दूने से अधिक होता है।

ΔABC में स्पष्ट है कि

$AB+CA>2AD$ ...(1)

$BC+AB>2BE$ ...(2)

$CA+BC>2CF$ ...(3)

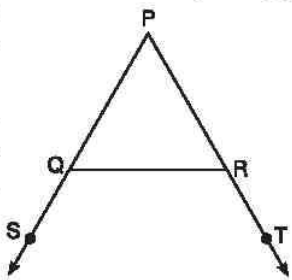
समीकरण (1), (2) तथा (3) को जोड़ने पर

$$2(AB+BC+CA)>2(AD+BE+CF)$$

$$AB+BC+CA>AD+BE+CF$$

अर्थात् Δ का परिमाप > माध्यिकाओं का योग इति सिद्धम्

9. चित्र में भुजाओं PQ और PR को बढ़ाया गया है और $\angle SQR<\angle TRQ$ तब सिद्ध कीजिए कि $PR>PQ$



हल—दिया है— ΔPQR में भुजाओं PQ और PR को आगे बढ़ाया गया हैं। बढ़ी हुई PQ पर बिन्दु S और बढ़ी हुई PR पर बिन्दु T लिया गया हैं। इस प्रकार बने बहिष्कोण में

$$\angle SQR<\angle TRQ$$

सिद्ध करना है— $PR>PQ$

उपपत्ति— $\because \angle SQR, \Delta PQR$ का बहिष्कोण है।

$\therefore \quad \angle SQR = \angle PRQ + \angle P$

तथा $\because$ $\angle TRQ$ भी ΔPQR का बहिष्कोण है।

$\therefore \quad \angle TRQ = \angle PQR + \angle P$

$\because \quad \angle SQR < \angle TRQ$

$\therefore \quad \angle PRQ + \angle P < \angle PQR + \angle P$

$\angle PRQ < \angle PQR$

अब ΔPQR में,

$\because \quad \angle PRQ < \angle PQR$

$\therefore \quad \angle PQR > \angle PRQ$

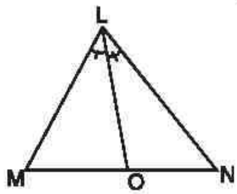
तब बड़े कोण $\angle PQR$ के सामने की भुजा $PR >$ छोटे कोण $\angle PRQ$ की सामने की भुजा PQ

अत: $\quad PR > PQ$ इति सिद्धम्

10. चित्र में ΔLMN में $\angle L$ का समद्विभाजक LO है, जहाँ बिन्दु O भुजा MN पर स्थित है। तब सिद्ध कीजिए—

$LM > MO$

तथा $\quad LN > NO$



हल—**दिया है**— ΔLMN में $\angle L$ का समद्विभाजक $\angle O$, MN से बिन्दु O में मिलता है।

सिद्ध करना है— $LM > MO$

तथा $\quad LN > NO$

उपपत्ति— $\because LO, \angle L$ का समद्विभाजक है

$\therefore \quad \angle MLO = \angle NLO$

$\because \quad \angle LOM, \Delta LON$ का बहिष्कोण है।

$\therefore \quad \angle LOM = \angle NLO + \angle LNO$

$\angle LOM > \angle NLO$

$\angle LOM > \angle MLO \quad (\because \angle MLO = \angle NLO)$

ΔMLO में $\quad \angle LOM > \angle MLO$

$LM > MO$

इसी प्रकार, $\angle LON, \Delta LMO$ का बहिष्कोण है।

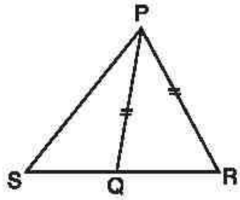
$\therefore \quad \angle LON = \angle LMO + \angle MLO$

$= \angle LMO + \angle NLO \quad (\because \angle MLO = \angle NLO)$

$\therefore \quad \angle LON > \angle NLO$

अत: $\quad LN > NO$ इति सिद्धम्

11. चित्र में ΔPSR की भुजा SR पर Q एक ऐसा बिन्दु है कि $PQ = PR$ तो सिद्ध कीजिए कि $PS > PQ$



हल—दिया है— ΔPSR में भुजा SR पर एक बिन्दु Q इस प्रकार है $PQ = PR$

सिद्ध करना है— $PS > PQ$

उपपत्ति— ΔPQR में $PQ = PR$

$\therefore$ $\angle PQR = \angle PRQ$ ...(1)

$\because$ $\angle PQR, \Delta PQS$ का बहिष्कोण है।

$\angle PQR = \angle PSQ + \angle SPQ$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$\angle PRQ = \angle PSQ + \angle SPQ$

$\therefore$ $\angle PRQ > \angle PSQ$

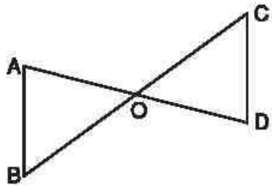
$\therefore$ $\angle PRS > \angle PSR$ ($\because \angle PRQ \cong \angle PRS$ तथा $\angle PSQ \cong \angle PSR$)

$\therefore$ $\angle PRS$ की सम्मुख भुजा > $\angle PSR$ की सम्मुख भुजा

$\therefore$ $PS > PR$

अतः $PS > PQ$ [$\because PQ = PR$] इति सिद्धम्

12. चित्र में $\angle A > \angle B$ तथा $\angle D > \angle C$ तब सिद्ध कीजिए कि—BC < AD



हल—दिया है— $\angle A > \angle B$ तथा $\angle D > \angle C$

सिद्ध करना है— $BC > AD$

उपपत्ति— ΔBOA में, $\angle A > \angle B$

$\therefore$ $BO > AO$ ...(1)

इसी प्रकार ΔODC में, $\angle D > \angle C$

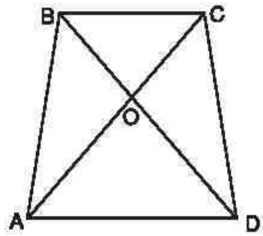
$OC > OD$ ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$BO + OC > AO + OD$

$BC > AD$ इति सिद्धम्

13. चित्र में चतुभुर्ज $ABCD$ के विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। तब सिद्ध कीजिए—



(i) $AB + BC + CD + DA > AC + BD$

(ii) $AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$

हल—दिया है—$ABCD$ एक चतुर्भुज है। जिसके विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है— (i) $AB+BC+CD+DA > AC+BD$

(ii) $AB+BC+CD+DA < 2(AC+BD)$

उपपत्ति— (i) ΔACD में,

$CD+DA > AC$ ...(1)

ΔABC में, $AB+BC > AC$ ...(2)

ΔBCD में, $BC+CD > BD$ ...(3)

ΔABD में, $AB+DA > BD$ ...(4)

समीकरण (1), (2), (3) को (4) जोड़ने पर,

$2(AB+BC+CD+DA) > 2(AC+BD)$

या $AB+BC+CD+DA > AC+BD$ इति सिद्धम्

(ii) ΔACD **में** $AO+OD > DA$

या $DA < AO+OD$ ... (1)

ΔDOC में $DO+OC > CD$

या $CD < DO+OC$ ...(2)

ΔBOC मे $BO+OC > BC$

या $BC > BO+OC$ ...(3)

ΔAOB में $AO+OB > AB$

या $AB < AO+OB$ ...(4)

समीकरण (1), (2), (3) को (4) जोड़ने पर

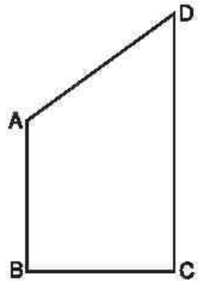
$AB+BC+CD+DA < AO+OD+OD+C+BO+OC+AO+OB$

$AB+BC+CD+DA < 2(AO+OC)+2(BO+OD)$

$AB+BC+CD+DA < 2[AC+BD]$ इति सिद्धम्

14. चित्र में चतुर्भुज $ABCD$ की AB तथा CD क्रमशः सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी भुजाएँ हैं। सिद्ध कीजिए—

$$\angle A > \angle C \text{ तथा } \angle B > \angle D$$



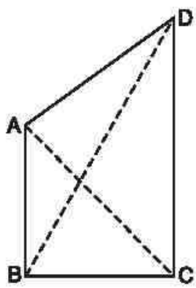
हल—दिया है— $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसमें AB सबसे छोटी तथा CD सबसे बड़ी भुजा है।

सिद्ध करना है— $\angle A > \angle C$ तथा $\angle B > \angle D$

रचना— रेखाखण्ड AC तथा BD खींचा ।

उपपत्ति— $\because$ AB सबसे छोटी भुजा है।

$\therefore$ $$BC > AB$$



तथा ΔABC में

BC का सम्मुख कोण $\angle BAC <$ AB का सम्मुख कोण $\angle ACB$

$\therefore$ $$\angle BAC > \angle ACB \quad ...(1)$$

पुनः $\because$ CD सबसे बड़ी भुजा है।

$\therefore$ $$CD < AD$$

$\therefore$ $$\angle DAC > \angle DCA \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$\therefore$ $$\angle BAC + \angle DAC > \angle ACB + \angle DCA$$

$$\angle BAD > \angle BCD$$

या $$\angle A > \angle C \quad ...(a)$$

$\because$ AB सबसे छोटी भुजा है।

तब ΔABD में $AD > AB$

$\therefore$ $\angle ABD > \angle ADB$ ...(3)

इसी प्रकार CD सबसे बड़ी भुजा है।

तब ΔBCD में $CD > BC$

$\therefore$ $\angle CBD > \angle BDC$ ...(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$\therefore$ $\angle ABD + \angle CBD > \angle ADB + \angle BDC$

$\therefore$ $\angle ABC > \angle ADC$

$\angle B > \angle D$ ...(b)

अत: समीकरण (a) व (b) में

$\angle A > \angle C$

$\angle B > \angle D$ इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 124 देखिए।

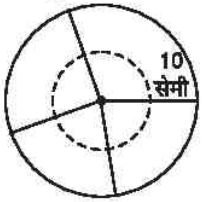
8

बिन्दुपथ और संगामी प्रमेय
(Locus and Concurrency Theorem)

अभ्यास 8.1

1. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की त्रिज्याओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ क्या होगा?

हल—10 सेमी त्रिज्याओं के मध्य बिन्दुओं का समूह भी अर्द्ध त्रिज्या का वृत्त बनाएगा। इसी प्रकार मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ 5 सेमी त्रिज्या का संकेन्द्र वृत्त होगा।



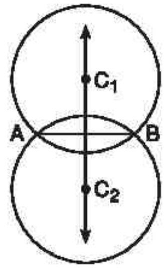
2. कोल्हू में चलने वाले बैल के पैर का बिन्दुपथ क्या होगा?

हल—कोल्हू में चलने वाले बैल के पैर का बिन्दुपथ एक वृत्त होगा जिसका केन्द्र धुरी है और त्रिज्या, धुरी से बैल की दूरी के बराबर है।

3. एक चक्र का व्यास 27 सेमी है, तो इसके केन्द्र का बिन्दुपथ बताइए।

हल—27 सेमी व्यास के चक्र के केन्द्र का बिन्दुपथ 13.5 सेमी त्रिज्या का वृत्त होगा।

4. उन वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो दो दिए हुए स्थिर बिन्दुओं से होकर जाते हैं।



हल—A तथा B दो बिन्दु दिए हैं। इन दोनों बिन्दुओं से जाने वाले सभी वृत्तों की एक जीवा AB होगी।

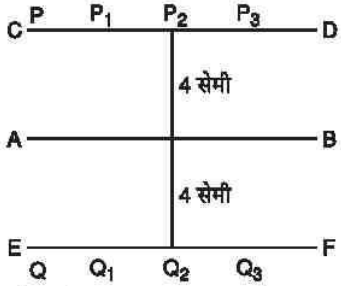
∵ वृत्त की जीवा का लम्बार्द्धक सदैव एक वृत के केन्द्र से जाता है।

∴ सभी वृत्तों के केन्द्र जीवा AB के लम्बार्द्धक पर स्थित होगें।

अत: दो दिए हएु बिन्दुओं A तथा B से जाने वाले सभी वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ जीवा AB का लम्बार्द्धक होगा।

5. किसी दी हुई रेखा AB से 4 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

हल—ऐसे बिन्दु जो कि रेखा AB से 4 सेमी दूरी पर स्थित हैं, दी हुई रेखा के दोनों और हो सकते हैं। अत: कुछ बिन्दुओं को पैमाने की सहायता से रेखा के AB दोनों ओर अंकित करते हैं। इस प्रकार P, P_1, P_2...... तथा Q, Q_1, Q_2...... बिन्दु P, P_1...... प्राप्त होते हैं। बिन्दु से एक ऐसी रेखा CD परिभाषित होती है, जो AB से सदैव समान दूरी पर है अर्थात् रेखा CD,



रेखा AB के समान्तर हैं। इसी प्रकार Q, Q_1...... से एक अन्य रेखा EF रेखा AB के समान्तर है अत: किसी दी हुई रेखा से 4 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वे दो समान्तर रेखाऐ हैं जो दी हुई रेखा के दोनों और 4 सेमी पर स्थित हैं।

6. बिन्दुपथ की परिभाषा उदाहरण सहित दीजिए।

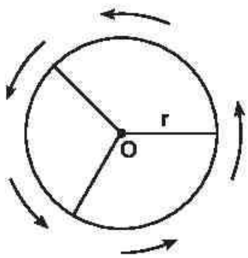
हल—उन सभी बिन्दुओं से बना पथ बिन्दुपथ कहलाता है, जो किसी दिए गए प्रतिबन्ध के अनुसार गति करते हैं।

अत: बिन्दुपथ की स्थिति को दर्शाने के लिए निम्न कथन का होना अनिवार्य हैं—

(i) बिन्दुपथ पर स्थित प्रत्येक बिन्दु दिए गए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता हैं।

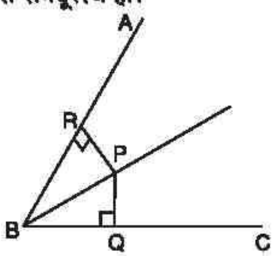
(ii) दिए गए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करने वाला प्रत्येक बिन्दु बिन्दुपथ पर स्थित होता है।

उदाहरण—चलता हुआ बिजली का पंखा—हम देखते हैं कि पंखे का केन्द्र एक बिन्दु पर स्थित घूमता रहता है जबकि उसके ब्लेड केन्द्र के चारों ओर घूमते हैं। अत: ब्लेड जिन-जिन बिन्दुओं से होकर गुजरते हैं, वे सभी बिन्दु मिलकर एक वृत्त का निर्माण करते हैं।



इस प्रकार निर्मित वृत्त का केन्द्र O (पंखे का केन्द्र) तथा त्रिज्या ब्लेड की लम्बाई है। इस गति का यह प्रतिबन्ध है कि पंखे का केन्द्र सदैव एक बिन्दु तथा ब्लेड उस बिन्दु से निश्चित दूरी पर रहते है, जो कि एक वृत्त की परिभाषा को दर्शाता है, जिसको इसका बिन्दुपथ कहते हैं।

7. दिए हुए $\angle ABC$ के उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो $\angle ABC$ के अर्न्तगत हो AB तथा BC रेखाओं से समदूरस्थ हो।



हल—दिया है—कोई बिन्दु $P, \angle ABC$ के अर्न्तगत ऐसा है कि

$$PQ \perp BC$$

तथा $PR \perp AB$

तथा $PQ = RQ$

ज्ञात करना है—बिन्दु A का बिन्दुपथ

रचना— BP रेखाखण्ड खींचा।

उपपत्ति— ΔBPQ तथा ΔBPR में

$$\angle PQB = \angle PRB$$

$$PQ = RQ \quad \text{(दिया है)}$$

$$BP = BP \quad \text{(उभयनिष्ठ)}$$

$\therefore$ $\Delta BPQ \cong \Delta BPR$

ΔBPQ तथा ΔBPR के संगत भाग बराबर होगें।

$$\angle QBP = \angle RBP$$

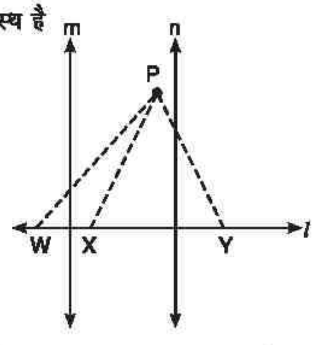
$\therefore$ $BP, \angle ABC$ का समद्विभाजक है।

अतः बिन्दु P का बिन्दुपथ, $\angle ABC$ का समद्विभाजक है। उत्तर

8. उस बिन्दु का बिन्दुपथ क्या होगा, जो तीन सरेख बिन्दुओं W, X तथा Y से समान दूरी पर हो।

हल—माना l एक ऋजु रेखा है, और उस पर W, X व Y तीन भिन्न बिन्दु हैं। हमें तीनों बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात करना है।

माना कोई बिन्दु P, बिन्दुओं W, X व Y से समदूरस्थ है



$\because$ P, बिन्दुओं W तथा X से समदूरस्थ है

$\therefore$ P, WX के लम्ब समद्विभाजक m पर होगा।

$\therefore$ $m \perp l$

$\because$ P, बिन्दुओं X तथा Y से समदूरस्थ है

$\therefore$ P, XY के लम्ब समद्विभाजक n पर होगा।

$\therefore$ $n \perp l$

अतः $m \perp l$ तथा $n \perp l$

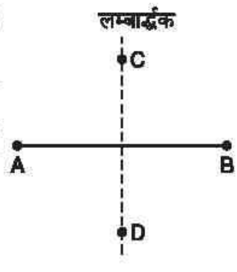
$\therefore$ $m \| n$

रेखाओं m तथा n का कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नही है। अतः ऐसा कोई बिन्दु नहीं है जो बिन्दुओं W, X तथा Y से समदूरस्थ हो। उत्तर

9. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जोकि रेखाखण्ड AB के अन्त्य बिन्दुओं से समदूरस्थ हो तथा उसके मध्य बिन्दु से 5 सेमी की दूरी पर हो।

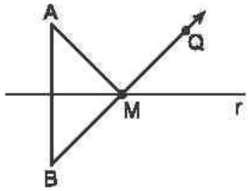
हल— $\because$ रेखा AB के अन्त्य बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दु AB के लम्बार्द्धक पर स्थित होते हैं।

परन्तु ऐसे बिन्दु जो AB के मध्य बिन्दु से 5 सेमी दूर होने चाहिए, तब ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ AB के लम्बार्द्धक पर स्थित केवल दो बिन्दुओं का समूह है, जिनकी रेखा AB से दूरी 5 सेमी है।



10. r, रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक है तथा बिन्दु Q रेखा r के उस ओर है जिस ओर बिन्दु A है। रेखाखण्ड BQ, रेखा r को बिन्दु M पर काटता है। तब सिद्ध कीजिए—

$$AN + MQ = BQ$$



हल—दिया है— AB रेखाखण्ड जिसका लम्ब समद्विभाजक रेखा r है। Q,r के उस ओर स्थित है, जिधर A है। रेखाखण्ड BQ, रेखा r को बिन्दु M पर काटता है।

सिद्ध करना है— $AM + MQ = BQ$

उपपत्ति— $\because$ BQ रेखा r को M पर काटता है।

बिन्दु M लम्ब समद्विभाजक r पर है।

$\therefore$ बिन्दु M, बिन्दुओं A तथा B से समदूरस्थ है।

$\therefore$ $$AM = BM \quad \ldots(1)$$

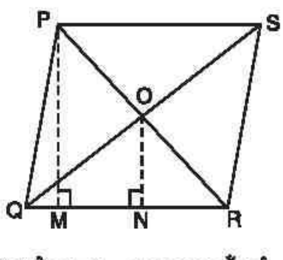
$\because$ BMQ एक सीधी ऋजु रेखा है।

$\therefore$ $$BM + MQ = BQ$$

समीकरण (1) से $AM + MQ = BQ$ **इति सिद्धम्**

11. एक निश्चित आधार तथा क्षेत्रफल का समानतर चतुर्भुज $PQRS$ है। चतुर्भुज के विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

हल—माना समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ के विकर्ण PR तथा QS परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं। बिन्दुओं P तथा O से आधार QR पर क्रमशः लम्ब PM तथा ON डाले।



समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

$$= QR \times PM$$

तथा ΔOQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} QR \times ON$$

परन्तु ΔOQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \times$ समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}QR \times ON = \frac{1}{4}QR \times PM$$

$$PM = \frac{1}{2}ON$$

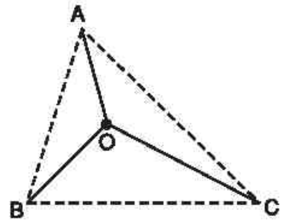
आधार QR से विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु O की ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times$ समान्तरण चतुर्भुज की ऊँचाई

उपरोक्त सम्बन्ध आधर BC पर बने समान क्षेत्रफल के अन्य समान्तर चतुर्भुजों के लिए भी स्थापित किया जा सकता है।

अत: विकर्णों प्रतिच्छेद-बिन्दु आधार के समान्तर एक रेखा पर स्थित होगें। जिनकी आधार से दूरी समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई की आधी है। यही रेखा अभीष्ट बिन्दुपथ है।

12. उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो तीन असरेख बिन्दुओं से समान दूरी पर हों।

हल—माना तीन बिन्दु A, B व C ऐसे हैं जो सरल रेखा में नहीं हैं। पुन: माना एक ऐसा बिन्दु O है जो बिन्दुओं A, B तथा C से समान दूरी पर हैं।



यदि बिन्दु O बिन्दुओं A, B तथा C से समान दूरी पर है तो यह AB, BC तथा CA के लम्ब समद्विभाजक पर होगा।

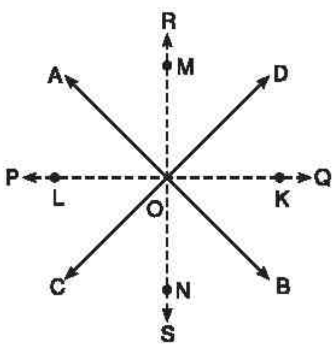
माना बिन्दु O, AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजक पर है तब ये समद्विभाजक O पर प्रतिच्छेद करेंगे अर्थात् O, AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजकों का उभयनिष्ठ बिन्दु हैं। $\because O$, बिन्दुओं C तथा A से भी समदूरस्थ हैं। अत: O, CA के लम्ब समद्विभाजक पर भी होगा।

यह तभी सम्भव है जब तीनों समद्विभाजकों का एक सार्वनिष्ठ बिन्दु O हो और ऐसा बिन्दु बिन्दुओं A, B व C के एक सेट के लिए अद्वितीय होगा। अत: O गतिहीन होगा। इसका न कोई पथ होगा और न O की अन्य स्थितियाँ होंगी तथा तीन असरेख बिन्दुओं A, B व C से समदूरस्थ बिन्दुओं का समुच्चय एकल समुच्चय होगा।

इसका कोई बिन्दुपथ नही होगा।

अभ्यास 8.2

1. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि दो प्रतिच्छेदी रेखाओं AB तथा CD से समदूरस्थ हो तथा उनके प्रतिच्छेद बिन्दु O से 5 सेमी की दूरी पर हो।



हल—माना एक ही तल पर स्थित दो प्रतिच्छेदी रेखाओं AB तथा CD का प्रतिच्छेद बिन्दु O है।

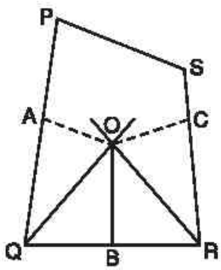
इन रेखाओं के बीच बने कोणों की अर्द्धक रेखाएँ PQ तथा RS हैं जिन पर स्थित सभी बिन्दु दी हुई

रेखाओं से समान दूरी पर होगें। परन्तु इनमें से वे बिन्दु जो प्रतिच्छेद बिन्दु से 5 सेमी दूरी पर हों, केवल K, L, M तथा N चार बिन्दु हैं।

अतः अभीष्ट बिन्दु पथ रेखा युग्म PQ व RS पर बिन्दु $K, L M$ व N हैं जबकि

$$OK = OL = OM = ON = 5 \text{ सेमी}$$

2. समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ के $\angle R$ तथा $\angle Q$ के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए O, PQ तथा SR से समदूरस्थ हैं।



हल—दिया है— $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज जिसमें $\angle R$ तथा $\angle Q$ के समद्विभाजक क्रमशः QO तथा RO हैं जो बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है— O सम्मुख भुजाओं PQ तथा SR से समदूरस्थ हैं।

