ਐਡਵਾਂਸ ਮੈਥਾਮੈਟਿਕਸ ਐਂਡ ਕੰਪਿਊਟਰ ਕਮਰਸ਼ੀਅਲ ਐਪਲੀਕੇਸ਼ਨ

(ਬਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

©ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ

ਸੰਪਾਦਕੀ ਕਮੇਟੀ

ਸ੍ਰੀ ਸੁਨੀਲ ਕੁਮਾਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸਰਕਾਰੀ ਗਰਲਜ਼ ਸੀਨੀ.ਸੈਕੰ. ਸਕੂਲ, ਬਠਿੰਡਾ

ਸ੍ਰੀ ਸੰਦੀਪ ਕੁਮਾਰ, ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ, ਸਰਕਾਰੀ ਗਰਲਜ਼ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ

ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਏਮਨਦੀਪ ਕੌਰ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਫੈਕਲਟੀ, ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸਕੈਂਡਰੀ ਸਕੂਲ, 3, ਸੋਹਾਣਾ, ਐਸ.ਏ.ਐਸ.ਨਗਰ

ਡਾ: ਰਾਜਿੰਦਰ ਸ਼ਰਮਾ, ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ, ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸਕੈਂਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਨੀਲੋਂਵਾਲ

ਪੁਨਰ ਮੁਲਾਂਕਣ ਅਤੇ ਤਸਦੀਕ ਕਰਤਾ

ਸ੍ਰੀ ਸੁਨੀਲ ਕੁਮਾਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸਰਕਾਰੀ ਗਰਲਜ਼ ਸੀਨੀ.ਸੈਕੰ. ਸਕੂਲ, ਬਠਿੰਡਾ

ਸ੍ਰੀ ਸੰਦੀਪ ਕੁਮਾਰ, ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ, ਸਰਕਾਰੀ ਗਰਲਜ਼ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ

ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸਰਕਾਰੀ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਰੀ ਸਕੂਲ, ਪਟਿਆਲਾ

All rights, including those of translation, reproduction
and annotation etc. are reserved by the
Punjab Government

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ.7 ਅਨੁਸਾਰ)

2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂ-ਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ-8 ਸਾਹਿਬਜਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ- 160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ।

ਮੁੱਖ ਬੰਧ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਰਾਜ ਦੀ ਸਕੂਲ-ਸਿੱਖਿਆ ਨੂੰ ਸਮੇਂ ਦੀਆਂ ਲੋੜਾਂ ਤੇ ਵੰਗਾਰਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸੰਗ ਵਿੱਚ ਢਾਲਣ ਤੇ ਨਵਿਆਉਣ ਲਈ ਨਿਰੰਤਰ ਯਤਨਸ਼ੀਲ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਤਿਹਾਸ ਦੇ ਉਸ ਕਾਲ-ਖੰਡ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਪਰਿਵਰਤਨ ਵਾਪਰ ਰਹ ਹਨ। ਵਿਕਾਸ ਦੀ ਤੌਰ ਤਿਖੇਰੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਕਸਤ ਸੰਸਾਰ ਨਾਲ ਇਕਸੁਰ ਹੋਣ ਲਈ, ਜਿੱਥੇ ਗਿਆਨ ਦੀਆਂ ਤੰਦਾ ਵਿਸਤਰਿਤ ਹੋ ਗਈਆਂ ਹਨ, ਸੂਚਨਾ ਤਕਨਾਲਜੀ ਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰ-ਸਿੱਖਿਆ ਨੂੰ ਸਿੱਖਿਆ ਦਾ ਅਹਿਮ ਅੰਗ ਬਣਾਉਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸੇ ਮਨੋਰਥ ਨਾਲ ਕੰਪਿਊਟਰ-ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਸਿਖਲਾਈ ਹਿੱਤ ਇਹ ਪਾਠ-ਪੁਸਕਤ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੀ ਵੈੱਬਸਾਈਟ 'ਤੇ ਉਪਲੱਭਧ ਕਰਵਾਉਣ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚੇ ਹੀ ਇਹ ਸੁਵਿਧਾ ਕੰਪਿਊਟਰ ਸਾਇੰਸ, ਵੋਕੇਸ਼ਨਲ ਗਰੁੱਪ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਲਾਹੇਵੰਦ ਤੇ ਰੋਚਕ ਸਾਬਿਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਹ ਪਾਠ-ਸਮੱਗਰੀ ਕੰਪਿਊਟਰ ਸਿੱਖਿਆ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨਾਂ, ਤਜਰਬੇਕਾਰ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਅਤੇ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ-ਮਾਹਿਰਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਉੱਦਮ ਸਦਕਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨ ਤੇ ਸਹਿਯੋਗੀ ਅਧਿਆਪਕ ਸਾਡੇ ਧੰਨਵਾਦ ਦੇ ਪਾਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਬਿਹਤਰ, ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਤੇ ਹੋਰ ਸੰਚਾਰਮਈ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਮੁੱਲਵਾਨ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਦਾ ਸਵਾਗਤ ਹੈ।

ਚੇਅਰਪਰਸਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਬਾਰਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਵੋਕੇਸ਼ਨਲ ਗਰੁਪ ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ " **ਐਡਵਾਂਸ ਮੈਥਾਮੈਟਿਕਸ ਐਂਡ ਕੰਪਿਊਟਰ ਕਮਰਸ਼ੀਅਲ ਐਪਲੀਕੇਸ਼ਨ**" ਅੰਗਰੇਜੀ ਮਾਧਿਅਮ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਹਿੱਤ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘੱਟ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਵਜੂਦ ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਕੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਬੋਰਡ ਦੀ ਵੈੱਬ ਸਾਈਟ http://www.pseb.ac.in ਤੇ ਅਪਲੋਡ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਹ ਪਸੁਤਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਬਹੁਤ ਲਾਹੇਵੰਦ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਬੇਹਤਰੀ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ । ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਬਿਹਤਰੀ ਸਬੰਧੀ ਸੁਝਾਅ mathoda1@yahoo.com ਤੇ ਭੇਜੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਮਨਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ (ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ)

ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

ਲੜੀ ਨੰ	ਅਧਿਆਇ	ਪੰਨਾ
1	ਮੈਟਰਿਸਸ	1-67
2	ਡਿਫਰਨਸੀਏਸ਼ਨ	68-87
3	ਇੰਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ	88-110
4	ਵਿਤਕੇਰੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ	111-130
5	ਡਾਟਾ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਨਾਲ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ	131-138
6	ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜਾਇਨ	139-147
7	ਵਿੱਤੀ ਲੇਖਾਂਕਨ ਪੇਕੇਜ਼	148-177

ਪਾਠ-1

ਮੈਟਰਿਸਸ
(MATRICES)

ਧਾਰਨਾ (Concept) : ਅੰਕਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਿਲਸਿਲੇਵਾਰ ਆਇਤਾਕਾਰ ਤਰਤੀਬ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਅੰਕਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਜਾਂ ਇਨਦਰਾਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੰਨ੍ਹ (Notation) : (i) ਮੈਟਿਰਸਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਵੱਡੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਜਿਵੇਂ ਕਿ A,B,C,D, ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇਸਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਮਤੌਰ ਤੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਜਿਵੇਂ ਕਿ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਚਿਨ੍ਹਾਂ (Notation) ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ :

(i) ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 14 & 22 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3×3 ਹੈ।

ਇਸ 'A' ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ-

$$a_{11} = 7 \quad a_{12} = 8 \quad a_{13} = 6$$
$$a_{21} = 2 \quad a_{22} = 3 \quad a_{23} = 1$$
$$a_{31} = 11 \quad a_{32} = 14 \quad a_{33} = 22$$

ਇਸ ਲਈ 'a_{11}' ਜੋ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ ਤੇ ਪਹਿਲੇ ਕਾੱਲਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। !

a_{12} : ਜੋ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ ਤੇ ਦੂਜੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ a_{31} ਜੋ ਕਿ ਤੀਜੀ ਰੋਅ ਤੇ ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਪਹਿਲੀ , ਦੂਸਰੀ ਤੇ ਤੀਸਰੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ (ਮੁੰਡੇ, ਕੁੜੀਆਂ) ਦੀ ਨਿਮਨ ਜਾਣਕਾਰੀ ਅਨੁਸਾਰ

	ਮੁੰਡੇ	ਕੁੜੀਆਂ
I	14	22
II	11	10
III	02	20

ਨੂੰ '3×2' ਕ੍ਰਮ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

(iii) ਇਕ -ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨ (Linear Equation) :

$$14x + 17y = 4$$
$$2x + 2y = 2$$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਇੱਕ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ (Co-efficient) ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order) : ਜਿਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ m ਰੋਅ ਤੇ n ਕਾਲਮ ਹੋਣ ਓਹਦਾ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ m n ਅੰਸ਼ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ : $=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \\ 14 & 11 & 22 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਜਾਂ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3×3 ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 3 ਰੋਅ ਤੇ 3 ਕਾਲਮ ਹਨ, ਤੇ ਇਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ 2,3,1,7,8,6,14,11, 22 ਅੰਸ਼ (Elements) ਹਨ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $m \times n$ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

i^{th} ਰੋਅ ਵਿੱਚ j^{th} ਕਾਲਮ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਇੰਨਦਰਾਜ ਨੂੰ a_{ij} ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੈਟਿਰਕਸ ਨੂੰ ਆਮਤੌਰ ਤੇ ਇਕਹਿਰੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਅੱਖਰ A, B ਜਾਂ C ਨਾਲ ਜਾਂ $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ ਆਦਿ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਲਈ $m \times n$ ਮੈਟਿਰਕਸ ਨੂੰ 'A' ਨਾਲ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$A=[a_{ij}]_{mxn}$$

$$i = 1,2,3,.......m$$
$$j = 1,2,3,......n$$

(i) ਮੰਨ ਲਓ,

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 22 \\ 2 & 25 & 10 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ਇਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਰੋਅ ਤੇ ਤਿੰਨ ਕਾਲਮ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਮੈਟਿਰਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3×3 ਹੈ। ਇੱਥੇ-

$$a_{11} = 7 \quad a_{12} = 8 \quad a_{13} = 6$$
$$a_{21} = 1 \quad a_{22} = 14 \quad a_{23} = 22$$
$$a_{31} = 2 \quad a_{32} = 25 \quad a_{33} = 10$$

***(ii)* ਮੰਨ ਲਓ,**

$$A=\begin{bmatrix} 31 & 11 & 2 & 0 \\ 10 & 12 & 28 & 30 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

ਇਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਰੋਅ ਤੇ ਚਾਰ ਕਾਲਮ ਹਨ।

$$\begin{matrix} a_{11}=31 & a_{12}=11 & a_{13}=2 & a_{14}=0 \\ a_{21}=10 & a_{22}=12 & a_{23}=28 & a_{24}=30 \\ a_{31}=5 & a_{32}=0 & a_{33}=6 & a_{34}=8 \end{matrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰੀ :- ਦੋ ਮੈਟਿਰਕਸ ਉਸ ਸਮੇਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਇੱਕੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ (Corresponding) ਅੰਸ਼ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੇ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \text{ ਹੈ,}$$

ਤਾਂ $a_{11}=8, a_{12}=7, a_{21}=8, a_{22}=6$ ਹਨ।

ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Type of Matrixes) :

