

قوت نما اور جذر المکعب

3

آئیے ذرا یاد کریں



گزشتہ جماعت میں ہم نے قوت نما اور ان کے اصولوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

● $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ، اس ضربی صورت میں دیے ہوئے عدد کو مختصراً 2^5 لکھتے ہیں۔

یہاں 2 اساس (قاعدہ) اور 5 قوت نما ہے۔ ' 2^5 ' یہ قوت نمائی عدد ہے۔

● قوت نما کے اصول : m اور n صحیح اعداد ہوں تو

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

(v) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

● قوت نماؤں کے اصول کا استعمال کر کے درج ذیل مثالوں میں خالی چوکوں کو مناسب عدد سے پُر کیجیے۔

(i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

(iv) $5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

(vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$

آئیے سمجھ لیں



ناطق قوت نما والے اعداد کا مطلب (The number with rational index) :

(I) کسی عدد کا قوت نما $\frac{1}{n}$ ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

اعداد کا قوت نما $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\dots$ ، $\frac{1}{n}$ صورت میں ہو تو ایسے ناطق اعداد کا مطلب سمجھیں گے۔

کسی عدد کا مربع ظاہر کرنے کے لیے اس کا قوت نما 2 لکھتے ہیں اور عدد کے جذر المربع کو ظاہر کرنے کے لیے اس کی قوت نما $\frac{1}{2}$ لکھتے ہیں۔

مثلاً 25 کے جذر المربع کو ' $\sqrt{\quad}$ ' جذر کی علامت کا استعمال کر کے ہم $\sqrt{25}$ لکھتے ہیں۔

قوت نما کا استعمال کر کے اس عدد کو $25^{\frac{1}{2}}$ لکھتے ہیں۔ لہذا $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$

عام طور پر عدد a کے مربع کو a^2 لکھتے ہیں تو a کے جذر المربع کو $\sqrt[2]{a}$ یا $\sqrt{a}$ یا $a^{\frac{1}{2}}$ لکھتے ہیں۔

اسی طرح عدد a کے مکعب کو a^3 لکھتے ہیں تو a کے جذر المکعب کو $\sqrt[3]{a}$ یا $a^{\frac{1}{3}}$ لکھتے ہیں۔

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ جیسے،}$$

∴ 64 کے جذور المکعب کو $\sqrt[3]{64}$ یا $(64)^{\frac{1}{3}}$ لکھتے ہیں۔ ذہن نشین رکھیے کہ $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ یعنی 3 کی 5 ویں قوت 243 ہے۔}$$

اس کے برعکس 243 کے پانچویں جذور کو $(243)^{\frac{1}{5}}$ یا $\sqrt[5]{243}$ لکھتے ہیں۔

$$\therefore (243)^{\frac{1}{5}} = 3$$

عام طور پر a کے n ویں جذور کو $a^{\frac{1}{n}}$ لکھتے ہیں۔ مثلاً

$$(i) \quad 128^{\frac{1}{7}} = \text{128 کا 7 واں جذور}$$

$$(ii) \quad 900^{\frac{1}{12}} = \text{900 کا 12 واں جذور}$$

$$x^5 = 10 \text{ ہو تو } 10^{\frac{1}{5}} = x \text{ ذہن نشین رکھیے کہ}$$

مشقی سیٹ 3.1

1. قوت نما کا استعمال کر کے ذیل کے عدد لکھیے۔

$$(1) \quad 13 \text{ کا 5 واں جذور} \quad (2) \quad 9 \text{ کا چھٹا جذور} \quad (3) \quad 256 \text{ کا جذور المربع}$$

$$(4) \quad 17 \text{ کا جذور المکعب} \quad (5) \quad 100 \text{ کا آٹھواں جذور} \quad (6) \quad 30 \text{ کا ساتواں جذور}$$

2. درج ذیل قوت نمائی عدد، کس عدد کا کون سا جذور ہے۔ اسے لکھیے۔

$$(1) \quad (81)^{\frac{1}{4}} \quad (2) \quad 49^{\frac{1}{2}} \quad (3) \quad (15)^{\frac{1}{5}} \quad (4) \quad (512)^{\frac{1}{9}} \quad (5) \quad 100^{\frac{1}{19}} \quad (6) \quad (6)^{\frac{1}{7}}$$

(II) کسی عدد کا قوت نما $\frac{m}{n}$ ہو تو ایسے ناطق عدد کا مطلب

$$\text{ہم جانتے ہیں کہ، } 8^2 = 64$$

$$64 = (64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4 \text{ کا جذور المکعب}$$

$$\therefore 8 = 4 \text{ کے مربع کا جذور المکعب} \quad \dots (I) \quad \text{اسی طرح،}$$

$$8 = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ کا جذور المکعب}$$

$$\therefore 8 = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4 \text{ کے جذور المکعب کا مربع} \quad \dots (II)$$

(I) اور (II) کی مدد سے،

$$8 \text{ کے جذور المکعب کا مربع} = 8 \text{ کے مربع کا جذور المکعب}$$

$$\text{یعنی } (8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 \text{ سمجھ میں آتا ہے۔}$$

قوت نما صحیح عدد ہو تو جو قوت نما کے اصول ہیں وہی اصول ناطق قوت نما والے اعداد کے لیے بھی ہیں۔

$$\text{اس لیے } (a^m)^n = a^{mn}, \text{ اصول استعمال کر کے } (8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$$

اس بنا پر $8^{\frac{2}{3}}$ کا مطلب دو طرح بتا سکتے ہیں۔

$$(i) \quad 8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = \text{8 کے مربع کا جذور المکعب}$$

$$(ii) \quad 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \text{8 کے جذور المکعب کا مربع}$$