रचना— O से PQ, QR तथा SR पर क्रमशः OA, OB तथा OC लम्ब खींचे।

उपपत्ति— ΔAQO तथा ΔBQO में,

$\because$ $QO, \angle Q$ का समद्विभाजक है।

$\therefore$ $\angle OQA = \angle OQB$

$\angle OAQ = \angle OBQ$, OA तथा OB बिन्दु O से क्रमशः PQ तथा QR पर लम्ब है

$OQ = OQ$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta ARO \cong \Delta BQO$

$OA = OB$ ...(1)

ΔBRO तथा ΔROC में

$\angle OBR = \angle OCR$ $[OB \perp QR, OC \perp SR]$

$\angle ORB = \angle OCR$ [OR, LR का समद्विभाजक है]

$OR = OR$

$\Delta BRO \cong \Delta ROC$

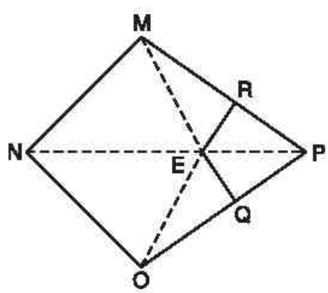
$OB = OC$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$OA = OB = OC$$

अतः बिन्दु O से भुजाएँ PQ, QR तथा SR समान दूरी पर हैं अथवा बिन्दु O, PQ तथा SR से समदूरस्थ हैं।

3. चतुर्भुज $MNOP$ में $MN = NO$, RE तथा QE क्रमशः MP तथा OP के लम्ब समद्विभाजक हैं, जो बिन्दु E पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए $NE, \angle MNO$ का समद्विभाजक है।



हल—दिया है—चतुर्भुज $MNOP$ में $MN = NO$, RE तथा QE क्रमशः MP तथा OP के लम्ब समद्विभाजक है जो परस्पर E पर काटते हैं।

सिद्ध करना है— $NE, \angle MNO$ का समद्विभाजक है।

रचना— ME, EP तथा EO खींची।

उपपत्ति—E, MP के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

$\therefore \qquad EM = EP \qquad ...(1)$

E, OP के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

$EP = EO \qquad ...(2)$

समीकरण (1) तथा (2) से $EM = EO \qquad ...(3)$

ΔMNE तथा ΔONE में

$MN = NO$ (दिया है)

$NE = NE$ (उभयनिष्ठ)

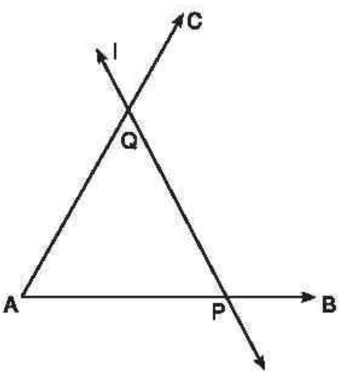
$EM = EO$ (अभी सिद्ध किया है)

$\Delta MNE \cong \angle ONE$ (सर्वांगसमता S.S.S)

$\therefore \qquad \angle MNO = \angle ONE$

$\therefore NE. \angle MNO$ का समद्विभाजक हैं। इति सिद्धम्

4. एक कोण $\angle BAC$ दिया है और रेखा l भुजाओं AB तथा AC को क्रमशः P तथा Q बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है PQ पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जो AB तथा AC से समदूरस्थ हो।



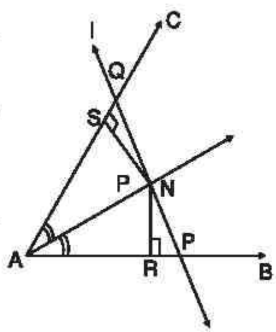
हल—दिया है— $\angle BAC$ की भुजाओं AB तथा AC को एक रेखा l क्रमशः P तथा Q पर काटती हैं।

ज्ञात करना है— रेखा PQ पर एक बिन्दु N जो AB तथा AC से समान दूरी पर हो।

रचना— (1) $\angle BAC$ का समद्विभाजक खींचा जो PQ को N पर काटा N अभीष्ट बिन्दु है।

(2) N से AB पर NR तथा AC पर NS लम्ब खींचा

उपपत्ति—अब परीक्षण करना है कि $NR = NS$ अथवा नहीं?



अतः ΔARN तथा ΔASN में

$\angle RAN = \angle SAN$ [$\because AN. \angle A$ का समद्विभाजक हैं।]

$\angle NRA = \angle NSA$ [$\because NR \perp AP$ तथा $NS \perp AC$]

$AN = AN$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta ARN \cong \Delta ASN$

$\therefore$ $NR = NS$

$\therefore N$, बिन्दु R तथा S से समदूरस्थ है।

$\therefore N$, रेखा AB तथा AC से समदूरस्थ हैं।

$\because N$ का AB तथा AC से समदूरस्थ होना परीक्षण के आधार पर प्रमाणित पाया गया। अत: यह सदैव सत्य होगा। ऐसा बिन्दु सदैव प्राप्त किया जा सकता हैं।

अभ्यास 8.3

1. त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का संगामी बिन्दु क्या होता है?

हल—त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का संगामी बिन्दु लम्ब केन्द्र होता है।

2. त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं तब यह बिन्दु उन माध्यिकाओं को किस अनुपात में बाँटता है?

हल— 2:1

3. किसी त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिन्दु कौन-सा होगा?

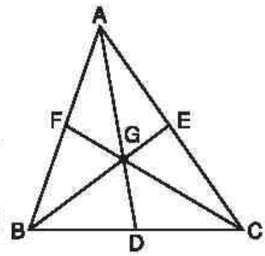
हल—त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिन्दु परिकेन्द्र होगा।

4. ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF बिन्दु G से होकर जाती है। तब निम्न प्रश्नों के उत्तर दिजिए।

(i) यदि $FG = 2$ तो GC क्या होगा?

(ii) यदि $AD = 9.5$ तो $GD = ?$

(iii) $BG = 4$ तो $BE = ?$



हल—त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं और उनका प्रतिच्छेद बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2:1 में विभक्त करता है।

ΔABC में AD, BE तथा CF माध्यिकाएँ परस्पर G पर काटती हैं।

$AG = \frac{2}{3} AD$ तथा $GD = \frac{1}{3} AD$

$BG = \frac{2}{3} BE$ तथा $GE = \frac{1}{3} BE$

$CG = \frac{2}{3} CF$ तथा $GF = \frac{2}{3} CF$

(i) $CG:GF \Rightarrow GC:FG = 2:1 \Rightarrow \frac{GC}{FG} = \frac{2}{1}$

$$GC = \frac{2 \times FG}{1}$$

या $GC = \frac{2 \times 2}{1} \Rightarrow GC = 4$ उत्तर

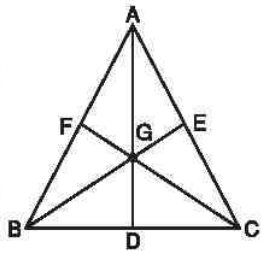
(ii) $\because GD = \frac{1}{3} AD \Rightarrow GD = \frac{1}{3} \times 9.5 \Rightarrow GD = 3.5$ उत्तर

(iii) $\because BG = \frac{2}{3} BE$ या $4 = \frac{2}{3} BE$

$$BE = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$BE = 6$$ उत्तर

5. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक-दूसरे के बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए त्रिभुज समबाहु होगा।



हल—दिया है— ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF हैं। जो कि इस प्रकार हैं कि $AD = BE = CF$ तथा एक दूसरे को बिन्दु G पर काटती हैं।

सिद्ध करना है— ΔABC एक समबाहु Δ है।

उपपत्ति— $\because \Delta$ की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं तथा उनका प्रतिच्छेद बिन्दु प्रत्येक माध्यिका को 2:1 में विभक्त करता है।

$\therefore \Delta ABC$ में माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF एक दूसरे को बिन्दु G पर काटती है।

$\therefore$ $AG = \frac{2}{3} AD$ या $AD = \frac{3}{2} AG$

$BG = \frac{2}{3} BE$ या $BE = \frac{3}{2} BG$

तथा $CG = \frac{2}{3} CF$ या $CF = \frac{3}{2} CG$

$\because$ $BE = CF$ (दिया है)

$\therefore$ $\frac{3}{2} BG = \frac{3}{2} CG$

या $BG = CG$

ΔBGD तथा ΔCGD में

$\because$ $BG = CG$ (सिद्ध किया है)

$\therefore$ $\angle GBD = \angle GCD$ ($\therefore \Delta GBC$ समद्विबाहु Δ है)

या $\angle EBC = \angle FCB$

अब ΔBCE तथा ΔBCF में

$\angle EBC = \angle FCB$ (अभी सिद्ध किया है)

$BF = CA$ (दिया है)

तथा $BC = BC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore$ $\Delta BCE \cong \Delta BCF$ (S.A.S सर्वांगसमता)

∵ सर्वांगसम त्रिभुजों BCE तथा BCF के संगत भाग बराबर होंगे।

∴ $\angle FBC = \angle ECB$ या $\angle ABC = \angle ACB$

इसी प्रकार ΔABE तथा ΔADB में सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\angle BAC = \angle ABC$$

∴ ΔABC में

$$\angle ABC = \angle BAC = \angle ACB$$

∵ Δ के तीनों कोणों का योग $= 180^\circ$

या $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$

या $\angle ABC + \angle ABC + \angle ABC = 180^\circ$

$$3\angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle ABC = \frac{180^\circ}{3}$$

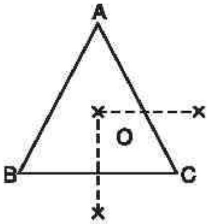
$$\angle ABC = 60^\circ$$

∴ प्रत्येक कोण $= 60^\circ$

∴ ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। इति सिद्धम्

6. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ हो।

हल—माना ΔABC है जिसके तीन शीर्ष A, B व C हैं।



∵ शीर्षों B तथा C से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ BC का लम्बार्द्धक होता है।

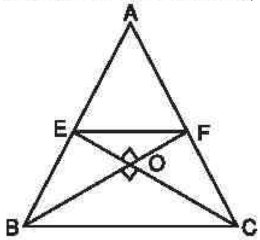
इसी प्रकार शीर्षों C तथा A से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ CA का लम्बार्द्धक होगा।

∵ लम्बार्द्धकों के प्रतिच्छेद बिन्दु दोनों लम्बार्द्धक में उभयनिष्ठ होगें।

तब तीनों शीर्षों A, B व C से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ BC व AC के लम्बार्द्धकों के प्रतिच्छेद बिन्दु होंगे। ऐसा एक ही बिन्दु होगा जिसे Δ का परिकेन्द्र कहते हैं।

7. एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ BF तथा CE एक दूसरे को समकोण पर काटती हैं, तब सिद्ध कीजिए कि—

$$AC^2 + AB^2 = 5BC^2$$



हल—**दिया है**— एक ΔABC में दो माध्यिकाएँ BE तथा CF एक दूसरे को समकोण पर काटती हैं।

सिद्ध करना है— $AC^2 + AB^2 = 5BC^2$

रचना— EF को मिलाया।

उपपत्ति—समकोण ΔOBC में

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 \quad ...(1)$$

समकोण ΔOEF में $EF^2 = OE^2 + OF^2$

समीकरण (1) व (2) से

$$EF^2 + BC^2 = OE^2 + OF^2 + OB^2 + OC^2$$

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + BC^2 = (OE^2 + OB^2) + (OF^2 + OC^2)$$

$$\frac{BC^2}{4}+\frac{BC^2}{1}=BF^2+CF^2$$

$$\frac{BC^2+4BC^2}{4}=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

$$\frac{5BC^2}{4}=\frac{AB^2}{4}+\frac{AC^2}{4}$$

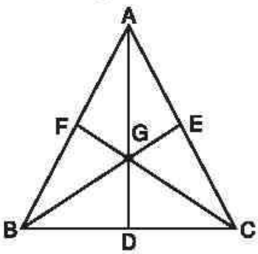
$$5BC^2=AB^2+AC^2$$

या $AC^2+AB^2=5BC^2$ इति सिद्धम्

8. किसी ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF हैं, जो बिन्दु G पर परस्पर मिलती हैं, तब सिद्ध कीजिए—

$$2(AD+BE+CF)>\frac{3}{2}(AB+BC+CA)$$

हल—हम जानते हैं कि Δ की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से सदैव बड़ा होता है।



ΔBCG में $GB+GC>BC$

या $\left(\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}CF\right)>BC$

$$\frac{2}{3}(BE+CF)>BC$$

$$BE+CF>\frac{3}{2}BC \quad ...(1)$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$AD+CF>\frac{3}{2}CA \quad ...(2)$$

तथा $AD+BE>\frac{3}{2}AB \quad ...(3)$

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$$BE+CF+AD+CF+AD+BE>\frac{3}{2}BC+\frac{3}{2}CA+\frac{3}{2}A$$

$$2(AD+BER+CF)>\frac{3}{2}(AB+BC+CA)$$ इति सिद्धम्

9. ΔPQR का लम्ब केन्द्र O है, तो दर्शाइए कि ΔOQR का लम्ब केन्द्र P है।

हल—**दिया है**—ΔPQR के शीर्षों P,Q तथा R से सम्मुख भुजाओं QR, PR तथा PQ पर खीचें गए शीर्ष लम्ब क्रमश: PA, QB तथा RC हैं जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु (लम्ब केन्द्र) O है।

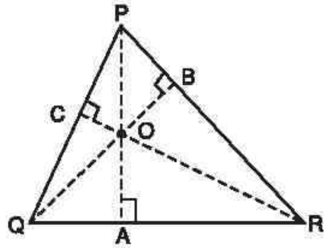
सिद्ध करना है— ΔOQR का लम्ब केन्द्र P है।

उपपत्ति— $\because PA$, बिन्दु P से QR पर शीर्ष लम्ब है।

$\therefore \quad PA\perp QR \quad ...(1)$

$\because QB$, बिन्दु Q से PR पर शीर्ष लम्ब है।

$\therefore \quad QB\perp PR \quad ...(2)$



$\because RC$, बिन्दु R से PQ पर शीर्ष लम्ब हैं।

$RC \perp PQ$ ...(3)

$\because$ $QB \perp PR$ (समी० (2) से)

$\therefore$ $PR \perp QB$

अतः $PR \perp QO$ ...(4)

इसी प्रकार $RC \perp PQ$ [समी० (3) से]

$\therefore$ $PQ \perp RC$

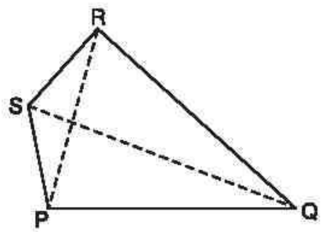
या $RP \perp RO$ ...(5)

$\therefore RO, QO$ तथा $QR, \Delta OQR$ की भुजाएँ है तथा QO पर लम्ब RB तथा RO पर लम्ब OC परस्पर बिन्दु P पर काटते हैं और QR पर O से डाला गया लम्ब OA भी बिन्दु P से जाता है।

$\therefore$ $P, \Delta OQR$ का लम्ब केन्द्र है। इति सिद्धम्

10. चित्र में $PQRS$ एक चतुर्भुज है, PQ तथा RS क्रमशः इसकी सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी भुजाएँ हैं तब सिद्ध कीजिए—

$$\angle SRQ > \angle SPQ \text{ तथा } \angle PSR > \angle PQR$$



हल—दिया है— $PQRS$ एक चतुर्भुज जिसकी सबसे बड़ी भुजा PQ तथा सबसे छोटी भुजा RS है।

सिद्ध करना है— $\angle SRQ > \angle SPQ$

तथा $\angle PSR > \angle PQR$

रचना— PR तथा SQ को मिलाया।

उपपत्ति— ΔPQR में

भुजा $PQ > QR$

$\therefore$ $\angle PRQ > \angle QPR$ ...(1)

इसी प्रकार ΔPRS में

$$PS > RS$$

$$\angle SRP > \angle SPR \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$(\angle PRQ + \angle SRP) > (\angle QPR + \angle SPR)$$

$$\angle SRQ > \angle SPQ \quad ...(a)$$

अब ΔPQS लेने पर $PQ > PS$

$$\therefore \quad \angle PSQ > \angle PQS \quad ...(3)$$

इसी प्रकार ΔSQR में $RQ > RS$

$$\angle QSR > \angle RQS \quad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$(\angle PSQ + \angle QSR) > (\angle PQS + \angle RQS)$$

$$\angle PSR > \angle PQR \quad ...(b)$$

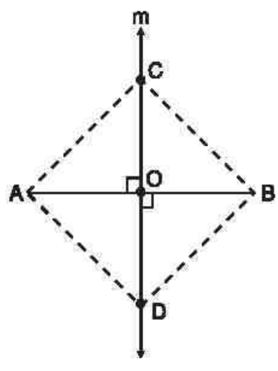
अतः समीकरण (a) व (b)

$\angle SRQ > \angle SPQ$ तथा $\angle PSR > \angle PQR$ इति सिद्धम्

विविध प्रश्नावली

1. कोई रेखा *m* रेखाखण्ड *AB* का समद्विभाजक है। यदि *C* व *D* रेखा *m* पर स्थित दो बिन्दु हैं, तो सिद्ध कीजिए—

$$\angle CAD = \angle CBD$$



हल—दिया है—रेखा m, रेखाखण्ड AB का समद्विभाजक, जिसपर C व D बिन्दु स्थित है।

सिद्ध करना है— $\angle CAD = \angle CBD$

रचना— C व D को बिन्दु A व B से मिलाया

उपपत्ति— $\because$ रेखा m, AB का समद्विभाजक है

अतः $AO = BO \quad ...(1)$

ΔCOA व ΔCOB में $AO = BO$ [समी० (1) से]

$\angle COA = \angle COB$ [= 90°]

$CO = CO$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \Delta COA \cong \Delta COB$ अतः $\angle CAO = \angle CBO$ ...(2)

पुनः ΔAOD व ΔBOD में $AO = BO$ [समी० (1) से]

$\angle AOD = \angle BOD$ [= 90°]

$DO = DO$ [उभयनिष्ठ]

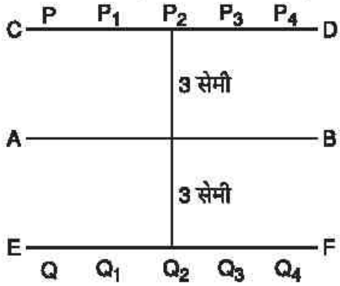
$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOD$ अतः $\angle DAO = \angle DBO$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) को जोड़ने पर $\angle CAO + \angle DAO = \angle CBO + \angle DBO$

$\therefore$ $\angle CAD = \angle CBD$ इति सिद्धम्

2. किसी दी हुई रेखा *AB* से 3 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

हल—ऐसे बिन्दु जो रेखा *AB* से 3 सेमी दूरी पर स्थित हैं, दी हुई रेखा के दोनों ओर हो सकते हैं। अतः कुछ बिन्दुओं को पैमाने की सहायता से रेखा के दोनों ओर अंकित करते हैं।



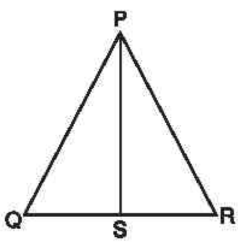
इस प्रकार $P, P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ तथा $Q, Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots$ बिन्दु प्राप्त होते हैं। बिन्दु $P, P_1, P_2 \ldots\ldots$ से एक रेखा *CD* परिभाषित होती है, जो *AB* से सदैव समान दूरी पर है अर्थात् $CD \| AB$ इसी प्रकार $Q, Q_1, Q_2 \ldots$ से एक अन्य रेखा *EF*, जोकि $AB \| EF$ अतः किसी दी गई रेखा से 3 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ वे दो समान्तर रेखाएँ हैं जो दी हुई रेखा के दोनों ओर 3 सेमी पर स्थित हैं।

3. आकृति में ΔPQR है, जिसमें $PQ = PR$ तथा शीर्ष *P* से भुजा *QR* पर डाला गया लम्ब *PS* है। सिद्ध कीजिए *S* भुजा *QR* का मध्य बिन्दु है।

हल—**दिया है**— ΔPQR में $PQ = PR$

तथा शीर्ष *P* से भुजा *QR* पर डाला गया लम्ब *PS* है।

सिद्ध करना है— *S* भुजा *QR* का मध्य बिन्दु है।



उपपत्ति— ΔPQS तथा ΔPRS में,

$$PQ = PR \text{ (दिया है)}$$

$$\angle PSQ = \angle PSR \ (= 90^\circ)$$

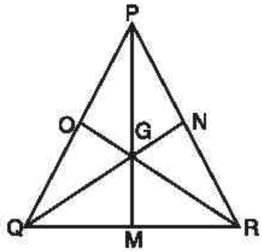
$$PS = PS \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$\therefore$ $\Delta PQS \cong \Delta PRS$

अतः $QS = QR$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि *S* भुजा *QR* का मध्य बिन्दु है। इति सिद्धम्

4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योगफल उसके तीनों शीर्षलम्बों के योगफल से अधिक होता है।



हल—**दिया है**— ΔPQR में

$$PM \perp QP, RO \perp PQ, ON \perp PR$$

सिद्ध करना है—

$$PQ + QR + RP > PM + QN + RO$$

उपपत्ति—हम जानते हैं कि त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।

$\therefore$ ΔPQM में $PQ > PM$ ...(1) [PQ = कर्ण]

इसी प्रकार ΔQNR में $QR > QN$ ...(2) [QR = कर्ण]

तथा ΔPOR में $PR > RO$ ...(3) [PR = कर्ण]

समीकरण (1), (2) को (2) जोड़ने पर

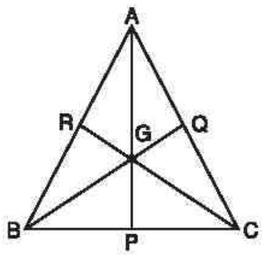
$$PQ+QR+RP > PM+QN+RO$$

अतः Δ की तीनों भुजाओं का योगफल उसके शीर्ष लम्बों के योगफल से अधिक होता है।

5. ΔABC की माध्यिकाएँ AP, BQ और CR परस्पर बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि— $BQ+CR > \frac{3}{2}BC$

हल—हम जानते हैं कि Δ की किन्ही दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

$\therefore$ ΔBGC में,



$$BG+GC > BC \quad ...(1)$$

परन्तु $BG:GQ = 2:1$

$\therefore$ $BG = \frac{2}{3}BQ$ ...(2)

इसी प्रकार $GC = \frac{2}{3}CR$ ...(3)

समीकरण (1),(2) व (3) से

$$\frac{2}{3}BQ + \frac{2}{3}CR > BC$$

या $\frac{2}{3}(BQ+CR) > BC$

या $BQ = CR > \frac{3}{2}BC$ **इति सिद्धम्**

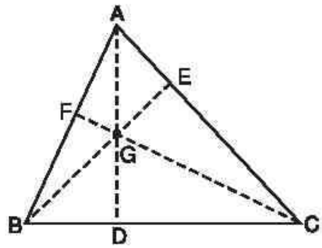
6. यदि $G, \Delta ABC$ का लम्ब केन्द्र हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A, \Delta GBC$ का लम्ब केन्द्र है।

हल—**दिया है**— ΔABC के शीर्षों A, B व C से भुजाओं BC, CA व CF पर डाले गए शीर्ष लम्ब क्रमशः AD, BE व CF हैं जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु G (लम्बकेन्द्र) है।

सिद्ध करना है— ΔGBC का लम्बकेन्द्र बिन्दु A है।

उपपत्ति— $\because$ AD, बिन्दु A से BC पर शीर्षलम्ब A है।

$\therefore$ $AD \perp BC$ ...(1)



$\because$ *BE*, बिन्दु *B* से *CA* पर शीर्षलम्ब है।

$\therefore$ $BE \perp CA$ ...(2)

$\because$ *CF* बिन्दु *C* से *AB* पर शीर्षलम्ब है।

$\therefore$ $CF \perp AB$ ...(3)

$\because$ $BE \perp CA$ [समी॰ (2) से]

$\therefore$ $CA \perp BE$

अतः $CA \perp BG$ ...(4)

इसी प्रकार $CF \perp AB$ [समी॰ (3) से]

$\therefore$ $AB \perp CF$

$AB \perp CG$ ...(5)

$\therefore$ CG, BG और $BC, \Delta GBC$ की भुजाएँ हैं और *BG* पर लम्ब *CE* तथा *CG* पर लम्ब *BF* परस्पर *A* पर काटते हैं।

$\therefore$ *BC* पर *G* से डाला गया लम्ब *GD* भी बिन्दु *A* से होकर जाता है।

$\therefore$ $A, \Delta GBC$ का लम्ब केन्द्र है। **इति सिद्धम्**

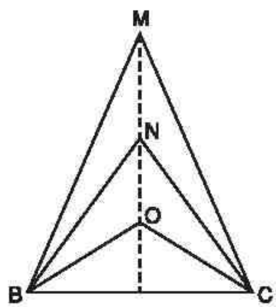
7. $\Delta MBC, \Delta NBC$ और ΔOBC एक ही आधार *BC* पर तीन समद्विबाहु त्रिभुज हैं। सिद्ध कीजिए कि *M*, *N* और *O* सरेख हैं।

हल—दिया है—तीन समद्विबाहु त्रिभुज $\Delta MBC, \Delta NBC$ तथा ΔOBC जिनके शीर्ष क्रमशः *M*, *N* तथा *O* है एवं आधार है।

सिद्ध करना है—बिन्दु *M*, *N*, *O* संरेख हैं।

उपपत्ति— $\because$ ΔMBC एक समद्विबाहु है।

$\therefore$ $MB = MC$



स्पष्ट है कि बिन्दु M, BC के लम्ब समद्विभाजक पर होगा।

इसी प्रकार समद्विबाहु ΔNBC में,

$$NB = NC$$

बिन्दु N भी BC के लम्ब समद्विभाजक पर होगा।

तथा समद्विबाहु प्रकार ΔOBC में,

$$OB = OC$$

$\therefore$ बिन्दु O भी BC के लम्ब समद्विभाजक पर होगा।

$\because$ तीनों बिन्दु M, N व O भुजा BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं। अत: M, N व O संरेख होंगे।

इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 138 व 139 देखिए।

9

समान्तर चतुर्भुज
(Parallelogram)

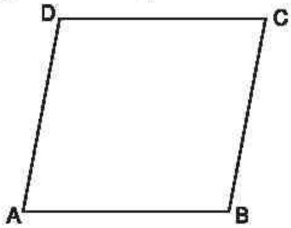
अभ्यास 9.1

1. जब किसी चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो, तब वह कौन-सा चतुर्भुज होगा?

