(41) $f(x) = \left\{\dfrac{\log(1+x)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right\}$ તો $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ...$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)\log(1+x) - x}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$સ્વરૂપ

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)+1-1}{2x}$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$સ્વરૂપ **જવાબ :** (B)

(42) વિધેય $f(x) = x\ \dfrac{e^{[x]+|x|} - 2}{[x]+|x|}$ હોય તો $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ...$

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : $-1 < x < 0$ માટે $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} x\ \dfrac{e^{-1-x} - 2}{-1-x} = 0$

$0 < x < 1$ માટે $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x\ \dfrac{e^{x} - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} e^x - 2 = -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. **જવાબ :** (D)

(43) $\lim\limits_{x\to 0} x^7 \left[\dfrac{1}{x^3}\right] = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $x - 1 \le [x] \le x, \ \forall x \in R$

$\therefore \dfrac{1}{x^3} - 1 < \left[\dfrac{1}{x^3}\right] \le \dfrac{1}{x^3}$

$\therefore x^7 \left(\dfrac{1}{x^3} - 1\right) \le x^7 \left[\dfrac{1}{x^3}\right] \le x^4, \quad \forall x$

$\lim\limits_{x\to 0} x^7 \left(\dfrac{1}{x^3} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7(1-x^3)}{x} = 0$

$\therefore$ સેન્ડવિચ પ્રમેય પરથી, $\lim\limits_{x\to 0} x^7 \left[\dfrac{1}{x^3}\right] = 0$ **જવાબ :** (A)

(44) શૂન્યેતર વિધેય f એ $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ પ્રકારનું છે. જો $f'(0) = 5$ અને $f'(5) = 5$, તો $f(5) = ...$

(A) 1 (B) 5 (C) 2 (D) 0

ઉકેલ : આપેલ વિધેયક સમીકરણ પરથી, $f(0) = 1$ અને $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

હવે, $5 = f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h-(-5))-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(h)}{f(-5)}-f(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(5)f(h)-f(5)}{h} \qquad \left(f(-x)=\frac{1}{f(x)}\right)$$

$$= f(5)\,f'(0) = 5f(5) \qquad \left(\frac{f(h)-1}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$$

$\therefore \quad 5 = 5\,f(5).$ આથી $f(5) = 1$ **જવાબ :** (A)

(45) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-sin^3 x}{3cos^2 x}, & x<\dfrac{\pi}{2} \\ a, & x=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{b(1-sinx)}{(\pi-2x)^2}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત હોય તો $\frac{b}{a}$ = ...

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{1-sin^3 x}{3cos^2 x}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{(1-sinx)\,(1+sin\,x+sin^2 x)}{3(1-sinx)(1+sin\,x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{b(1-sinx)}{(\pi-2x)^2}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{bcos^2 x}{4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\times\frac{1}{1+sinx}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{bsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \times \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{1}{1+sin\,x} = \frac{b}{8}$$

વિધેય f એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત હોવાથી, $\frac{1}{2} = a = \frac{b}{8}$. આથી $\frac{b}{a} = 8$ **જવાબ :** (D)

(46) $\lim_{x\to 0} \left[tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$ = ...

(A) e (B) e^2 (C) e^{-2} (D) $\frac{1}{e}$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \left[tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1+tanx}{1-tanx}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left[(1+tanx)^{\frac{1}{tanx}}\right]^{\frac{tanx}{x}}}{\lim_{x\to 0}\left[(1-tanx)^{-\frac{1}{tanx}}\right]^{\frac{-tanx}{x}}} = \frac{e^1}{e^{-1}} = e^2$$

જવાબ : (B)

(47) જો $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \le 2 \\ [x], & x > 2 \end{cases}$ તો ......

(A) $\lim_{x\to 2-} f(x) = -2$ (B) $\lim_{x\to 2+} f(x) = -2$

(C) $\lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$ (D) $\lim_{x\to 2} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 2 = f(2)$

$f(2) = |2| = 2$

જવાબ : (C)

(48) $f(x) = \begin{cases} xe^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} & x\neq 0 \\ 0 \quad ; & x=0 \end{cases}$ તો f એ $x = 0$ આગળ ......

(A) વિકલનીય છે. (B) વિકલનીય નથી પરંતુ સતત છે.

(C) વિકલનીય નથી તથા સતત પણ નથી. (D) વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xe^{\frac{-2}{x}} = 0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0$

$f(0) = 0.$ આથી $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

$$f'(0-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{-h} = 1$$

$$f'(0+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{he^{\frac{-2}{h}}}{h} = 0$$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

જવાબ : (B)

(49) જો $f(x) = \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+ax}-1}$ અને $\lim_{x\to 0} f(x) = \log_e 4$, તો a = ...

(A) $\log_e 2$ (B) 1 (C) $\log_e 2 - 1$ (D) $\log_e 2 + 1$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+ax} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\sqrt{1+ax}-1}{x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax}+1}{\frac{1+ax-1}{x}}$

$= \frac{2}{a}\log 2 = \frac{1}{a}\log 4.$ આથી $\frac{1}{a}\log_e 4 = \log_e 4.$ આથી $a = 1$ **જવાબ :** (B)

(50) જો $f'(2) = 1$ તો $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h^2) - f(2-h^2)}{2h^2} = ...$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h^2)-f(2-h^2)}{2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(2+h^2)2h - f'(2-h^2)(-2h)}{4h}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f'(2+h^2)+f'(2-h^2)}{2} = f'(2) = 1$ **જવાબ :** (B)

(51) ધારો કે [0, 1]માં વિધેય f ના દ્વિતીય વિકલિતનું અસ્તિત્વ છે અને $|f''(x)| \le 1, \forall x \in [0, 1]$. જો $f(0) = f(1)$ હોય તો, અંતરાલ (0, 1) માં

(A) $|f(x)| > 1$ (B) $|f(x)| < 1$ (C) $|f'(x)| > 1$ (D) $|f''(x)| < 1$

ઉકેલ : $f(0) = f(1)$ હોવાથી રોલના પ્રમેયની મદદથી એવો c, $0 < c < 1$ માં મળે કે જેથી $f'(c) = 0$
ધારો કે (0, 1) માં c સિવાયનું બિંદુ x છે. અંતરાલ (x, c) માં f' માટે લાગ્રાન્જના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા
$f'(x) - f'(c) = (x - c)f''(c_1) \quad (x < c_1 < c)$
$\therefore |f'(x)| = |x - c| \; |f''(c_1)| < 1 \quad (|x - c| < 1 \; |f''(c_1)| \le 1)$
$\therefore |f'(x)| < 1$ **જવાબ :** (D)

નોંધ : $[c, x]$ માં પણ આ રીતે સાબિત થાય છે.