***(i)* ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਕਰਸ (Square Matrix):**

ਜਿਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਰੋਆਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਉਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}_{nn}$$

(Square) ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ n ਰੋਅ ਤੇ n ਕਾਲਮ ਹਨ। ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ n ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ $A=[a_{ii}]$ ਦੇ a_{ii} ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਵਿਕਰਤੀ ਅੰਸ਼ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅੰਸ਼ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{nn}$ ਨੂੰ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਤੀ ਅੰਸ਼ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਕਰਤੀ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਜੋੜ ਨੂੰ ਟਰੇਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਟਰੇਸ (Trace)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2. **ਸਬ ਮੈਟਿਰਕਸ (Sub - Matrix)** : ਇਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਰੋਅ ਤੇ ਕਾਲਮ ਜਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਨ ਉਪਰੰਤ ਬਾਕੀ ਮੈਟਿਰਕਸ ਨੂੰ ਸਬ – ਮੈਟਿਰਕਸ (Sub - Matrix) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 14 & 11 & 10 & 22 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦਾ ਸਬ- ਮੈਟਿਰਕਸ (Sub-matrix)

(i) ਇਹ ' $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ' ਸਬ -ਮੈਟਿਰਕਸ ' A' ਵਿੱਚੋਂ ਤੀਸਰੀ ਰੋਅ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਤੇ ਚੌਥੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਨ ਉਪਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਹੈ।

(i i) ਇਹ $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 14 & 10 & 22 \end{bmatrix}$ ਸਬ - ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੂਸਰੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਨ ਉਪਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ।

3. ਰੋਅ ਮੈਟਿਰਕਸ (Row Matrix): ਜਿਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਵਿੱਚ ਇਕੋ ਰੋਅ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਰੋਅ ਮੈਟਿਰਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ : $A = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 & 10 & 2 \end{bmatrix}$

4. ਕਾਲਮ ਮੈਟਿਰਕਸ (Column Matrix) ਜਿਸ ਮੈਟਿਰਕਸ ਵਿੱਚ ਇਕੋ ਕਾਲਮ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਕਾਲਮ ਮੈਟਿਰਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 11 \\ 22 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ (Triangular Matrix) : ਜੇ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਮੁੱਖਵਿਕਰਣ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਥੱਲੇ, ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੈਟਿਰਕਸ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਮੈਇਰਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਕਿਸਮਾਂ ਹਨ- *i)* ਉੱਤਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Upper Triangular Matrix)

(ii) ਹੇਠਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Lower Triangular Matrix)

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ :

i) ਉੱਤਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 14 & 7 & 4 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) ਹੇਠਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

6. ਇਕਾਈ ਮੈਟਿਰਕਸ (Unit Matrix) : ਇਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ ਜਿਸ ਦਾ ਹਰੇਕ ਵਿਕਰਤੀ ਅੰਸ਼ 'ਇੱਕ ' ਹੋਵੇ ਨੂੰ ਇਕਾਈ ਮੈਟਿਰਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ $\left[a_{ij} \right]$ ਇਕਾਈ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ। ਜਦੋਂ .

$a_{ij}=1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $i = j$

$a_{ij}=0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $i \neq j$ ਹੋਣ।

ਇਕ ਇਕਾਈ ਮੈਟਿਰਕਸ 'n' ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ I_n ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. (1) **ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ (Principle diagonal)** : ਇੱਕ n ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ $A=\left[a_{ij}\right]_n$ ਦੇ $a_{11}, a_{22}, a_{33}\ldots\ldots a_{n\times n}$ ਅੰਸ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

ਦੇ ਵਿਕਰਣੀ ਅੰਸ਼ (Element) 2,1,8 ਹਨ।

(ii) **ਵਿਕਰਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Diagonal Matrix):** ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਵਿਕਰਣੀ ਮੈਟਿਰਕਸ ਤੱਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕੀ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣੀ ਅੰਸ਼ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ $A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ਜਾਂ $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਇਹ ਵਿਕਰਣੀ ਮੈਟਿਰਕਸ 3×3 ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\text{Dia. } \left[7\ 8\ 6\right]$$
$$\text{Diag. } \left[d_{1,} d_{2,} d_3\right]$$

8. **ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero Matrix):** m × n ਆਦੇਸ਼ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਜਦੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟਿਰਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ (Null) ਨਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਖਾਲੀ) ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ : $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ 'O_{mn}' ਨਾਲ ਵੀ ਲਿੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1, ਮੰਨ ਲਓ $A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 11 & 25 & 14 \\ 7 & 8 & 6 & 2 \\ 8 & 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

'A' ਮੈਟਿਰਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਲੱਭੋ ? ਅਤੇ a_{22}, a_{33}, a_{23} ਤੇ a_{14} ਅੰਸ਼ (Elements) ਵੀ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਰੋਅ ਤੇ ਚਾਰ ਕਾਲਮ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3×4 ਹੈ।

$$a_{22}=8, a_{33}=8, a_{23}=6 \text{ ਤੇ } a_{14}=14$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2, ਜੇ ਇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 5 ਅੰਸ਼ ਹਨ, B ਦੇ ਸੰਭਵ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕ੍ਰਮ ਲਿਖੋ ?

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ m × n ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 5 ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਾਲੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 5×1 ਜਾਂ 1×5 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ:3, ਇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਵਿੱਚ 14 ਅੰਸ਼ ਹਨ। ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕਿਹੜੇ 2 ਕ੍ਰਮ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ? ਜੇ 7 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਕ੍ਰਮ ਹੋਣਗੇ ?

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਤੱਤ =14

ਇਸ ਲਈ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦਾ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

1×14, 14×1, 7×2, 2×7

(ii) ਜੇ ਕੁੱਲ ਤੱਤ = 07 ਹਨ।

ਤਦ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ ਹੁਕਮ 1×7, 7×1 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4, 2×2 ਦੀ ਮੈਟਿਰਕਸ ਬਣਾਓ, ਜਿਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਤ $a_{ij}=2i-4j$ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $A=\left[a_{ij}\right]$ ਲਈ 2×2 ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਤਾਂ ਇੱਥੇ

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= 2i-4j \\
a_{11} &= 2\times1-4\times1=2-4=-2 \\
a_{12} &= 2\times1-4\times2=2-8=-6 \\
a_{21} &= 2\times2-4\times1=4-4=0 \\
a_{22} &= 2\times2-4\times2=4-8=-4
\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -6 \\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5, 2×2 ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬਣਾਓ, ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ:

(i) $a_{ij}=i+2j$

(ii) $a_{ij}=2i-j$

(iii) $a_{ij}=\dfrac{(i+2j)^2}{2}$

(iv) $a_{ij}=\left(\dfrac{i}{j}\right)^2$

ਹੱਲ : *(i)* ਮੰਨ ਲਓ $A=\left[a_{ij}\right]$ ਲਈ 2×2 ਆਦੇਸ਼ ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਤਾਂ

ਇੱਥੇ

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= i+2j \\
a_{11} &= 1\times1+2\times1=1+2=3 \\
a_{12} &= 1\times1+2\times2=1+4=5 \\
a_{21} &= 2\times1+2\times1=2+2=4 \\
a_{22} &= 2\times2+2\times2=4+4=8
\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 \\ 4 & 8\end{bmatrix}$$

(*ii*) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁਕਮ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $a_{ij} = 2i - j$

$a_{11} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 2$

$a_{12} = 2 \times 1 - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$

$a_{21} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 4 - 1 = 3$

$a_{21} = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 4 - 2 = 2$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(*iii*) ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{(i+2\times1)^2}{2} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1+2\times2)^2}{2} = \frac{(1+4)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2+2\times1)^2}{2} = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$a_{22} = \frac{(2+2\times2)^2}{2} = \frac{(2+4)^2}{2} = \frac{(6)^2}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$$

(*iv*) ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $a_{ij} = \left(\frac{i}{j}\right)^2$

$$\therefore \quad a_{11} = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = (1)^2 = 1$$

$$a_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_{21} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

$$a_{22} = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 6. 3 × 3 ਹੁਕਮ ਦੀ ਮੈਟਿਰਕਸ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = \frac{1}{2}\ (3i+j)$ ਹਨ।

ਹੱਲ : $a_{11} = \frac{1}{2}\ (3 \times 1 + 1) = \frac{1}{2}\ (3 + 1) = (4) = 2$

$$a_{12} = \frac{1}{2}\ (3 \times 1 + 2)^2 = \frac{1}{2}\ (3 + 2) = 5.2$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}\ (3 \times 1 + 3) = \frac{1}{2}\ (3 + 3) = 6/2 = 3$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}\ (3 \times 2 + 1) = \frac{1}{2}\ (6) = 3$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\ (3 \times 2 + 2) = \frac{1}{2}\ (6 + 2) = 4$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}\ (3 \times 2 + 3) = \frac{1}{2}\ (6 + 3) = 9/2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}\ (3 \times 3 + 1) = \frac{1}{2}\ (9 + 1) = 5$$

$$a_{32} = \frac{1}{2}\ (3 \times 3 + 2) = \frac{1}{2}\ (9 + 2) = 11/2$$

$$a_{33} = \frac{1}{2}\ (3 \times 3 + 3) = \frac{1}{2}\ (12) = 6$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 7. ਜੇ $\begin{bmatrix} 3y-x & 5x \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ 'y' ਦੀ ਕੀਮਤ ਲੱਭੋ ?

ਹੱਲ : $\begin{bmatrix} 3y-x & 5x \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਮੈਟਿਰਕਸ ਵਿੱਚੋਂ ਸਬੰਧਤ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$3y - x = 7$ ਅਤੇ $5x = 8$

$x = \frac{8}{5}$ ਤੇ $3y - \frac{8}{5} = 7$

$$3y = 7 + \frac{8}{5} \Rightarrow 3y = \frac{43}{5}$$

$$\therefore \quad y = \frac{43}{15}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 8, ਜੇ $\begin{bmatrix} x+2y & 3y \\ 4x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ਤਦ x ਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\begin{bmatrix} x+2y & 3y \\ 4x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

ਇਕਵਾਲਟੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ

$$x+2y=0 \quad ...(1)$$
$$4x=8 \quad ...(2)$$
$$3y=-3 \quad ...(3)$$

ਤੇ

ਸਮੀਕਰਨ (2) ਤੇ (3) ਤੋਂ $x=2, y=-1$ ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ $x=2, y=-1$

ਇਸ ਲਈ $x=2, y=-1$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 9. ਜੇ $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

ਇਕਵਾਲਟੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ

$$x+y=7$$
$$5+2=11$$
$$xy=14$$

ਸਮੀਕਰਨ (2) ਰਾਹੀਂ z =6

ਸਮੀਕਰਨ (1) ਰਾਹੀਂ $y=7-x$

$y=7-x=x$ ਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਤੇ

$$x(7-x)=14$$
ਜਾਂ $$7x-x^2=14$$
$$x^2-7x+14=0$$

ਅਭਿਆਸ 1 (ੳ)

1. ਜੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 10 ਅੰਸ਼ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਸਦ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ ਲਿਖੋ।
2. ਜੋ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 18 ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਸੰਭਵ ਆਦੇਸ਼ ਲਿਖੋ ? ਜੇਕਰ 05 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਫਿਰ ਕਿੰਨੇ ਆਦੇਸ਼ ਹੋਣਗੇ ?
3. ਜੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 22 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸਦੇ ਕਿੰਨੇ ਸੰਭਵ ਆਦੇਸ਼ ਲਿਖੋ।
4. ਇੱਕ 2×2 ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਿਆਰ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a_{ij}=2i+j$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।
5. ਇੱਕ 3×2 ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਿਆਰ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a_{ij}=2i+j$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।
6. ਇੱਕ 3×3 ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਿਆਰ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a_{ij}=i+2j$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।
7. ਇੱਕ 3×4 ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਿਆਰ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a_{ij}=2i-j$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।
8. ਜੇ $\begin{bmatrix} x+2y & 3y \\ 4x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ x, y ਦੀ ਕੀਮਤ ਲੱਭੋ।

9. ਜੇ $\begin{bmatrix} 15 & x+y \\ 2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ x-y & 3 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ x,y ਦੀ ਕੀਮਤ ਲੱਭੋ।

10. x, y ਤੇ z ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨਿਮਨ ਵਿੱਚੋਂ ਲੱਭੋ -

$$(i)\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (ii)\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

11. 2×4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \left[a_{ij}\right]$ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = 2i - j$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

12. 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \left[a_{ij}\right]$ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = i + 3j$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

13. 4×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \left[a_{ij}\right]$ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਓ ਜਿਸਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਟਰਾਸਪੋਜ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Transpose of Matrix) :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਮੰਨ ਲਓ A ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜਿਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਰੋਅ ਨੂੰ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਉਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਸਪੋਜ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ A^t ਜਾਂ A^T ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇ $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ $A' = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ; ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ

ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ $A' = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸਤਾਵਾਂ (Properties of Transpose of Matrix) :

(i) $(A^T)^T = A,$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ A ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) $(A+B)' = A' + B'$

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$

(iv) $(KA)' = KA'$ ਜਿਥੇ K ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1 ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ ਟਰਾਸਪੋਜ਼ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਟਰਾਸਪੋਜ਼ A^T ਜਾਂ $A' = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 8 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 14 & 11 & 22 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 14 & 11 & 22 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

∴ ਇਸ ਮੈਟਿਰਕਸ 'A' ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ A^T ਜਾਂ $A' = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 7 \\ 3 & 11 & 8 \\ 1 & 22 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ $A + A'$ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A + A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 3+2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ $(AB)' = B'A'$ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ...(1)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12-8 & 9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(AB)' = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

ਦੁਆਰਾ $B'A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4 & 12-8 \\ 3+2 & 9-4 \end{bmatrix}$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(AB)' = B'A'$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ $(A'B)' = B'A'$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A'B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $A'B' = B'A'$ ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1 (ਅ)

1. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ A^T ਜਾਂ A^t ਲੱਭੋ।

2. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ A^t ਜਾਂ A^t ਲੱਭੋ।

3. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸਦਾ A^t ਲੱਭੋ।

4. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ $(A+B)' = A'+B'$ ਲੱਭੋ।

5. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $A+A'$ ਲੱਭੋ।

6. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ $A-A'$ ਲੱਭੋ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^2 = B'A'$ ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ-

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. ਜੇ A= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ $(A+B)' = A' + B'$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਸਮੀਟਰਕ ਅਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Symmetric and Skew Symmetric Matrix) :

ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Symmetric matrix) : ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਸਮੀਟਰਿਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਆਪਣੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

$$A=A'$$

ਉਦਾਹਰਨ : $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਉਸ ਸਮੇਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $A' = A$ ਹੋਵੇ।

ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ (Skew Symmetric): ਇੱਕ ਸਕੇਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \left[a_{ij}\right]$ ਉਸ ਸਮੇਂ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਨਫ਼ੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

$$\Rightarrow A^T = -A$$

ਇਸ ਲਈ ਵਿਕਰਣੀ ਅੰਸ਼ $aii = -aii$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$$\Rightarrow aii + aii = 0 \Rightarrow 2aii=0 \Rightarrow aii=0$$

$\Rightarrow$ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣੀ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix} O & -h & g \\ h & O & -f \\ -g & f & O \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ

ਥਿਊਰਮ 1: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਕੇਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, $A+A'$ ਦਾ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਤਾਂ $A-A'$ ਦਾ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਹੈ।

ਸਿੱਧ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ:

$$(A+A')' = A' + (A')' \qquad \left[\because (A+B)' = A' + B' \therefore (A')' = A\right]$$

$$\therefore \quad (A+A')' = A+A' \qquad \left[\because (A-B)' = A' - B'\right]$$

$\Rightarrow A+A'$ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਫਿਰ ਦੁਆਰਾ

$$(A-A^t)^t = A^t - (A^t)^t$$
$$(A-A^t)^t = -(A-A^t)$$

$\Rightarrow A-A'$ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਹੈ, ਇਹੀ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸੀ।

ਥਿਊਰਮ 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਕੇਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਬਤੌਰ ਸਮੀਟਰਕ ਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਦੇ ਜੋੜ ਦੁਆਰਾ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਿੱਧ : ਮੰਨ ਲਓ A ਕੋਈ ਸਕੇਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

$$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A') \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $\qquad A=P+Q$

ਇੱਥੇ $\qquad P=\frac{1}{2}(A+A')$ ਤੇ $Q=\frac{1}{2}(A-A')$

ਹੁਣ $\qquad A' = \left[\frac{1}{2}(A+A')\right]' = \frac{1}{2}(A+A')' \qquad \left[\because (KA)' - KA'\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[A' + (A')'\right] \qquad \left[\because (A+B)' = A' + B'\right]$$

P ਇੱਕ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਫਿਰ ਦੁਆਰਾ $\qquad Q^t = \left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t = \frac{1}{2}(A-A^t)$

$$=\frac{1}{2}\left[A^t-(A^t)^t\right]=\frac{1}{2}(A^t-A)$$

$$= -\frac{1}{2}(A - A') = Q$$

ਇਸ ਲਈ Q ਇਕ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A = P + Q$

ਇੱਥੇ $P = \frac{1}{2}(A + A')$ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਤੇ $Q = \frac{1}{2}(A - A')$ ਇਕ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ (Symmetric) ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A'A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = A$

ਇਸ ਲਈ A ਇੱਕ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਇਕ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ (Skew Symmetric) ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $A' = -A$

ਇਸ ਲਈ A ਇਕ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ। ਇਹੀ ਹੱਲ ਸਾਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

$$A - A^t = \begin{bmatrix} 3-3 & 5-1 \\ 1-5 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ–

(*i*) $(A + A^t)$ ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।
(*ii*) $(A - A^t)$ ਇਕ ਸਿਕਿਊ-ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(*i*) $$A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 5+6 \\ 6+5 & 7+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

ਜੋ ਕਿ ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

(*ii*) $$(A - A^t) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 & 5-6 \\ 6-5 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜੋ ਕਿ ਇਕ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ। ਇਹੀ ਹੱਲ ਸਾਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ ਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ– (∵ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A + A^t = \begin{bmatrix} 3+3 & 5+1 \\ 1+5 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ਇਹ ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

$$A - A' = \begin{bmatrix} 3-3 & 5-1 \\ 1-5 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A - A') = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜੋ ਕਿ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ $$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$$

ਅਭਿਆਸ 1 (ੲ)

1. ਕੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$ ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ (Symmetric) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

2. ਜੇ A ਇਕ ਸਮੀਟਰਕ (Symmetric) ਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ (Skew Symmetric) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A=0$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਸਮੀਟਰਕ ਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਜੋੜ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

4. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਸਮੀਟਰਕ ਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

5. $A\text{-}A^T$ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਇੱਥੇ A^T ਇਕ A ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਹੈ।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਸਮੀਟਰਕ ਤੇ ਸਿਕਿਊ ਸਮੀਟਰਕ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਜੋੜ (Matrix Addition) :

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਜੋੜ (Matrix Addition): ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ :

ਜੇ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

ਫਿਰ $A+B\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}$

ਉਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਕੋ ਕ੍ਰਮ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮੈਟਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਜੋੜ ਜਾਂ ਘਟਾ ਕੇ ਤੀਜੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1, ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 22 & 9 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ A+B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 22 & 9 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A+B\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 22 & 9 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2+22 & 11+9 \\ 14+12 & 10+11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 & 20 \\ 26 & 21 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2 ਜੇ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ 'A+B' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$\because\ A+B=\begin{bmatrix} a+a & b+b \\ b+(-b) & a+a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3 ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ 'A+B' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A+B=\begin{bmatrix} 5+2 & 3+0 & -1-2 \\ 2-1 & 0+5 & 7+3 \\ 3-1 & 2-3 & 8+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 14 & 07 \\ 22 & 11 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 6 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ '$A + B$' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 14 & 07 \\ 22 & 11 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 21 & 10 \\ 6 & 7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A + B = \begin{bmatrix} 2+21 & 11+10 \\ 14+6 & 7+7 \\ 22+8 & 11+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 21 \\ 20 & 14 \\ 30 & 14 \end{bmatrix}$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \cos^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A + B = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$ $\{\because \sin^2\theta + \cos^2\theta : 1\}$ →

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2xy & 2yz \\ -2xz & -2xy \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2xy & 2yz \\ -2xz & -2xy \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A + B = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + 2xy & y^2 + z^2 + 2yz \\ x^2 + z^2 - 2xz & x^2 + y^2 - 2xy \end{bmatrix}$

$[\because a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \; a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2]$

$$A+B=\begin{bmatrix}(x+y)^2 & (y+z)^2\\(x-z)^2 & (x-y)^2\end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 7. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}7 & 8\\6 & 14\end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix}11 & 7\\3 & 8\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $2A+3C$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix}7 & 8\\6 & 14\end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix}11 & 7\\3 & 8\end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $2A+3C=2\begin{bmatrix}7 & 8\\6 & 14\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}11 & 7\\3 & 8\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}14 & 16\\12 & 28\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}33 & 21\\9 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14+33 & 16+21\\12+9 & 28+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47 & 37\\21 & 52\end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 8. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & 5\\1 & 2 & 7\end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\\7 & 8 & 6\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $3A+5B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : **ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ** $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & 5\\1 & 2 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\\7 & 8 & 6\end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $3A+5B=3\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & 5\\1 & 2 & 7\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\\7 & 8 & 6\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0 & -3 & 6\\9 & 12 & -15\\3 & 6 & 21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & -5 & 15\\-5 & 0 & 10\\35 & 40 & 30\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+15 & (-3)+(-5) & 6+15\\9+(-5) & 12+0 & (-15)+10\\3+35 & 6+40 & 21+30\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 15 & -8 & 21 \\ 4 & 12 & -5 \\ 40 & 46 & 51 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 9. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 4 \\ 11 & 3 & 2 \\ 22 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $2A + 3B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 4 \\ 11 & 3 & 2 \\ 22 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $2A + 3B = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 14 & 7 & 4 \\ 11 & 3 & 2 \\ 22 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 14 & 16 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 42 & 21 & 12 \\ 33 & 09 & 06 \\ 66 & 06 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 14+42 & 6+21 & 10+12 \\ 14+33 & 16+9 & 12+6 \\ 2+66 & 4+6 & 6+30 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 46 & 27 & 22 \\ 47 & 25 & 18 \\ 68 & 10 & 36 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 10. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{2}(A) + \frac{3}{2}(B) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 & \frac{21}{2} \\ 12 & \frac{27}{2} & 15 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 & \frac{25}{2} \\ 16 & 17 & 18 \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1(ਸ)

1. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 11 & 3 & 22 & 8 \\ 14 & 7 & 10 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} \sin(\theta+\theta) & \cos(\theta+\theta) \\ \sin(\theta-\theta) & \cos(\theta-\theta) \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} \sin(\theta-\theta) & \cos(\theta-\theta) \\ \sin(\theta+\theta) & \cos(\theta+\theta) \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

4. ਨਿਮਨ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ—

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 22 & 5 \\ 10 & 2 & 6 \\ 14 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $C = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B + C$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 14 \\ 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 14 \\ 21 & 22 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

8. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A + B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

9. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 9 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $5A + 2B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

10. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $3A + 2B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

11. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $C = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $3A + 6B + 5C$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

12. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $2A + 4B + 2C$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

13. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ਤੇ $C = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $2A + 3B + 3C$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

14. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $7A + 8B + 6C$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਘਟਾਓ (Matrix Subtraction) :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition) : ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਇਕੋ ਕ੍ਰਮ ਦੀਆਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਫਿਰ ਇਸਦੇ ਫਰਕ ਨੂੰ '$A - B$' ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਦਾ ਜੋੜ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ - B ਦੇ ਨਾਲ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$A - B = A + (-B)$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1 ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ A-B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A - B = A + (-B) = A + (-1)B$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 4-3 \\ 3+2 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

ਦੂਸਰਾ ਤਰੀਕਾ (Another Method) :

ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ A-B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A-B = \begin{bmatrix} 2-1 & 4-3 \\ 3+2 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ:2. ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫੇਰ 2A-3B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $2A - 3B = 2A + (-3)B$

$$=2\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 12 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -3 & -6 \\ -18 & 3 & -12 \\ -15 & -9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-15 & 6-3 & -8-6 \\ 2-18 & 0+3 & 12-12 \\ -4-15 & 2-9 & 10+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 3 & -14 \\ -16 & 3 & 0 \\ -19 & -7 & 22 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'A – B' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-3 & 4-(-2) & -1-(-6) \\ 2-2 & 6-0 & 5-(-7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 2A – B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2+(-3) & 4+1 & 6+(-3) \\ 4+1 & 6+0 & 2+(-2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਅਭਿਆਸ 1(ਹ)

1. ਨਿਮਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਘਟਾਓ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ–

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 7/3 & 2 & 2/3 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 1 \\ 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 7/5 & 6/5 & 2/5 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $3A - 5B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A - 2B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $3A - 4B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 8 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $3A + (-4)B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 9 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $-3A - B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $5A - (-7)B$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਗੁਣਨ (Matrix Multiplication):

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ:- ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ਅਤੇ $B=\left[b_{jk}\right]_{m\times p}$ ਹਨ ਤਾਂ A ਨੂੰ B ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਜੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਬਣੇਗੀ ਉਸਦਾ ਕ੍ਰਮ $m\times p$ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $C=\left[c_{ik}\right]_{m\times p}$ ਹੋਵੇਗੀ। A ਦੀ i^{th} ਰੋਅ ਨੂੰ B ਦੇ k^{th} ਕਾਲਮ ਨਾਲ ਅੰਸ਼ਾਂ ਬਾਬਤ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ C ਦਾ cik ਅੰਸ਼ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\Rightarrow C_{ik}=a_{i1}b_{ik}+a_{i2}b_{2k}.........+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਨੂੰ B ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੇ ਕਾਲਮ ਅਤੇ B ਦੀਆਂ ਰੋਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ : $A=\left[a_1 a_2 .... a_n\right]$ ਤੇ

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ ਫਿਰ $AB=\left[a_1 a_2 ......a_n\right]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}=\left[a_1 b_1+a_2 b_2+a_n b_n\right]$

ਇਸ ਕਰਕੇ 'AB' ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਅੰਸ਼ ਹੈ।

ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 22 \end{bmatrix}$ ਹੈ,

ਤਾਂ ਫਿਰ $AB=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 22 \end{bmatrix}$

$$=\left[7\times 11+8\times 14+6\times 22\right]=\left[77+112+132\right]=321$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1 ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ AB ਅਤੇ BA ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ $AB=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times7+4\times6 & 7\times8+4\times7 \\ 5\times7+6\times6 & 5\times7+6\times7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14+24 & 56+28 \\ 35+36 & 35+42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38 & 84 \\ 71 & 77 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$BA = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7\times2+8\times5 \\ 6\times2+7\times5 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ਤੇ } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+(-2)\times2 & 1\times2+(-2)\times3 & 1\times3+(-2)\times1 \\ 2\times1+3\times2 & 2\times2+3\times3 & 2\times3+3\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4 & 2-6 & 3-2 \\ 2+6 & 4+9 & 6+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ ਤੇ } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ 'AB' ਨੂੰ 3 × 3 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਤੇ

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\times1+3\times0+4\times3 & 2\times(-5)+3\times2+4\times0 & 2\times5+3\times4+4\times5 \\ 3\times1+4\times0+5\times3 & 3\times(-3)+4\times2+5\times0 & 3\times5+4\times4+5\times5 \\ 4\times1+5\times0+6\times5 & 4\times(-3)+5\times2+6\times0 & 4\times5+5\times4+6\times5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2+0+12 & -6+6+0 & 10+12+20 \\ 3+0+15 & -9+8+0 & 15+16+25 \\ 4+0+18 & -12+10+0 & 20+20+30 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

ਇਥੇ A ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਕਾਲਮ ਤੇ B ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਰੋਅ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $AB=\begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 14\times1+11\times3+22\times(-5) & 14\times2+11\times(-4)+22\times6 \\ 7\times1+3\times3+11\times(-5) & 7\times2+3\times(-4)+11\times6 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14+33+110 & 28-44+132 \\ 7+9-55 & 14-12+66 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 63 & 116 \\ -39 & 68 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5. ਜੇ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

ਇੱਥੇ 'A' ਵਿੱਚ ਕਾਲਮ = 2
ਅਤੇ 'B' ਵਿੱਚ ਕਾਲਮ = 3

$$\text{ਇਸ ਲਈ } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times4+2\times7 & 5\times1+2\times8 & 1\times6+2\times6 \\ 3\times4+4\times7 & 3\times5+4\times8 & 5\times6+4\times6 \\ 5\times4+6\times7 & 5\times5+6\times8 & 5\times6+6\times6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+14 & 5+16 & 6+12 \\ 12+28 & 15+32 & 18+24 \\ 20+42 & 25+48 & 30+36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 21 & 18 \\ 40 & 47 & 42 \\ 62 & 73 & 66 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ A^2 ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\text{ਦਿੱਤਾ ਹੈ } A = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ $A^2 = A \times A$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਇਸ ਲਈ } A \times A = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 11 & 22 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14+14+11\times7+22\times4 & 14\times11+11\times8+22\times2 & 14\times22+11\times6+22\times2 \\ 7\times14+8\times7+6\times4 & 7\times11+8\times8+6\times2 & 7\times22+8\times6+6\times2 \\ 4\times14+2\times7+2\times4 & 4\times11+2\times8+2\times2 & 4\times22+2\times6+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 196+77+44 & 154+88+44 & 308+66+44 \\ 98+56+24 & 77+64+12 & 154+43+12 \\ 56+14+8 & 44+16+4 & 88+12+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 317 & 286 & 418 \\ 178 & 153 & 219 \\ 28 & 64 & 104 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 7. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ A^2 ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ $A^2 = A \times A$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਇਸ ਲਈ } A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+3\times6 & 2\times3+3\times7 \\ 6\times2+6\times6 & 6\times3+7\times7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+9 & 6+21 \\ 12+36 & 18+49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 27 \\ 48 & 67 \end{bmatrix}$$

ਅਭਿਆਸ 1(ਖ)

1. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ AB ਤੇ BA ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ AB ਤੇ BA ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ AB ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

4. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

7. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

8. $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

10. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB = BA.

11. (*i*) ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A^3 - 4A^2 + A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(*ii*) ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A^3 - 7A^2 + A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

(*iii*) ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $A^2 - 6A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

12. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

13. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

14. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -10 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -8 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB = AC.

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨ (Scalar Multiplication of Matrix)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Defination) ਮੰਨ ਲਓ *'A'* ਇੱਕ $'m \times n'$ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ *K* ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ *A* ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ *K* ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ***KA*** ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਿਨਟੈਕਸ : ਜੇ $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$

ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ

$$KA = \left[ka_{ij} \right]_{m \times n}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ : $$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{8}{2} & \frac{6}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1 ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ,ਤਾਂ ਫਿਰ 7A ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $$7A = 7\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \times 7 & 0 \times 7 \\ 4 \times 7 & -2 \times 7 \\ 3 \times 7 & 6 \times 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 56 & 0 \\ 28 & -14 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2 ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 22 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 5A ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\text{ਦਿੱਤਾ ਹੈ } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਇਸ ਲਈ } 5A = 5\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5 & 3\times5 & 1\times5 \\ 7\times5 & 8\times5 & 6\times5 \\ 11\times5 & 14\times5 & 22\times5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 5 \\ 35 & 40 & 50 \\ 55 & 70 & 10 \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $-\frac{5}{7}(A)$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\text{ਦਿੱਤਾ ਹੈ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਇਸ ਲਈ } -\frac{5}{7}(A) = -\frac{5}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-5}{7} & \frac{-10}{7} & -\frac{13}{7} \\ \frac{-10}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{-5}{7} \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $\frac{11}{14}A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\text{ਦਿੱਤਾ ਹੈ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਇਸ ਲਈ } \frac{11}{14}A = \frac{11}{14}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{14} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1(ਖ)

1. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 11A ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 14A ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

3. ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 22A ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

4. ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $-\frac{5}{2}A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ –7A ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 14A ਅਤੇ 7B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $\frac{4}{11}A$ ਅਤੇ $-\frac{4}{11}A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

8. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਰੋ-1 ਨੂੰ 'a' ਨਾਲ ਰੋ (2) ਨੂੰ 'e' ਨਾਲ ਤੇ ਰੋ (3) ਨੂੰ 'g' ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਓ।

9. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $\cos\theta$ (A) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

10. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $\sin\theta$ (A) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

11. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $-\frac{11}{14}$ (A) ਅਤੇ $\frac{11}{14}$(A) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਰਟੀਆਂ (Simple Properties of Matrix Addition) :

1. ਕਮੂਟੇਟਿਵ ਸਿਧਾਂਤ: ਜੇ A ਅਤੇ B ਦੋਨੋ '$m\times n$' ਹੁਕਮ ਦੀਆਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ

$$A+B=B+A$$

2. ਐਸੋਸਿਏਟਿਵ ਸਿਧਾਂਤ: ਜੇ A, B ਅਤੇ C ਤਿੰਨੋ'$m\times n$' ਹੁਕਮ ਦੀਆਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3. ਸਮਤਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੋਂਦ : ਜੇ A ਇੱਕ'$m\times n$' ਹੁਕਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ'O'ਇੱਕ'$m\times n$' ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ

$A+O=O+A, O$ ਨੂੰ ਸਮਤਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਸਿਫ਼ਰ) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਜੋੜ ਲਈ)

4. ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੋਂਦ : ਜੇ A ਇੱਕ '$m\times n$' ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ x ਇੱਕ '$m\times n$' ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ

$A+X=O=X+A$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ) A ਦੀ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ

ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$X=-A$$

$$\therefore -A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਦੇ ਉਲਟ (ਨੈਗਟਿਵ) ਤੋਂ ਹੀ ਇੱਕ ਨਵੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (-1) ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ :

ਜੇ $A=\begin{bmatrix}7 & 8 & -6\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$

ਫਿਰ $-A=\begin{bmatrix}-7 & -8 & 6\\ 2 & -3 & -1\end{bmatrix}$

5. ਨਾਕਾਰਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ: ਜੇ A, B ਤੇ C ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੀਆਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਫਿਰ

$A+B=A+C$

$\Rightarrow$ $B=C$ (ਖੱਬੇ ਤਰਫੋਂ ਨਕਾਰਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ)

ਅਤੇ $B+A=C+A\Rightarrow B=C$ (ਸੱਜੇ ਤਰਫੋਂ ਨਕਾਰਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ)

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1 ਜੇ $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ

(*i*) A+B+C (ii) 2B+3C ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

ਫਿਰ (i) $A+B+C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}8 & 6\\-4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & -9\\-3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-6 & 6-9\\-4-3 & 2-6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -3\\-7 & -4\end{bmatrix}$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}3 & 5\\6 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ $(A+B)+C=A+(B+C)$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ $(A+B)+C=A+(B+C)$

ਇਸ ਲਈ

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+0 & 0+3\\3+2 & 4+5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 9\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$(A+B)+C=\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\11 & 13\end{bmatrix}$$

ਦੁਆਰਾ $$B+C=\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\8 & 9\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$A+(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 8\\8 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\11 & 13\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $(A+B)+C=A+(B+C)$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦੀ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & -5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\4 & -5 & 6\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}4 & -7 & -2\\0 & -5 & 1\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $(A+B)+C\neq A+(B+C)$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\4 & -5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 5\\7 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$(A+B)+C=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 5\\7 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -7 & -2\\0 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -8 & 3\\7 & -6 & 2\end{bmatrix}$$

ਦੁਆਰਾ $$B+C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\4 & -5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -7 & -2\\0 & -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -7 & 2\\4 & -10 & 7\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A+(B+C)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 4 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -7 & 2\\4 & -10 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -8 & 4\\7 & -6 & 2\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $(A+B)+C\neq A+(B+C)$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਗਜ਼ੀਸਟੈਂਸ ਆਫ ਐਡੀਟੀਟੀ ਦੁਆਰਾ (Existance of Identity)

ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਇਗਜ਼ੀਸਟੈਸ ਆਫ ਐਡੀਟੀਟੀ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਰਟੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਉਪਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 7+0 & 8+0 & 6+0 \\ 2+0 & 3+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+7 & 0+8 & 0+6 \\ 0+2 & 0+3 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਮੇਟਿਰਕਸ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਰਟੀਆਂ (Properties of Matrix Multiplication) :

1. ਐਸੋਸਿਏਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਰਟੀ : ਜੇ A, B ਅਤੇ C ਇਕੋ ਕਿਸਮ ਦੀਆਂ ਮੇਟਿਰਕਸ AB ਅਤੇ BC ਲਈਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਫਿਰ (AB)C = A (BC) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ : ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (AB)C = A(BC) ਹੈ।

ਹੱਲ : ਹੁਣ $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2+0 & -5-6 \\ -12-1 & -6-0 & 15-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 \\ -13 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(AB)\,C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 \\ -13 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12-2-11 & -14+4 & 10-33 \\ -78+6+12 & 91-12 & -30+36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -10 & -23 \\ -60 & 79 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\ -1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24-25 & -28+4 & 10-15\\ 6+3 & -7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & -24 & -5\\ 9 & -7 & 9\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $A(BC)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & -24 & -5\\ 9 & -7 & 9\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}17-18 & -24+14 & -5-18\\ -51-9 & 72+7 & 15-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -10 & -23\\ -60 & 79 & 6\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(AB)C=A(B+C)$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 2. ਵੰਡ ਸਿੱਧਾਂਤ (Distributive Law w.r.t. addition of Matrices) :

(*i*) A(B+C)=A.B+A.C

(ii) (A+B).C=A.C+B.C

ਉਦਾਹਰਨ : ਜੇ

$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A(B+C)=AB+AC$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਹੁਣ

$$B+C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0-9 & -1+0 & -2-12\\ 0-3 & -2+0 & -4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -1 & -14\\ 3 & -2 & -4\end{bmatrix}$$
$$AB=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-1-3 & 0+3 & -2-3\\ 0+1 & 0+2 & 0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3 & -5\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$
$$AC=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-6 & -1-3 & 0-9 \\ 2+0 & -2+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -9 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ AB + AC = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -4 & -9 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & -14 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore\ A(B+C) = AB + AC$$

ਇਹ ਇਕ ਡਿਟਰੀਬਿਊਟਿਵ ਲਾਅ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ।

2. ਮੈਟਰਿਕਸਾਂਦੇਂ ਗੁਣਨ ਕਮਿਊਟੇਟਿਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

$$AB \neq BA$$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨ ਵਿੱਚ ਕਮਿਊਟੇਟਿਵ ਲਾਅ ਪੂਰਨ ਸਹਿਯੋਗੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿਉਂਕਿ $AB \neq BA$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 2×3 ਗੁਣਨ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ 3×1 ਮੈਟਰਿਕਸ ਨਾਲ ਤੇ 3×1 ਗੁਣਨ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ 2×3 ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 2+0 \\ -2+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 0+2 \\ 1+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ $AB \neq BA$

ਇਸ ਲਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਗੁਣਨ ਵਿੱਚ ਕਦੀ ਵੀ $AB \neq BA$ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ AB, BA ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ∴

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+10 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ AB = BA$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ ਹੈ।

ਹੱਲ :

$$\text{ਹੁਣ}\ A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 1-1 \\ 1+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਹ ਵੀ $A-B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 1-1 \\ 1+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore\ (A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & -1-0 \\ 0+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1-0 \\ 1-0 & 2+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ AB ਤੇ BA ਦਾ ਗੁਣਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ, ਇਸਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB \neq BA$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਹੁਣ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+3 & 0-2+6 & 2-4+0 \\ 2+0-1 & 0+3-2 & 4+6+0 \\ -3+0+2 & 0+1+4 & -6+2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0-6 & -2+0+2 & 3+0+4 \\ 0+2-6 & 0+3+2 & 0-1+4 \\ 1+4+0 & -2+6+0 & 3-2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ -4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ AB ≠ BA ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ AB ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ। ਇਸਦੇ ਨਾਲ BA ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+0-2 \\ 1-2+6 & -2+0-3 \\ 2-3+8 & -4+0-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

ਇੱਥੇ 'B' ਦੇ ਦੋ-ਕਾਲਮ ਅਤੇ 'A' ਦੇ ਤਿੰਨ ਰੋ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ 'B' ਦੇ ਕਾਲਮ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, 'A' ਦੀਆਂ ਰੋ ਬਰਾਬਰ ਨਾ ਹੋਣ ਕਾਰਨ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਤੇ $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : AB ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 1+6 \\ -4+6 & -2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (AB)\,C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18+14 & 6+0 \\ -6+14 & 2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 'BC' ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+2 & 2+0 \\ -6+6 & 2+0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A(BC)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4+0 & 2+4\\ 8+0 & -4+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ 8 & 2\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(AB)\,C = A(BC)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1(ਗ)

1. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਤੇ 'BA' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

2. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਤੇ 'BA' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

3. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 'AB' ਤੇ 'BA' ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB = BA$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

4. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ $-A^2+7A$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ A^4 ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

6. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ A^2 ਤੇ A^6 ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ ਹੋ ਤਾਂ ਫਿਰ ਨਿਮਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ–

(i) A(BC) (ii) (AB)C (iii) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ABCD=(AB)C

8. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ (*i*) AC (*ii*) BC (*iii*) AC + BC ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

9. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + 3$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

10. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ਹੈ।

ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਰਟੀਆਂ (Properties of Scalar Multiplication) :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਜੇ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਕੋ ਕਿਸਮ ਦੀਆਂ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹਨ ਅਤੇ *k*, *l* ਸਕੇਲਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਫਿਰ

(*i*) $k(A + B) = KA + KB$

(*ii*) $(K + l)A = KA + lA$

(*iii*) $K(lA) = (Kl)A$

(*iv*) $(-KA) = -KA = K(-A)$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ 5(A + B) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ $5(A + B) = 5A + 5B$ $[\because K(A + B) = KA + KB]$

$$\therefore \quad 5\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 5\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ 2A + 3B ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਇਆ ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad 2A + 3B = 2\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A^3 - 4A^2 + A = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਮੈਟਿਰਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+3\times1 & 2\times3+3\times2 \\ 1\times2+2\times1 & 1\times3+2\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7\times2+12\times1 & 7\times3+12\times2 \\ 4\times2+7\times1 & 4\times3+7\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14+12 & 21+24 \\ 8+7 & 12+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 - 4A^2 + A = \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -28 & -48 \\ -16 & -28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26-28 & 45-48 \\ 15-16 & 26-28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $A^3 - 4A^2 + A = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a+b)A = aA + bA$

ਹੱਲ : ਮੈਟਿਰਕਸ ਦਿੱਤੀ ਹੈ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \qquad (a+b)\text{A} = a\text{A} \times b\text{A}$

$$(a+b)\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2(a+b) & 3(a+b)\\(a+b) & 2(a+b)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2a & 3a\\a & 2a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b & 3b\\b & 2b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2(a+b) & 3(a+b)\\(a+b) & 2(a+b)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2(a+b) & 3(a+b)\\a+b & 2(a+b)\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ $(a+b)\text{A} = a\text{A} + b\text{A}$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5. $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\-\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\\\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta\\-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta\end{bmatrix} \qquad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I_2$$

ਇਹ ਹੀ ਸਹੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1(ਗ)

1. ਜੇ $\text{A} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\text{B} = \begin{bmatrix}-3 & -1 & 4\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ 2A – B ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

2. ਜੇ $\text{A} = \begin{bmatrix}8 & 7\\8 & 6\end{bmatrix}$; $\text{B} = \begin{bmatrix}7 & 8\\6 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\text{C} = \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ (*i*) 2B + 3C (*ii*) –2A + (B + C) (*iii*) A + (B + C) (*iv*) (A + B) + C ਦੇ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

3. ਜੇ $\text{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 2\\1 & -8 & 1\end{bmatrix}$; $\text{B} = \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\2 & 3 & 1\\7 & 8 & 6\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\text{C} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\-1 & -2 & 3\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ (*i*) 2B – 3C (*ii*) A – 2B + 3C ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

4. ਜੇ $\text{A} = dig[7 \quad 8 \quad 6]$; $\text{B} = dig[2 \quad 3 \quad 1]$ ਅਤੇ $\text{C} = dig[2 \quad 0 \quad 6]$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ (*i*) A + 2B (*ii*) 2A + B – 5C (*iii*) A + 7B – C (*iv*) 3A + 7B – 5C ਦੇ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਸ

(DETERMINANTS)