हल—समलम्ब चतुर्भुज।

2. किसी चतुर्भुज में संलग्न (क्रमागत) भुजाओं के कितने युग्म होते हैं?

हल—चतुर्भुज में संलग्न भुजाओं के चार युग्म होते हैं।

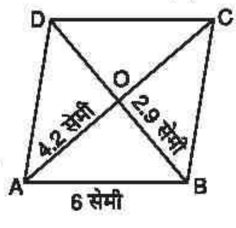


$(AB, BC), (BC, CD), (CD, DA)$

तथा (DA, AB)

3. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $OA = 4.2$ सेमी $OB = 2.9$ सेमी तथा $AB = 6$ सेमी तथा समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का परिमाप 25 सेमी हो, तो AC, BD तथा BC के मान बताइए।

हल—**दिया है**— $OA = 4.2$ सेमी, $OB = 2.9$ सेमी



$AB = 6$ सेमी तथा

समान्तर चतुर्भुज का परिमाप $= 25$ सेमी

ज्ञात करना है— $AC = ?, BD = ?, BC = ?$

$\because$ समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore \quad OA = \frac{1}{2} AC$ तथा $OB = \frac{1}{2} BD$

या $\quad AC = 2 \times OA$ तथा $BD = 2 \times OB$

$AC = 2\times 4.2$ तथा $BD = 2\times 2.9$

अत: $AC = 8.4$ सेमी तथा $BD = 5.8$ सेमी

$\because$ समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

अत: $AB = CD$ तथा $BC = AD$

$\therefore$ $ABCD$ का परिमाप $= 2(AB+BC)$

$$25 = 2(6+BC)$$

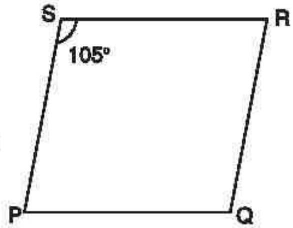
$$12.5 = 6+BC$$

$$BC = 12.5-6$$

$$BC = 6.5 \text{ सेमी}$$

उत्तर

4. किसी समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ में $\angle S = 105°$ हो, तो $\angle P$ तथा $\angle Q$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल—दिया है— $\angle S = 105°$

$\because$ $\angle S = \angle Q$ =(सम्मुख कोण)

$\therefore$ $\angle Q = 105°$

तथा $\because$ $\angle P + \angle Q = 180°$ तिर्यक रेखा के एक ओर के कोण

$\therefore$ $\angle P + 105° = 180°$

$$\angle P = 180° - 105°$$

$$\angle P = 75°$$

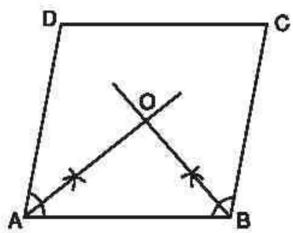
उत्तर

5. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में क्रमागत कोण $\angle A$ तथा $\angle B$ के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं तब सिद्ध कीजिए— $\angle AOB = 90°$

हल—दिया है—समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A$ व $\angle B$ के समद्विभाजक AO तथा BO बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है— $\angle AOB = 90°$

उपपत्ति— $BC || AD$ तथा AB तिर्यक रेखा इन्हें काटती है।



$\therefore$ $\angle A + \angle B = 180°$

या $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180°}{2}$

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90°$$

$\therefore$ ΔAOB में $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle AOB = 180°$

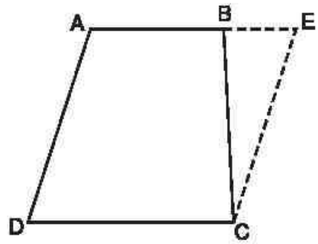
$$90° + \angle AOB = 180°$$

$$\angle AOB = 180° - 90°$$

$$\angle AOB = 90°$$

इति सिद्धम्

6. यदि चतुर्भुज $ABCD$ में $AB || CD$ तथा $AD = BC$ तो सिद्ध कीजिए कि— $\angle A = \angle B$



हल—दिया है— $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसमें $AB||CD$ तथा $AD = BC$

सिद्ध करना है— $\angle A = \angle B$

रचना—AB को आगे बढ़ाया और DA के समान्तर CE खींचा।

उपपत्ति— $\because$ AB को AE तक बढ़ाया गया है।

तथा $AB||CD$

$\therefore$ $AE||CD$

तथा $AD||CE$ [रचना से]

$\therefore$ चतुर्भुज $ADCE$ समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle A = \angle DCE$ ...(1)

$\because$ $AB||CD$ तथा BC एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle BCD = \angle CBE$ ...(2)

$\because$ $AD = BC$ (दिया है) तथा $AD = CE$ [$\because$ $ADCE$ एक समान्तर चतुर्भुज है]

$\therefore$ $BC = CE$

$\therefore$ $\angle CEB = \angle CBE$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) से $\angle BCD = \angle CEB$ ...(4)

अब $\angle ABC = \angle CEB + \angle BCE$ [$\angle ABC, \Delta BCE$ का बहिष्कोण है]

$= \angle BCD + \angle BCE$ [समी (4) से]

$\therefore$ $\angle ABC = \angle DCE$ ...(5)

समीकरण (1) व (5) से $\angle A = \angle ABC$

अतः $\angle A = \angle B$ **इति सिद्धम्**

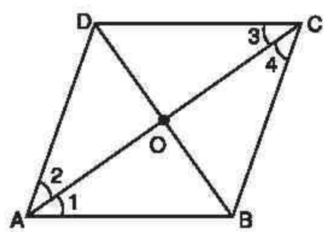
7. किसी समान्तर चतुर्भुज में यदि कोई विकर्ण एक कोण को समद्विभाजित करता है तो सिद्ध कीजिए कि वह सम्मुख कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

हल—दिया है— $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है तथा AC व BD उसके विकर्ण इस प्रकार हैं कि $AC, \angle A$ को समद्विभाजित करता है।

अर्थात $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है— विकर्ण AC $\angle C$ को भी समद्विभाजित करेगा।

अर्थात् $\angle 3 = \angle 4$



उपपत्ति— $\because$ $\angle 1 = \angle 2$ ...(1) (दिया है)

$\because$ $AB||CD$ तथा AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$ ...(2)

$\because$ $AD||BC$ तथा AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle 2 = \angle 4$ ...(3)

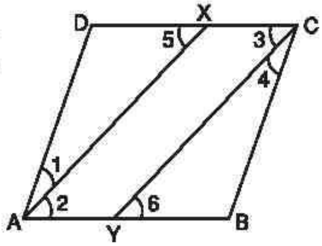
समीकरण (1), (2) व (3) से,

$\angle 3 = \angle 4$

अतः $AC, \angle C$ को भी समद्विभाजित करेगा।

8. एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ है तथा रेखाखण्ड AX तथा CY क्रमशः $\angle A$ व $\angle C$ को आधा-आधा बाँटते है व AX तथा CY क्रमशः भुजा DC तथा AB पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$AX \parallel CY$$



हल—दिया है—समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में रेखाखण्ड AX तथा CY, $\angle A$ तथा $\angle C$ को आधा-आधा बाँटते है।

सिद्ध करना है— $AX \parallel CY$

उपपत्ति— $\because$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle A = \angle C$

$\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

$\angle 1 = \angle 4$ तथा $\angle 2 = \angle 3$

ΔADX तथा ΔBCY में

$\angle 1 = \angle 4$

$\angle D = \angle B$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\Delta ADX \cong DCBY$ (A.S.A सर्वांगसमता)

$\therefore$ $\angle 5 = \angle 6$

$\angle CXA = 180° - \angle 5$

$\angle CYA = 180° - \angle 6$

$\angle CYA = \angle CXA$

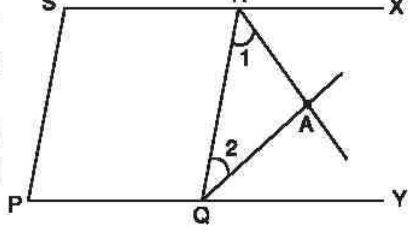
चतुर्भुज $AXCY$ में, $\angle CYA = \angle CXA$

तथा $\angle 2 = \angle 3$

$\therefore$ $AXCY$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $AX \parallel CY$ **इति सिद्धम्**

9. चित्र में $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। RA तथा QA दो बाह्य अर्द्धक हैं जो एक-दूसरे को P पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि— $\angle QAR = 90°$



हल—दिया है— $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। RA तथा QA दो बाह्य अर्द्धक हैं जो एक दूसरे से बिन्दु A पर मिलते हैं।

सिद्ध करना है— $\angle QAR = 90°$

रचना—SR को X तथा PQ को Y तक बढ़ाया।

उपपत्ति—$\because$ $SX \parallel PY$ तथा QR एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle RQY + \angle QRX = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने कोण)

या $\frac{1}{2}\angle QRX + \frac{1}{2}\angle RQY = 90^\circ$

($\because$ RP तथा QR क्रमशः $\angle XRQ$ व $\angle YQR$ के अर्द्धक)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle QAR = 180^\circ$(ΔARQ के तीनों कोणों का योग)

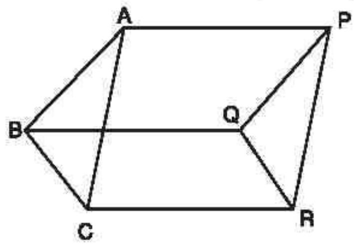
$90^\circ + \angle QAR = 180^\circ$

$\angle QAR = 80^\circ$

$\angle QAR = 180^\circ - 90^\circ$

$\angle QAR = 90^\circ$ **इति सिद्धम्**

10. चित्र में $AB || PQ$ तथा $AB = PQ$ व $AC || PR$ तथा $AC = PR$ सिद्ध कीजिए कि $BC || QR$ तथा $BC = QR$।



हल—दिया है— ΔABC तथा ΔPQR दो ऐसे Δ हैं जिनमें $AB = PQ$ तथा $AB || PQ$ व $AC = PR$ तथा $AC || PR$

सिद्ध करना है— $BC = QR$ तथा $BC || QR$

उपपत्ति— ΔABC तथा ΔPQR से

$\because AB || PQ$ तथा $AB = PQ$

$\therefore ABQP$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $BQ = AP$ तथा $BQ || AP$ ...(1)

$\because$ $AC = PR$ तथा $AC || PR$

$\therefore ACRP$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

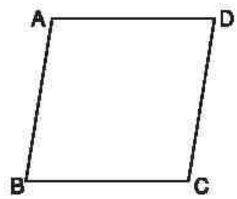
$\therefore$ $AP = CR$ तथा $AP || CR$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$BQ = CR$ तथा $BQ || CR$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 9.2

1. सिद्ध कीजिए कि समान्तर चतुर्भुज के किन्ही दो संलग्न क्रमागत कोणों का योगफल 180° होता है।



हल—दिया है—समान्तर चतुर्भुज $ABCD$

सिद्ध करना है—दो क्रमागत कोणों का योग $= 180^\circ$

अर्थात $\angle A + \angle B = 180^\circ$

अथवा $\angle C + \angle D = 180^\circ$

उपपत्ति— $\because ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $AB || CD$ तथा $BC || DA$

$\because AB || CD$ तथा BC तिर्यक रेखा है

तो अन्तः कोण युग्म के गुण से $\angle B + \angle C = 180^\circ$

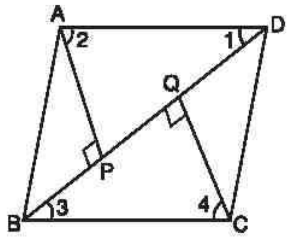
इसी प्रकार यदि $BC||DA$ तथा AB तिर्यक रेखा है

तो अन्त: कोण युग्म के गुण से $\angle A + \angle B = 180°$

अत: समान्तर चतुर्भुज के दो क्रमागत कोणों का योग 180° होता है **इति सिद्धम्**

2. *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है और विकर्ण *BD* पर *A* तथा *C* से डाले गए लम्ब *AP* तथा *CQ* हैं। सिद्ध कीजिए— $AP = CQ$

हल—दिया है—$ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है विकर्ण BD पर शीर्ष A तथा C से AP तथा CQ लम्ब डाले गए हैं।



सिद्ध करना है— $AP = CQ$

उपपत्ति— $\because AD||BC$ तथा BD तिर्यक रेखा है।

$\therefore \quad \angle ADP = \angle CBQ$ (एकान्तर कोण)

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3 \quad ...(1)$

$\because \quad \angle APD = 90° \Rightarrow \angle 2 = 90° - \angle 1$

तथा $\quad \angle BQC = 90° \Rightarrow \angle 4 = 90° - \angle 3$

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 4 \quad ...(2) \; (\because \angle 1 = \angle 3)$

ΔADP व ΔCBQ में

$AD = BC$ (सम्मुख भुजाएँ)

$\angle 1 = \angle 3$ (समी० (1) से)

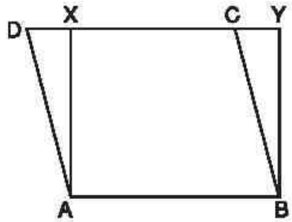
$\angle 2 = \angle 4$ (समी० (2) से)

$\therefore \quad \Delta ADP \cong \Delta CBQ$ (A.S.A सर्वांगसमता)

$\therefore \quad AP = CQ$ **इति सिद्धम्**

3. *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है। *AX* तथा *BY* क्रमश: बिन्दुओं *A* तथा *B* से *DC* पर तथा बढ़ाई हुई *DC* पर डाले गए लम्ब हैं। सिद्ध कीजिए—

$AX = BY$



हल— $\because$ समान्तर चतुर्भुज में किन्ही दो क्रमागत कोणों का योग होता 180° है।

$\therefore$ समान्तर चतुर्भज $ABCD$ में

$$\angle ADC + \angle BCD = 180° \quad ...(1)$$

परन्तु रैखिक युग्म $\angle BCD + \angle BCY = 180°$

समीकरण (1) व (2) से

$$\angle ADC + \angle BCD = \angle BCD + \angle BCY$$

$$\angle ADC = \angle BCY$$

या $\angle ADX = \angle BCY$

अब ΔAXD व ΔBYC में,

$\angle ADX = \angle BCY$ (सिद्ध किया है)

$\angle AXD = \angle BYC \quad (= 90^\circ)$

$AD = BC$ (सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ $\Delta AXD \cong \Delta BYC$

$\therefore$ $AX = BY$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग) इति सिद्धम्

4. एक चतुर्भुज के समान्तर चतुर्भुज होने के लिए क्या नियम (प्रतिबन्ध) होते हैं?

हल—किसी चतुर्भुज के समान्तर चतुर्भुज होने के लिए निम्न प्रतिबन्ध होते हैं—

(i) यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तब वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

(ii) यदि एक चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तब वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

(iii) यदि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करे, तब वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

अभ्यास 9.3

1. आयत का प्रत्येक कोण कितने अंश का होगा?

हल—90°

2. निम्नलिखित आकृतियों में से किन आकृतियों के विकर्ण एक-दूसरे पर लम्ब होंगे? हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए।

(i) समलम्ब चतुर्भुज — **हल**— नहीं

(ii) आयत — **हल**— नहीं

(iii) समान्तर चतुर्भुज — **हल**— नहीं

(iv) समचतुर्भुज — **हल**— हाँ

3. किसी आयत की दो क्रमागत भुजाएँ *a* तथा *b* हैं। विकर्ण की माप ज्ञात कीजिए।

हल—विकर्ण की माप $= \sqrt{(\text{पहली भुजा})^2 + (\text{दूसरी भुजा})^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$ उत्तर

4. एक ΔABC की भुजाओं AB, BC तथा CA के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q तथा R हैं। सिद्ध कीजिए P, Q, R को मिलाने पर ΔABC चार सर्वांगसम त्रिभुज में विभक्त हो जाएगा।

हल—**दिया है**—ΔABC में भुजाओं AB, BC व CA के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q तथा R हैं। इन बिन्दु P, Q तथा R को मिलाने पर ΔAPR,

$\Delta BPQ, \Delta CQR$ तथा ΔPQR बनते हैं।

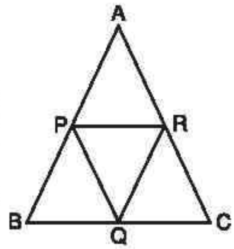
सिद्ध करना है— $\Delta APR \cong \Delta CQR \cong \Delta BPQ \cong \Delta PQR$

उपपत्ति— P तथा Q क्रमशः भुजाओं AB तथा BC के मध्य बिन्दु है।

$\therefore \qquad PQ || AC$

इसी प्रकार $PR || BC$ तथा $QR ++ AB$

$\therefore$ $APQR, BPRQ$ तथा $PRCQ$ में से प्रत्येक समान्तर चतुर्भुज है। अब PQ समान्तर चतुर्भुज $BPRQ$ का एक विकर्ण है।



समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभक्त करता है।

$\therefore \qquad \Delta BPQ \cong \Delta PQR$

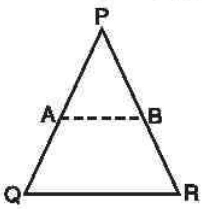
इसी प्रकार $\quad \Delta APR \cong \Delta PQR$

तथा $\qquad \Delta CQR \cong \Delta PQR$

$\therefore \qquad \Delta BPQ \cong \Delta APR \cong \Delta CQR \cong \Delta PQR$

अतः चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। इति सिद्धम्

5. चित्र में ΔPQR में, A, PQ का मध्य बिन्दु है तथा $AB || QR$ यदि $PR = 8$ सेमी तब PB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल—ΔPQR में A, PQ का मध्य बिन्दु हैं।

तथा $\qquad AB || QR$

$\therefore$ B, PR का मध्य बिन्दु है।

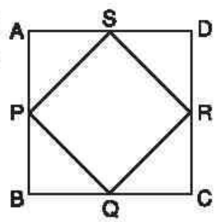
(Δ की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर खींची जाने वाली रेखा तीसरी भुजा का समद्विभाजन करती है)

$$PB = BR = \frac{1}{2} PR$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ सेमी}$$

$\therefore \qquad PB = 4$ सेमी उत्तर

6. सिद्ध कीजिए कि वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।



हल—दिया है—वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R तथा S हैं जो चतुर्भुज $PQRS$ बनाते हैं।

सिद्ध करना है— $PQRS$ एक वर्ग है।

उपपत्ति— $\because$ $ABCD$ एक वर्ग है।

$\therefore \qquad AB = BC = CD = DA$

तथा $\qquad \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

$\because$ P, Q, R, S क्रमशः वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore \qquad AP = BP = BQ = QC = CR = RD = DS = SA \qquad \ldots(1)$

$\therefore$ $\Delta APS, \Delta BPQ, \Delta CQR$ तथा ΔDRS समद्विबाहु समकोण त्रिभुज हैं

$\because$ ΔAPS तथा ΔBPQ में,

$$AP = BP$$
$$AS = BQ$$
$$\angle A = \angle B$$

$\therefore$ $\Delta APS \cong \Delta BPQ \Rightarrow PS = PQ$ ...(2)

इसी प्रकार समीकरण (1) व (2) से चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

$\therefore \Delta APS \cong \Delta CQR$ से $PS = QR$ ...(3)

तथा $\Delta BPQ \cong \Delta DRS$ से $PQ = RS$ ...(4)

समीकरण (2), (3) व (4) से

PQRS एक समान भुजाओं वाला समान्तर चतुर्भुज है।

$\because$ समकोण ΔAPS में $AP = AS$

$\therefore$ $\angle APS = \angle ASP$ परन्तु $\angle APS + \angle ASP = 90°$

$\therefore$ $\angle APS = 45°$

इसी प्रकार $\angle BPQ = 45°$

$\because \angle APS + \angle BPQ + \angle SPQ = 180°$ [एक सरल रेखा पर बने कोण]

$\therefore$ $45° + 45° + \angle SQR = 180°$

या $\angle SPQ = 180° - 90° = 90°$

या $\angle P = 90°$

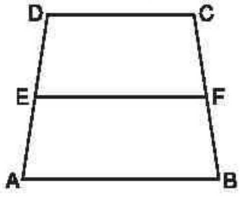
इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\angle Q = \angle R = \angle S = 90°$$

$\therefore$ *PQRS* एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ समान हैं तथा प्रत्येक अन्त: कोण 90° है।

अत: *PQRS* एक वर्ग है। इति सिद्धम्

7. चित्र में समलम्ब *ABCD* की भुजा *AD* का मध्य बिन्दु *E* है तथा *AB*||*DC* है। *E* से *AB* के समान्तर खींची गई रेखा *BC* से *F* पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि *F* भुजा *BC* का मध्य बिन्दु है।



हल—दिया है— *ABCD* एक समलम्ब है जिसमें *AB*||*DC* तथा बिन्दु *E* भुजा *AD* का मध्य बिन्दु है। *E* से *AB* के समान्तर खीची गई रेखा *EF*, *BC* से *F* पर मिलती है।

सिद्ध करना है— *F*, *BC* का मध्य बिन्दु है।

उपपत्ति— $\because AB||DC$ तथा बिन्दु *E* से खींची गई रेखा

$$EF||AB$$

$\therefore AB||EF||DC$ तीन समान्तर रेखाएँ और *AD* तथा *BC* तिर्यक रेखा हैं जिन पर इन समान्तर रेखाओं द्वारा क्रमश: (*DB*, *EA*) तथा (*CF*, *FB*) अन्त: खण्ड बनाए गए हैं।

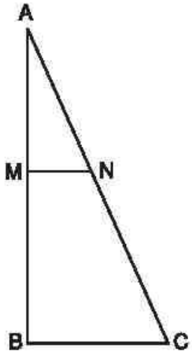
$\because E, AD$ का मध्य बिन्दु है।

$\therefore DE = EA$ अर्थात् *AD* तीनों समान्तर रेखाओं से *DE* तथा *EA* समान अन्त: खण्ड काटती है।