(52) નીચેનામાંથી કયું વિધેય અંતરાલ [–1, 1] માં રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરે છે ?

(A) $f(x) = |x|\,[x]$ (B) $f(x) = [x] + [-x]$ (C) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (D) $f(x) = |x| - |\sin x|$

ઉકેલ : (A) $f(x) = |x|\,[x] = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\therefore f$ એ $x = 0$ માટે વિકલનીય નથી. $\left(f'(0-), f'(0+) = 0\right)$

(B) $f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in Z \\ -1, & x \notin Z \end{cases}$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

(C) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ અને $f(0) = 0$

$\therefore f$ એ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

(D) $f(x) = \begin{cases} x - sinx & 0 \le x \le 1 \\ -x + sinx & -1 \le x \le 0 \end{cases}$

$\therefore f$ એ $[-1, 1]$ માં સતત છે. તેમજ $(-1, 1)$માં વિકલનીય છે.

વળી, $f(-1) = f(1)$

આમ રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન થાય છે. **જવાબ :** (D)

(53) જો $y = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\ldots(1 + x^{2n})$ તો $x = 0$ આગળ $\frac{dy}{dx}$ ની કિંમત ......

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $y = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\ldots(1 + x^{2n})$

$\therefore \log y = \log(1 + x) + \log(1 + x^2) + \log(1 + x^4) + \ldots + \log(1 + x^{2n})$

વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \ldots + \frac{2n\,x^{2n-1}}{(1+x)^{2n}}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \ldots + \frac{2n\,x^{2n-1}}{(1+x)^{2n}}\right].$$ આથી $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = y(0) \cdot 1 = 1$

બીજી રીત :

$y(1 - x) = (1 - x)(1 + x)\ldots(1 + x^{2n}) = 1 - x^{4n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)(-4n\,x^{4n-1}) + (1 - x^{4n})}{(1-x)^2}$$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 1$ **જવાબ :** (C)

(54) ધારો કે $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$; $\forall\, x, y \in \mathrm{R}$. જો $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય, તો

(A) $f(x)$ એ (a, b) જ્યાં $a < 0 < b$ અંતરાલમાં વિકલનીય હોય.

(B) $f'(x) =$ અચળ

(C) f એ R પર સતત નથી.

(D) $f(x)$ એ અમુક બિંદુ સિવાય વિકલનીય છે. (IIT : 2011)

ઉકેલ : $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$x = y = 0$ મૂકતાં, $f(0) = f(0) + f(0)$. આથી $f(0) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x) + f(h) - f(x) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

$\therefore f'(x) = \lambda$, જ્યાં λ અચળ

$\therefore f(x) = \lambda x + c$, જ્યાં c અચળ

વળી, $f(0) = 0$. આથી $c = 0$

$\therefore f(x) = \lambda x$ **જવાબ :** (A), (B)

(55) જો $\lim_{x\to 0} [1+x\log(1+b^2)]^{\frac{1}{x}} = 2\, b\, sin^2\,\theta$, $b > 0$ અને $\theta \in [-\pi, \pi]$ તો $\theta =$ ......

(A) $\pm\frac{\pi}{4}$ (B) $\pm\frac{\pi}{3}$ (C) $\pm\frac{\pi}{6}$ (D) $\pm\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0}\left[[1+x\log(1+b^2)]^{\frac{1}{x\log(1+b^2)}}\right]^{\log(1+b^2)} = e^{\log(1+b^2)} = 1 + b^2$

$\therefore 1 + b^2 = 2b\, sin^2\,\theta$

$\therefore sin^2\,\theta = \frac{1+b^2}{2b} \geq 1.$ પરંતુ $sin^2\,\theta \leq 1$

$\therefore sin^2\,\theta = 1$ $(1 + b^2 \geq 2b)$

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ **જવાબ :** (D)

(56) $f(x) = [x]\, sin\, \pi\, x$, વિધેય f નું $x = k$, $k \in Z$ આગળ ડાબી બાજુનું વિકલિત ...... છે.

(A) $(-1)^k\,(k-1)\pi$ (B) $(-1)^{k-1}\,(k-1)\pi$ (C) $(-1)^k\,k\pi$ (D) $(-1)^{k-1}\,k\pi$

ઉકેલ : $f'(k-) = \lim_{h\to 0}\frac{f(k) - f(k-h)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{[k]\sin k\pi - [k-h]\sin(k-h)\pi}{h}$

$= \lim_{h\to 0} -(k-1)\frac{sin(k-h)\pi}{h}$ $\left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$ $(sin\, k\pi = 0, [k-h] = k-1)$

$= -(k-1)\lim_{h\to 0}(-\pi)\, cos\,(k-h)\pi$

$= (k-1)\,\pi\,(-1)^k$ **જવાબ :** (A)

(57) જો $f(x) = \begin{cases} -x-\frac{\pi}{2}, & x\leq -\frac{\pi}{2} \\ -cos\, x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \\ \log x, & x > 1 \end{cases}$ તો

(A) $f(x)$ એ $x = -\frac{\pi}{2}$ આગળ સતત છે. (B) $f(x)$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

(C) $f(x)$ એ $x = -\frac{3}{2}$, 1 આગળ વિકલનીય છે. (D) (A), (B), (C) સત્ય છે.

ઉકેલ : $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-}\left(-x-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+}(-cos\, x) = 0.$

$\therefore \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f(0) = 0$

$\therefore f$ એ $x = -\frac{\pi}{2}$ આગળ સતત છે.

