अध्याय 5

घात और घातांक

5.1 रवि ने मोहन से प्रश्न किया कि बताओ 2011 में भारत की जनसंख्या कितनी थी ? उसने उत्तर दिया लगभग 120 करोड़। रवि ने फिर प्रश्न किया सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी कितनी है ? उसने तुरन्त जवाब दिया – लगभग 15 करोड़ किमी। रवि ने फिर प्रश्न किया – प्रकाश एक सेकण्ड में लगभग कितनी दूरी तय करता है ? उसने जवाब दिया – 3 करोड़ मी.। रवि ने फिर से प्रश्न किया– अब बताओ, राजस्थान की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार लगभग कितनी है?

मोहन ने जवाब दिया – राजस्थान की जनसंख्या 2011 में लगभग 7 करोड़ हो गयी है। अब इनको संख्या के रूप में लिखकर बताओ तो मोहन ने कहा इन संख्याओं को लिखना कठिन है। क्या इन संख्याओं को आसानी से पढ़ा, लिखा व समझा जा सकता है? हम ऐसी बड़ी संख्याओं को घात और घातांक की सहायता से आसानी से पढ़ व लिख सकते हैं। इस अध्याय में हम पूर्णांक आधार एवं घातांक पूर्ण संख्या वाली संख्याओं के बारे में अध्ययन करेंगे।

5.2 घातांक

निम्न में बार–बार दोहराए जाने वाली संख्याओं पर विचार करते हैं,

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$, $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$, $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

गुणा के नियमानुसार संक्षिप्त में हम बार–बार दोहराई जाने वाली समान संख्याओं के योग को 5×4, 6×5, 8×7 के रूप में लिखते हैं।

क्या हम गुणांक विधि से दोहराई गई संख्याओं को सरलता से जान सकेंगे? निम्न संख्याओं पर विचार करते हैं।

$4 = 2 \times 2$ $\quad 8 = 2 \times 2 \times 2$ $\quad 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

इन्हें इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$2 \times 2 = 2^2$ $\quad 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ $\quad 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

इसी प्रकार $100 = 10 \times 10 = 10^2$ $\quad 10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ $\quad 100000 = 10^5$

इसी प्रकार $9 \times 9 = 9^2$ $\quad 9 \times 9 \times 9 = 9^3$

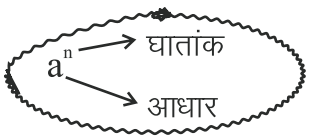
$9 \times 9 \times 9 \times$ ---------- n गुणनखण्डों तक

अरे! वाह 1 करोड़ को 10^7 लिखा जा सकता है ये तो बहुत आसान है।

यहाँ 2^3 में आधार 2 तथा घात 3 है।

2^5 में 2 आधार और 5 घातांक है।

2^5 को "2 की घात 5" पढ़ते हैं।

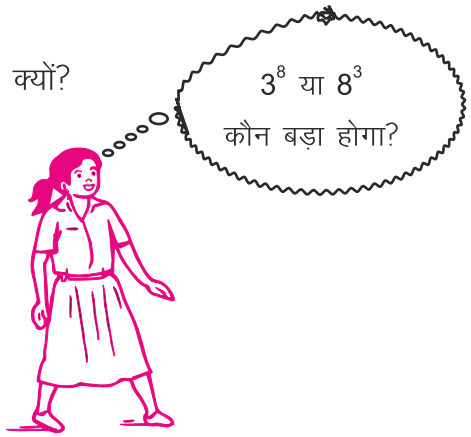


उदाहरण 1 64 को घातांक रूप में लिखिए।

हल $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः $64 = 2^6$

उदाहरण 2 3^4 और 4^3 में कौन सी संख्या बड़ी है और क्यों?



$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 81$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4$

$= 64$

आप जानते हैं $81 > 64$

अतः $3^4 > 4^3$

अर्थात् 3^4 तथा 4^3 में 3^4 बड़ी संख्या है।

उदाहरण 3 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 36 (ii) 256 (iii) 1000

(i) 36

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^2 \times 3^2$

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(ii) 256

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^8$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

(iii) 1000

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 2^3 \times 5^3$

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

उदाहरण 4 सरल कीजिए।

(i) 3×10^3 (ii) $5^2 \times 2^3$

हल (i) $3 \times 10^3 = 3 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 3 \times 1000$

$= 3000$

(ii) $5^2 \times 2^3 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 25 \times 8$

$= 200$

उदाहरण 5 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-3)^4$

हल (i) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

(ii) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= 9 \times 9 = 81$

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ (ii) $3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

(iii) $a \times a \times a \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times t \times t \times t$

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 32 (ii) 81 (iii) 343 (iv) 125