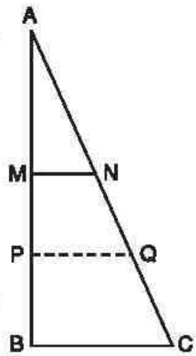
तब तिर्यक रेखा BC भी उन रेखाओं से CF तथा FB समान अन्तः खण्ड काटेगी अर्थात्
$CF = FB$

अतः F, BC का मध्य बिन्दु है। इति सिद्धम्

8. चित्र में ΔABC की भुजाओं AB तथा AC पर क्रमशः बिन्दु M तथा N इस प्रकार से लिए गए है कि $AM = \frac{1}{4}AB$ तथा $AN = \frac{1}{4}AC$, तब सिद्ध कीजिए $MN = \frac{1}{4}BC$



हल—दिया है—ΔABC की भुजा AB पर एक बिन्दु M इस प्रकार है कि $AM = \frac{1}{4}AB$ तथा भुजा AC पर एक बिन्दु N इस प्रकार है कि



$AN = \frac{1}{4}AC,$

सिद्ध करना है— $MN = \frac{1}{4}BC$

रचना—AB के मध्य बिन्दु P तथा AC के मध्य बिन्दु Q से रेखाखण्ड PQ खींचा।

उपपत्ति—$\because P, AB$ का मध्य बिन्दु तथा Q, AC का मध्य बिन्दु है।

$\therefore \qquad PQ = \frac{1}{2}BC \qquad ...(1)$

$\because AM = \frac{1}{4}AB$ तथा $AP = \frac{1}{2}AB$

$\therefore AM : AP = 1:2 \Rightarrow AM = MP$

$\therefore M, AP$ का मध्य बिन्दु है।

इसी प्रकार N, AQ का मध्य बिन्दु है।

तब ΔAPQ में $MN = \frac{1}{2}PQ \qquad ...(2)$

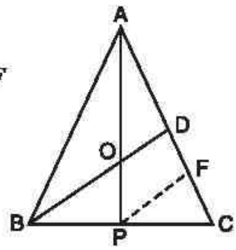
समीकरण (2) में समीकरण (1) से का मान रखने पर

$$MN = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BC\right)$$

$$MN = \frac{1}{4}BC$$ इति सिद्धम्

9. चित्र में AP तथा BD, ΔABC की माध्यिकाएँ हैं। यदि $BD||PF$ तब सिद्ध कीजिए—

$$CF = \frac{1}{4}AC$$



हल—दिया है— ΔABC में माध्यिका AP तथा BD है। $BD||PF$

सिद्ध करना है— $CF = \frac{1}{4}AC$

उपपत्ति—ΔBCD में,

$\because BD||PF$ तथा बिन्दु P भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

$\therefore F, CD$ का मध्य बिन्दु है।

या $CF = \frac{1}{2}CD$ ...(1)

$\because BD, \Delta ABC$ की माध्यिका बिन्दु है।

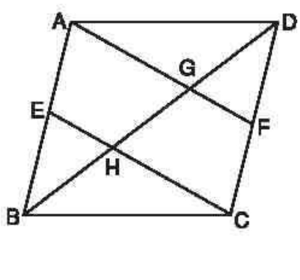
$\therefore$ $CD = DA$

या $CD = \frac{1}{2}AC$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से $CF = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\right)$

$$CF = \frac{1}{4}AC$$ इति सिद्धम्

10. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में E तथा F क्रमशः भुजाओं AB तथा CD के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि AF तथा CE रेखाखण्ड विकर्ण BD को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।



हल—दिया है— $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। बिन्दु E तथा F क्रमशः उसकी भुजाओं AB तथा CD के मध्य बिन्दु हैं। विकर्ण BD रेखा खण्ड AF तथा CE से क्रमशः बिन्दुओं G तथा H पर विभक्त होता है।

सिद्ध करना है— BD को AF तथा CE तीन बराबर भागों में बाँटते हैं।

अर्थात् $DG = GH = HB$

उपपत्ति— $\because ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $AB||CD$ तथा $AB = CD$

तथा E तथा F क्रमशः AB तथा CD के मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ $AE||CF$ तथा $AE = CF$

$\therefore$ $AECF$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $AE||CF$ ...(1)

या $AG||EH$ ...(2)

तथा $FG||CH$ ...(3)

$\because \Delta DHC$ में,

बिन्दु F, भुजा CD का मध्य बिन्दु है (दिया है)

तथा $FG||CH$ (समी॰ (3) से)

$\therefore G, DH$ का मध्य बिन्दु है। $\therefore DG = GH$ ...(4)

पुनः ΔABG में,

बिन्दु E, भुजा AB का मध्य बिन्दु है और

$EH||AG$ (समी॰ (2) से)

$\therefore H, BG$ का मध्य बिन्दु है।

$$HB = GH \quad ...(5)$$

समी॰ (4) व (5) से $DG = GH = HB$

अतः रेखाखण्ड AF तथा CE विकर्ण BD को तीन बराबर भागों में विभक्त करते हैं।

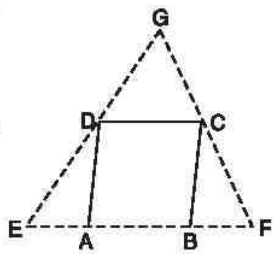
इति सिद्धम्

11. $ABCD$ एक समचतुर्भुज है जिसकी AB भुजा को E तथा F की ओर इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $AE = AB = BF$ तब सिद्ध कीजिए कि ED तथा FC एक-दूसरे पर लम्ब है।

हल—दिया है— $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। भुजा AB को बिन्दुओं E तथा F तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि

$$AE = AB = BF$$

रेखा किरण ED तथा FC को बढ़ाने पर ये बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है— $\angle G = 90^\circ$ अथवा $DG \perp GC$

उपपत्ति— $\because \Delta ADE$ में $AD = AE$

$\therefore$ $\angle AED = \angle ADE$

$\because \angle DAB, \Delta ADE$ का बहिष्कोण है

$\therefore$ $\angle DAB = \angle AED + \angle ADE$

$= \angle AED + \angle AED$ $(\because \angle ADE = \angle AED)$

$\therefore$ $\angle DAB = 2\angle AED$ ...(1)

इसी प्रकार $\angle ABC = 2\angle BFC$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$\angle DAB + \angle ABC = 2(\angle AED + \angle BFC) \quad ...(3)$$

अब $\because ABCD$ समचतुर्भुज है।

$\therefore AD||BC$ तथा EF तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ ...(4)

समीकरण (3) व (4) से

$$2(\angle AED + \angle BFC) = 180^\circ$$

$\therefore \quad \angle AED + \angle BFC = 90^\circ$

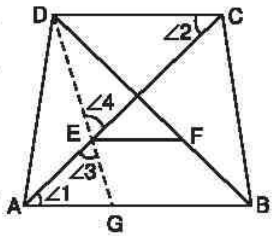
$\therefore \quad \angle EFG + \angle EFG = 90^\circ \quad \begin{pmatrix} \therefore \angle AED = \angle FEG \\ \angle BPC = \angle EFG \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta EFG$ का तीसरा कोण $\angle G = 90^\circ$ होगा।

अतः रेखाखण्ड $EDG \perp FCG$

या $\quad DE \perp FC$ **इति सिद्धम्**

12. सिद्ध कीजिए कि किसी समलम्ब के विकर्णों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वालों रेखाखण्ड उस समलम्ब की समान्तर भुजाओं के समान्तर तथा उनके अन्तर का आधा होता है।



हल—दिया है—$ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ $AB||DC$ विकर्णों AC व BD के मध्य बिन्दु क्रमशः E व F हैं।

सिद्ध करना है— $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

रचना—D को E से मिलाकर आगे की ओर बढ़ाया जिससे वह भुजा AB को G पर काटती है।

उपपत्ति— ΔAEG तथा ΔDEC में,

$\angle CAB = \angle ACD$ ($\because$ एकान्तर कोण)

$\angle AEG = \angle DEC$ ($\because$ शीर्षाभिमुख कोण)

$AE = CE$ ($\because E, AC$ का मध्य बिन्दु

$\therefore \quad \Delta AEG \cong \Delta DEC$

$\therefore \quad EG = DE \quad \ldots(1)$

तथा $\quad AG = DC \quad \ldots(2)$

समी॰ (1) से ज्ञात होता है—

E, DG का मध्य बिन्दु है तथा F विकर्ण BD का मध्य बिन्दु है।

अतः ΔDGB में $EF||GB$ तथा

$$EF = \frac{1}{2}GB$$

$EF||AB \therefore EF||DC \quad (\because AB||DC)$

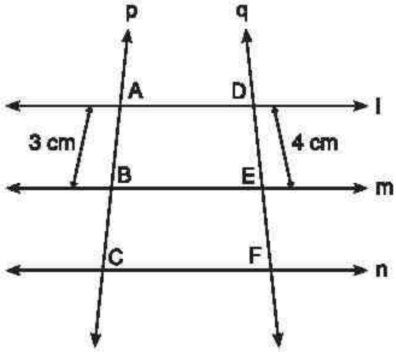
$\because \quad EF = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}(AB - AG)$

या $\quad EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$ (समी॰ (2) से $AG = DC$)

अतः समलम्ब के विकर्णों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा समान्तर भुजाओं के समान्तर तथा उनके अन्तर के आधे के बराबर होती है। **इति सिद्धम्**

अभ्यास 9.4

1. चित्र में तीन रेखाएँ $l||m||n$ हैं, तिर्यक रेखाएँ p तथा q इन्हे क्रमशः बिन्दुओं A, B, C तथा D, E, F पर काटती हैं। यदि $AB = 3$ सेमी तथा $DE = 4$ सेमी हो, तो $BC = ?$ तथा $EF = ?$ जब कि समान्तर रेखाएँ तिर्यक रेखाओं को दो बराबर भागों में बाँटती हैं।



(a) $BC = 4$ सेमी, $EF = 3$ सेमी

(b) $BC = 8$ सेमी, $EF = 6$ सेमी

(c) $BC = 2$ सेमी, $EF = 1.5$ सेमी

(d) $BC = 3$ सेमी, $EF = 4$ सेमी

हल—$\because$ दिया है—समान्तर रेखाएँ तिर्यक रेखाओं को दो बराबर भागों में बाँटती हैं

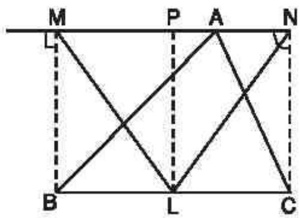
$\therefore \quad AB = BC, DE = EF$

तथा $\because AB = 3$ सेमी, $DE = 4$ सेमी

$\therefore EF = 3$ सेमी, $EF = 4$ सेमी (d) उत्तर

2. त्रिभुज ABC के शीर्ष A से होकर जाने वाली रेखा पर BM तथा CN लम्ब है। यदि L भुजा BC का मध्य बिन्दु है, तो सिद्ध कीजिए कि— $LM = LN$

हल—दिया है—ΔABC में आधार BC का मध्य बिन्दु L है। Δ के शीर्ष A से खींची गई रेखा पर B से BM तथा C से CN लम्ब खींचे गए है।



सिद्ध करना है— $LM = LN$

रचना— रेखाखण्ड LM व LN खींचे तथा L से BM के समान्तर रेखा LP खींची।

उपपत्ति— $\because BM$ तथा CN, रेखा MN पर लम्ब है।

$\therefore \quad BM||CN$

तथा $\quad BM||LP$

$\therefore \quad BM||LP||CN$ (रचना से)

$\because BM, LP$ तथा CN परस्पर समान्तर तथा

$\because L, BC$ का मध्य बिन्दु है।

$\therefore \quad MP = PN$ (अन्त: खण्ड प्रमेय से)

अब ΔLMP तथा ΔLNP में,

$MP = PN$ (अभी सिद्ध किया है)

$\angle MPL = \angle NPL \because PL \perp MN$

$PL = PL$ (उभयनिष्ठ)

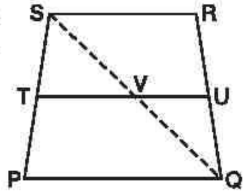
$\therefore \quad \Delta LMP \cong \Delta LNP$

अतः $\quad LM = LN$ इति सिद्धम्

3. समलम्ब $PQRS$ में असमान्तर भुजाओं PS तथा QR के मध्य बिन्दु क्रमश: T तथा U हैं जैसे चित्र में दर्शाया है तब सिद्ध कीजिए—

(i) $TU || PQ$

(ii) $TU = \frac{1}{2}(PQ+SR)$



हल—दिया है—समलम्ब चतुर्भुज $PQRS$ में T व U असमान्तर भुजाओं SP तथा RQ के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है— (i) $TU || PQ$

(ii) $TU = \frac{1}{2}(PQ+SR)$

रचना— TU तथा QS खींचा जो परस्पर V पर प्रतिच्छेद करते हैं।

उपपत्ति— $ST = TP$ (दिया है) ...(1)

तथा $RU = UQ$ (दिया है) ...(2)

$\therefore$ तीन रेखाएँ PQ, TU तथा SR रेखा SP तथा QR पर क्रमश: समान अन्त: खण्ड बना रही है। (समी० (1) व (2) से)

$$\therefore \quad TU || PQ || SR \quad \text{...(a)}$$

($\because$ यदि दो तिर्यक रेखाओं पर तीन रेखाओं द्वारा बनाए गए अन्त: खण्ड समान हों, तो तीनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

पुन: ΔPQS में T, PS का मध्य बिन्दु है।

तथा $TU || PQ$ अर्थात $TV || PQ$

$$\because \quad TV = \frac{1}{2}PQ \quad \text{...(3)}$$

($\because$ Δ में एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा की आधी होती है।)

इसी प्रकार
$$VU = \frac{1}{2}SR \quad \text{...(4)}$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

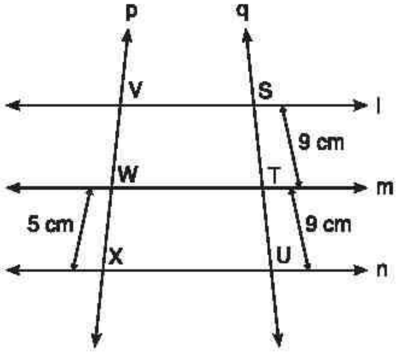
$$TV + VU = \frac{1}{2}(PQ+SR)$$

$$TV = \frac{1}{2}(PQ+SR) \quad \text{...(b)}$$

अत: समीकरण (a) व (b) से

$TV || Q$ तथा $TU = \frac{1}{2}(PQ+SR)$ **इति सिद्धम्**

4. चित्र में तीन रेखाएँ $l || m || n$ हैं तथा इन्हें दो तिर्यक रेखा p तथा q क्रमश: S, T, U तथा V, Q, X बिन्दुओं पर काटती हैं। यदि $ST = TU = 9$ सेमी तथा $WX = 5$ सेमी तो VW के बीच की माप ज्ञात कीजिए।



हल—$\because ST = TU = 9$ सेमी

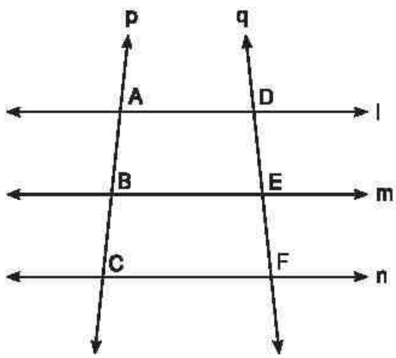
$\therefore \qquad WX = VW$

($\because$ समान्तर रेखाएँ तिर्यक रेखाओं को बराबर भागों में बाँटती है।)

$\therefore \qquad VW = 5$ सेमी

उत्तर

5. जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है कि तीन समान्तर रेखाएँ l, m तथा n तिर्यक रेखा p के द्वारा क्रमशः बिन्दुओं A,B तथा C पर और तिर्यक रेखा q के द्वारा क्रमशः बिन्दुओं D,E तथा F पर प्रतिच्छेदित करती हैं।



यदि $AB:BC = 1:2$ तो सिद्ध कीजिए— $DE:EF = 1:2$

हल—**दिया है—** l, m व n तीन समान्तर रेखाएँ हैं। एक तिर्यक रेखा p इनको क्रमशः बिन्दुओं A,B व C पर काटती है।

एक अन्य तिर्यक रेखा q इन्हें क्रमशः बिन्दुओं D,E तथा F पर काटती है।

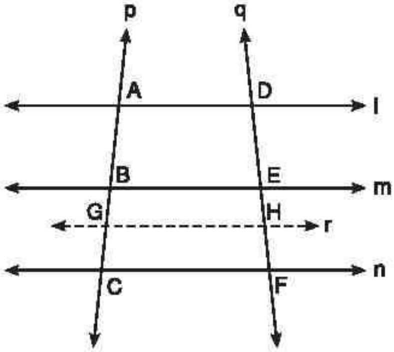
$$AB:BC = 1:2$$

सिद्ध करना है— $DE:EF = 1:2$

रचना— BC के मध्य बिन्दु G से CF के समान्तर रेखा r खींची जो q को बिन्दु पर काटती है।

उपपत्ति— $\because AB:BC = 1:2$

तथा G, BC का मध्य बिन्दु है।



$\therefore$ $BG = GC$

तब $AB : BC = 1 : 2$

या $AB : (BG + GC) = 1 : 2$

या $AB : 2BG = 1 : 2$

$AB = BG$

तब $AB = BG = GC$

अब $\because$ l, m और r तीन समान्तर रेखाओं को तिर्यक रेखाएँ p तथा q काटती हैं और $AB = BG \Rightarrow DE = EH$ इसी प्रकार m, r तथा n तीन समान्तर रेखाओं को तिर्यक रेखाएँ p तथा q काटती हैं।

और $BG = GC \Rightarrow EH = HF$

$\therefore$ $DE = EH = HF$

$\because$ $DE : EF = DE : (EH + HF)$

$= DE : 2EH$

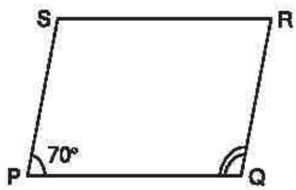
$= EH : 2EH$ $[\because DE = EH]$

$= 1 : 2$

अतः $DE : EF = 1 : 2$ इति सिद्धम्

विविध प्रश्नावली

1. दिए गए चित्र में $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि $\angle P = 70°$ तो $\angle Q$ मान ज्ञात कीजिए।



हल—हम जानते है— $\angle P + \angle Q = 180°$

$\because$ $\angle P = 70°$

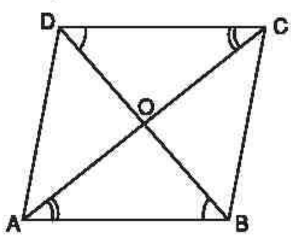
$\therefore$ $70° + \angle Q = 180°$

$\angle Q = 180° - 70°$

$\angle Q = 110°$

2. $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण AC व BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद होते हैं। सिद्ध कीजिए।

(i) $OA = OC$ (ii) $OB = OD$



हल—दिया है—समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है— $OA = OC$ तथा $OB = OD$

उपपत्ति— ΔDOC तथा ΔAOB में

$\therefore \angle CDO = \angle ABO$ (एकान्तर अन्त: कोण $AB || DC$)

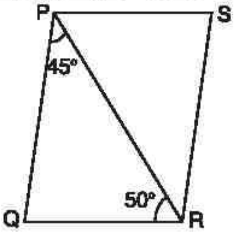
$AB = DC$ (समान्तर चतुभुर्ज $ABCD$ की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle DCO = \angle BAO$ (एकान्तर अन्त:कोण)

अत: $\Delta DOC \cong \Delta AOB$ (A.S.A सर्वांगसमता)

$\therefore$ (i) $OA = OC$ तथा (ii) $OB = OD$ इति सिद्धम्

3. दिए गए चित्र में $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। यदि $\angle QRP = 50°$ व $\angle QPR = 45°$ है तो $\angle SPR, \angle PRS$ व RSP का मान ज्ञात कीजिए।



हल—दिया है—$PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$$\angle QRS = 50°, \angle QPR = 45°$$

$\square PQRS$ में, $\angle QRP = \angle SPR$ (एकान्तर कोण)

$\because \quad \angle QRP = 50° \quad \therefore \angle SPR = 50°$

इसी प्रकार $\angle QPR = \angle PRS$ (एकान्तर कोण)

$\because \quad \angle QPR = 45° \therefore \angle PRS = 45°$

तथा ΔPSR से,

$$\angle SPR + \angle PRS + \angle RSP = 180°$$

$$50° + 45° + \angle RSP = 180°$$

$$\angle RSP = 180° - 95°$$

$$\angle RSP = 85°$$

अत: $\angle SPR = 50°$

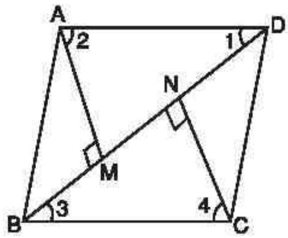
$\angle PRS = 45°$

$\angle RSP = 85°$ उत्तर

4. किसी समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण BD पर AM व CN लम्ब हैं। सिद्ध कीजिए।

(i) $\Delta ADM \cong \Delta CBN$ (ii) $AM = CN$

हल—दिया है— $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण BD पर AM व CN लम्ब डाले गए हैं।



सिद्ध करना है— (i) $\Delta ADM \cong \Delta CBN$

(ii) $AM = CN$

उपपत्ति— $AD || BC$ तथा BD तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle ADM = \angle CBN$ (एकान्तर कोण युग्म)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$ ...(a)

$\because$ $\angle AMD = 90^\circ$ $\therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle 1$

$\because$ $\angle BNC = 90^\circ$ $\therefore \angle 4 = 90^\circ - \angle 3$

$\therefore$ $\angle 2 = \angle 4$ ...(b) ($\because \angle 1 = \angle 3$)

ΔADM व ΔCBN में

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं)

$\angle 1 = \angle 3$ (सिद्ध किया है)

$\angle 2 = \angle 4$ (सिद्ध किया है)

अतः $\Delta ADM \cong \Delta CBN$ (A.S.A सर्वांगसमता)

तथा $AM = CN$ इति सिद्धम्

5. सिद्ध कीजिए कि किसी समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के अर्द्धक समान्तर होते हैं।

हल—दिया है— $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। AX तथा CY क्रमशः कोण A व C के अर्द्धक हैं

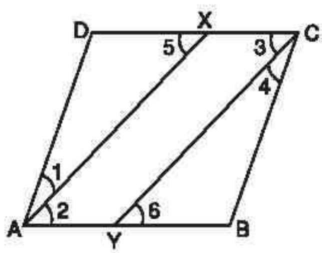
सिद्ध करना है— $AX || CY$

उपपत्ति— $\because ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। अतः $\angle A = \angle C$ (सम्मुख कोण)

या $\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

$\angle 1 = \angle 3$ या $\angle 2 = \angle 4$

ΔADX और CBY में



$\angle 1 = \angle 3$

$\angle D = \angle B$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अतः $\Delta ADX \cong \Delta CBY$ (A.S.A सर्वांगसमता)

$\therefore$ $\angle 5 = \angle 6$

$\angle CXA + \angle 5 = 180^\circ$

$\angle AYC + \angle 6 = 180^\circ$

या $\angle CXA + \angle 5 = \angle AYC + \angle 6$

या $\angle CXA + \angle 5 = \angle AYC + \angle 5$

या $\angle CXA = \angle AYC$

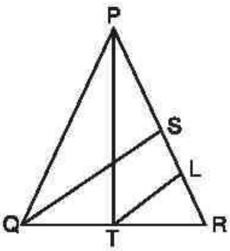
अतः चतुर्भुज $AYCX$ में, $\angle CXA = \angle AYC$

तथा $\angle 2 = \angle 4$

अतः चतुर्भुज $AYCX$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $AX || CY$ इति सिद्धम्

6. दिए गए चित्र में PT व QS, ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं यदि $QS || TL$ तो सिद्ध कीजिए— $RL = \frac{1}{4} PR$



हल—दिया है— ΔPQR की PT व QS दो माध्यिकाएँ हैं। बिन्दु T से $QS || TL$ खींची गई है जो PR से L पर मिलती है।

सिद्ध करना है— $RL = \frac{1}{4} PR$

उपपत्ति— $\because PT$ व $QS, \Delta PQR$ की माध्यिकाएँ हैं।

$\therefore T$ व S क्रमशः QR व PR के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ $RS = \frac{1}{2} PR$ ...(1)

अब ΔQRS में,

बिन्दु T, QRS का मध्य बिन्दु है और T से $TL || QS$ खींची गई है जो PR को RS के मध्य बिन्दु L पर काटेगी।

$\therefore$ $RL = \frac{1}{2} RS$

या $RS = 2RL$ ...(2)

समीकरण (2) से RS का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$2RL = \frac{1}{2}PR$$

$$RL = \left(\frac{1}{2}PR\right)/2$$

$$RL = \frac{1}{4}PR$$

इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 164 देखिए।

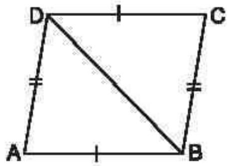
10

क्षेत्रफल
(Area)

अभ्यास 10.1

1. समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो त्रिभुजों में बाँटता है, तो उनके क्षेत्रफल किस तरह के होंगे?