આથી (A) સત્ય છે. વળી $f'(0+) = 1, f'(0-) = 0$. આથી (B) સત્ય છે.
$f'(1+) = 1,\ f'(1-) = 1$
$\therefore f$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

અહીં $-\frac{3}{2} > -\frac{\pi}{2}$.

$\therefore f(x) = -cos\ x$. આથી f એ $-\frac{3}{2}$ આગળ વિકલનીય છે.

આથી (C) સત્ય છે. **જવાબ :** (D)

(58) જો $y = cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(\frac{e}{x^2}\right)}{\log(ex^2)}\right) + cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(ex^4\right)}{\log\left(\frac{e^2}{x^2}\right)}\right)$, તો $\dfrac{dy}{dx} = ...$ $\quad 0<\log x<\frac{1}{2}$

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $y = cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(\frac{e}{x^2}\right)}{\log(ex^2)}\right) + cot^{-1}\left(\dfrac{\log\left(ex^4\right)}{\log\left(\frac{e^2}{x^2}\right)}\right)$

$= tan^{-1}\left(\dfrac{1+\log x^2}{1-\log x^2}\right) + tan^{-1}\left(\dfrac{2-\log x^2}{1+2\log x^2}\right)$

$= tan^{-1} 1 + tan^{-1}(\log x^2) + tan^{-1} 2 - tan^{-1}(\log x^2)$

$= tan^{-1} 1 + tan^{-1} 2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 0$

[$\log x^2 > 1$ હોય, તો પણ અચળ ઉમેરાતાં $\dfrac{dy}{dx} = 0$] **જવાબ :** (B)

(59) જો $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+100)$ અને $g(x) = f(x) f''(x) - (f'(x))^2$ તો $g(x) = 0$ ને

(A) ઉકેલ નથી. (B) એક ઉકેલ મળે.

(C) બે ઉકેલ મળે. (D) ઓછામાં ઓછા ત્રણ ઉકેલ મળે.

ઉકેલ : $log\ f(x) = \log(x+1) + \log(x+2) + \ldots + \log(x+100)$

$\therefore \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \ldots + \dfrac{1}{x+100}$

ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+100)^2} < 0$$

$\therefore\ f(x)f''(x) - (f'(x))^2 = g(x) < 0$

$\therefore\ g(x) = 0$ ને ઉકેલ ન મળે. **જવાબ :** (A)

(60) $f(x) = g'(x)\ \dfrac{e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}}}$ જ્યાં g' એ વિધેય g નું વિકલિત છે તથા સતત વિધેય છે અને $a > 0$. જો $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તો

(A) $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_n x^n$ જ્યાં $a_i \in R,\ i = 1, 2 ...n$ તથા $a_1 \neq 0\ a_n \neq 0$

(B) g એવું વિધેય હોય જ્યાં $g'(0) = 0$ (C) $g(x) = sin\ x$ (D) $g(x) = \log(1 + x)$

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1 - e^{\frac{-2a}{x}}}{1 + e^{\frac{-2a}{x}}} = 1$

અને $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^{\frac{a}{x}} - e^{\frac{-a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} + e^{\frac{-a}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^{\frac{2a}{x}} - 1}{e^{\frac{2a}{x}} + 1} = -1$

જો $g'(0) = 0$ થાય તો જ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય. **જવાબ :** (B)

(61) વિધેય f એ અનૃણ સતત વાસ્તવિક વિધેય છે. જો $x \geq 1$ માટે $f'(x) \leq p\,f(x)$, જ્યાં $p > 0$ અને $f(1) = 0$ હોય, તો $[f(\sqrt{e}) + f(\sqrt{\pi})]$

(A) $\{0\}$ (B) R^+ (C) R^- (D) $\notin R$

ઉકેલ : $(f'(x) - p\,f(x)) \leq 0$

$\therefore\ \dfrac{d}{dx}(e^{-px}f(x)) \leq 0$

ધારો કે $g(x) = e^{-px}f(x)$

હવે $g'(x) \leq 0,\ \forall\ x \geq 1$

$g(x) \leq g(1) \qquad \forall\ x \geq 1$

$\therefore\ g(x) \leq 0.$ આથી $e^{-px}f(x) \leq 0$ આથી $f(x) \leq 0,\ \forall\ x \geq 1$

પરંતુ $f(x) \geq 0.$ આથી $f(x) = 0,\ \forall\ x \geq 1$

$\therefore\ [f(\sqrt{e}) + f(\sqrt{\pi})] = 0$ **જવાબ :** (A)

(62) જો $y(n) = e^x e^{x^2} ... e^{x^n},\ 0 < x < 1$ હોય, તો $x = \frac{1}{2}$ આગળ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{dy(n)}{dx} = ...$

(A) e (B) $4e$ (C) $2e$ (D) $3e$

ઉકેલ : $y(n) = e^{x + x^2 + \cdots + x^n} = e^{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}$

$\therefore\ \dfrac{dy(n)}{dx} = e^{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}\right)$

$$= e^{\frac{x-x^{n+1}}{1-x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{dy(n)}{dx} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)} \frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)\right]$$

$$= e^{\frac{x}{1-x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$ ($0 < x < 1$. આથી જો $n \to \infty$ તો $x^{n+1} \to 0$)

$$= e^{\frac{x}{1-x}} \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\therefore \left(\lim_{n\to\infty}\frac{dy(n)}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} = 4e$$ જવાબ : (B)

(63) જો $f''(x) = \dfrac{cos(\log x)}{x}$, $f'(1) = 0$ અને $y = f\left(\dfrac{2x+3}{3-2x}\right)$ તો $\dfrac{dy}{dx}$ = ...

(A) $\dfrac{sin(\log x)}{cos\,x}$ (B) $sin\left(\log\left(\dfrac{2x+3}{3-2x}\right)\right)$

(C) $\dfrac{12}{(3-2x)^2}\ sin\left(\log\left(\dfrac{2x+3}{3-2x}\right)\right)$ (D) $\dfrac{1}{(3-2x)^2}\ sin\left(\log\left(\dfrac{2x+3}{3-2x}\right)\right)$

ઉકેલ : $f''(x) = \dfrac{cos(\log x)}{x} = \dfrac{d}{dx}\ (sin\ (\log x) + k)$

$\therefore f'(x) = sin\ (\log x) + k$. પરંતુ $f'(1) = 0$ હોવાથી $k = 0$.