ਡਿਟਾਰਮੀਨੈਂਟਸ **(DETERMINANTS)** : ਹਰੇਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਸਹਿਯੋਗੀ ਅੰਕ (ਰੀਅਲ ਜਾਂ ਕਾਮਪਲੈਕਸ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਉਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ $|A|$ ਜਾਂ Δ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੱਖ- ਵੱਖ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀਆਂ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਡਿਟਾਰਮੀਨੈਂਟ ਵੱਖ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹਿਸਾਬਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ A = [a] ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ 1 ਦੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $|A|$ = a ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਓ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ '2' ਦੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਡਿਟਾਰਮੀਨੈਂਟ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|\mathrm{A}| = \Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \Delta = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{22}$$

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ $\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 7 & 14 \end{vmatrix} = 2\times 14 - 7\times 4 = 28 - 28 = 0$

ਤੀਸਰਾ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਸ (Determinants): ਮੰਨ ਲਓ $A=\left[aij\right]_{3\times 3}$ ਇਕ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟਿਰਕਸ ਹੈ,

$$A = \Delta\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ਫਿਰ

$$|A| = \Delta\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3×3 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਸ ਨੂੰ ਛੇ ਰਸਤਿਆਂ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਰੋਅ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਕਾਲਮ ਨਾਲ ਤਾਲਮੇਲ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ (R_1) ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਨਾ :

ਸਟੈੱਪ ਨੰ: 1. ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ R_1 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅੰਸ਼ a_{11} ਨੂੰ $(-1)^{1+1}$ ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਨਾਲ $i.e\{[(-1)sum$ of Suffixes in $a_{11}]\}$ ਅਤੇ 2ਵਾਂ ਹੁਕਮ ਡਿਟਰਮੀਨੈ.ਟ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ(R_1) ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਐਤ ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਸ $|A|\,R_1$ ਅਤੇ C_1 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$i.e(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਸਟੈੱਪ ਨੰ: 2 R_1 ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ 'a_{12}' ਨਾਲ ਗੁਣਨ $(-1)^{1+2}$ ਕਰਨ ਨਾਲ ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$i.e(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਸਟੈਪ ਨੰ:3. R_1 ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ a_{13} ਨਾਲ ਗੁਣਨ$(-1)^{1+3}$ ਕਰਨ ਨਾਲ ਪਹਿਲੀ ਰੋਅ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$i.e(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਸਟੈਪ ਨੰ: 4 ਸਟੈਪ ਨੰ, 1,2 ਤੇ 3 ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ $|A|$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad \text{......(1)}$$

ਦੂਸਰੀ ਰੋਅ ਦੇ ਐਕਸਪੈਡ ਕਰਨ ਤੇ : ਉੱਪਰ ਦਰਸਾਏ ਸਾਰੇ ਸਟੈਂਪਸ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਰੋ ਨੂੰ ਐਕਸਪੈਂਡ ਕਰਨ ਤੇ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \quad (1)$$

$$= a_{21}a_{12}a_{33} - a_{21}a_{33}a_{13} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} \quad (2)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{12} \quad (3)$$

ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਐਕਸਪੈਡ ਕਰਨ ਤੇ :

C_1 ਕਾਲਮ ਤੇ ਐਕਸਪੈਂਡ ਕਰਨ ਤੇ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{13} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$

$= a_{11}a_{22}\,a_{33} - a_{11}a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{13} + a_{21}\,a_{13}a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22}$

ਹਰੇਕ ਕੇਸ ਨੰ. (1), (2) ਤੇ (3) ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਸ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1. $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਕੱਢੋ। (Determinant)

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$

ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$ ਤਾਂ ਫਿਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ |A| ਜਾਂ Δ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ—

$$\therefore\ |A| = \begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 7 \times 11 - 14 \times 3 = 77 - 42 = 35$$

ਇਸ ਲਈ 'A' ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ '35' ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. $\begin{vmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix}$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\begin{vmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{vmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix}$

ਇਸ ਲਈ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix}$$

$$= \sin 30^\circ \cos 60^\circ - (-\sin 60^\circ) \cos 30^\circ$$

$$= \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$$

$$= \sin (30^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ = 01$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

'A' ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ—

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2(12 - 16) + 0 = 8$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 4. ਜੇ $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $|3A| = 27|A|$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$\therefore$ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 - (4 - 0) = 4$$ ...(1)

$$27\,|A| = 27(A) = 108$$

$\therefore$ $$3A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}$$ ...(2)

$$= 3(36 - 0) = 108$$

ਸਮੀਕਰਨ ਨੰ. (1) ਤੇ (2) ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਕਿ $|3A| = 27\,|A|$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 5. ਜੇ $A = 2\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ, ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $A = 2\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$

$$\therefore \quad |A| \text{ ਜਾਂ } \Delta = 2\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,[(7)(11) - (14)\times(3)]$$

$$= 2(77-42) = 2(35) = 70$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 6. $A = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} h & f \\ g & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} h & b \\ g & f \end{vmatrix}$$

(R_1 ਨੂੰ ਐਕਸਪੈਂਡ ਕਰਨ ਤੇ)

$$= a(bc - f^2) - h(ch - fg) + g(hf - bg)$$

$$= abc - af^2 - ch^2 - hfg + ghf - bg^2$$

$$= abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1(ੲ)

1. ਨਿਮਨ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੱਭੋ—

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{5} \\ \sqrt{20} & \sqrt{24} \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$

2. ਨਿਮਨ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੱਭੋ।

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

3. ਜੇ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|2A| = 4\,|A|$

4. ਜੇ $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|4A| = 64\,|A|$

5. ਜੇ $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|3A| = 27\,|A|$

6. 3×3 ਹੁਕਮ ਦੀ ਇਕ ਮੈਟਿਰਕਸ 'A' ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ '4 ਹੈ। $|3A|$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕੱਢੋ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

ਮਾਈਨਰਜ਼ ਅਤੇ ਕੋ-ਫੈਕਟਰਜ (Miners and Co-factors) :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (ਮਾਈਨਰ) : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ a_{ij} ਮਾਈਨਰ ਨੂੰ i^{th} ਰੋ ਤੇ j^{th} ਕੌਲਮ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 'n' ਹੁਕਮ ਮਾਈਨਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ a ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਨੂੰ $(n-1)$ ਹੁਕਮ ਰਾਹੀਂ M_{ij} ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \\ 2 & 11 & 14 \end{vmatrix}$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$.

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (ਕੋਫੈਕਟਰਜ਼) : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ ਕੋਫੈਕਟਰ ਦੇ a_{ij} ਐਲੀਮੈਂਟ ਨੂੰ A_{ij} ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ ਸਹਿਤ : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \\ 2 & 11 & 14 \end{vmatrix}$; $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$; $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 1. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \\ 2 & 11 & 14 \end{vmatrix}$ ਵਿਚੋਂ 6 ਐਲੀਮੈਂਟ ਦਾ ਮਾਈਨਰ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ :

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \\ 2 & 11 & 14 \end{vmatrix}$

$\therefore$ 6 ਦਾ ਮਾਈਨਰ = a_{23} ਦਾ ਮਾਈਨਰ

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = (2 \times 11 - 2 \times 3) = 22 - 6 = 16$$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 2. ਡਿਟਰਮੀਨੇਂਟ $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$ **ਦੇ ਸਾਰੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਮਾਈਨਰਜ਼ ਤੇ ਕੋਫੈਕਟਰਜ਼ ਕੱਢੋ।**

ਹੱਲ : **ਦਿੱਤਾ ਹੈ** $A = \begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$

ਹੁਣ ਫਿਰ
M_{11} = 7 ਦਾ ਮਾਈਨਰ = 3
M_{12} = 14 ਦਾ ਮਾਈਨਰ = 11
M_{21} = 11 ਦਾ ਮਾਈਨਰ = 14
M_{22} = 3 ਦਾ ਮਾਈਨਰ = 7

ਇਸਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ
$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3$ $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 11$
$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -14$ $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 7$

ਉਦਾਹਰਨ ਨੰ: 3. ਡਿਟਰਮੀਨੇਂਟ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **ਦੇ ਸਾਰੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਮਾਈਨਰਜ਼ ਤੇ ਕੋਫੈਕਟਰਜ਼ ਕੱਢੋ।**

ਹੱਲ : **ਦਿੱਤਾ ਹੈ** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

ਹੁਣ ਫਿਰ $M_{11} = a_{11}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (1) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11$

$M_{12} = a_{12}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (0) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$M_{13} = a_{13}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (4) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$M_{21} = a_{21}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (-3) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$M_{22} = a_{22}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (5) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$M_{23} = a_{23}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$M_{31} = a_{31}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ $= (0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -20$

$M_{32} = a_{32}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ = (1) = $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13$

$M_{33} = a_{33}$ ਦਾ ਮਾਈਨਰ = (2) = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 11, A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -6$
$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 3, A_{12} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = 4$
$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2, A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -1$
$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -20, A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = 13$
$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = M_{33} = 5$

ਅਭਿਆਸ 1(ਬੀ)

1. ਨਿਮਨ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਾਰੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਮਾਈਨਰ ਕੱਢੋ।

(i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 14 \\ 2 & 11 & 22 \end{vmatrix}$ ਇਸ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚੋਂ a_{12} ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ ਕੱਢੋ।

(ii) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ਇਸ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚੋਂ a_{11}, a_{21} ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ ਕੱਢੋ।

3. ਨਿਮਨ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਹਰੇਕ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਮਾਈਨਰਜ਼ ਤੇ ਕੋਫੈਕਟਰਜ਼ ਕੱਢੋ—

(i) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} N & A \\ M & O \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} S & A \\ S & H \end{vmatrix}$

4. ਨਿਮਨ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਹਰੇਕ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਮਾਈਨਰਜ਼ ਤੇ ਕੋਫੈਕਟਰਜ਼ ਕੱਢੋ—

(i) $\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਐਡਜੁਆਇੰਟ

(ADJOINT OF MATRIX)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਜੇ $A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

ਇਕ $'n'$ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਨੂੰ ਐਡਜੁਆਂਇੰਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ **(Adjoint Matrix)** ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$adj.(A)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

ਇੱਥੇ

C_{ij} ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਅੰਸ਼ a_{ij} ਦਾ ਕੋਫ਼ੈਕਟਰ ਹੈ।

$$adj(A)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ C_{13} & C_{23} & \dots & C_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਨੂੰ'A' ਦਾ ਐਡਜੁਆਇੰਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਨੂੰ adjoint ਜਾਂ $adj.A$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਧਾਰਣ ਤੌਰ ਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਐਡਜੁਆਇੰਟ ਨੂੰ ਹਰੇਕ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਐਡਜੁਆਇੰਟ (Adjoint) ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ ਫਿਰ
$A_{11} = (-1)^{1+1}\, 3 = 3$
$A_{12} = (-1)^{1+2}\, 11 = -11$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\, 14 = -14$
$A_{22} = (-1)^{2+2}\, 7 = 7$

ਇਸ ਲਈ, $\text{adj. } A = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਨ 2. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਐਡਜੁਆਇੰਟ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ ਫਿਰ,
$A_{11} = (-1)^{1+1}\, 3 = 3, A_{12} = (-1)^{1+2}\, 4 = -4$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\, (-1) = 1, A_{22} = (-1)^{2+2}\, 2 = 2$

ਇਸ ਲਈ, $\text{adj. } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਨ 3. $\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਐਡਜੁਆਇੰਟ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ, $A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ ਫਿਰ,
$A_{11} = (-1)^{1+1}\, (3) = 3, A_{13} = (-1)^{1+2}\, (11) = -11$
$A_{21} = (-1)^{2+1}\, (7) = -7, A_{22} = (-1)^{2+2}\, (14) = 14$

ਇਸ ਲਈ, $\text{adj. } A = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$

ਅਭਿਆਸ 1 (ਸੀ)

1. ਨਿਮਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਐਡਜੁਆਇੰਟ ਕੱਢੋ :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$

2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ Adjoing A = | A | ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ 2। ਕੀ ਇਹ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਗਲਤ ਹੈ ?

3. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}5-x & x+1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $|adj.A|$ ਨੂੰ ਲੱਭੋ।

4. ਜੇ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ $|adj.A|$ ਨੂੰ ਲੱਭੋ।

5. $\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$ adjiont ਲੱਭੋ।

6. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 7 & 11\end{bmatrix}$ adjiont ਲੱਭੋ।

7. 2×2 ਸਕੇਅਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix}3-2x & x+1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ਦਾ ਐਡਜੁਆਇੰਟ (adjiont) ਕਰੋ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਓਲਟ (Inverse of Matrix)/ਇਨਵਰਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ: ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇੱਕੋ ਕ੍ਰਮ ਦੀਆਂ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਹਨ।

'AB=1=BA ਹੈ ਤਾਂ B ਨੂੰ A ਦੀ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ A^{-1} ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -15 & 6\end{bmatrix}$ ਤੇ $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ ਹਨ।

ਹੁਣ $AB=\begin{bmatrix}6-5 & -1+1\\ -30+30 & 6+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1$

ਅਤੇ $BA=\begin{bmatrix}6-5 & -2+2\\ 15-15 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1$

$\Rightarrow A$ ਅਤੇ B ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੀਆਂ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਹਨ।

$\Rightarrow A^{-1}=B\,\&\,B^{-1}=A$

ਨੋਟ: AB, BA ਦੇ ਗੁਣਨ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ A, B ਇਕੋ ਹੁਕਮ ਦੀਆਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ।

ਥਿਊਰਮ : ਹਰੇਕ ਓਲਟਾਈ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਇੱਕ ਬੇਜੋੜ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ A ਇੱਕ n ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਉਲਟਾਈ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਤੇ ਮੰਨ ਲਓ B ਤੇ C ਦੋ 'A' ਦੀ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਤਾਂ ਫਿਰ

$$AB=BA=1_n$$

ਇਸੇ ਦੇ ਨਾਲ $AC=CA=I_n$ ...(ii)

ਸਮੀਕਰਨ (i) ਤੋਂ, $AB=I_n$

'C' ਨੂੰ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ ਪਹਿਲਾਂ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$C(AB)=CI_n=C \quad ...(iii)$$

$$\{\because\ C.I_n=C\}$$

$$CA=I_n \quad ...(iv)$$

(ii) ਤੋਂ,

'B' ਨੂੰ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼, ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$(CA)B = I_n = B \qquad ...(v) \qquad \{\because I_n B = B\}$$

ਗੁਣਨ ਦਾ ਐਸੋਸਿਏਟਿਵ ਸਿੱਧਾਂਤ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ

$$C(AB) = (CA)B$$

$\because (iii), (iv)$ ਤੇ (v) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ,

$$B = C$$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਹਰੇਕ ਉਲਟਾਈ ਸਕਣ ਜਾ ਯੋਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਯੂਨਿਕ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 2. ਸਿੰਗੂਲਰ ਤੇ ਨਾਨ-ਸਿੰਗੂਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Singular and Non-Singular Matrix)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਸਕੇਅਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ **A** ਨੂੰ ਸਿੰਗੂਲਰ ਤੇ ਨਾਨ- ਸਿੰਗੂਲਰ ਇਸ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $|A| \neq 0$ ਜਾਂ $|A| = 0$.

ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ (Existance of Inverse): ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਸਹੀ ਸ਼ਰਤ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਕਰਨ ਲਈ $|A| \neq 0$ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ 'A' ਇੱਕ 'n' ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਉਲਟਾਈ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਵਰਗਾਕਾਰ (Invertible) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ 'B' ਇੱਕ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ, $\qquad AB = BA = 1_n$

ਹੁਣ, $\qquad AB = 1_n$

$$\therefore \quad |AB| = |1_n| = 1 \qquad \{\because |1_n| = 1\}$$

$$\therefore \quad |A||B| = 1 \qquad \{\because |AB| = |A||B|\}$$

$$\therefore \quad |A| \neq 0 \qquad \{\because ab = 1 \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0\}$$

ਸ਼ਰਤ ਇੱਕ ਸਫੀਸੈਂਟ ਹੈ (Sufficient Condition): ਮੰਨ ਲਓ 'A' ਇੱਕ 'n' ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਵਰਗਾਕਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ $|A| \neq 0$ । ਮੰਨ ਲਓ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'B' ਨੂੰ ਸਬੰਧ ਦੁਆਰਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$B = \frac{1}{|A|}(adj.A)$$

ਫਿਰ

$$AB = A\left(\frac{1}{|A|} adj.A\right) = \frac{1}{|A|} A(adj.A)$$

$$= \frac{1}{|A|}.|A| 1_n = 1_n \qquad \{\because A(Adj.A = |A| 1_n)\}$$

ਦੁਆਰਾ

$$BA = \left(\frac{1}{|A|} adj.A\right) A = \frac{1}{|A|}(adj.A).A$$

$$= \frac{1}{|A|}.|A| 1_n = 1_n$$

ਇਸੇ ਕਰਕੇ $\qquad AB = AB = 1_n$

ਸੋ 'A' ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਇਨਵਰਟੀਵਲ ਹੈ ਤੇ B ਇੱਕ ਇਨਵਰਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਦੀ ਹੈ।

ਯਾਦਸਰ 1. ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਵਰਗਾਕਾਰ) A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A| \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀ ਓਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj.A)$$

2. ਇੱਕ ਨਾਲ- ਸਿੰਗੂਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਦੇ ਇਨਵਰਸ ਐਡਜੁਆਇੰਟ (adjoint) ਦੁਆਰਾ ਲੱਛਣ।

ਕੰਮ ਯੋਗ ਨਿਯਮ :

- (i) $|A|$ ਲੱਭੋ : ਇੱਕ ਕਿ ਸਿਫਰ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ $|A| \neq 0$
- (i i) A ਦੇ ਹਰੇਕ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ ਲੱਭਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
- (i i i) ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।

(*iv*) ਮਿਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ ਤੋਂ ਐਡਜੁਆਇੰਟ (adjoint) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਨਾਲ।
(*v*) $|A|$ ਨੂੰ adj. A ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ A^{-1} ਦਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ।

ਇਸ ਲਈ $A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|}$

3. ਇਨਵਰਸ ਆਫ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਦਾ ਐਡਜੁਆਇੰਟ ਤੇ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,
$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$
$$|A| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

∴ ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ,
$$C_{11} = \cos\alpha, C_{12} = -\sin\alpha, C_{21} = -(-\sin\alpha)$$
$$C_{21} = \sin\alpha \text{ ਤੇ } C_{22} = \cos\alpha$$

∴ C ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

∴ $\text{adj. } A = C' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

∴ $A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਨ 2. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A_{11} = 3, A_{12} = -5, A_{22} = 2$$

∴ ▲≻◇. 1 $= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

∴ ਤੇ
$$|A| = 2A_{11} + 5A_{12}$$
$$= 2(3) + 5(-1) = 6 - 5 = 1 \neq 0$$

∴ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj. } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਨ 3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A_{11} = 6, A_{12} = -8. A_{21} = -7, A_{22} = 8$$

$\therefore$ $$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$$

ਤੇ $$|A| = 48 - 56 = -8 \neq 0$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj. } A = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਨ 4. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A_{11} = \frac{1+bc}{a}, A_{12} = -C, A_{21} = -b, A_{22} = a$$

$\therefore$ $$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj. } A = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ਅਭਿਆਸ 1(ਡੀ)

1. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

2. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ A^{-1} ਲੱਭੋ।

3. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

4. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ $(AB)^{-1}$ ਲੱਭੋ।

5. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ, ਤਾਂ $(AB)^{-1}$ ਲੱਭੋ।

6. ਜੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ।

7. ਨਿਮਨ ਦੇ ਇਨਵਰਸ ਲੱਭੋ-

$$(i)\begin{bmatrix}2 & -2\\4 & 3\end{bmatrix}(ii)\begin{bmatrix}-1 & 5\\-3 & 2\end{bmatrix}(iii)\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}(iv)\begin{bmatrix}a+b & c+d\\-c+d & a-b\end{bmatrix}$$

ਸਮਕਾਲਕ ਇੱਕ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (SIMULTANEOUS LINEAR EQUATION) :

ਮੰਨ ਲਓ n ਇੱਕ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a1_n x_n = b_1$$
$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nx}x_n = b_n$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ-

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ, $a11 \quad a12 \quad a1n$

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{bmatrix}$$

(i) ਮੰਨ ਲਓ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'A' ਇੱਕ ਨਾਨ - ਸਿੰਗੁਲਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ

$$x = A^{-1}B$$

ਇਸ ਦਾ ਯੂਨੀਕ ਹੱਲ ਹੈ।

(i i) ਮੰਨ ਲਓ A ਇੱਕ ਸਿੰਗੂਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਤਾਂ ਫਿਰ A^{-1} ਇਨਵਰਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $(adj.A).B$ ਲੱਭੋ।

(a) ਜੇ $(adj.A).B \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਿਟਮ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਇਨਕਰਨਸੀਸਟੈਂਟ (Inconsistant) ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ।

(b) ਜੇ $(adj.A).B = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਰਭਰ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਇਸਦੇ ਅਨੰਤ ਹੱਲ ਹਨ।

ਨੋਟ : 1. ਜੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ ਤਾਂ ਫਿਰ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਕਨਸੀਸਟੈਂਟ (consistant) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਨਕਸੀਸਟੈਂਟ (Inconsistant) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

2. ਇੱਕ ਕਨਸਿਸਟੈਂਟ (consistant) ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇੱਕ ਹੱਲ ਜਾਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਨਿਮਨ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ।

ਉਦਾਹਰਨ 1.

$$3x + 2y = 7$$
$$11x + 4y = 3$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ:

$$3x + 2y = 7$$
$$11x + 4y = 3$$

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ :

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\11 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$

$|A| = -12 - 22 = -34$

∴ $a_{11} = -4, a_{12} = -11, a_{21} = -2, a_{22} = 3$

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

∴ $A^{-1} = \dfrac{\text{adj. } A}{|A|} = \dfrac{1}{34}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$

∴ $X = A^{-1}B$

ਜਾਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/34 & 2/34 \\ 11/34 & -3/34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28/34 + 6/34 \\ 77/34 - 9/34 \end{bmatrix}$

∴ $x = 1, y = 2$

ਉਦਾਹਰਨ 2.

$$x - 2y = 3$$
$$3x + y = 16$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$x - 2y = 3$$
$$3x + y = 16$$

ਹੁਣ ਇਸ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, ∴ $|A| = 1 + 6 = 7$

$a_{11} = 1, a_{12} = -3, a_{21} = 2, a_{22} = 1$

∴ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, adj. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

∴ $A^{-1} = \dfrac{\text{adj. } A}{|A|} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$

∴ $X = A^{-1}B$

ਜਾਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ -3/7 & 1/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3/7 + 32/7 \\ -9/7 + 16/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/7 \\ 7/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴ $x = 5$ ਅਤੇ $y = 1$.