اسی طرح $27^{\frac{4}{5}} = (27^4)^{\frac{1}{5}}$ یعنی 27 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر اور $27^{\frac{4}{5}} = (27^{\frac{1}{5}})^4$ یعنی 27 کے 5 ویں جذر کی چوتھی قوت، اس طرح دو مطلب ہوتے ہیں۔

عام طور پر $a^{\frac{m}{n}}$ کا مطلب دو طرح سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ کی m ویں قوت کا n واں جذر

a کے n ویں جذر کی m ویں قوت $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ ، 'یا'

مشقی سیٹ 3.2

1. درج ذیل جدول مکمل کیجیے۔

نمبر شمار	عدد	کس جذر کی کون سی قوت	کس قوت کا کون سا جذر
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 کے جذر المربع کا مکعب	225 کے مکعب کا جذر المربع
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. ناطق قوت نما کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

- (1) 121 کے پانچویں قوت کا جذر المربع (2) 324 کے چوتھے جذر المربع کا مکعب
(3) 264 کے مربع کا پانچواں جذر (4) 3 کے جذر المکعب کا مکعب

آئیے ذرا یاد کریں



● $4 \times 4 = 16$ یعنی $4^2 = 16$ اسی طرح $(-4) \times (-4) = (-4)^2 = 16$ یعنی 16 کا ایک مثبت اور دوسرا منفی، یعنی دو جذر المربع ہیں۔

ایسا فرض کر لیا گیا ہے کہ 16 کا مثبت جذر المربع $\sqrt{16}$ اور 16 کا منفی جذر المربع $-\sqrt{16}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\sqrt{16} = 4$ اور $-\sqrt{16} = -4$

● ہر مثبت عدد کے دو جذر المربع ہوتے ہیں۔

● عدد صفر کا جذر المربع صفر ہوتا ہے۔

آئیے سمجھ لیں

مکعب اور جذر المکعب (Cube and Cube Root)

کسی عدد کو تین مرتبہ لے کر ان کی ضرب کریں تو حاصل ضرب، اس عدد کا مکعب ہوتا ہے۔ مثلاً $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ یعنی 6 کا مکعب 216 ہے۔
ناطق اعداد کا مکعب کرنا :

مثال (1) : 17 کا مکعب کیجیے۔ $17^3 = 17 \times 17 \times 17$ $= 4913$	مثال (2) : (-6) کا مکعب کیجیے۔ $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$ $= -216$	مثال (3) : $\left(-\frac{2}{5}\right)$ کا مکعب کیجیے۔ $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$ $= -\frac{8}{125}$
--	--	--

مثال (4) : (1.2) کا مکعب کیجیے۔ $(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$ $= 1.728$	مثال (5) : (0.02) کا مکعب کیجیے۔ $(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$ $= 0.000008$
--	--

آئیے غور کریں

مثال (1) میں 17 مثبت عدد ہے۔ اس عدد کا مکعب 4913 بھی مثبت ہے۔
مثال (2) میں 6- کا مکعب -216 ہے۔ مزید کچھ مثبت اور منفی عدد لے کر ان کا مکعب کر کے دیکھیے۔ اس کی مدد سے کسی عدد کی علامت اور اس عدد کے مکعب کی علامت کے درمیان جو تعلق دکھائی دیتا ہے اسے معلوم کیجیے۔
مثال (4) اور (5) میں دیے ہوئے اعداد میں عشری علامت کے بعد آنے والے ہندسوں کی تعداد اور اس عدد کے مکعب میں آنے والی عشری علامت کے بعد کے ہندسوں کی تعداد میں کون سا تعلق پایا جاتا ہے؟

جذر المکعب معلوم کرنا

ہم دیے ہوئے عدد کے مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر المربع معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں،
اسی طریقے سے جذر المکعب معلوم کریں گے۔

مثال (1) : 216 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل : پہلے 216 کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

3 اور 2 جزو ضربی ہر ایک 3 مرتبہ آئے ہیں، لہذا ان کو ایک-ایک مرتبہ لے کر ذیل کے مطابق گروہ بنائیں گے۔

$$\therefore 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) = (3 \times 2)^3 = 6^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6 \text{ یعنی } (216)^{\frac{1}{3}} = 6$$

مثال (2): 1331 - کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل : 1331 - کا جذر المکعب معلوم کرنے کے لیے پہلے

1331 کا مفرد اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$$

$$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$$

$$= (-11)^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$$

مثال (3): 1728 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل :

$$1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \quad \dots [\because a^m \times b^m = (a \times b)^m]$$

$$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$$

(ذہن نشین کیجیے کہ 1728 - کا جذر المکعب 12 - آتا ہے۔)

مشقی سیٹ 3.3

1. درج ذیل اعداد کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

- (1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. جذر المکعب معلوم کیجیے : (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. اگر $\sqrt[3]{729} = 9$ ہو تو کتنا $\sqrt[3]{0.000729} = ?$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 3.1 : 1. (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 15 کا پانچواں جذر (2) 49 کا جذر المربع (3) 81 کا چوتھا جذر

6 کا ساتواں جذر (4) 100 کا انیسواں جذر (5) 512 کا نوواں جذر

مشقی سیٹ 3.2 : 1. (2) 45 کے پانچویں جذر کی چوتھی قوت، 45 کی چوتھی قوت کا پانچواں جذر

(3) 81 کے ساتویں جذر کی چھٹی قوت، 81 کی چھٹی قوت کا ساتواں جذر

(4) 100 کے 10 ویں جذر کی چوتھی قوت، 100 کی چوتھی قوت کا دسواں جذر

(5) 21 کے ساتویں جذر کی تیسری قوت، 21 کی تیسری قوت کا ساتواں جذر

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{2}}$

مشقی سیٹ 3.3 : 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ 3. 0.09