$\therefore f'(x) = sin\ (\log x)$

હવે, $y = f\left(\dfrac{2x+3}{3-2x}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)$$

$$= f'\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\left(\frac{2(3-2x)+2(2x+3)}{(3-2x)^2}\right)$$

$$= sin\left(\log\left(\frac{2x+3}{3-2x}\right)\right)\frac{12}{(3-2x)^2}$$ જવાબ : (C)

(64) જો $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \end{cases}$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો a = ..., b = ...

(A) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}$ (B) $\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

ઉકેલ : $f'(1-) = (2ax)_{x=1} = 2a$

$f'(1+) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)_{x=1} = -1$

f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે.

$\therefore\ 2a = -1.$ આથી $a = -\frac{1}{2}$

વળી, f એ $x = 1$ આગળ સતત પણ થશે.

$\therefore \lim\limits_{x\to1-} f(x) = \lim\limits_{x\to1+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-} (ax^2 - b) = \lim\limits_{x\to1+} \frac{1}{x}$

$\therefore a - b = 1$ આથી $b = \frac{-3}{2}$ **જવાબ :** (A)

(65) ધારો કે f એ એવું વિધેય છે જ્યાં $f(x + y) = f(x) + f(y)$ અને $f(x) = \sin x\ g(x),\ \forall\ x, y \in R.$ જો $g(x)$ એ સતત વિધેય હોય તથા $g(0) = c$, તો $f'(x) = ...$

(A) $c \sin n$ (B) c (C) $c \cos x$ (D) $\cos x\ g'(x)$

ઉકેલ : $f'(x) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to0} \frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to0} \frac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \frac{\sin h}{h}\ g(h) = g(0) = c$ **જવાબ :** (B)

(66) જો $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{|x|+[x]}-1}{a|x|+[x]}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો $a = ...$

(A) 0 (B) $1 - e^{-1}$ (C) $(1 - e^{-1})^{-1}$ (D) $1 + e$

ઉકેલ : $x < 0$ તો $-1 < x < 0$ લેતાં $|x| = -x$ $[x] = -1$

$\lim\limits_{x\to0-} \frac{e^{|x|+[x]}-1}{a|x|+[x]} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{-x-1}-1}{-ax-1} = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

$x > 0$ તો $0 < x < 1$ લેતાં $|x| = x,\ [x] = 0$

$\lim\limits_{x\to0+} \frac{e^{|x|+[x]}-1}{a|x|+[x]} = \lim\limits_{x\to0+} \frac{e^x-1}{ax} = \frac{1}{a}$

લક્ષનું અસ્તિત્વ હોવાથી, $1 - e^{-1} = \frac{1}{a}$

$\therefore a = (1 - e^{-1})^{-1}$ **જવાબ :** (C)

(67) જો $\lim\limits_{x\to0-} \left[\frac{[x]+[x^2]+[x^3]+...+[x^{2n+1}]+n+1}{1+[x]+|x|+2x}\right] = ...$

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to0-} [x] = -1,\ [x^2] = 0,\ [x^3] = -1, ...$

$\therefore$ માંગેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x\to0-} \frac{(n+1)(-1)+n(0)+n+1}{1-1-x+2x} = 0$ **જવાબ :** (A)

(68) જો દ્વિઘાત સમીકરણ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ને બે એકબીજાના વ્યસ્ત ધન બીજ હોય તો

(A) $f'(1) = 0$ (B) $af'(1) < 0$

(C) $af'(1) > 0$ (D) $af'(1)$ વિશે કઈ તારણ ન મળે.

ઉકેલ : $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

ધારો કે α અને $\frac{1}{\alpha}$ એ $f(x)$ નાં બે ધન બીજ છે.

$\therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{-b}{a} > 2 \quad (\alpha > 0)$

$\therefore \frac{2a+b}{a} < 0.$ આથી $a(2a + b) < 0$

$\therefore af'(1) = a(2a + b) < 0 \quad (f'(x) = 2ax + b)$ **જવાબ :** (B)

(69) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_{10}(x+2)+[x+2]}{\left[x+\sum\limits_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^r\right]} =$ ...... જ્યાં $[\cdot]$ એ મહત્તમ પૂર્ણાંક ભાગ વિધેય છે.

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી

ઉકેલ : $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore [x + 2] = [x] + 2$

$\therefore$ માંગેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_{10}(x+2)+[x]+2}{[x]+2}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_{10}(x+2)}{[x]+2} + 1 = 0 + 1 = 1$ **જવાબ :** (B)

(70) જો $f(x) = \sum\limits_{r=1}^{n} tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2+(2r-1)x+(r^2-r+1)}\right)$ તો $\lim\limits_{n\to\infty} f'(0) =$ ...... $(x > 0)$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{e}{2}$ (C) e (D) –1

ઉકેલ : $f(x) = \sum\limits_{r=1}^{n} tan^{-1}\left(\dfrac{(x+r)-(x+r-1)}{1+(x+r)(x+r-1)}\right)$

$= \sum\limits_{r=1}^{n} [tan^{-1}(x + r) - tan^{-1}(x + r - 1)]$

$f(x) = (tan^{-1}(x + n) - tan^{-1} x)$. આથી $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(0) = \dfrac{1}{1+n^2} - 1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f'(0) = -1$ **જવાબ :** (D)

(71) ધારો કે $f(x)$ અને $g(x)$ એ R પર વિકલિત વિધેયો છે. જો $f(2) = 8$, $g(2) = 0$, $f(4) = 10$ અને $g(4) = 8$, તો

(A) $g'(x) > 4f'(x),\ \forall x \in (2, 4)$ (B) $g(x) > f(x),\ \forall x \in (2, 4)$

(C) કોઈક $x \in (2, 4)$ માટે $3g'(x) = 4f'(x)$ (D) કોઈક $x \in (2, 4)$ માટે $g'(x) = 4f'(x)$

ઉકેલ : ધારો કે $h(x) = g(x) - 4f(x)$

$h(2) = g(2) - 4f(2) = 0 - 4.8 = -32$

$h(4) = g(4) - 4f(4) = 8 - 4.10 = -32$

વળી, h એ $[2, 4]$ પર સતત છે તથા $(2, 4)$ પર વિકલિત છે.