3. निम्नलिखित में बड़ी संख्या को पहचानिए।

(i) 2^5 या 5^2 (ii) 3^5 या 5^3 (iii) 3^{10} या 10^3 (iv) 7^3 या 3^7

4. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 324 (ii) 625 (iii) 1080 (iv) 1800

5. सरल कीजिए।

(i) 2×3^4 (ii) $7^3 \times 5$ (iii) $5^3 \times 2^2$ (iv) $3^2 \times 10^3$

(v) 0×10^4

6. मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^3$ (ii) $(-5)^4$ (iii) $(-4)^2 \times (-2)^3$

5.3 घातांकों के नियम

नियम 1 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणा

उदाहरण 6 $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

$$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^7$$
$$2^3 \times 2^4 = 2^{(3+4)}$$
$$= 2^7$$

ध्यान दीजिए यहाँ 2^3 और 2^4 में आधार समान है और घातांकों 3 और 4 का योगफल 7 है।

उदाहरण 7 $(-5)^2 \times (-5)^3$ को हल कीजिए।

हल

$$(-5)^2 \times (-5)^3 = [(-5) \times (-5)] \times [(-5) \times (-5) \times (-5)]$$
$$= (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$$
$$= (-5)^5$$
$$(-5)^2 \times (-5)^3 = (-5)^{2+3}$$
$$= (-5)^5$$

हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि एक शून्येतर संख्या a के लिए, जहाँ m और n कोई दो घनात्मक पूर्णांक हो, तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

नियम 2 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का भाग

आइए समान आधार परन्तु पृथक–पृथक घातों की संख्याओं का भाग करें।

उदाहरण 8 $2^7 \div 2^3$ को हल कीजिए।

हल

$$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2}$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^4$$

इस प्रकार $2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

अतः $2^7 \div 2^3 = 2^4$

उदाहरण 9 $a^4 \div a^2$ को ज्ञात कीजिए।

हल

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a}$$

अतः $a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँ m>n, तो
$a^m \div a^n = a^{m-n}$

पुनः देखिए

उदाहरण 10 $3^3 \div 3^7$ को सरल कीजिए।

हल $3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \frac{1}{3^4}$

अर्थात् $\frac{3^3}{3^7} = \frac{1}{3^{7-3}} = \frac{1}{3^4}$

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, जहाँ m < n, तो
$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

शून्य घातांक

निम्नलिखित क्रिया को देखें।

$3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$

परन्तु $3^2 \div 3^2 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3} = 1$

अतः $3^0 = 1$

उपर्युक्त में $3^0 = 1$ प्राप्त हुआ है, इसी प्रकार किसी भी आधार पर घातांक 0 (शून्य) होने पर उसका मान 1 ही होता है।

यदि a एक शून्येतर संख्या है तो $a^0 = 1$

नियम 3 घातीय संख्या की घातांक

उदाहरण 11 $[(5)^3]^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $[(5)^3]^4 = (5^3) \times (5^3) \times (5^3) \times (5^3)$

$= 5^{3+3+3+3}$

$= 5^{(3\times4)}$

अर्थात् $[(5)^3]^4 = 5^{3\times4}$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हो, तो $(a^m)^n = a^{m\times n}$

नियम 4 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

उदाहरण 12 क्या आप $2^4 \times 3^4$ को सरल कर सकते है?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान है किन्तु आधार अलग हैं।

हल $2^4 \times 3^4$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)^4$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

उपर्युक्त उदाहरण से यह निष्कर्ष निकलता है कि

नोट : ध्यान रहे कि

$a^m + b^m \neq (a+b)^m$

$a^m - b^m \neq (a-b)^m$

जैसे

$2^3 + 5^3 \neq (2+5)^3$

$2^3 - 5^3 \neq (2-5)^3$

यदि a और b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो

$a^m \times b^m = (a \times b)^m$

नियम 5 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग

उदाहरण 13 $8^5 \div 9^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9}$

$= \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$

$= \left(\frac{8}{9}\right)^5$

अर्थात् $8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \left(\frac{8}{9}\right)^5$

यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हो तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

प्रश्नावली 5.2

1. घातांक नियमों का प्रयोग करते हुए हल कीजिए।

(i) $3^7 \times 3^8$ (ii) $(4)^7 \times (4)^2$ (iii) $a^5 \times a^4$

(iv) $3^{15} \div 3^9$ (v) $t^7 \div t^4$ (vi) $(6^4 \times 6^2) \div 6^5$

(vii) $(2^6)^3$ (viii) $(a^5)^4$ (ix) $5^5 \times 8^5$

(x) $a^3 \times b^3$ (xi) $7^5 \div 6^5$ (xii) $(25^3 \times 25^7) \div 25^{10}$

(xiii) $7^5 \div 7^8$ (xiv) $(9^3)^0$

2. सरल कीजिए–

(i) $\{(3^2)^3 \times 3^4\} \div 3^7$ (ii) $16^4 \div 4^2$ (iii) $\frac{5^7}{5^4 \times 5^3}$