हल—माना $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है, विकर्ण BD इसे दो त्रिभुजों, ΔABD व ΔCDB में बाँटता है।



अत: ΔABD एवं ΔCDB में,

$AB = DC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$BD = BD$ (उभयनिष्ठ)

अत: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

अत: दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होगें। **उत्तर**

2. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल किसके बराबर होता है?

हल— समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आधार और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल के बराबर होता है।

3. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि

(i) आधार = 20 सेमी तथा संगत शीर्षलम्ब = 8.4 सेमी

हल— समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत शीर्षलम्ब

$= 20 \times 8.4$

$= 168.0$ सेमी^{2} **उत्तर**

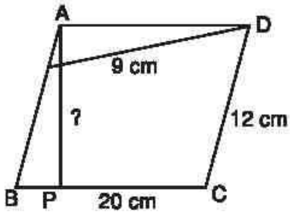
(ii) आधर = 45 सेमी तथा संगत शीर्षलम्ब = 2.4 सेमी

हल—समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × संगत शीर्षलम्ब

$= 45 \times 2.4$

$= 108$ सेमी^{2} **उत्तर**

4. समान्तर चतुर्भुज *ABCD* की दो संलग्न भुजाएँ क्रमशः 20 सेमी तथा 12 सेमी हैं। यदि 12 सेमी भुजाओं के बीच की दूरी 9 सेमी हो, तो 20 सेमी भुजाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



हल—समान्तर चतुर्भुज *ABCD* का क्षेत्रफल

$= AD \times DC$

$= 9 \times 12$

$= 108$ सेमी^{2}

पुनः समान्तर चतुर्भुज *ABCD* का क्षेत्रफल

$= AP \times 20$

या $108 = 20AP$ सेमी

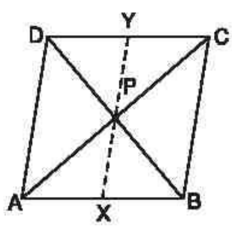
या $AP = \frac{108}{20} = 5.4$ सेमी

$AP = 5.4$ सेमी उत्तर

5. समान्तर चतुर्भुज *ABCD* के विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु *P* पर काटते हैं। बिन्दु *P* से होकर जाने वाली रेखा *AB* को *X* पर तथा *CD* को बिन्दु *Y* पर काटती है। तब सिद्ध कीजिए कि– क्षेत्रफल (चतुर्भुज *AXYD*) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज *ABCD*)

हल—**दिया है**—एक समान्तर चतुर्भुज *ABCD* जिसके विकर्ण *AC* तथा *BD* एक दूसरे को बिन्दु *P* पर काटते हैं। *P* से होती हुई एक रेखा खींची जो *AB* को *X* तथा *DC* को *Y* पर काटती है।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल (चतुर्भुज *AXYD*) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज*ABCD*)



उपपत्ति— ∵ समान्तर चतुर्भुज *ABCD* का विकर्ण *AC* इसे दो समान त्रिभुजों में बाँटता है।

∴ क्षेत्रफल (ΔACD) = क्षेत्रफल (ΔABC)

ΔAPX तथा ΔCPY में,

$PA = PC$ (समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समद्विभाजित करते हैं)

$\angle PAX = \angle PCY$ (∵ एकान्तर कोण)

$\angle APX = \angle CPY$ (शीर्षाभिमुख कोण)

∴ $\Delta APX \cong \Delta CPY$

∴ क्षेत्रफल (ΔAPX) = क्षेत्रफल (ΔCPY)

दोनों और क्षेत्रफल (चतुर्भुज *APYD*) जोड़ने पर

क्षेत्रफल (ΔAPX) + क्षेत्रफल (चतुर्भुज $APYD$) = क्षेत्रफल (ΔCPY) + क्षेत्रफल (चतुर्भुज $APYD$)

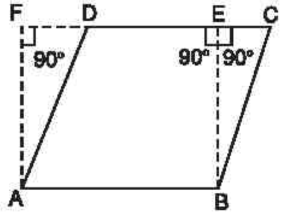
क्षेत्रफल (चतुर्भुज $AXYD$) = क्षेत्रफल (ΔACD)

या क्षेत्रफल चतुर्भुज $AXYD = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (चतुर्भुज $ABCD$) **इति सिद्धम्**

6. एक समान्तर चतुर्भुज तथा एक आयत का उभयनिष्ठ आधार है, तथा क्षेत्रफल बराबर है। सिद्ध कीजिए कि आयत का परिमाप समान्तर चतुर्भुज के परिमाप से छोटा होता है।

हल—दिया है— समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का आधार AB है जिस पर समान क्षेत्रफल का आयत $ABEF$ स्थित है।

सिद्ध करना है—आयत $ABEF$ का परिमाप < समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का परिमाप



उपपत्ति— ΔADF में,

$\angle F = 90^\circ$ (आयत का अन्त: कोण)

$AF \perp EF$

$AD > AF$ ...(1) ($\because AD$ कर्ण है)

इसी प्रकार ΔBCE में,

$\angle E = 90^\circ$

$BE \perp CD, BC > BE$ ...(2) ($\because BC$ कर्ण है)

समीकरण (1) व (2) से $AD + BC > AF + BE$

दोनों ओर $AB + CD$ या $AB + EF$ जोड़ने पर,

$AB + CD + AD + BC > AB + EF + AF + BE$ ($\because CD = EF$)

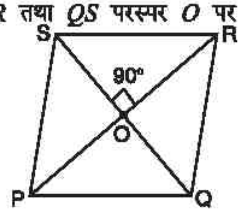
$AB + BC + CD + DA > AB + BE + EF + FA$

समान्तर चतुर्भुज का परिमाप > आयत का परिमाप

या आयत का परिमाप < समान्तर चतुर्भुज का परिमाप **इति सिद्धम्**

7. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों की लम्बाइयों के गुणनफल का आधा होता है।

हल—दिया है—$PQRS$ एक समचतुर्भुज है जिसके विकर्ण PR तथा QS परस्पर O पर समद्विभाजित करते हैं।



सिद्ध करना है—क्षेत्रफल (समचतुर्भुज $PQRS$) $= \frac{1}{2} PRXQS$

उपपत्ति— $\because$ समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण बनाते हुए प्रतिच्छेदित करते हैं व एक दूसरे को समद्विभाजित भी करते हैं।

$\therefore SQ \perp PR$ का अर्थ है $SO \perp PR$ तथा $OQ \perp PR$ तथा $SO = OQ$

क्षेत्रफल $(\Delta PQR) = \frac{1}{2} PR \times OQ$ ...(1)

तथा $\quad$ क्षेत्रफल $(\Delta PSR) = \frac{1}{2} PR \times SO$ $\quad$ ... (2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$\therefore$ $\quad$ क्षेत्रफल $(\Delta PQR)+$ क्षेत्रफल $(\Delta PSR) = \frac{1}{2} PR(OQ + SO)$

क्षेत्रफल $(\Delta PQR)+$ क्षेत्रफल $(\Delta PSR) = \frac{1}{2} PR \times QS$

क्षेत्रफल (समचतुर्भुज $PQRS$) $= \frac{1}{2} PR \times QS$

अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ एक विकर्ण $\times$ दूसर विकर्ण $\quad$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 10.2

1. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि उसकी समान्तर भुजाएँ 20 सेमी व 30 सेमी है और उनके बीच की दूरी 14 सेमी है।

हल—समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समान्तर भुजाओं का योग) $\times$ शीर्षलम्ब या (समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी)

$$= \frac{1}{2}(20+30) \times 14$$

$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 14$$

$= 350$ सेमी^{2} $\quad$ **उत्तर**

2. एक समलम्ब का क्षेत्रफल 510 वर्ग सेमी है और उसकी समान्तर भुजाएँ 25 सेमी तथा 35 सेमी हैं। समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल— $\because$ समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समान्तर भुजाओं का योग) $\times$ शीर्षलम्ब या (समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी)

$\therefore$ $\quad$ $510 = \frac{1}{2} \times (25+35) \times$ समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी

या समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी $= \frac{2 \times 510}{60}$

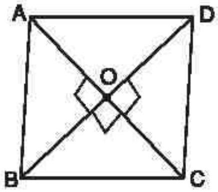
$= 17$ सेमी $\quad$ **उत्तर**

3. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज के विकर्ण इसे बराबर क्षेत्रफल वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

हल—**दिया है**— एक समचतुर्भुज $ABCD$।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल $(\Delta AOB) =$ क्षेत्रफल $(\Delta BOC) =$ क्षेत्रफल $(\Delta COD) =$ क्षेत्रफल (ΔDOA)

उपपत्ति— $\because$ $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।



$\therefore \quad AB = BC = CD = DA \quad ...(1)$

अत: ΔAOB तथा ΔBOC में, $AB = BC$ [समी॰ (1) से]

$BO = BO$ [उभयनिष्ठ]

$\angle AOB = \angle BOC$ [समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् होते हैं।]

$\therefore \quad \Delta AOB \cong \Delta BOC$

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔAOB) = क्षेत्रफल (ΔBOG) ...(2)

पुन: ΔBOC तथा ΔCOD से $BC = DC$ [समी॰ (i) से]

$OC = OC$ [उभयनिष्ठ]

$\angle BOC = \angle DOC$ [$\because$ विकर्ण परस्पर लम्बवत्]

$\therefore \quad \Delta BOC \cong \Delta COD$

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔBOC) = क्षेत्रफल (ΔCOD) ...(3)

अब ΔCOD तथा ΔDOA से $CD = AD$ [समी॰ (1) से]

$DO = DO$ [उभयनिष्ठ]

$\angle DOC = \angle AOD$ [$\because$ विकर्ण परस्पर लम्बवत है।]

$\therefore \quad \Delta COD \cong \Delta DOA$

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔCOD) = क्षेत्रफल (ΔDOA) ...(4)

पुन: ΔDOA तथा ΔAOB से $AD = AB$ [समी॰ (1) से]

$AO = AO$[उभयनिष्ठ]

$\angle AOD = \angle AOB$ [$\because$ विकर्ण परस्पर लम्बवत]

$\therefore \quad \Delta DOA \cong \Delta AOB$

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔDOA) = क्षेत्रफल (ΔAOB) ...(5)

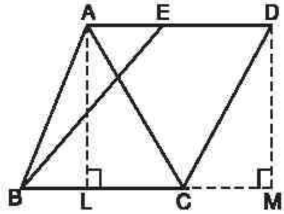
समीकरण (2), (3), (4) व (5) से

क्षेत्रफल (ΔAOB) = क्षेत्रफल (ΔBOC) = क्षेत्रफल (ΔCOD) = क्षेत्रफल (ΔDOA)

4. सिद्ध कीजिए कि यदि एक त्रिभुज और एक समान्तर चतुर्भुज एक ही आधर पर तथा समान समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल—दिया है—एक ΔABC तथा समान्तर चतुर्भुज $BCDE$ जो एक ही आधार BC पर तथा समान समान्तर रेखाओं BC तथा AD के बीच बने हैं।

सिद्ध करना है— ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समान्तर चतुर्भुज $BCDE$ का क्षेत्रफल



रचना—बिन्दु A से भुजा BC पर लम्ब AL डाला तथा बिन्दु D से BC पर लम्ब DM डाला जो बढ़ाई हुई BC से बिन्दु M पर मिलता है।

उपपत्ति—$\because$ बिन्दु A, E तथा D सरेंख है

तथा BC व AD समान्तर है

$$\therefore \qquad AL = DM \qquad \ldots(1)$$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AL$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times DM \quad \text{[समी॰ (1) से]}$$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समान्तर चतुर्भुज $BCDE$ का क्षेत्रफल **इति सिद्धम्**

5. एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 100 सेमी है। यदि उसकी समान्तर भुजाएँ 35 सेमी तथा 15 सेमी हो तो समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समान्तर भुजाओ का योग) $\times$ (समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी)

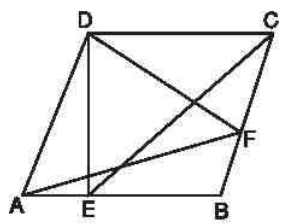
$$100 = \frac{1}{2} \times (35 + 15) \times \text{ दूरी}$$

या समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी $= \frac{2 \times 100}{50}$

$= 4$ सेमी **उत्तर**

6. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में जोकि चित्र में दर्शाया गया है E तथा F दो बिन्दु हैं, जो क्रमशः भुजाओं AB तथा BC पर स्थित हैं सिद्ध कीजिए।

क्षेत्रफल (ΔADF) = क्षेत्रफल (ΔDCE)



हल—**दिया है**— $ABCD$ समान्तर चतुर्भुज की AB तथा BC पर क्रमशः E तथा F कोई दो बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल (ΔADF) = क्षेत्रफल (ΔDCE)

उपपत्ति— ΔADF तथा समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ एक ही आधार AD तथा रेखाओं $AD || BC$ के मध्य स्थित है

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta ADF) = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज $ABCD$)

इसी प्रकार ΔDCE तथा समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ एक ही आधार DC तथा रेखाओं $DC || AB$ के मध्य स्थित है।

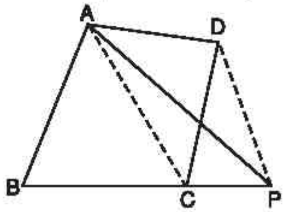
$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta DCE) = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज $ABCD$)

समीकरण (1) व (2) से

क्षेत्रफल $(\Delta ADE) =$ क्षेत्रफल (ΔDCE)

7. $ABCD$ एक चतुर्भुज है। D से AC के समान्तर खींची गई रेखा बढ़ाई गई BC को P पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल $\Delta ABP =$ क्षेत्रफल $(ABCD)$

हल—दिया है—चतुर्भुज $ABCD$ में बिन्दु D से विकर्ण AC के समान्तर एक रेखा खींची गई जो BC को बढ़ाने पर उससे बिन्दु P पर मिलती है।



सिद्ध करना है—क्षेत्रफल $(\Delta ABP) =$ क्षेत्रफल (चतुर्भुज $ABCD$)

उपपत्ति— $\because AC || DP$ तथा ΔACD तथा ΔACP समान आधार AC पर उक्त दोनों समान्तर रेखाओं के बीच स्थित है।

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta ACD) =$ क्षेत्रफल (ΔACP) ...(1)

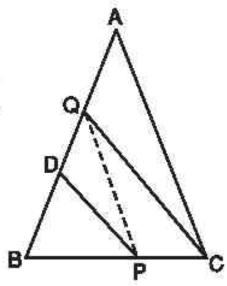
$\because$ क्षेत्रफल $(\Delta ABP) =$ क्षेत्रफल $(\Delta ABC) +$ क्षेत्रफल (ΔACP)

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta ABP) =$ क्षेत्रफल $(\Delta ABC) +$ क्षेत्रफल (ΔACD) (समी (1) से)

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta ABP) =$ क्षेत्रफल (चतुर्भुज $ABCD$) **इति सिद्धम्**

8. चित्र में ΔABC की भुजा AB का मध्य बिन्दु D है तथा P भुजा BC पर कोई बिन्दु है, PD के समान्तर रेखा CQ खींची गई है जो AB को Q पर प्रतिच्छेद करती हैं। PQ को मिलाया गया है तब सिद्ध कीजिए—

क्षेत्रफल $(\Delta BPQ) = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC)



हल—दिया है—ΔABC में AB का मध्य बिन्दु D है तथा BC पर कोई बिन्दु P दिया है। बिन्दु C से PD के समान्तर रेखा CQ है जो AB से Q पर मिलती है। रेखाखण्ड PQ को पूरा करके ΔBPQ बना है।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल $(\Delta BPQ) = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC)

रचना—बिन्दु C से AB की माध्यिका CD खींची।

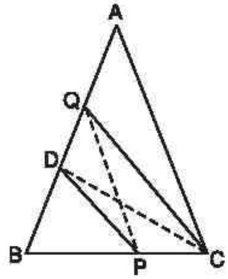
उपपत्ति— $\because PD || CQ$

तथा ΔDPQ तथा ΔDPC आधार DP पर स्थित हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta DPQ) =$ क्षेत्रफल (ΔDPC) ...(1)

$\because CD, \Delta ABC$ की माध्यिका है।

क्षेत्रफल $(\Delta BCD) =$ क्षेत्रफल (ΔACD) ...(2)



परन्तु क्षेत्रफल $(\Delta BCD)+$ क्षेत्रफल $(\Delta ACD)=$ क्षेत्रफल (ΔABC) ...(3)

समीकरण (2) व (3) से

क्षेत्रफल $(\Delta BCD)+$ क्षेत्रफल $(\Delta BCD)=$ क्षेत्रफल (ΔACD)

2 क्षेत्रफल $(\Delta BCD =)$ क्षेत्रफल (ΔABC)

या क्षेत्रफल $(\Delta BCD)=\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC)

या क्षेत्रफल (ΔBPD) + क्षेत्रफल $(\Delta DPC)=\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC)

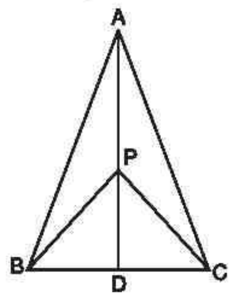
या क्षेत्रफल $(\Delta BPD)+$ क्षेत्रफल $(\Delta DPQ)=\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC) (समी० (1) से)

क्षेत्रफल $(\Delta BPQ)=\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC) इति सिद्धम्

9. त्रिभुज ABC में P माध्यिका AD पर कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए क्षेत्रफल ΔABP = क्षेत्रफल ΔACP

हल—दिया है—$AD, \Delta ABC$ की माध्यिका है तथा उस पर एक बिन्दु P है जिसे सरल रेखाओं द्वारा बिन्दुओं B तथा C से मिलाकर BP तथा CP रेखाखण्ड खींचे गए हैं।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल $(\Delta ABP)=$ क्षेत्रफल (ΔACP)



उपपत्ति— $\because$ किसी Δ की माध्यिका उसे समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बांटती है।

$\because \Delta ABC$ की माध्यिका AD है।

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta ABD)=$ क्षेत्रफल (ΔACD) ...(1)

$\because \Delta PBC$ की माध्यिका PD है।

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta BDP)=$ क्षेत्रफल (ΔCDP) ...(2)

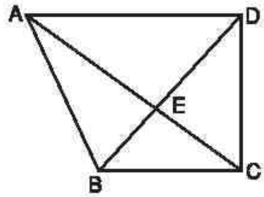
समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

क्षेत्रफल $(\Delta ABD)-$ क्षेत्रफल $(\Delta BDP)=$ क्षेत्रफल $(\Delta ACD)-$ क्षेत्रफल (ΔCDP)

$\therefore$ क्षेत्रफल $(\Delta ABP)=$ क्षेत्रफल (ΔACP) इति सिद्धम्

10. चित्र में $ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC तथा BD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए—

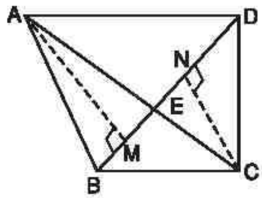
क्षेत्रफल $\Delta AED \times$ क्षेत्रफल ΔBEC = क्षेत्रफल $\Delta ABE \times$ क्षेत्रफल ΔCDE



हल—दिया है—$ABCD$ एक चतुर्भुज के विकर्ण AC तथा BD हैं जो परस्पर बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल $\Delta AED \times$ क्षेत्रफल ΔBEC = क्षेत्रफल $\Delta ABE \times$ क्षेत्रफल ΔCDE

रचना—A से BD पर लम्ब AM तथा C से BD पर लम्ब CN खींचा।



उपपत्ति—क्षेत्रफल $\Delta AED = \frac{1}{2} ED \times AM$ ...(1)

क्षेत्रफल $\Delta BEC = \frac{1}{2} BE \times CN$ ...(2)

क्षेत्रफल $\Delta ABE = \frac{1}{2} BE \times AM$ ...(3)

क्षेत्रफल $\Delta CDE = \frac{1}{2} ED \times CN$ ...(4)

अतः क्षेत्रफल $\Delta AED \times$ क्षेत्रफल ΔBEC

$$= \frac{1}{2}(ED \times AM) \times \frac{1}{2} \times (BE \times CN)$$

$$= \frac{1}{2} BE \times AM \times \frac{1}{2} ED \times CN$$

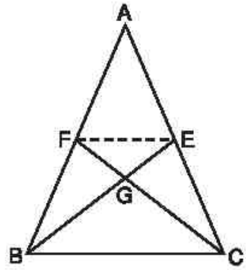
= क्षेत्रफल $\Delta ABE \times$ क्षेत्रफल ΔCDE **इति सिद्धम्**

11. त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ BE तथा CF, G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि—

क्षेत्रफल ΔGBC = क्षेत्रफल चतुर्भुज $AFGE$

हल—दिया है— ΔABC की माध्यिकाएँ BE तथा CF परस्पर बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है— क्षेत्रफल (ΔGBC) = क्षेत्रफल (चतुर्भुज $AFGE$)



रचना— FE को मिलाया

उपपत्ति— $\because$ Δ की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है।

$\therefore FE$ व BC एक-दूसरे के समान्तर हैं।

स्पष्ट है कि ΔBEF तथा ΔCEF एक ही आधार FE पर व समान समान्तर रेखाओं FE व BC के बीच बने हैं।

$\therefore$ ΔBEF का क्षेत्रफल = ΔCEF का क्षेत्रफल

या ΔBEF का क्षेत्रफल $-\Delta GEF$ का क्षेत्रफल

= ΔCEF का क्षेत्रफल $-\Delta GEF$ का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल ΔBFG = क्षेत्रफल ΔCEG ...(1)

हम जानते हैं किसी Δ की माध्यिका उस Δ को बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँटती है।

$\because BE, \Delta ABC$ की एक माध्यिका है।

$\therefore$ क्षेत्रफल ΔBEC = क्षेत्रफल ΔABE

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल ΔGBC + क्षेत्रफल ΔCEG = क्षेत्रफल (चतुर्भुज $AFGE$) + क्षेत्रफल ΔBFG

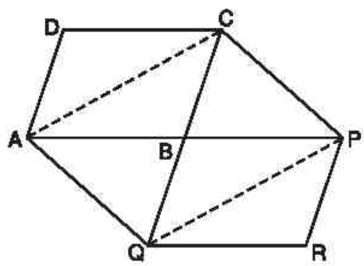
क्षेत्रफल ΔGBC + क्षेत्रफल ΔBFG = क्षेत्रफल (चतुर्भुज $AFGE$) + क्षेत्रफल ΔBFG

(समी॰ (1) से $\Delta BFG = \Delta CEG$)

क्षेत्रफल ΔGBC = क्षेत्रफल (चतुर्भुज $AFGE$)

12. चित्र में $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। बढ़ाई गई AB पर P कोई बिन्दु है। CP के समान्तर AQ खींची गई है। जोकि बढ़ाई गई CD को Q पर मिलती है। समान्तर चतुर्भुज $BQRP$ को पूरा किया गया है।

सिद्ध कीजिए कि—क्षेत्रफल ($\square ABCD$) = क्षेत्रफल ($\square BQRP$)



हल—दिया है— समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की भुजा AB को किसी बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। बिन्दु A से CP के समान्तर रेखा AQ है जो बढ़ हुई CB से Q पर मिलती है। समान्तर चतुर्भुज $BQRP$ को पूरा किया गया है।

सिद्ध करना है—

क्षेत्रफल ($\square ABCD$) = क्षेत्रफल ($\square BQRP$)

रचना—चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC तथा चतुर्भुज $BQRP$ का विकर्ण PQ खींचा