$\therefore$ વિધેય h એ રોલના પ્રમેયની શરતનું સમાધાન કરે છે.

$\therefore$ કોઈક $x \in (2, 4)$ માટે $h'(x) = 0$

$\therefore \quad g'(x) = 4f'(x)$ **જવાબ :** (D)

(72) નીચેનામાંથી કયું વિધેય અંતરાલ $[0, 1]$ પર મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરતું નથી ?

(A) $f(x) = \begin{cases} x, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+x\right)^2, & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ (B) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\,|x - 1|$ (D) $f(x) = |2x - 1|$

ઉકેલ : આપેલ વિકલ્પોના વિધેયનું અવલોકન કરતા માલૂમ પડે છે કે, $f(x) = |2x - 1|$ એ $x = \frac{1}{2}$ આગળ વિકલનીય નથી.

આથી, વિકલ્પ (D)નાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિધેય મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતનું પાલન કરતું નથી. **જવાબ :** (D)

(73) $f : R \to R$ એ n ઘાતવાળું બહુપદી વિધેય છે, જ્યાં $f(x) = 0$ ને n ભિન્ન વાસ્તવિક ઉકેલો છે. સમીકરણ $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) = 0$ ને કેટલા વાસ્તવિક ઉકેલ મળે ?

(A) એક પણ નહિ (B) એક (C) બે (D) n

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ તથા $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\therefore \log f(x) = \log(x - x_1) + \log(x - x_2) + \ldots\ldots + \log(x - x_n)$

$$\therefore h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}$$

$$h'(x) = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = -\left[\frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x - x_n)^2}\right] < 0,\ \forall x$$

$\therefore f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 < 0,\ \forall x$

$\therefore$ માંગેલ સમીકરણને એકપણ વાસ્તવિક ઉકેલ મળે નહિ. **જવાબ :** (A)

(74) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = \ldots\ldots$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{12}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\sin x + x}{2}\right)\sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)}{x^4}$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\sin x + x}{2}\right)}{\frac{\sin x + x}{2}} \times \left(\frac{\sin x + x}{2}\right) \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)}{\frac{x - \sin x}{2}} \times \left(\frac{x - \sin x}{2}\right) \times \frac{1}{x^4}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{4x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \times \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \times 2 \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ સ્વરૂપ}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

જવાબ : (C)

(75) જો $x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}$ અને $y = a \sin t \sqrt{\cos 2t}$ $(a > 0)$ તો $\left| \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right|_{t=\frac{\pi}{6}} = ...$

(A) $\frac{a}{3}$ (B) $a\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3a}$ (D) $\frac{\sqrt{2}a}{3}$

ઉકેલ : $x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}$

$$\frac{dx}{dt} = a \left[\cos t \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}} (-2 \sin 2t) + \sqrt{\cos 2t} (-\sin t) \right]$$

$$= \frac{-a}{\sqrt{\cos 2t}} [\sin 2t \cos t + \sin t \cos 2t] = \frac{-a \sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

તે જ રીતે $\frac{dy}{dt} = \frac{a \cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$. આથી $\frac{dy}{dx} = -\cot 3t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2 3t \cdot 3 \frac{\sqrt{\cos 2t}}{a \sin 3t} \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}\right)$$

$$= -\frac{3}{a} \operatorname{cosec}^3 3t \sqrt{\cos 2t}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \cot^2 3t = \operatorname{cosec}^2 3t$$

હવે, $\left|\dfrac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right| = \dfrac{a}{3}\left|\dfrac{cosec^2 3t}{cosec^3 3t\sqrt{cos 2t}}\right| = \dfrac{a}{3}\left|\dfrac{1}{cosec 3t\sqrt{cos 2t}}\right|$

$t = \dfrac{\pi}{6}$ આગળ માંગેલ કિંમત $= \dfrac{a}{3}\left|\dfrac{1}{1\sqrt{\dfrac{1}{2}}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}a}{3}$ **જવાબ :** (D)

(76) $\dfrac{d^2x}{dy^2} = ...$ (AIEEE : 2011)

(A) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-2}$ (B) $-\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-3}$ (C) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$ (D) $-\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-3}$

ઉકેલ : $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right) = \dfrac{d}{dy}\left\{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}\right\}$

$= \dfrac{d}{dx}\left\{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}\right\}\dfrac{dx}{dy} = -\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-2}\dfrac{d^2y}{dx^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1} = -\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-3}\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **જવાબ :** (B)

(77) જો $f(x) = \prod_{r=1}^{18}(x-r)^{r^2(2016-r)}$, તો $\dfrac{f'(2016)}{f(2016)} = ...$

(A) અવિભાજ્ય સંખ્યા (B) અયુગ્મ વિભાજ્ય સંખ્યા (C) અસંમેય સંખ્યા (D) 0

ઉકેલ : $\log\{f(x)\} = \sum_{r=1}^{18} r^2(2016-r)\log(x-r)$

$\dfrac{1}{f(x)}f'(x) = \sum_{r=1}^{18}\dfrac{r^2(2016-r)}{x-r}$

$x = 2016$ મૂકતાં, $\dfrac{f'(2016)}{f(2016)} = \sum_{r=1}^{18}\dfrac{r^2(2016-r)}{2016-r} = \sum_{r=1}^{18} r^2 = \dfrac{18\cdot 19\cdot 37}{6} = 2019$

હવે $2019 = 3 \times 673$ **જવાબ :** (B)

(78) જો $D(x) = \begin{vmatrix} tan\,x & tan(x+h) & tan(x+2h) \\ tan(x+2h) & tan\,x & tan(x+h) \\ tan(x+h) & tan(x+2h) & tan\,x \end{vmatrix}$ તો $\lim_{h\to 0}\dfrac{D\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h^2\sqrt{3}} = ...$