(iv) $4^0 \times 5^0 \times 6^0$ (v) $\frac{3^9 \times a^6}{9^2 \times a^3}$ (vi) $(7^3 \times 7)^3$

(vii) $\frac{3^{10}}{3^5 \times 3^7}$ (viii) $\frac{a^9}{a^6} \times a^8$ (ix) $2^0 + 3^0 + 4^0$

3. सरल कीजिए–

(i) $\frac{2^3 \times 7^2 \times 13^8}{56 \times 13^7}$ (ii) $\frac{(3^2)^3 \times 5^3}{9^2 \times 25}$ (iii) $\frac{2^5 \times 10^5 \times 5}{5^4 \times 4^3}$

5.4 बड़ी संख्याओं को घातांकों में प्रकट करना

निम्नांकित को देखिए।

$54 = \frac{54 \times 10}{10} = 5.4 \times 10^1$

$540 = \frac{540 \times 100}{100} = 5.4 \times 10^2$

$5400 = \frac{5400 \times 1000}{1000} = 5.4 \times 10^3$

$54000 = \frac{54000 \times 10000}{10000} = 5.4 \times 10^4$

यहाँ हमने 54, 540, 5400, 54000 को मानक रूप (Standard form) में व्यक्त किया है।

प्रकाश का वेग 300,000,000 मी/से है इसे मानक रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

मानक रूप $= 3 \times 10^8$ मी./से.

जब किसी संख्या को 1.0 या 1.0 से बड़ी या 10 से छोटी एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

5.5 किसी बड़ी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना

आप जानते हैं कि बड़ी संख्याओं की घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप में व्यक्त किया जा सकता है, आइए बड़ी संख्याओं को घातांकों के प्रयोग से मानक रूप में लिखें।

संख्या 7465 को मानक रूप में लिखते हैं।

$7465 = 7.465 \times 1000$

$= 7.465 \times 10^3$

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5.976×10^{24} किग्रा है।

अब आप इस बात से सहमत होंगे कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल है।

उदाहरण 14 संख्या 150,000,000,000 को मानक रूप में लिखिए।

हल $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

(दशमलव बिन्दु 11 स्थान बाईं ओर खिसक गया है)

मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते समय संख्याओं को 10 के समान घात में बदलते है।

उदाहरण 15 निम्नांकित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।

(i) 63000 (ii) 100000 (iii) 425000

हल (i) $63000 = 6.3 \times 10000$

$= 6.3 \times 10^4$

(ii) $100000 = 1 \times 100000$

$= 1 \times 10^5$

(iii) $425000 = 4.25 \times 100000$

$= 4.25 \times 10^5$

उदाहरण 16 जनसंख्या गणना के अनुसार किसी वर्ष भारत की जनसंख्या 1,00,84,35,405 थी। इसे वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

हल भारत की जनसंख्या = 1,00,84,35,405

$= 1.00,84,35,405 \times 1,00,00,00,000$

$= 1.008435405 \times 10^9$

$= 1.008 \times 10^9$ लगभग

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 50,0000 (ii) 48,30,000

(iii) 3,94,00,00,00,000 (iv) 30000000

(v) 180000

2. पृथ्वी की सूर्य से दूरी लगभग 15,00,00,000 किमी है। इस दूरी को वैज्ञानिक संकेतन द्वारा व्यक्त कीजिए।

3. एक व्यक्ति अपने दैनिक भोजन से प्रतिदिन औसतन 3000 कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करता है। वैज्ञानिक संकेतन में प्रदर्शित कीजिए कि वह पूरे 1 वर्ष में कितनी कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करेगा ?

4. एक अनुमान के अनुसार भारतीय रेल एक दिन में लगभग 1 करोड़ 30 लाख यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान पर पहुँचाती है। बताइए कि 30 दिनों में कितने यात्री रेल से यात्रा करते हैं। उत्तर मानक रूप में दीजिए।

5. निम्नांकित को सरल रूप में लिखिए।

(i) $2.5 \times (10)^4$ (ii) $1.75 \times (10)^6$

(iii) $1.21 \times (10)^{-8}$ (iv) $4.50 \times (10)^{-5}$

हमने सीखा

1. संख्याएँ घातांकीय रूप में प्रकट की जा सकती हैं। घातांकों के प्रयोग से बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं को पढ़ना, समझना, तुलना करना और उन पर संक्रियाएँ करना सरल होता है।

2. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो संक्षेप में इस प्रकार है। किन्हीं शून्येतर संख्याओं a और b तथा धनात्मक पूर्णांकों m और n के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ यदि $m>n$ या $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ यदि $n > m$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

3. वैज्ञानिक संकेतन या मानक रूप में किसी संख्या को व्यक्त करने के लिए संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है तथा 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।