उपपत्ति— $\because AQ || CP$ तथा ΔACQ तथा ΔAPQ का आधर AQ है तथा ये इन्ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔACQ) = क्षेत्रफल (ΔAPQ)

क्षेत्रफल (ΔACB) + क्षेत्रफल (ΔABQ) = क्षेत्रफल (ΔABQ) + क्षेत्रफल (ΔBPQ)

क्षेत्रफल (ΔACB) = क्षेत्रफल (ΔBPQ) ...(1)

$\because$ ΔACB की भुजा AC समानतर चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण है और ΔBPQ की भुजा PQ समानतर चतुर्भुज $BQRP$ का विकर्ण है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔACB) $= \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ($\square ABCD$) ...(2)

तथा क्षेत्रफल (ΔBPQ) $= \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ($\square BQRP$) ...(3)

समीकरण (1),(2) व (3) से

$\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ($\square ABCD$) $= \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल ($\square BQRP$)

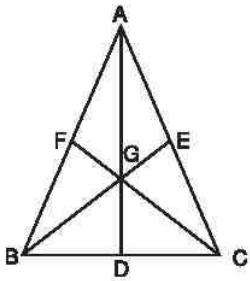
या क्षेत्रफल ($\square ABCD$) = क्षेत्रफल ($\square BQRP$) **इति सिद्धम्**

13. किसी ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE तथा CF यदि एक-दूसरे को बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं तो सिद्ध कीजिए–

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta BCG) = \frac{1}{3} \text{ क्षेत्रफल } (\Delta ABC)$$

हल—**दिया है**—एक ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE, CF एक-दूसरे को G पर प्रतिच्छेदित करती हैं।

सिद्ध करना है—क्षेत्रफल (ΔBCG) $= \frac{1}{3}$ क्षेत्रफल (ΔABC)



उपपत्ति—$\because \Delta ABC$ को माध्यिका AD दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभक्त करती हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔABD) = क्षेत्रफल (ΔACD) ...(1)

इसी प्रकार, क्षेत्रफल (ΔBDG) = क्षेत्रफल (ΔCDG) ...(2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

क्षेत्रफल (ΔABD) − क्षेत्रफल (ΔBDG) = क्षेत्रफल (ΔACD) − क्षेत्रफल (ΔCDG)

क्षेत्रफल $(\Delta ABG =)$ क्षेत्रफल (ΔACG) ...(3)

इसी प्रकार BE माध्यिका को लेकर सिद्ध कर सकते हैं कि

क्षेत्रफल (ΔABG)= क्षेत्रफल (ΔBCG) ...(4)

समीकरण (3) व (4) से

क्षेत्रफल (ΔABG) = क्षेत्रफल (ΔACG) = क्षेत्रफल (ΔBCG) क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔABG)+ क्षेत्रफल (ΔACG)+ क्षेत्रफल (ΔBCG)

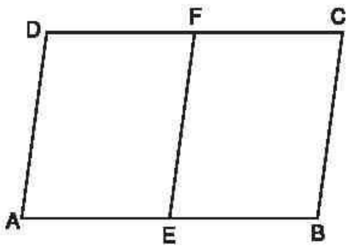
या क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔBCG)+ क्षेत्रफल (ΔBCG)+ क्षेत्रफल (ΔBCG)

क्षेत्रफल (ΔABC) = 3 क्षेत्रफल (ΔBCG)

या क्षेत्रफल $(\Delta BCG) = \frac{1}{3}$ क्षेत्रफल (ΔABC) इति सिद्धम्

14. सिद्ध कीजिए कि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड समान्तर चतुर्भुज को बराबर क्षेत्रफल वाले दो समान्तर चतुर्भुजों में बाँटता है।

हल—दिया है—$ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ AB तथा DC के मध्य बिन्दु क्रमशः E तथा F है EF को मिलाया।



सिद्ध करना है—

क्षेत्रफल $(\square AEFD)$ = क्षेत्रफल $(\square EBCF)$

उपपत्ति—$\because$ E व F क्रमशः AB तथा DC के मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ $AE = \frac{1}{2}AB = EB$ तथा $DF = \frac{1}{2}DC = FC$

$\because$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की सम्मुख भुजाएँ समानतर व बराबर होती हैं।

$\therefore$ AB व DC समान्तर हैं तथा $AB = DC$

$AE || DF$ तथा $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$

या $AE || DF$ तथा $AE = DF$

इससे प्रदर्शित होता है कि □$AEFD$ की सम्मुख भुजाओं AE व DF का एक युग्म समान्तर तथा बराबर है।

∴ $AEFD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $EBCF$ भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

∵ □$AEFD$ व □$EBCF$ बराबर आधारों AE व EB पर तथा समान समान्तर रेखाओं AD व BC के बीच बने हैं।

∴ क्षेत्रफल (□$AEFD$) = क्षेत्रफल (□$EBCF$) **इति सिद्धम्**

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 177 व 178 देखिए।

इकाई-4 निर्देशांक ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

11

कार्तीय तल
(Cartesian Plane)

अभ्यास 11.1

1. यदि बिन्दु P के निर्देशांक (–6,–2) है, तो बिन्दु किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

हल—बिन्दु (–6,–2) का भुज व कोटि दोनों ऋणात्मक हैं, अत: यह तृतीय चतुर्थाश में स्थित होगा।

2. किसी बिन्दु M के निर्देशांक (7,–2) हैं, तो वह बिन्दु M किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

हल—बिन्दु (7,–2) का भुज धनात्मक तथा कोटि ऋणात्मक है, अत: यह चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित होगा।

3. $X - Y$ तल पर निम्नलिखित बिन्दु किस चतुर्थांश में हैं?

(–2,0), (–5,–6), (3,0), (0,–2), (9,1) तथा (–3,7)

हल—बिन्दु (–2,0) का भुज ऋणात्मक तथा कोटि शुन्य है, अत: यह त्रणात्मक X– अक्ष पर स्थित होगा।

बिन्दु (–5,–6) का भुज ऋणात्मक तथा कोटि भी ऋणात्मक है,अत: यह तृतीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

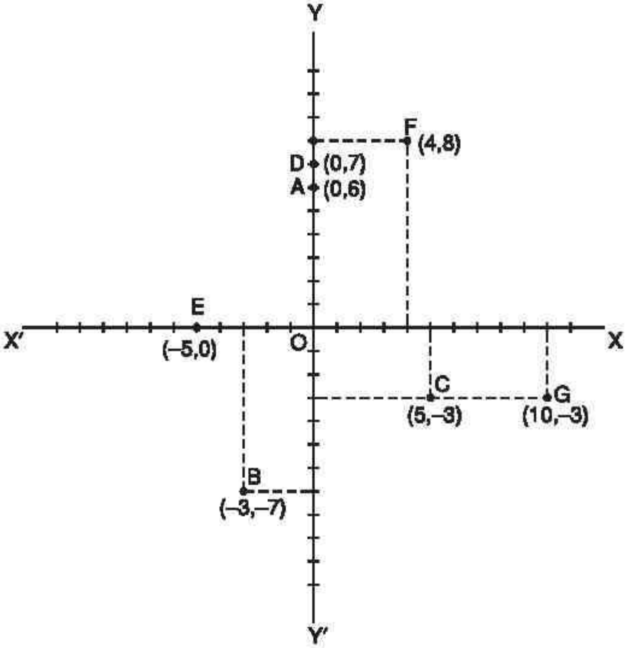
बिन्दु (3,0) का भुज धनात्मक तथा कोटि शून्य है, अत: यह धनात्मक X–अक्ष पर स्थित होगा।

बिन्दु (0,–2) का भुज शून्य तथा कोटि ऋणात्मक है अत: यह त्रणात्मक Y–अक्ष पर सिथत होगा।

बिन्दु (9,1) का भुज धनात्मक तथा कोटि भी धनात्मक है, अत: यह प्रथम चतुर्थांश में स्थित होगा।

बिन्दु (–3,7) का भुज त्रणात्मक तथा कोटि धनात्मक है अत: यह द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

4. बिन्दुओं (0,6), (–3,–7),(5,–3),(0,7), (–5,0), (4,8) तथा (10,–3) को चित्र बनाकर कार्तीय तल पर प्रदर्शित कीजिए।



हल—बिन्दु A के निर्देशांक = (0.6)

बिन्दु B के निर्देशांक = (–3,–7)

बिन्दु C के निर्देशांक = (5,–3)

बिन्दु D के निर्देशांक = (0,7)

बिन्दु E के निर्देशांक = (–5,0)

बिन्दु F के निर्देशांक = (4, 8)

बिन्दु G के निर्देशांक = (10,–3)

5. एक बिन्दु चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है। उसकी X–अक्ष तथा Y–अक्ष से दूरी क्रमशः 9 तथा 5 मात्रक है। उसके निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—बिन्दु की X–अक्ष से दूरी अर्थात् कोटि = 9

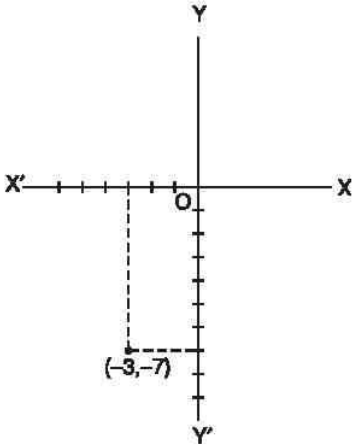
तथा Y–अक्ष से दूरी अर्थात् भुज = 5

∴ बिन्दु चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

अतः बिन्दु के निर्देशांक = (+,–) अर्थात् भुज धनात्मक तथा कोटि ऋणात्मक हैं।

∴ बिन्दु के निर्देशांक = (5,–9) उत्तर

6. कार्तीय तल में बिन्दु P(–3,–7) X–अक्ष तथा Y–अक्ष से किस ओर, तथा इनसे कितनी दूरी पर स्थित है?



हल—ऋणात्मक X-अक्ष की दिशा में 3 इकाई दूरी पर तथा ऋणात्मक Y-अक्ष की दिशा में 7 इकाई दूरी पर स्थित होगा।

अभ्यास 11.2

1. बिन्दुओं (–1,4) तथा (3,7) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $(d) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

बिन्दुओं (–1,4) तथा (3,7) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(-1-3)^2 + (4-7)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{16+9}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5 \text{ इकाई}$$ उत्तर

2. मूल बिन्दु से बिन्दु (6,8) की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—मूल बिन्दु (0,0) से बिन्दु (6,8) की दूरी

$$= \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2}$$
$$= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{36+64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10 \text{ इकाई}$$ उत्तर

3. बिन्दुओं $(2a, a)$ तथा $(a, -3a)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—बिन्दुओं $(2a, a)$ तथा $(a, -3a)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(2a-a)^2 + \{a-(-3a)\}^2}$$

$= \sqrt{a^2 + \{4a\}^2}$

$= \sqrt{a^2 + 16a^2} = \sqrt{17a^2}$

$= a\sqrt{17}$ इकाई उत्तर

4. यदि बिन्दु (9,6) तथा (a,2) के बीच की दूरी 5 इकाई हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल—सूत्र $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ से,

बिन्दुओं (9,6) तथा (a,2) के बीच की दूरी $(d) = \sqrt{(9-a)^2 + (6-2)^2}$

$= \sqrt{(9-a)^2 + 16}$

दिया है— दूरी $(d) = 5$

$\therefore \quad \sqrt{(9-a)^2 + 16} = 5$

$(9-a)^2 + 16 = (5)^2$

$(9-a)^2 = 25 - 16$

$(9-a)^2 = 9$

$(9-a)^2 = 3^2$

$9 - a = 3$

$a = 9 - 3$

$a = 6$ उत्तर

5. नीचे दिए गए बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(i) (4,5) तथा (3,–9)

हल—माना $A = (4,5)$, $B = (3,-9)$

$AB = \sqrt{(4-3)^2 + \{5-(-9)\}^2}$

$= \sqrt{1^2 + (14)^2}$

$= \sqrt{1+196}$

$= \sqrt{197}$ इकाई उत्तर

(ii) (2,0) तथा (–1,4)

हल—माना $A = (2,0)$, $B = (-1,4)$

$AB = \sqrt{\{2-(-1)\}^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25} = 5$ इकाई उत्तर

(iii) (–2,–5) तथा (8,–15)

हल—माना $A = (-2,-5)$, $B = (9,-15)$

$AB = \sqrt{(-2-8)^2 + \{-5-(-15)\}^2}$

$$= \sqrt{(-10)^2 + (10)^2}$$
$$= \sqrt{100+100}$$
$$= \sqrt{200}$$
$$= 10\sqrt{2} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(iv) मूल बिन्दु से (–6, 4)

हल—माना $A = (0,0)$ मूल बिन्दु, $B = (-6,4)$

$$AB = \sqrt{\{0-(-6)\}^2 + (0-4)^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$
$$= 2\sqrt{13} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(v) ($x\cos\theta, -x\sin\theta$) तथा ($x\sin\theta, x\cos\theta$)

हल—माना $A = (x\cos\theta, -x\sin\theta)$

$$B = (x\sin\theta, -x\cos\theta)$$
$$AB = \sqrt{(x\cos\theta, -x\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta, -x\cos\theta)^2}$$
$$= \sqrt{x^2(\cos\theta - \sin\theta)^2 + x^2(\sin\theta + \cos\theta)^2}$$
$$= x\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta} + 2\cos\theta\sin\theta$$
$$= x\sqrt{2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$
$$= x\sqrt{2} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(vi) ($ap_1^2, 2ap_1$) तथा ($ap_2^2, 2ap_2$)

हल—माना

$$A = (ap_1^2, 2ap_1)$$
$$B = (ap_2^2, 2ap_2)$$
$$Ab = \sqrt{(ap_1^2 - ap_2^2)^2 + (2ap_1 - 2ap_2)^2}$$
$$= \sqrt{a^2(p_1^2 - p_2^2)^2 + 4a^2(p_1 - p_2)^2}$$
$$= a\sqrt{(p_1 - p_2)^2(p_1 + p_2)^2 + 4(p_1 - p_2)^2}$$
$$= a(p_1 - p_2)\sqrt{\{(p_1 + p_2)^2 + 4\}} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(vii) ($2a, a$) तथा ($a, 3a$)

हल—माना $A = (2a, a)$, $B = (a, 3a)$

$$AB = \sqrt{(2a-a)^2 + (a-3a)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + (-2a)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2}$$
$$= a\sqrt{5} \text{ इकाई}$$ उत्तर

6. यदि बिन्दु (2, x) तथा (5,6) के बीच की दूरी 5 इकाई हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल—सूत्र $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ से

बिन्दुओं $(2,x)$ तथा (5,6) के बीच की दूरी (d)

$$=\sqrt{(2-5)^2+(x-6)^2}$$

$$=\sqrt{(-3)^2+(x-6)^2}$$

दिया है—दूरी (d) = 5 इकाई

$$\therefore \quad \sqrt{9+(x-6)^2}=5$$

$$9+(x-6)^2=5^2$$

$$9+(x-6)^2=25$$

$$(x-6)^2=25-9$$

$$(x-6)^2=16$$

$$(x-6)^2=4^2$$

$$x-6=4$$

$$x=4+6$$

$$x=10$$ उत्तर

7. उस बिन्दु का कोटि ज्ञात कीजिए, जिसका भुजा 8 तथा जिससे बिन्दु (2,–3) की दूरी 10 हो।

हल—माना बिन्दु की कोटि y है जिसका भुज 8 है।

∴ बिन्दु $(8,y)$

तथा बिन्दु $(8, y)$ तथा (2,–3) के बीच की दूरी = 10

सूत्र $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ से

$$=\sqrt{(8-2)^2+\{y-(-3)\}^2}$$

$$=\sqrt{6^2+(y+3)^2}$$

$$d=\sqrt{36+(y+3)^2}$$

प्रश्नानुसार, $\sqrt{36+(y+3)^2}=10$

$$36+(y+3)^2=10^2$$

$$36+(y+3)^2=100$$

$$(y+3)^2=100-36$$

$$(y+3)^2=64$$

$$(y+3)^2=8^2$$

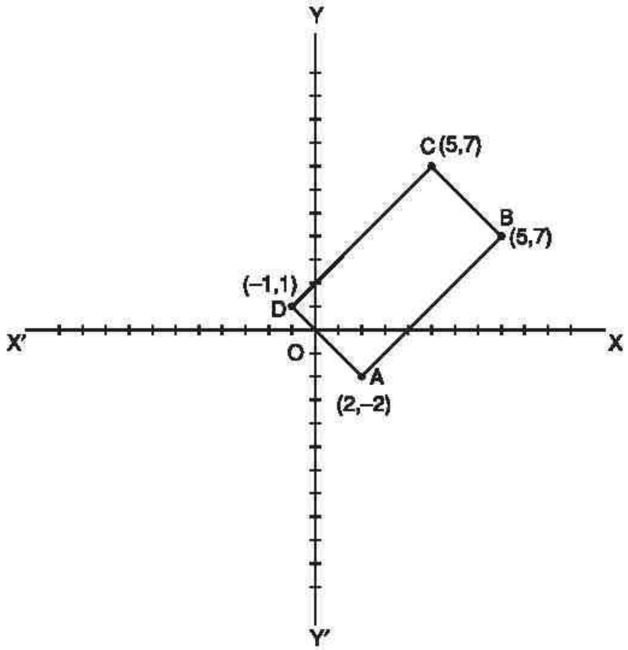
$$y+3=8$$

$$y=8-3$$

$$y=5$$ उत्तर

8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2,–2), (8,4), (5,7) तथा (–1,1) एक आयत के शीर्ष हैं।

हल—माना $A = (2,-2), B = (8,4), C = (5,7)$ तथा $D = (-1,1)$



यदि $AB = CD$ तथा $BC = DA$

तब हम कह सकते हैं कि $ABCD$ एक आयत के शीर्ष हैं।

अतः
$$AB = \sqrt{(2-8)^2 + (-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$
$$= 6\sqrt{2} \text{ इकाई}$$
$$CD = \sqrt{\{5-(-1)\}^2 + (7-1)^2}$$
$$= \sqrt{(5+1)^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$
$$= 6\sqrt{2} \text{ इकाई}$$
$$BC = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$
$$= 3\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

तथा $DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-(-2))^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$ इकाई

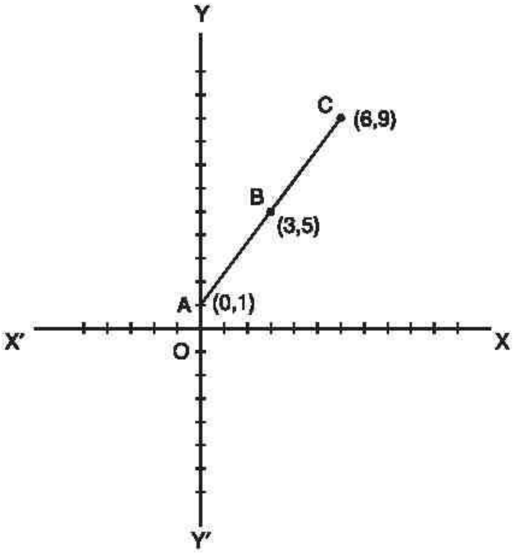
$\therefore \; AB = CD$ तथा $BC = DA$

अतः बिन्दु A, B, C व D एक आयत के शीर्ष हैं। इति सिद्धम्

9. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (0,1), (3,5) तथा (6,9) से एक रेखा खींची जा सकती है।

हल—माना $A = (0,1), B = (3,5)$ तथा $C = (6,9)$

यदि $AB + BC = AC$



तब हम कह सकते हैं कि A, B तथा C से एक रेखा खींची जा सकती है।

अतः $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ इकाई

$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (5-9)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ इकाई

तथा $AC=\sqrt{(0,6)^2+(1-9)^2}$

$=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}$

$=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}$

$= 10$ इकाई

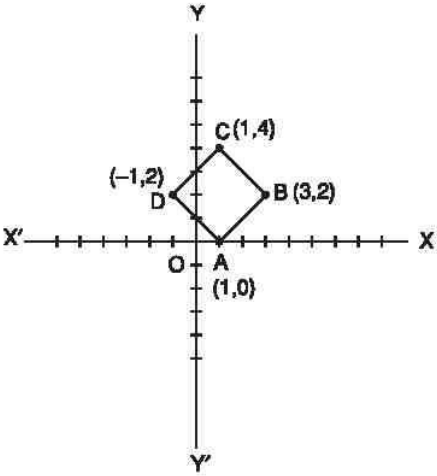
$\therefore \quad AB+BC=AC$

अत: बिन्दु A,B से C एक रेखा खींची जा सकती है। इति सिद्धम्

10. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1,0), (3,2)(1,4) तथा (–1, 2) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल—माना $A=(1,0), B=(3,2), C=(1,4)$ तथा $D=(-1,2)$

यदि $AB=BC=CD=DA$



तब हम कह सकते हैं कि $ABCD$ एक वर्ग के शीर्ष हैं।

अत: $AB=\sqrt{(1-3)^2+(0-2)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ इकाई

$BC=\sqrt{(3-1)^2+(2-4)^2}$

$=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ इकाई

$CD=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(4-2)^2}$

$=\sqrt{(2)^2+(2)^2}$

$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ इकाई

तथा $DA = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ इकाई

$\therefore \quad AB = BC = CD = DA$

अतः बिन्दु A, B, C एक D वर्ग के शीर्ष हैं।

11. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $M(3,2), N(-2,3)$ तथा $O(2,3)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष नहीं हैं।

हल—यदि $MN^2 + MO^2 = NO^2$

तब हम कह सकते हैं कि M,N तथा O एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

अतः $MN = \sqrt{\{3-(-2)\}^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{(5)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ इकाई

$MO = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ इकाई

$NO = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 0}$

$= \sqrt{16} = 4$ इकाई

$\because \quad MN^2 + MO^2 \neq NO^2$

अतः बिन्दु M,N तथा O समकोण त्रिभुज के शीर्ष नहीं हैं। इति सिद्धम्

12. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a, a), (-a, -a)$ तथा $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल—माना $A = (a, a), B = (-a, -a)$ तथा $C = (-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

यदि $AB = BC = CA$

तब हम कह सकते हैं कि ABC एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

अतः $AB = \sqrt{\{a-(-a)\}^2 + (a-(-a)^2}$

$= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2}$

$= \sqrt{4a^2 + 4a^2}$

$= \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$ इकाई

$BC = \sqrt{\{-a-(-a\sqrt{3})\}^2 + (-a-a\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{(-a+a\sqrt{3})^2 + (-a-a\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{a^2(-1+\sqrt{3})^2 + a^2(1+\sqrt{3})^2}$

$$= a\sqrt{1+3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}}$$

$$= a\sqrt{8} = 2a\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

तथा $$CA = \sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2 + (a\sqrt{3}-a)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\sqrt{3}+1)^2 + a^2(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= a\sqrt{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}$$

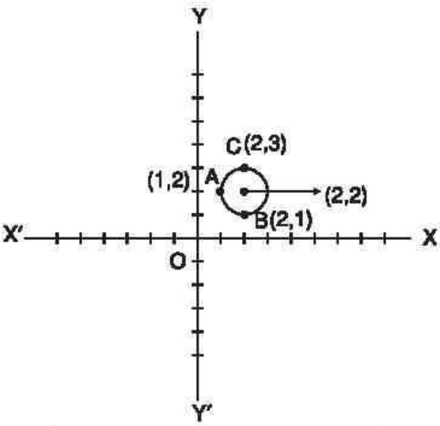
$$= a\sqrt{8} = 2a\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

$\because$ $$AB = BC = CA$$

अतः बिन्दु A, B व C एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं **इति सिद्धम्**

13. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $O(2,2)$ बिन्दुओं $A(1,2), B(2,1)$ तथा $C(2,3)$ से बने वृत्त का केन्द्र है।

हल—यदि $OA = OB = OC$



तब हम कह सकते हैं कि बिन्दु O, ABC वृत्त का केन्द्र है।

अतः $$OA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-2)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + 0}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \text{ इकाई}$$

$$OB = \sqrt{(2-2)^2 + (2-1)^2}$$

$$= \sqrt{0 + (1)^1}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \text{ इकाई}$$

$$OC = \sqrt{(2-2)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{0 + (-1)^2}$$