(A) 144 (B) 168 (C) 138 (D) 108

ઉકેલ : $C_3 - C_2$ અને $C_2 - C_1$ કરતાં પછી $C_2\left(\frac{1}{h}\right)$, $C_3\left(\frac{1}{h}\right)$

$$\frac{D(x)}{h^2} = \begin{vmatrix} tan\,x & \dfrac{tan(x+h)-tan\,x}{h} & \dfrac{tan(x+2h)-tan(x+h)}{h} \\ tan(x+2h) & \dfrac{tan\,x-tan(x+2h)}{h} & \dfrac{tan(x+h)-tanx}{h} \\ tan(x+h) & \dfrac{tan(x+2h)-tan(x+h)}{h} & \dfrac{tan\,x-tan(x+2h)}{h} \end{vmatrix}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{tan(x+h)-tan\,x}{h} = sec^2x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{tan(x+2h)-tan(x+h)}{h} = sec^2x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-tan(x+2h)+tan\,x}{h} = -2\,sec^2x$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{D(x)}{h^2} = \begin{vmatrix} tan\,x & sec^2x & sec^2x \\ tan\,x & -2sec^2x & sec^2x \\ tan\,x & sec^2x & -2sec^2x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} tan\,x & sec^2x & sec^2x \\ 0 & -3sec^2x & 0 \\ 0 & 0 & -3\,sec^2x \end{vmatrix} \qquad (R_2 - R_1, R_3 - R_1)$$

$$= 9\ tan\ x\ sec^4\ x$$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{D\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h^2\sqrt{3}} = 144$$

જવાબ : (A)

(79) જો $a + b + c = 0$ હોય તો (0, 1) અંતરાલમાં સમીકરણ $3ax^2 + 2bx + c = 0$ ને ......

(A) ઓછામાં ઓછું એક વાસ્તવિક બીજ મળે. (B) એક વાસ્તવિક અને એક સંકર બીજ મળે.

(C) એક પણ બીજ ન મળે. (D) બે અવાસ્તવિક સંકર બીજ મળે.

ઉકેલ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ અંતરાલ [0, 1] પર સતત અને વિકલનીય છે.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

વળી, $f(0) = 0, f(1) = a + b + c = 0.$ આથી $f(0) = f(1)$

રોલના પ્રમેય પરથી ઓછામાં ઓછો એક $k \in (0, 1)$ મળે કે જેથી $f'(k) = 0$ થાય.

$\therefore 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$\therefore$ k એ $3ax^2 + 2bx + c$ નું બીજ થાય. **જવાબ :** (A)

(80) સમીકરણ $e^x \sin x = 1$ નાં બે બીજની વચ્ચે સમીકરણ $e^x \cos x = -1$ ને

(A) ઓછામાં ઓછું એક વાસ્તવિક બીજ મળે. (B) $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ હોય તેવું બીજ મળે.

(C) $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ હોય તેવું બીજ મળે. (D) એક પણ બીજ ન મળે.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = e^{-x} - sin\ x$ અને α, β $(\alpha < \beta)$ એ $f(x)$ નાં બે શૂન્ય છે. $f(x)$ એ $[\alpha, \beta]$ પર સતત અને વિકલનીય છે તથા $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

રોલના પ્રમેય પરથી ઓછામાં ઓછો એક $k \in (\alpha, \beta)$ મળે કે જેથી $f'(k) = 0$ થાય.

$\therefore\ f'(x) = -e^{-x} - cos\ x$

$f'(k) = 0 \Rightarrow -e^{-k} - cos\ k = 0 \ \Rightarrow -e^{-k}(1 + e^k cos\ k) = 0 \ \Rightarrow e^k cos\ k = -1$

$\therefore$ k એ $e^x\ cos\ x = -1$ નું બીજ થાય. **જવાબ :** (A)

(81) $\lim_{x\to 0} (1 - x + [x - 1] + [1 - x]) = ...$

જ્યાં [·] એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય છે.

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = 1 - x + [x - 1] + [1 - x]$

$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0} (1 - x - 1 + 0) = 0$ $(0 < x < 1$ લેતાં$)$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1 - x -2 + 1) = 0$ $(-1 < x < 0)$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ **જવાબ :** (A)

(82) જો $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$, તો $f'(x) = 0$ ના બીજ પૈકી ......

(A) ત્રણે બીજ ધન હોય. (B) ત્રણે બીજ ઋણ હોય.

(C) બે અવાસ્તવિક સંકર સંખ્યા હોય. (D) એક ઋણ, બે ધન હોય.

ઉકેલ : $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

અંતરાલ [1, 2], [2, 3], [3, 4] પર રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા $f'(x)$ ને (1, 2), (2, 3), (3, 4) માં એક-એક બીજ મળે. **જવાબ :** (A)

(83) જો $f(x) = \begin{cases} \int_0^x (1+|1-t|)\,dt, & x > 2 \\ 5x-7, & x \le 2 \end{cases}$ તો

(A) f એ $x = 2$ આગળ સતત નથી (B) f એ R પર વિકલનીય છે

(C) $\lim_{x\to 2_+} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી (D) f એ $x = 2$ આગળ સતત છે પરંતુ વિકલનીય નથી.

ઉકેલ : $x > 2$ માટે $f(x) = \int_0^1 (1+(1-t))\,dt + \int_1^x (1+(t-1))\,dt$

$$= \int_0^1 (2-t)\,dt + \int_1^x t\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+1, & x > 2 \\ 5x-7, & x \le 2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \left(\frac{x^2}{2}+1\right) = 3,$

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (5x - 7) = 3.$ વળી, $f(2) = 3$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ આથી f એ $x = 2$ આગળ સતત છે.

$f'(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 5, & x < 2 \end{cases}$ આથી $f'(2+) = 2$, $f'(2-) = 5$

$\therefore f'(2-) \ne f'(2+)$

$\therefore f$ એ $x = 2$ આગળ વિકલનીય નથી. **જવાબ :** (D)

(84) $f: [0, 4] \rightarrow R$ એ વિકલનીય વિધેય છે. જો અંતરાલ $(0, 4)$ માં a, b એવા મળે કે જેથી
$(f(4))^2 - (f(0))^2 = k f'(a) f(b)$ તો $k = ...$

(A) 8 (B) શક્ય નથી. (C) 4 (D) 1

ઉકેલ : મધ્યકમાન પ્રમેય પરથી $a \in (0, 4)$ એવો મળે કે જેથી $\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = f'(a)$

$\therefore f(4) - f(0) = 4f'(a)$ (1)

વળી, વિધેય f એ $[0, 4]$ પર સતત હોવાથી તે ન્યૂનતમ અને મહત્તમ વચ્ચેની બધી જ કિંમત ધારણ કરશે.