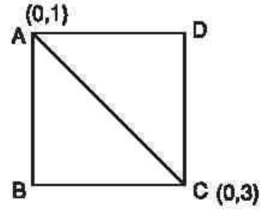
$$= \sqrt{1} = 1 \text{ इकाई}$$

$\therefore OA = OB = OC$

अतः बिन्दु O बिन्दुओं A,B,C से बने वृत्त का केन्द्र है। इति सिद्धम्

14. एक वर्ग के दो सम्मुख शीर्षों के निर्देशांक (0,–1) तथा (0,3) हैं, वर्ग के शेष दो शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना $ABCD$ एक वर्ग है। जिसके सम्मुख शीर्षों A तथा C के निर्देशांक क्रमशः (0,1) तथा (0,3) हैं। माना शीर्ष B के निर्देशांक (x, y) हैं।



$$AB = BC$$
$$\Rightarrow \quad AB^2 = BC^2$$
$$(0-x)^2 + (-1-y)^2 = (x-0) + (y-3)^2$$
$$x^2 + (-1-y)^2 = x^2 + (y-3)^2$$
$$1 + y^2 + 2y = y^2 + 9 - 6y$$
$$2y + 6y = 9 - 1$$
$$8y = 8$$
$$y = 8/8$$
$$y = 1$$

अब समकोण त्रिभुज ABC में पारथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$\{(0-x)^2 + (-1-y^2)\} + \{(x-0)^2 + (y-3)^2\} = \{(0-0)^2 + (-1-3)^2\}$$
$$x^2 + 1 + y^2 + 2y + x^2 + y^2 + 9 - 6y = 16$$
$$1 + 2x^2 + 2y^2 - 4y + 9 = 16$$

$y = 1$ रखने पर, $1 + 2x^2 + (2\times 1) - 4(1) + 9 = 16$

$$1 + 2x^2 + 2 - 4 + 9 = 16$$
$$2x^2 = 16 - 8$$
$$x^2 = 8/2$$
$$x^2 = 4 = \pm 2$$

अतः वर्ग के शेष दो शीर्षों के निर्देशांक = (–2,1) तथा (2,1) उत्तर

15. यदि बिन्दु (x, y), $(3, \sqrt{3})$ तथा $(3, -\sqrt{3})$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक हैं तब x, y के मान ज्ञात कीजिए।

हल—माना $A = (x, y), B = (3, \sqrt{3})$ तथा $C = (3, -\sqrt{3})$

$\because$ बिन्दु A,B व C समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

$$\therefore \quad AB = BC = CA$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3-3)^2 + \{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})\}^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2}$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2}$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2}$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3}-y)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=(3-x)^2+(-\sqrt{3}-y)^2$$
$$x^2+9-6x+y^2+3-2\sqrt{3}y=9+x^2-6x+3+y^2+2\sqrt{3}y$$
$$4\sqrt{3}y=0$$
$$y=0$$

y का मान समी० (1) मे रखने पर,

$$\sqrt{(x-3)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \quad (x-3)^2+3=(2\sqrt{3})^2$$
$$(x-3)^2+3=12$$
$$(x-3)^2=12-3$$
$$(x-3)^2=9$$
$$(x-3)^2=(3)^2$$
$$x-3=3$$
$$x=3+3$$
$$x=6$$

अतः $x=6$ तथा $y=0$ **उत्तर**

16. यदि बिन्दु $Q(a, b)$ उस वृत्त पर स्थित है जिसका केन्द्र (3,–2) है तथा जिसकी त्रिज्या 3 इकाई है तो सिद्ध कीजिए—

$$a^2+b^2-6a+4b+4=0$$

हल—वृत्त के केन्द्र (3,–2) तथा बिन्दु $Q(a,b)$ के बीच की दूरी = वृत्त की त्रिज्या

$$\sqrt{(3-a)^2+(-2-b)^2}=3$$
$$(3-a)^2+(-2-b)^2=9$$
$$9+a^2-6a+4+b^2+4b=9$$

या $$a^2+b^2-6a+4b+4=0$$ **इति सिद्धम्**

अभ्यास 11.3

1. बिन्दुओं (4,3) तथा (2,1) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3 : 2 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $x_1=4,\ y_1=3$

$x_2=2,\ y_2=1$

तथा $m_1=3=m_2=2$

अतः बाह्य विभाजन की स्थिति में $x=\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$

$$=\frac{3\times2-2\times4}{3-2}$$
$$=6-8=-2$$

$$x = -2$$

तथा
$$y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$
$$= \frac{3 \times 1 - 2 \times 3}{3 - 2}$$
$$= \frac{3 - 6}{1} = -3$$
$$y = -3$$

अत: निर्देशांक = (–2,–3) उत्तर

2. बिन्दुओं (8,7) तथा (6,5) का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल—माना मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $x_1 = 8,\ y_1 = 7$
$$x_2 = 6,\ y_2 = 5$$

सूत्र से— $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$
$$= \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

अत: मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (7,6) उत्तर

3. एक त्रिभुज के शीर्ष (5,4), (7,–5) तथा (3,4) हैं। तब इसके केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना केन्द्रक के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $x_1 = 5,\ y_1 = 4$
$$x_2 = 7,\ y_2 = -5$$
$$x_3 = 3,\ y_3 = 4$$

सूत्र $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ से
$$= \frac{5+7+3}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

तथा
$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} + \frac{4-5+4}{3} + \frac{3}{3} = 1$$

अत: केन्द्रक के निर्देशांक = (5,1)

4. दिए गए बिन्दुओं से खींचे गए रेखाखण्ड को दिए हुए अनुपात में अन्त: विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(i) (1,2) तथा (3,4); अनुपात 5:7

हल—माना अन्त: विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $= (x, y)$

प्रश्नानुसार, $x_1 = 1, y_1 = 2$

$x_2 = 3, y_2 = 4$

$m_1 = 5, m_2 = 7$

अत: अन्त: विभाजन की स्थिति में,

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{5\times3+7\times1}{5+7} = \frac{15+7}{12} = \frac{22}{12}$$

$$x = \frac{11}{6}$$

तथा
$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{5\times4+7\times2}{5+7} = \frac{20+14}{12} = \frac{34}{12}$$

$$y = \frac{17}{6}$$

अत: विभाजन बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{11}{6}, \frac{17}{6}\right)$ **उत्तर**

(ii) (a,b) तथा (b,a); अनुपात $(a-b):(a+b)$

हल—माना अन्त: विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $= (x, y)$

प्रश्नानुसार, $x_1 = a, y_1 = b$

$x_2 = b, y_2 = a$

$m_1 = (a-b), m_2 = (a+b)$

अत: अन्त: विभाजन की स्थिति में,

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{(a-b)b+(a+b)a}{a-b+a+b} = \frac{ab-b^2+a^2+ab}{2a}$$

$$x = \frac{a^2-b^2+2ab}{2a}$$

तथा
$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{(a-b)a+(a+b)b}{a-b+a+b} = \frac{a^2-ab+ab+b^2}{2a}$$

$$y = \frac{a^2+b^2}{2a}$$

अत: विभाजन बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{a^2-b^2+2ab}{2a}, \frac{a^2+b^2}{2a}\right)$

(iii) (–1,7) तथा (–7,4); अनुपात 2 : 3

हल—माना अन्त: विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $= (x, y)$

प्रश्नानुसार, $x_1 = -1, y_1 = -7$

$x_2 = -7, y_2 = 4$

$m_1 = 2, m_2 = 3$

अत: अन्त: विभाजन की स्थिति में,

$$x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}=\frac{2\times(-7)+(3)\times(-1)}{2+3}=\frac{-14-3}{5}=\frac{-17}{5}$$

$$y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}=\frac{2\times4+3\times7}{2+3}=\frac{8+21}{5}=\frac{29}{5}$$

अत: विभाजन बिन्दु के निर्देशांक $=\left(-\frac{17}{5},\frac{29}{5}\right)$ उत्तर

5. दिए गए बिन्दुओं से खीचें गए रेखाखण्ड को दिए हुए अनुपात में बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(i) (4,3) तथा (2,1); अनुपात 3 : 2

हल—माना बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $=(x, y)$

प्रश्नानुसार, $x_1=4,\ y_1=3$

$x_2=2,\ y_2=1$

$m_1=3,\ m_2=2$

अत: बाह्य विभाजन की स्थिति में,

$$x=\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}=\frac{3\times2-2\times4}{3-2}=\frac{6-8}{1}=-2$$

$$y=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}=\frac{3\times1-2\times3}{3-2}=\frac{3-6}{1}=-3$$

अत: विभाजन बिन्दु के निर्देशांक = (–2,–3) उत्तर

(ii) (– 4,2) तथा (0,6); अनुपात 3:4

हल—माना बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $=(x, y)$

प्रश्नानुसार, $x_1=-4,\ y_1=2$

$x_2=0,\ y_2=6$

$m_1=3,\ m_2=4$

अत: बाह्य विभाजन की स्थिति में,

$$x=\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}=\frac{3\times0-4\times(-4)}{3-4}=\frac{0+16}{-1}=-16$$

तथा $$y=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}=\frac{3\times6-4\times2}{3+4}=\frac{18-8}{-1}=-10$$

अत: विभाजन बिन्दु के निर्देशांक = (–16,–10) उत्तर

(iii) (7,2) तथा (–5,3); अनुपात 9:5

हल—माना बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $=(x, y)$

प्रश्नानुसार, $x_1=7,\ y_1=2$

$x_2=-5,\ y_2=3$

$m_1=9,\ m_2=5$

अतः बाह्य विभाजन की स्थिति में,

$$x=\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}=\frac{9\times(-5)-5\times7}{9-5}=\frac{-45-35}{4}=\frac{-80}{4}=-20$$

तथा $y=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}=\frac{9\times3-5\times2}{9-5}=\frac{27-10}{4}=\frac{17}{4}$

अतः विभाजन बिन्दु के निर्देशांक = (–20,17/ 4) उत्तर

6. निम्नलिखित बिन्दुओं से बने रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(i) (–8,6) तथा (6,–4)

हल—माना मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $x_1=-8, y_1=6$

$x_2=6, y_2=-4$

अतः सूत्र $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ से

$$=\frac{-8+6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

तथा $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$

अतः मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (–1,1) उत्तर

(ii) (7,–2) तथा (3,4)

हल—माना मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $x_1=7, y_1=-2$

$x_2=3, y_2=4$

सूत्र $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ से

$$=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=5$$

तथा $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$

अतः मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (5,1) उत्तर

(iii) (5,4) तथा (–1,0)

हल—माना मध्य बिन्दु के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $x_1=5, y_1=4$

$x_2=-1, y_2=0$

सूत्र $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ से

$$=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4+0}{2}=\frac{4}{2}=2$$

अत: मध्य बिन्दु के निर्देशांक $=(2,2)$ उत्तर

7. बिन्दु (x,y) तथा (3,6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3 : 4 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक (–1,2) हैं। x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार,
$$x_1=x, y_1=y$$
$$x_2=3, y_2=6$$
$$m_1=3, m_2=4$$
$$x=-1, y=2$$

बाह्य विभाजन की स्थिति में,
$$x=\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$$
$$-1=\frac{3\times3-4\times x}{3-4}$$
$$-1=\frac{9-4x}{-1}$$
$$=9-4x$$
$$4x=9-1$$
$$4x=8$$
$$x=8/4\Rightarrow x=2$$

तथा
$$y=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}$$
$$2=\frac{3\times6-4\times y}{3-4}$$
$$2=\frac{18-4y}{-1}$$
$$-2=18-4y$$
$$4y=18+2$$
$$y=\frac{20}{4}\Rightarrow y=5$$

अत: $x=2, y=5$

उत्तर

8. एक त्रिभुज के शीर्ष (2,–1), (3,7) तथा (1,3) हैं। त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना केन्द्रक के निर्देशांक $=(x,y)$

प्रश्नानुसार,
$$x_1=2, y_1=-1$$
$$x_2=3, y_2=7$$
$$x_3=1, x_3=3$$

सूत्र $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ से

$$=\frac{2+3+1}{3}=\frac{6}{3}=2$$

तथा $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{-1+7+3}{3}=\frac{9}{3}=3$

अत: केन्द्रक के निर्देशांक $=(2,3)$ उत्तर

9. एक रेखाखण्ड का एक अन्त्य बिन्दु के निर्देशांक (–8,13) तथा मध्य बिन्दु (–4,10) हैं। रेखाखण्ड के दूसरे अन्त्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना दूसरे अन्त्य बिन्दु के निर्देशांक $=(x_2, y_2)$

प्रश्नानुसार, $x_1=-8, y_1=13$

$$x=-4, y=10$$

सूत्र $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ से

$$-4=\frac{-8+x_2}{2}$$

$$-8=-8+x_2$$

$$x_2=-8+8$$

$$x_2=0$$

तथा $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

$$10=\frac{13+y_2}{2}$$

$$20=13+y_2$$

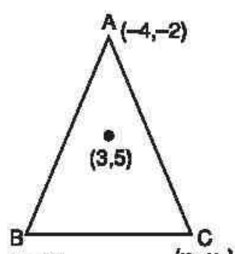
$$y_2=20-13$$

$$y_2=7$$

अत: दूसरे अन्त्य बिन्दु के निर्देशांक $=(0.7)$ उत्तर

10. एक त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (3,5) हैं। त्रिभुज के शीर्षों *A* तथा *B* के निर्देशांक क्रमश: (– 4,–2) तथा (8,10) हैं। शीर्ष *C* के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना शीर्ष C के निर्देशांक $=(x_3, y_3)$



प्रश्नानुसार, $x_1=-4, y_1=-2$

$$x_2=8, y_2=10$$

$$x=3, x=5$$

सूत्र $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ से

$$3=\frac{-4+8+x_3}{3}$$

$$9=4+x_3$$

$$x_3 = 9 - 4$$
$$x_3 = 5$$

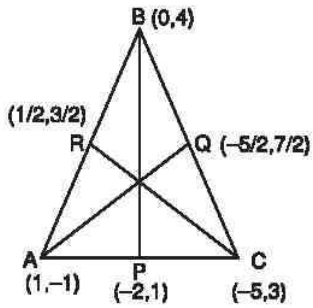
तथा $$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$
$$5 = \frac{-2+10+y_3}{3}$$
$$15 = 8 + y_3$$
$$y_3 = 15 - 8$$
$$y_3 = 7$$

अत: शीर्ष C के निद्रेशांक $= (5,7)$ **उत्तर**

11. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए जिनके शीर्षों के निर्देशांक (1,–1), (0,4) तथा (–5,3) हैं।

हल—माना ΔABC में, शीर्ष $A(1,-1), B(0,4)$ तथा $C(-5,3)$ हैं।

AC के मध्य बिन्दु (P) के निर्देशांक,



$$x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$
$$y = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ $p(-2,1)$

BC के मध्य बिन्दु (Q) के निर्देशांक,

$$x = \frac{-5+0}{2} = \frac{-5}{2}$$

$\Rightarrow$ $Q(-5/2, 7/2)$

$$y = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

AB के मध्य बिन्दु (R) के निर्देशांक,

$$x = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R(1/2, 3/2)$$
$$y = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

माध्यिका AQ की लम्बाई $= \sqrt{\left(1+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{7}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{-9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{81}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{49+81}{4}} = \sqrt{\frac{130}{4}} = \frac{\sqrt{130}}{2} \text{ इकाई}$$

माध्यिका CR की लम्बाई $= \sqrt{\left(-5\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{-11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{4}+\frac{9}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{121+9}{4}} = \sqrt{\frac{130}{4}} = \frac{\sqrt{130}}{2} \text{ इकाई}$$

तथा माध्यिका BP की लम्बाई $= \sqrt{(0+2)^2 + (4-1)^2}$

$$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ इकाई}$$

अत: त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाइयाँ $= \frac{\sqrt{130}}{2}$ इकाई

$$= \sqrt{\frac{130}{2}} \text{ इकाई तथा}$$

$$= \sqrt{13} \text{ इकाई}$$

उत्तर

12. बिन्दु $A(-4,-3)$ तथा $B(5,2)$ से खींचा गया रेखाखण्ड अक्षों द्वारा किस अनुपात में विभाजित होता है? विभाजन तथा अक्षों की स्थिति भी बताइए।

हल— माना $A = (-4,-3)$ तथा $B = (5,2)$ बिन्दुओं से खींचा गया रेखाखण्ड X-अक्ष के बिन्दु $(x,0)$ पर अनुपात $m_1 : m_2$ में विभाजित होता है विभाजन बिन्दु y का निर्देशांक

$$= \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$0 = \frac{m_1 \times 2 + m_2 (-3)}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{2m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}$$

$$2m_1 - 3m_2 = 0$$

$$2m_1 = 3m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 : m_2 = 3:2$$

अत: रेखाखण्ड AB, X-अक्ष से 3 : 2 के अनुपात में अन्त: विभजित होता है।

माना दिए गए बिन्दुओं से खींचा गया रेखाखण्ड Y-अक्ष के बिन्दु $(0,y)$ पर अनुपात $m_1 : m_2$ में विभाजित होता है।

$\therefore$ विभाजन बिन्दु x का निर्देशांक $= \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

$$0 = \frac{m_1 \times 5 + m_2 \times (-4)}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{5m_1 - 4m_2}{m_1 + m_2}$$

$$5m_1 - 4m_2 = 0$$

$$5m_1 = 4m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{5}$$

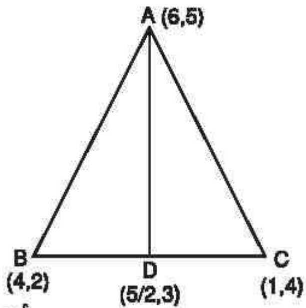
$\Rightarrow$ $$m_1 : m_2 = 4 : 5$$

अत: रेखाखण्ड Y-अक्ष से 4 : 5 के अनुपात में अन्त: विभाजित होता है। उत्तर

13. किसी त्रिभुज $(\Delta)ABC$ के शीर्ष क्रमश: $A = (6,5), B = (4,2)$ तथा $C = (1,4)$ है तथा A से होकर जाने वाली माध्यिका BC के बिन्दु D पर मिलती है। तब सिद्ध कीजिए—

$$(AB)^2 + (CA)^2 = 2(AD^2 + DC^2)$$

हल— दिया है— ΔABC के शीर्ष क्रमश: $A(6,5), B(4,2)$ तथा $C(1,4)$ हैं।



$\because$ BC के मध्य बिन्दु D के निर्देशांक

$$x = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$\therefore$ D के निर्देशांक $= \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

$$AB = \sqrt{(6-4)^2 + (5-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow (AB)^2 = 13 \text{ इकाई}$$

$$CA = \sqrt{(1-6)^2 + (4-5)^2}$$

$$= \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \Rightarrow (CA)^2 = 26 \text{ इकाई}$$

$$AD = \sqrt{\left(6 - \frac{5}{2}\right)^2 + (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + 4} = \sqrt{\frac{49+16}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}}$$

$$(AD)^2 = \frac{65}{4} \text{ इकाई}$$

$$DC = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$(DC)^2 = \frac{13}{4} \text{ इकाई}$$

$$\therefore \quad (AB)^2 + (CA)^2 = 2(AD^2 + DC^2)$$

$$13 + 26 = 2\left(\frac{65}{4} + \frac{13}{4}\right)$$

$$39 = 2\left[\frac{78}{4}\right]$$

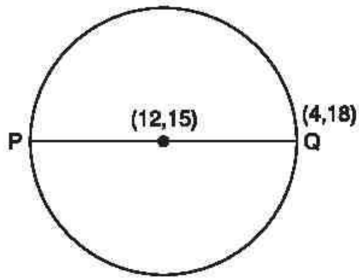
$$39 = \frac{78}{2}$$

$$39 = 39$$

इति सिद्धम्

14. PQ एक वृत्त का व्यास है। जिसके वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक (12,15) हैं तथा बिन्दु Q के निर्देशांक (4,18) है। तब बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना P के निर्देशांक $= (x_1, y_1)$



प्रश्नानुसार, $x_2 = 4, y_2 = 18$

$$x = 12, y = 15$$

सूत्र $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ से

$$\therefore \quad 12 = \frac{x_1 + 4}{2}$$

$$24 = x_1 + 4$$

$$x_1 = 24 - 4$$

$$x_1 = 20$$

तथा $$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$15 = \frac{y_1 + 18}{2}$$

$$30 = y_1 + 18$$

$$y_1 = 30 - 18$$

$$y_1 = 12$$

अत: P के निर्देशांक = (20,12) उत्तर

अभ्यास 11.4

1. यदि ΔABC के शीर्ष के निर्देशांक (7,–2), (5,1) तथा (3,4) हैं तब उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 7, y_1 = -2$

$$x_2 = 5, y_2 = 1$$

$$x_3 = 3, y_3 = 4$$

सूत्र

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ से

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[7(1-4) + 5\{4-(-2)\} + 3(-2-1)]$

$= \frac{1}{2}[7(-3) + 5(6) + 3(-3)]$

$= \frac{1}{2}[-21 + 30 - 9]$

$= \frac{1}{2}[30 - 30]$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 0$ वर्ग इकाई **उत्तर**

2. उन त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिनके शीर्षों के निर्देशांक निम्नलिखित हैं—

(i) (–5,1), (5,5) तथा (10,7)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = -5, y_1 = 1$

$x_2 = 5, y_2 = 5$

$x_3 = 10, y_3 = 7$

सूत्र

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ से

$= \frac{1}{2}[-5(5-7) + 5(7-1) + 10(1-5)]$

$= \frac{1}{2}[-5(-2) + 5(6) + 10(-4)]$

$= \frac{1}{2}[10 + 30 - 40]$

$= \frac{1}{2}[40 - 40]$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 0$ वर्ग इकाई **उत्तर**

(ii) (–5,–1), (3,–5) तथा (5,2)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = -5, y_1 = -1$

$x_2 = 3, y_2 = -5$

$x_3 = 5, y_3 = 2$

सूत्र

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ से

$= \frac{1}{2}[-5(-5-2) + 3\{2-(-1)\} + 5\{-1-(-5)\}]$

$$= \frac{1}{2}[-5(-7)+3(3)+5(4)]$$

$$= \frac{1}{2}[35+9+20]$$

$$= \frac{1}{2}[64]$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 32 वर्ग इकाई **उत्तर**

(iii) (2,4),(–3,7) तथा (–4,5)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 2, y_1 = 4$

$x_2 = -3, y_2 = 7$

$x_3 = -4, y_3 = 5$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}[2(7-5)+(-3)(5-4)+(-4)(4-7)]$$

$$= \frac{1}{2}[2(2)-3(1)-4(-3)]$$

$$= \frac{1}{2}[4-3+12]$$

$$= \frac{1}{2}[16-3]$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{13}{2}$ वर्ग इकाई **उत्तर**

(iv) $(a, c+a)$, (a, c) तथा $(-a, c-a)$

हल—प्रश्नानुसार— $x_1 = a, y_1 = c+a$

$x_2 = a, y_2 = c$

$x_3 = -a, y_3 = c-a$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}[a\{c-(c-a)\}+a\{c-a-(c+a)\}+(-a)(c+a-c)]$$

$$= \frac{1}{2}[a(a)+a(-2a)-a(a)]$$

$$= \frac{1}{2}[a^2-2a^2-a^2]$$

$$= \frac{1}{2}[-2a^2]$$

$$= -a^2$$

ऋणात्मक चिन्ह छोड़ने पर

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= a^2$ वर्ग इकाई **उत्तर**

3. सिद्ध कीजिए की दिए गए निम्नलिखित तीन बिन्दु संरेख हैं—

(i) (6,9), (0,1) तथा (–6,–7)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 6, y_1 = 9$

$x_2 = 0, y_2 = 1$

$x_3 = -6, y_3 = -7$

यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल $(\Delta) = 0$

तब दिए गए बिन्दु संरेख होंगे

$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[6\{1-(-7)\} + 0(-7-9) + (-6)(9-1)]$$

$$= \frac{1}{2}[6(8) + 0 - 6(8)]$$

$$= \frac{1}{2}[48 - 48]$$

$$\Delta = 0$$

अत: दिए गए बिन्दु संरेख हैं। इति सिद्धम्

(ii) (1,4), (3,–2) तथा (–3,16)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 1, y_1 = 4$

$x_2 = 3, y_2 = -2$

$x_3 = -3, y_3 = 16$

यदि $\Delta = 0$

तब दिए गए बिन्दु संरेख होंगे।

$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[1(-2-16) + 3(16-4) + (-3)(4-(-2))]$$

$$= \frac{1}{2}[1(-18) + 3(12) - 3(6)]$$

$$= \frac{1}{2}[-18 + 36 - 18]$$

$$= \frac{1}{2}[36 - 36] = 0$$

$\Rightarrow$ $\Delta = 0$

अत: दिए गए बिन्दु संरेख हैं। इति सिद्धम्

(iii) (2,4),(1,2) तथा (–3,–6)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 2, y_1 = 4$

$x_2 = 1, y_2 = -2$

$$x_3 = -3, y_3 = -6$$

यदि $\Delta = 0$

तब दिए गए बिन्दु संरेख होंगे।

$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[2(2-(-6)) + 1(-6-4) + (-3)(4-2)]$$

$$= \frac{1}{2}[2(8) + 1(-10) - 3(2)]$$

$$= \frac{1}{2}[16 - 10 - 6]$$

$$= \frac{1}{2}[16 - 16]$$

$\Rightarrow$ $\Delta = 0$

अत: दिए गए बिन्दु संरेख हैं। **इति सिद्धम्**

(iv) (0,1), (1,2) तथा (–2,–1)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 0, y_1 = 1$

$$x_2 = 1, y_2 = 2$$

$$x_3 = -2, y_3 = -1$$

यदि $\Delta = 0$

तब दिए गए बिन्दु संरेख होंगे।

$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[0\{2-(-1)\} + 1(-1-1) + (-2)(1-2)]$$

$$= \frac{1}{2}[0 + 1(-2) - 2(-1)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2 + 2]$$

$\Rightarrow$ $\Delta = 0$

अत: दिए गए बिन्दु संरेख हैं। **इति सिद्धम्**

(v) $(p, q+r), (q, r+p)$ तथा $(r, p+q)$

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = p, y_1 = p+r$

$$x_2 = q, y_2 = r+p$$

$$x_3 = r, y_3 = p+q$$

यदि $\Delta = 0$

तब दिए गए बिन्दु संरेख होंगे।

$$\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[p\{(r+p)-(p+q)\}+q\{(p+q)-(q+r)\}+r\{(q+r)-(r+p)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[p(r+p-p-q)+q(p+q-q-r)+r(q+r-r-p)]$$

$$= \frac{1}{2}[p(r-q)+q(p-r)+r(q-p)]$$

$$= \frac{1}{2}[pr-pq+pq-qr+qr-rp]$$

$$= \frac{1}{2}[0]$$

$$\Delta = 0$$

अतः दिए गए बिन्दु संरेख हैं। इति सिद्धम्

4. यदि बिन्दु $A(x, y), B(3,2)$ तथा $C(1,3)$ संरेख हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$$x+2y-7=0$$

हल—दिया है $(x, y), (3,2)$ तथा $(1,3)$ संरेख हैं।

$\therefore$ $\Delta = 0$

या $\frac{1}{2}[x(2-3)+3(3-y)+1(y-2)]=0$

$$\frac{1}{2}[x(-1)+3(3-y)+y-2]=0$$

$$\frac{1}{2}[-x+9-3y+y-2]=0$$

$$\frac{1}{2}[7-x-2y]=0$$

$$7-x-2y=0$$

या $x+2y-7=0$ इति सिद्धम्

5. x के किस मान के लिए बिन्दु $(x,1), (1,-1)$ तथा $(11,4)$ संरेख होंगे?