હવે $\frac{f(4) + f(0)}{2} \in (f(0), f(4))$

$\therefore$ કોઈક $b \in (0, 4)$ માટે $\frac{f(4) + f(0)}{2} = f(b)$

$\therefore f(4) + f(0) = 2 f(b)$ (2)

(1) અને (2) પરથી, $(f(4))^2 - (f(0))^2 = 8 f'(a) f(b)$

$\therefore k = 8$ **જવાબ :** (A)

(85) $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan 2x - 2x \tan x}{(1 - \cos 2x)^2} = ...$

(A) 2 (B) –2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) –1

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{x \to 0} \frac{x}{4 \sin^4 x} \left[\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} - 2\tan x\right]$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \tan x}{4x^3} \left[\frac{1}{1 - \tan^2 x} - 1\right]$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1 - 1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}\right)$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\right)$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2}$ **જવાબ :** (C)

(86) વિધેય f એ R પર વિકલનીય છે. જો $f(1) = -2$ અને $f'(x) \geq 2, \forall x \in [1, 6]$ તો,

(A) $f(6) < 2$ (B) $f(6) \geq 8$ (C) $f(6) = 5$ (D) $f(6) < 5$

ઉકેલ : મધ્ય કમાન પ્રમેય પરથી,

$\frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = f'(c)$ જ્યાં $c \in (1, 6)$

$\frac{f(6) - (-2)}{5} \geq 2$ $(f'(x) \geq 2. \ \forall x \in [1, 6])$

$\therefore f(6) \geq 8$ **જવાબ :** (B)

(87) જો $\lim_{n \to \infty} \frac{(1^a + 2^a + ... + n^a)}{(n+1)^{a-1} [(na+1) + (na+2) + ... + (na+n)]} = \frac{1}{60}$ તો $a = ...$ $(a \neq -1)$ (JEE Adv. : 2013)

(A) 5 (B) 7 (C) $\frac{-15}{2}$ (D) $\frac{-17}{2}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{r=1}^{n} r^a}{(n+1)^{a-1}\left\{n^2 a+\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{n} r^a}{n^{a-1}\cdot n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}\left\{a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}\left\{a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right\}}$$

$$\therefore \frac{1}{60} = \frac{\int_0^1 x^a\, dx}{a+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(a+1)\left(a+\frac{1}{2}\right)}$$

$\therefore (2a + 1)(a + 1) = 120$

$\therefore 2a^2 + 3a - 119 = 0$. આથી $(2a + 17)(a - 7) = 0$. આથી $a = 7$ અથવા $a = \dfrac{-17}{2}$

પરંતુ જો $a > -1$ હોય, તો જ $\int_0^1 x^a\, dx$ નું અસ્તિત્વ છે.

આથી $a = 7$ **જવાબ :** (B)

(88) નીચેનામાંથી કયું વિધેય અંતરાલ [0, 1] પર મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતનું પાલન કરતું નથી ?

(A) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}-x, & x<\frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}-x\right)^2, & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ (B) $f(x) = |x|$ (C) $f(x) = x\,|x|$ (D) $f(x) = \begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\ne 0 \\ 1, & x=0\end{cases}$

ઉકેલ : વિકલ્પ (A) માં વ્યાખ્યાયિત કરેલ વિધેય $x = \frac{1}{2}$ આગળ વિકલનીય નથી. તેથી તે અંતરાલ [0, 1] પર મધ્યકમાન વિધેયની શરતનું પાલન કરતું નથી. **જવાબ :** (A)

(89) જો $f''(0) = 4$, તો $\lim_{x\to 0} \dfrac{2f(x)-3f(2x)+f(4x)}{x^2} = \ldots\ldots$

(A) 6 (B) –6 (C) 12 (D) –12

ઉકેલ : $\lim_{x\to 0} \dfrac{2f(x)-3f(2x)+f(4x)}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{2f'(x)-6f'(2x)+4f'(4x)}{2x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ સ્વરૂપ}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{2f''(x)-12f''(2x)+16f''(4x)}{2} = 3f''(2) = 12$ **જવાબ :** (C)

(90) જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a|x^2-x-2|}{2+x-x^2}, & x<2 \\ b & , x=2 \\ \dfrac{x-[x]}{x-2} & , x>2 \end{cases}$ એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો $(a, b) = ...$

(A) (1, 2) (B) (1, 1) (C) (2, 1) (D) (2, 2)

ઉકેલ : $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)\begin{cases} <0 & x\in(-1,2) \\ >0, & x>2 \end{cases}$

$\therefore$ જો $-1 < x < 2$ તો $|x^2 - x - 2| = 2 + x - x^2$

વળી, જો $x > 2$, તો $[x] = 2$ $(2 < x < 3)$

$\therefore f(x) = \begin{cases} a, & -1<x<2 \\ b, & x=2 \\ 1, & 2<x<3 \end{cases}$ લઈ શકાય.

$\therefore$ જો $f(x)$ એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો $(a, b) = (1, 1)$ **જવાબ :** (B)

(91) જો $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(sin\,x)-sin\,x}{ax^3+bx^5+c} = \dfrac{-1}{12}$ તો

(A) $a = 2, b \in R, c = 0$ (B) $a = -2, b \in R, c = 0$

(C) $a = 1, b \in R, c = 0$ (D) $a = -1, b \in R, c = 0$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2cos\left(\dfrac{sin\,x+x}{2}\right)sin\left(\dfrac{sinx-x}{2}\right)}{ax^3+bx^5+c}$

$$\therefore \frac{-1}{12} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\,x-x}{ax^3+bx^5+c} \quad \left(\lim_{x\to 0} cos\left(\frac{sin\,x+x}{2}\right)=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{sin\left(\frac{sin\,x-x}{2}\right)}{\left(\frac{sin\,x-x}{2}\right)}=1\right)$$

$$\therefore \frac{-1}{12} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{-x^7}{7!}+...}{ax^3+bx^5+c} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{6}+\frac{x^2}{120}+.....+\infty}{a+bx^2+\frac{c}{x^3}}$$

$\therefore c = 0, b \in R, \dfrac{-1}{6a} = \dfrac{-1}{12},$ આથી $a = 2$ **જવાબ :** (A)

(92) જો $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_e(2+x)-x^{2n}\,sinx}{1+x^{2n}}$, તો

(A) $f(x)$ એ $x = 1$ આગળ સતત થાય. (B) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \log_e 3$.

(C) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = -sin\,1$. (D) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉકેલ : જો $|x| < 1$, તો $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. જો $|x| > 1$, તો $\lim\limits_{n\to\infty} x^{-2n} = 0$

$\therefore\ f(x) = \begin{cases} \log_e(2+x), & |x|<1 \\ -\sin x, & |x|>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1+} f(x) = -\sin 1,\ \lim\limits_{x\to1-} f(x) = \log 3$ **જવાબ :** (C)

(93) $\lim\limits_{x\to1} \left\{e^{\left(\frac{4}{\pi}\tan^{-1}x-1\right)}\right\}^{\frac{1}{x^2-1}} = ...$

(A) e^{π} (B) $e^{\frac{2}{\pi}}$ (C) $e^{\frac{1}{\pi}}$ (D) $e^{\frac{-1}{\pi}}$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{4}{\pi}\tan^{-1}x-1\right)\cdot\frac{1}{x^2-1}}$ $\left(\frac{0}{0}\text{સ્વરૂપ}\right)$

$= e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\frac{4}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{2x}\right)} = e^{\frac{1}{\pi}}$ **જવાબ :** (C)

(94) જો $f(x) = \begin{cases} a+\sin^{-1}(x+b), & x>1 \\ x, & x<1 \end{cases}$ એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો $a = ...,\ b = ...$

(A) 1, 1 (B) –1, –1 (C) 1, –1 (D) –1, 1

ઉકેલ : $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-(x+b)^2}}, & x>1 \\ 1, & x<1 \end{cases}$

$f'(1+) = f'(1-)$ (f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય છે)

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-(1+b)^2}} = 1$ આથી $1 = \sqrt{1-(1+b)^2}$

$\therefore 1 = 1 - (1+b)^2$

$\therefore (1+b)^2 = 0.$ આથી $b = -1$

વળી, f એ $x = 1$ આગળ સતત પણ થશે.

$\therefore \lim\limits_{x\to1+} f(x) = \lim\limits_{x\to1-} f(x)$

$\therefore a + \sin^{-1}(1-1) = 1$ ($b = -1$)

$\therefore a = 1.$ આથી $a = 1,\ b = -1$ **જવાબ :** (C)

(95) જો $f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0\le x\le2 \\ 3-x, & 2<x\le3 \end{cases}$ તો વિધેય fof કેટલાં બિંદુએ વિકલનીય ન થાય ?

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 0

ઉકેલ : વિધેય f એ એક બિંદુ $x = 2$ આગળ વિકલનીય ન થાય. f એ $x = 2$ આગળ સતત નથી.

હવે, $(fof)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(1+x), & 0\le x\le2 \\ f(3-x), & 2<x\le3 \end{cases}$

જો $0 \le x \le 1$, તો $1 \le 1 + x \le 2$

$\therefore\ f(f(x)) = f(1 + x) = 1 + 1 + x = 2 + x$

જો $1 < x \le 2$, તો $2 \le 1 + x \le 3$

$\therefore\ f(f(x)) = f(1 + x) = 3 - (1 + x) = 2 - x$

$2 < x \le 3 \Rightarrow -3 \le -x < -2 \Rightarrow 0 < 3 - x \le 1$

$\therefore\ f(f(x)) = f(3 - x) = 1 + 3 - x = 4 - x$

$\therefore$ (fof) એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી.

આમ, વિધેય fof કુલ બે બિંદુએ વિકલનીય ન થાય. **જવાબ :** (A)

(96) વિધેય $g(x)$ એ વિધેય $f(x)$ નું પ્રતિવિધેય છે. જો વિધેય $f(x)$એ R પર વિકલનીય હોય તો $g''(f(x))$ = ...

(A) $\dfrac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$ (B) $\dfrac{f'(x)f''(x)-(f'(x))^2}{f'(x)}$ (C) $\dfrac{f'(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f'(x))^2}$ (D) $\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}$

ઉકેલ : આપેલ છે કે $g(x) = f^{-1}(x)$ આથી $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

$\therefore\ x = g(f(x))$

વિકલન કરતાં,

$1 = g'(f(x))\,f'(x)$

$\therefore\ g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$g''(f(x))\,f'(x) = -\frac{1}{(f'(x))^2}\,f''(x)$$

$$\therefore\ g''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$ **જવાબ :** (A)

(97) જો $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^6+ax^5+bx^3+cx+d}-\sqrt{x^6-2x^5+x^3-x+1}\right) = 2$, તો

(A) $b = -2$ (B) $a = -2$ (C) $a = 2$ (D) $b = -5$

ઉકેલ : આપેલ લક્ષ $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+2)x^5+(b-1)x^3+(c+1)x+d-1}{\sqrt{x^6+ax^5+bx^3+cx+d}+\sqrt{x^6-2x^5+x^3-x+1}}$

$$\therefore\ 2 = \lim_{x\to\infty}\frac{(a+2)x^2+(b-1)x+\left(\dfrac{c+1}{x^2}\right)+\left(\dfrac{d-1}{x^3}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^3}+\dfrac{c}{x^5}+\dfrac{d}{x^6}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^6}}\right)}$$

લક્ષનું અસ્તિત્વ હોવાથી, $a + 2 = 0$, $\dfrac{b-1}{2} = 2$, $c, d \in \mathrm{R}$

$\therefore\ a = -2,\ b = 5,\ c, d \in \mathrm{R}$ **જવાબ :** (B)