हल—बिन्दु $(x,1), (1,-1)$ तथा $(11,4)$ संरेख होंगे,

यदि $\Delta = 0$

$\therefore$ $\frac{1}{2}[x(-1-4)+1(4-1)+11\{1-(-1)\}]=0$

$$\frac{1}{2}[x(-5)+3+11(2)]=0$$

$$-5x+3+22=0$$

$$-5x+3+22=0$$

$$-5x+25=0$$

$$x=\frac{-25}{-5} \Rightarrow x=5$$

6. y के किस मान के लिए बिन्दु (2,–3), (4,y) तथा (6,–3) सरेख होंगे?

हल—बिन्दु (2,–3), (4,y) तथा (6,–3) सरेख होंगे,

यदि $\Delta = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}[2\{y-(-3)\}+4\{-3-(-3)\}+6(-3-y)]=0$$

$$\frac{1}{2}[2(y+3)+4(0)+6(-3-y)]=0$$

$$\frac{1}{2}[2y+6-18-6y]=0$$

$$\frac{1}{2}[-4y-12]=0$$

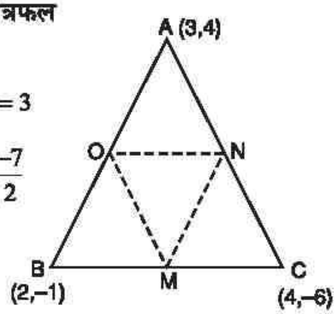
$$-4y-12=0$$

$$4y=-12$$

$$y=\frac{-12}{4} \Rightarrow y=-3$$ उत्तर

7. किसी ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(3,4), B(2,-1)$ तथा $C(4,-6)$ हैं। यदि ΔABC की भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य-बिन्दु क्रमशः M,N तथा O हैं, तब सिद्ध कीजिए—

ΔABC का क्षेत्रफल $= 4 \times \Delta MNO$ का क्षेत्रफल



हल—BC के मध्य बिन्दु M के निर्देशांक,

$$x=\frac{x_2+x_2}{2}=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-1-6}{2}=\frac{-7}{2}$$

$$\therefore \quad M(3,-7/2)$$

AC के मध्य बिन्दु N के निर्देशांक,

$$x=\frac{x_2+x_2}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-6}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$\therefore \quad N(7/2,-1)$$

AB के मध्य बिन्दु O के निर्देशांक,

$$x=\frac{x_2+x_2}{2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad O(5/2,3/2)$$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[3\{-1-(-6)\}+2(-6-4)+4\{4-(-1)\}]$

$$= \frac{1}{2}[3(5)+2(-10)+4(5)]$$

$$= \frac{1}{2}[15-20+20]$$

$$= \frac{15}{2} \text{ वर्ग इकाई} \quad ...(1)$$

ΔMNO का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left[3\left(-1-\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{2}\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}+\frac{5}{3}\left(-\frac{7}{2}-(-1)\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{-5}{2}\right)+\frac{7}{2}\left(\frac{10}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{-5}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-30+70-25}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-55+70}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{15}{4}\right]$$

$$= \frac{15}{8} \quad ...(2) \text{ (ऋणात्मक चिन्ह छोड़ने पर)}$$

समी० (1) व (2) समी० से,

ΔABC का क्षेत्रफल $= 4 \times \Delta MNO$ का क्षेत्रफल इति सिद्धम्

8. यदि $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$ हो तब सिद्ध कीजिए कि $(a,0)$, $(0,b)$ तथा $(1,-1)$ संरेख हैं।

हल—माना बिन्दु $(a,0),(0,b)$ तथा $(1,-1)$ संरेख हैं।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}[a\{b-(-1)\}+0(-1-0)+1(0-b)]=0$$

$$\frac{1}{2}[a(b+1)+0+1(-b)]=0$$

$$\frac{1}{2}[ab+a+0+(-b)]=0$$

$$ab+a-b=0$$

ab से भाग करने पर,

$$1+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=0$$

या

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$$

इति सिद्धम्

9. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (0,1),(3,5) तथा (6,9) से होकर एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

हल—यदि $\Delta = 0$

तब दिए गए बिन्दुओं से होकर एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

अतः $\frac{1}{2}[0(5-9)+3(9-1)+6(1-5)]=0$

$$\frac{1}{2}[0+3(8)+6(-4)]=0$$

$$\frac{1}{2}[24-24]=0$$

$$=0$$

अतः बिन्दुओं (0.1),(3,5) तथा (6,9) से होकर एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

इति सिद्धम्

10. उन चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिनके शीर्षों के निर्देशांक निम्नलिखित हैं—

(i) (2,1),(6,5),(3,2) तथा (7,4)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 2, y_1 = 1$

$$x_2 = 6, y_2 = 5$$

$$x_3 = 3, y_3 = 2$$

$$x_4 = 7, y_4 = 4$$

चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1) - (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 + y_4 x_1)]$

$$= \frac{1}{2}[(2\times5)+(6\times2)+(3\times4)+(7\times1) - (1\times6)-(5\times3)-(2\times7)-(4\times2)]$$

$$= \frac{1}{2}[10+12+12+7-6-15-14-8]$$

$= \frac{1}{2}[41-43] = \frac{-2}{2} = -1 = 1$ वर्ग इकाई

(ii) (0,1),(2,– 4),(4,–3) तथा (8,7)

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 0, y_1 = 1$

$$x_2 = 2, y_2 = -4$$

$$x_3 = 4, y_3 = -3$$

$$x_4 = 8, y_4 = 7$$

चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1) - (y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 + y_4 x_1)]$

$$= \frac{1}{2}[(0\times(-4)+2\times(-3)+(4\times7)+(8\times1)$$
$$-(1\times2)-(-4)\times4-(-3)\times8-(7\times0)]$$
$$= \frac{1}{2}[0-6+28+8-2+16+24-0]$$
$$= \frac{1}{2}[76-8]$$
$$= \frac{1}{2}[68] = 34 \text{ वर्ग इकाई}$$

(iii) $(-3,-5),(1,-4),(0,2)$ तथा $(5,9)$

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = -3, y_1 = -5$

$x_2 = 1, y_2 = -4$

$x_3 = 0, y_3 = 2$

$x_4 = 5, y_4 = 9$

चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1)$

$$-(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1)]$$
$$= \frac{1}{2}[(-3)\times(-4)+(1\times2)+(0\times9)+(5\times(-5))$$
$$-(-5)\times1)-(-4)\times0-(2\times5)-9\times(-3)]$$
$$= \frac{1}{2}[+12+2+0-25+5+0-10+27]$$
$$= \frac{1}{2}[46-35] = \frac{1}{2}[11]$$

$= 5.5$ वर्ग इकाई **उत्तर**

अभ्यास 11.5

1. उन बिन्दुओं के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी X-अक्ष से दूरी Y-अक्ष से दूरी के तिगुने से 2 कम है।

हल—माना चर बिन्दु $= P(h,k)$

बिन्दु P की X-अक्ष से दूरी $= k$

बिन्दु P की Y-अक्ष से दूरी $= h$

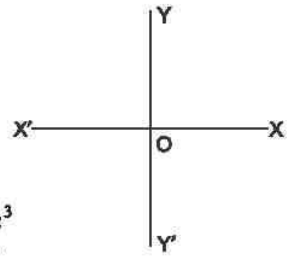
प्रतिबंध के अनुसार— $k = 3h-2$

या $3h-k=2$

अतः x तथा y निर्देशाकों में अभीष्ट समी० $3x-y=2$ **उत्तर**

2. बिन्दु $P(x, y)$ के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है–

(i) अक्षों की दूरियों के घन का योग $= a^3$



हल—चर बिन्दु $= P(h,k)$

बिन्दु P की X–अक्ष से दूरी $= k$

बिन्दु P की Y–अक्ष से दूरी $= h$

प्रश्नानुसार अक्षों की दूरियों के घन का योग $= a^3$

अर्थात् $h^3 + k^3 = a^3$

अतः x तथा y निर्देशाकों में अभीष्ट समी० $x^3 + y^3 = a^3$

उत्तर

(ii) अक्षों की दूरियों का योग = 8

हल—चर बिन्दु $= P(x, y)$

बिन्दु P की X–अक्ष से दूरी $= k$

बिन्दु P की Y–अक्ष से दूरी $= h$

प्रतिबंध के अनुसार अक्षों की दूरियों का योग $= 8$

अर्थात् $k + h = 8$

अतः x तथा y निर्देशाकों में अभीष्ट समी० $y + x = 8$

या $x + y = 8$ उत्तर

3. प्रतिबन्ध $y = 0$ तथा $x > 0$ के सामने वाले बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—माना चर बिन्दु $P(h,k)$ है, जो कि दिए हुए प्रतिबन्ध का पालन करता है। तब P के निर्देशांक $(h,0)$ है जहाँ $h > 0$

$\because$ क्रमिक युग्म का द्वितीय पद शून्य है,

अतः चर बिन्दु सदैव x–अक्ष पर स्थित है।

तथा $h > 0$ अतः अभीष्ट बिन्दुपथ y–अक्ष के ऊपर x–अक्ष जिसका अत्य बिन्दु मूल बिन्दु है, अर्थात् बिन्दुपथ OX है। उत्तर

4. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी दो स्थिर बिन्दुओं $(a,0)$ तथा $(-a,0)$ से दूरियों के वर्गों का योगफल $2c^2$ के बराबर है।

हल—माना बिन्दु $P(h,k)$

P से बिन्दु $(a,0)$ की दूरी $= \sqrt{(h-a)^2 + (k-0)^2} = \sqrt{(h-a)^2 + k^2}$

P से बिन्दु $(-a,0)$ की दूरी $= \sqrt{\{h-(-a)\}^2 + (k-0)^2} = \sqrt{(h+a)^2 + k^2}$

दिया है— $(\sqrt{(h-a)^2 + k^2})^2 + (\sqrt{(h+a)^2 + k^2})^2 = 2c^2$

$$(h-a)^2 + k^2 + (h+a)^2 + k^2 = 2c^2$$
$$h^2 + a^2 - 2ha + k^2 + h^2 + a^2 + 2ha + k^2 = 2c^2$$
$$2h^2 + 2a^2 + 2k^2 = 2c^2$$
$$2(h^2 + k^2) = 2(c^2 - a^2)$$
$$h^2 + k^2 = c^2 - a^2$$

अतः x तथा y निर्देशाकों में अभीष्ट समी०

$$x^2 + y^2 = c^2 - a^2$$ उत्तर

5. उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो दो बिन्दुओं $(a+b, a-b)$ तथा $(a-b, a+b)$ से समान दूरी (समदूरस्थ) पर हैं।

हल—माना बिन्दु $P(h,k)$

P से $\{(a+b),(a-b)\}$ की दूरी $=\sqrt{\{h-(a+b)\}^2+\{k-(a-b)\}^2}$

P से बिन्दु $\{(a-b),(a+b)\}$ की दूरी $=\sqrt{\{h-(a-b)\}^2+(k-\{a+b\})^2}$

दिया है— $\sqrt{\{h-(a+b)\}^2+\{k-(a-b)\}^2}=\sqrt{\{h-(a-b)\}^2+\{k-(a+b)\}^2}$

$$\{h-(a+b)\}^2+\{k-(a-b)\}^2=\{h-(a-b)\}^2+\{k-(a+b)\}^2$$

$$h^2+(a+b)^2-2h(a+b)+k^2+(a-b)^2-2k(a-b)$$
$$=h^2+(a-b)^2-2h(a-b)+k^2+(a+b)^2-2k(a+b)$$
$$-2h(a+b)-2k(a-b)$$
$$=-2h(a-b)-2k(a+b)$$
$$-2ah-2bh-2ak+2bk=-2ah+2bh-2ak-2bk$$
$$2bk-2bh=2bh-2bk$$
$$2bk+2bk=2bh+2bh$$
$$4bk=4bh$$

या $$k=h$$

अत: x तथा y निर्देशांकों में अभीष्ट समीकरण

$$x=y$$ उत्तर

विविध प्रश्नावली

1. बिन्दु (–4,5) कौन से चतुर्थांश में स्थित होगा?

हल—बिन्दु (–4,5) का भुज ऋणात्मक तथा कोटि धनात्मक अत: यह द्वितीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

2. बिन्दु (–6,4) की x–अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए?

हल— माना दिया हुआ बिन्दु $P(h,k)=(-6,4)$

बिन्दु P की x–अक्ष से दूरी $=k$

$= 4$ इकाई

3. बिन्दुओं $A(2,3)$ व $B(4,1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—सूत्र $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ से

$$AB=\sqrt{(2-4)^2+(3-1)^2}$$
$$=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$
$$AB=2\sqrt{2}\text{ इकाई}$$ उत्तर

4. ज्ञात कीजिए कि बिन्दुओं $(-6,10)$ और $(3,-8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $(-4,6)$ किस अनुपात में अन्त: विभाजन करता है?

हल—माना अन्त: विभाजन का अनुपात $= m_1 : m_2$

प्रश्नानुसार, $x_1 - 6, y_1 = 10$

$x_2 = 3, y_2 = -8$

$x = -4, y = 6$

अत: अन्त: विभाजन की स्थिति में

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow -4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$

$$-4(m_1 + m_2) = 3m_1 - 6m_2$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$-4m_1 - 3m_1 = 6m_2 + 4m_2$$

$$-7m_1 = -2m_2$$

$$-7m_1 + 2m_2 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

$$6(m_1 + m_2) = -8m_1 + 10m_2$$

$$6m_1 + 6m_2 = -8m_1 + 10m_2$$

$$6m_1 + 8m_1 = 10m_2 - 6m_2$$

$$14m_1 = 4m_2$$

$$7m_1 - 2m_2 = 0 \quad \ldots(2)$$

समी० (1) व समी० (2) से,

$$-7m_1 + 2m_2 = 0, \ 7m_1 - 2m_2 = 0$$

$$7m_1 = 2m_2, \ 7m_1 = 2m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}, \frac{m_m}{m_2} = \frac{2}{7}$$

अत: अनुपात $m_1 : m_2 = 2 : 7$ **उत्तर**

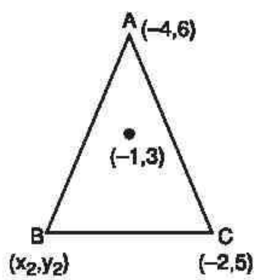
5. किसी त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (–1,3) हैं। त्रिभुज के शीर्षों A व C के निर्देशांक (– 4,6) व (–2,5) है। शीर्ष B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना शीर्ष B के निर्देशांक $= (x_2, y_2)$

प्रश्नानुसार, $x_1 = -4, y_1 = 6$

$x_3 = -2, y_3 = 5$

$x = -1, y = 3$



सूत्र $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ से

$$-1 = \frac{-4 + (x_2) + (-2)}{3}$$

$$-3 = -4 + x_2 - 2$$

$$x_2 = 6 - 3$$

$$x_2 = 3$$

तथा $$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$\Rightarrow$ $$3 = \frac{6 + y_2 + 5}{3}$$

$$9 = 11 + y_2$$

$$y_2 = 9 - 11$$

$$y_2 = -2$$

अत: शीर्ष B के निर्देशांक = (3,–2) **उत्तर**

6. बिन्दुओं $(a+b, c)$ तथा $(c+a, b)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल—माना मध्य बिन्दु = (x, y)

सूत्र $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ से

$$x = \frac{a+b+c+a}{2}$$

$$x = \frac{2a+b+c}{2}$$

तथा $$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow y = \frac{c+b}{2}$$

अत: मध्य बिन्दु $= \left(\frac{2a+b+c}{2}, \frac{c+b}{2}\right)$ **उत्तर**

7. त्रिभुज PQR के शीर्ष क्रमशः (2,4), (–1,3) तथा (5,–1) हैं। त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना केन्द्रक के निर्देशांक = (x, y)

प्रश्नानुसार, $$x_1 = 2, y_1 = 4$$

$$x_3 = -1, y_2 = 3$$

$$x_3 = 5, y_3 = -1$$

सूत्र $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ से

$$x = \frac{2 + (-1) + 5}{3}$$

$$x = \frac{2 - 1 + 5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$y=\frac{4+3+(-1)}{3}$$
$$=\frac{4+3-1}{3}=\frac{6}{3}=2$$

अतः केन्द्रक के निर्देशांक = (2,2)

8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1,0), (3,2) एवं (1,4) समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल—माना $A = (1,0), B = (3,2)$ तथा $C = (1,4)$

यदि $AB = BC$

तब हम कह सकते हैं कि ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

अतः
$$AB = \sqrt{(1-3)^2+(0-2)^2}$$
$$=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2} \text{ इकाई}$$
$$BC=\sqrt{(3-1)^2+(2-4)^2}$$
$$=\sqrt{2^2+(-2)^2}$$
$$=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$
$$=2\sqrt{2} \text{ इकाई}$$
$$AB = BC$$

अतः हम कह सकते हैं कि दिए गए बिन्दुओं से बना त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

9. एक त्रिभुज के शीर्ष (9,2) तथा (–3,1) हैं इसके तीसरे शीर्ष का मान ज्ञात कीजिए जबकि केन्द्रक के निर्देशांक (3,2) हैं।

हल—माना तीसरे शीर्ष के निर्देशांक = (x_3, y_3)

प्रश्नानुसार,
$$x_1 = 9, y_1 = 2$$
$$x_3 = -3, y_2 = 1$$
$$x = 3, y = 2$$

सूत्र $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ से

$$3=\frac{9+(-3)+x_3}{3}$$
$$9=9-3+x_3$$
$$x_3 = 9-6$$
$$x_3 = 3$$

तथा $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

$2 = \frac{2+1+y_3}{3}$

$6 = 3 + y_3$

$y_3 = 6 - 3$

$y_3 = 3$

अतः तीसरे शीर्ष के निर्देशांक = (3,3) उत्तर

10. ΔABC के शीर्ष क्रमशः (x,8), (5,1) तथा (2,0) हैं तथा केन्द्रक (4, y) तब x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = x, y_1 = 8$

$x_2 = 5, y_2 = 1$

$x_3 = 2, y_3 = 0$

$x = 4, y = y$

सूत्र $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ से

$4 = \frac{x+5+2}{3} \Rightarrow 12 = x + 7$

$x = 12 - 7 \Rightarrow x = 5$

तथा $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

$y = \frac{8+1+0}{3} \Rightarrow y = \frac{9}{3}$

$y = 3$

अतः $x = 5, y = 3$ उत्तर

11. यदि ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक $\left(2, \frac{-5}{2}\right), \left(3, \frac{-7}{2}\right)$ तथा $\left(5, \frac{-9}{2}\right)$ हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 2, y_1 = \frac{-5}{2}$

$x_2 = 3, y_2 = -\frac{7}{2}$

$x_3 = 5, y_3 = -\frac{9}{2}$

सूत्र त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_3)]$ से

$$= \frac{1}{2}\left[2\left\{\frac{-7}{2} - \left(\frac{-9}{2}\right)\right\} + 3\left\{\frac{-9}{2} - \left(\frac{-5}{2}\right)\right\} + 5\left\{\frac{-5}{2} - \left(\frac{-7}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{-7}{2} + \frac{9}{2}\right) + 3\left(\frac{-9}{2} + \frac{5}{2}\right) + 5\left(\frac{-5}{2} + \frac{7}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{2}{2}\right) + 3\left(\frac{-4}{2}\right) + 5\left(\frac{2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2 \times 1) - \frac{12}{2} + \frac{10}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[2 - 6 + 5]$$

$$= \frac{1}{2}[1] = \frac{1}{2}$$ या 0.5 वर्ग इकाई

12. सिद्ध कीजिए कि $ad = bc$ यदि बिन्दु $(a, b), (c, d)$ तथा $(a - c, b - a)$ संरेख हैं।

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = a, y_1 = b$

$x_2 = c, y_2 = d$

$x_3 = (a - c), y_3 = (b - d)$

दिए गए बिन्दु संरेख हैं।

$\therefore \quad \Delta = 0$

$$\frac{1}{2}[a\{d - (b - d)\} + c(b - d - b) + (a - c)(b - d)] = 0$$

$$\frac{1}{2}[a(d - b + d) + c(-d) + (a - c)(b - d)] = 0$$

$$\frac{1}{2}[a(2d - b) + c(-d) + (a - c)(b - d)] = 0$$

$$2ad - ab - cd + ab - ad - bc + cd = 0$$

$$ad - bc = 0$$

या $\quad ad = bc$ **इति सिद्धम्**

13. यदि बिन्दु $(7, b), (-2,6)$ तथा $(-4,0)$ संरेख हैं तो b का मान ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, $x_1 = 7, y_1 = b$

$x_2 = -2, y_2 = 6$

$x_3 = -4, y_3 = 0$

∵ दिए गए बिन्दु संरेख हैं

$$\therefore \quad \Delta = 0$$

$$\frac{1}{2}[7(6-0)+(-2)(0-b)+(-4)(b-6)]=0$$

$$\frac{1}{2}[42+2b-4b+24]=0$$

$$-2b+66=0$$

$$-2b=-66$$

$$b=\frac{66}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b=33$$ उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर के लिए पाठ्य पुस्तक की पृष्ठ संख्या 198 व 199 देखिए।