ਉਦਾਹਰਨ 3. ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਕਨਸੀਸੈਂਟ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

$$x + 2y = 2$$
$$2x + 3y = 3$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$x + 2y = 2$$
$$2x + 3y = 3$$

ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i.e. $AX = B$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $|A| = 3 - 4 = -1 \neq 0$

ਇਸ ਲਈ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਯੂਨੀਕ ਹੱਲ ਹੈ ਇਸ ਕਰਕੇ ਇਹ ਕਨਸੀਸਟੈਂਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 4. $4x - 2y = 3$
$6x - 3y = 5$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$4x - 2y = 3$$
$$6x - 3y = 5$$

ਹੁਣ, ਇਸ ਕਰਕੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} 3^9 = B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $|A| = -12 + 12 = 0$

$\therefore$ A ਇਕ ਸਿੰਗੁਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

$\therefore$ A^{-1} ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5. $2x + 5y = 7$
$6x + 15y = 13$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$2x + 5y = 7$$
$$6x + 15y = 13$$

ਹੁਣ, ਇਸ ਕਰਕੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = (30 - 30) = 0$$

ਇੱਥੇ $|A| = 0$, ਇਸ ਕਰਕੇ A ਇਕ ਸਿੰਗੁਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤੇ A^{-1} ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 15, a_{12} = -6, a_{21} = -5, a_{22} = 2$

$$\therefore \qquad \text{adj. A} = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ,

$$(\text{adj. A})\,B = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 105-65 \\ -42-26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -16 \end{bmatrix} \neq 0$$

ਸੋ, $(\text{adj. A})\,B \neq 0$ ਤੇ $|A| = 0$

ਤਾਂ ਫਿਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਇਨਕਸੀਸਟੈਂਟ (inconsistant) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 6.

$$3x - 2y = 5$$
$$6x - 4y = 9$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$3x - 2y = 5$$
$$6x - 4y = 9$$

ਹੁਣ, ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ਤੇ $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$AX = B$$

$\therefore |A| = 3 \times (-4) - (-2)(6) = -12 + 12 = 0$

A ਇਕ ਸਿੰਗੂਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਇਨਵਰਸ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\therefore A^{-1}$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਿਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਯੂਨੀਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ, $a_{11} = 3, a_{12} = 7, a_{21} = -2, a_{22} = 5$

$$\therefore \qquad \text{adj. A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj. A}}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-10 \\ -28+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x = 2, y = -3$$

ਉਦਾਹਰਨ 7.

$$5x + 2y = 4$$
$$7x + 3y = 9$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$5x + 2y = 4$$
$$7x + 3y = 9$$

ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ਇੱਥੇ,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ਤੇ } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0$$

∴

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ਤੇ } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 - 9 = -11 \neq 0$$

∴

∴ A^{-1} ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

ਹੁਣ, $a_{11} = -1, a_{12} = -3, a_{21} = -3, a_{22} = 2$

∴

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

∴

$$A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

∴

$$X = A^{-1}B$$

⇒

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -5-6 \\ -15+4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -11 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x = 1, y = 1$

ਉਦਾਹਰਨ 8.

$$2x + by = 5$$
$$3x - y = 2$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$2x + 3y = 5$$
$$3x - y = 2$$

ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ,

$a_{11} = -4, a_{12} = -6, a_{21} = 2, a_{22} = 3$

∴

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

∴

$$(\text{adj. } A)B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20+18 \\ -30+27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\neq 0$$

ਜੇ $(\text{adj. } A)B \neq 0$ ਤੇ $|A| = 0$, ਇਸ ਕਰਕੇ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਇਨਕਨਸੀਸੈਂਟ (inconsistent) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 9.

$$5x - 7 = 4$$
$$3x + 7y = 10$$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$5x - y = 4$$
$$3x + 7y = 10$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ਇੱਥੇ, $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

ਇੱਥੇ, $|A| = 35 + 5 = 38 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਯੂਨੀਕ ਹੈ।

ਹੁਣ, $a_{11} = 7, a_{12} = -3, a_{21} = 1, a_{22} = 5$

$$\therefore \quad \text{adj. } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{|A|} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 28+10 \\ -12+50 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 38 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x = 1, y = 1.$$

ਅਭਿਆਸ 1(ਈ)

1. ਨਿਮਨ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $2x + y = 5$, $5x - 2y = 8$

(ii) $x + 2y = 4$, $2x + 5y = 9$

(iii) $5x + 2y = 4$, $3x + y = 3$

(iv) $2x - y = -2$, $3x + 4y = 3$

(v) $3x + 5y = 8$, $2x - y = 1$

(v) $5x + 2y = 4$, $7x + 3y = 5$

2. ਨਿਮਨ ਸਿਸਟਮ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕਰੋ ਤੇ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਨਸੀਸ਼ੈਂਟ (consistent) ਜਾਂ ਇਨਕਨਸੀਸ਼ੈਂਟ (inconsistent) ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

(i) $2x + 3y = 5$, $6x + 9y = 10$

(ii) $3x + y = 7$, $5x + 5y = 12$

(iii) $2x - y = 7$, $4x - 2y = 14$

(iv) $x + 3y = 5$, $2x + 6y = 8$

(v) $3x - 4y = 5$, $4x + 2y = 3$

(vi) $2x + 5y = 1$, $3x + 2y = 7$

(vii) $3x + 5y = 8$, $2x - 3y = 1$

(viii) $2x + 3y = -1$, $x + 2y = 2$

ਪਾਠ-2 DIFFERENTIATION

Definition (ਪਰਿਭਾਸ਼):

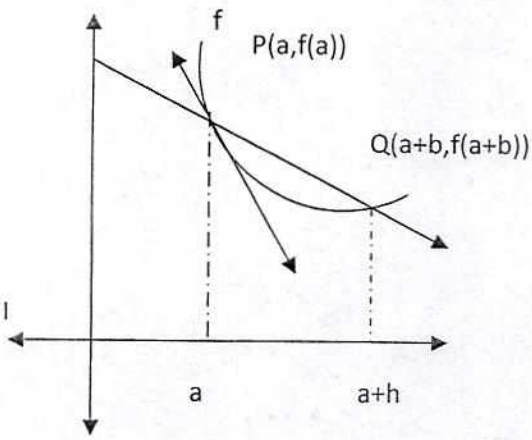
ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ

ਮੰਨ ਲਓ $f(x)$ ਇੱਕ Real valued function ਹੈ ਅਤੇ a ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਉਸ ਦੀ Domain ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ $f'(a)$ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਫਾਰਮੂਲਾ (formula) ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ਗ੍ਰਾਫ ਰਾਹੀ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ Derivative ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣਾ :

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਫੰਕਸ਼ਨ (function) ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ (graph), $y = f(x)$ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ (ਨੇੜਲੇ) $p(a, f(a))$ ਅਤੇ $Q(a+h, f(a+h))$ ਹਨ, ਤਦ



PQ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $= f\dfrac{(a+h) - f(a)}{a+h-a}$

$= f\dfrac{(a+h) - f(a)}{h}$

ਜਦੋਂ $Q \to P$ ਉਦੋਂ PQ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਦੋਂ $h \to 0$ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ।

ਇਸ ਲਈ, P ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ a ਤੇ ਵਕਰ ਦੇ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਜਾਂ ਵਿਤਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਸ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ a ਤੇ ਬਣੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1 : $f(x) = 99x$ ਦਾ $x = 100$ ਤੇ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $f(x) = 99x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(100+h) - f(100)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{99(100+h) - 99 \times 100}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9900 + 99h - 9900}{h}$$

$$= \frac{99h}{h} 99$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. $f(x)=3x$ ਦਾ $x=2$ ਤੇ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3.2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h}$$

$$=\frac{3h}{h}$$

$$f'(2)=3$$

ਉਦਾਹਰਨ 3. $f(x)=\cos x$ ਦਾ $x=0$ ਤੇ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$f(x)=\cos x$$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(1-\cosh)}{h}=-\frac{2\sin^2(h/2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}.\sin(h/2)$$

$$=1\times 0=0\,Ans.$$

ਅਭਿਆਸ 1 (a)

1. $f(x)=3$ ਦਾ $x=0$ ਅਤੇ $x=3$ ਤੇ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. $f(x)=\sin x$ ਦਾ $x=0$ ਤੇ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. $f(x)=2\cos x$ ਦਾ $x=\pi/2$ ਤੇ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. $f(x)=x^{2-}4x+7$
ਸਿੱਧ ਕਰੋ $f'(s)=2f'(7/2)$

Derivative of a Function

Definition (ਪਰਿਭਾਸ਼) :
ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਅਸਲ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦਾ Derivative $f'(x)$ ਕਹਾਵੇਗਾ ਅਤੇ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f'(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ (ਬਿੰਦੂ a ਖਾਸ ਮੁਲ) $or \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x))$ ਜਿੱਥ $y=f(x)$ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਥਨ (Remark):

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ (Derivative) ਹੱਲ ਕਰਨ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਧਾਂਤ ਨਾਲ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ Ab Initio Method ਜਾਂ Delta Method ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

<u>ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ</u>

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦਾ First Principle ਦੇ ਸਿੱਧਾਂਤ ਨਾਲ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ (Derivative) ਪਤਾ ਕਰੋ:

(*i*) $(x-1)\,(x-2)$ (*ii*) x^3-27

ਹੱਲ : *(i)* ਮੰਨ ਲਓ,

$$f(x)=(x-1)(x-2)$$

$$f(x)=x^2-3x+2$$

ਇਸ ਲਈ,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-3(x+h)+2\right]-\left[x^2-3x+2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx-3x-3h+2-x^2+3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2-3h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h[2x+h-3]}{h}$$

$$f'(x) = 2x+0-3 = 2x-3$$

(ii) $f(x) = x^3-27$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3-27\right]-(x^3-27)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{x+h-x} \qquad \left\{\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right\}$$

$$= 3x^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. First Principle ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Deriavtive ਪਤਾ ਕਰੋ।

$f(x) = x^{-3/2}$

ਹੱਲ :

$$f(x) = x^{-3/2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-3/2}-x^{-3/2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-3/2}-x^{-3/2}}{x+h-x}$$

t ਨੂੰ $x+h$ ਕਰੋ,

$$= \lim_{h\to 0}\frac{t^{-3/2}-x^{-3/2}}{t-x}$$ $t = x+h$ ਇਸ ਲਈ $t \to x$ as $h \to 0$

$$= \frac{-3}{2}x^{-3/2-1}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{2}x^{-5/2}$$

ਅਭਿਆਸ 1(b)

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦਾ First Principle ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $f(x) = a$, ਇਸ ਵਿਚ a ਇਕ constant (ਚੱਲ) ਹੈ।

   (ii) $f(x) = 10x$ (iii) $f(x) = \frac{1}{x}$ (iv) $f(x) = (-x)^{-1}$

2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ First Principle ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\sqrt{2x+3}$ (ii) $x^{-3/4}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (iv) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

ਕੁਝ ਖਾਸ ਫੰਕਸ਼ਨ (Functions) ਦੇ ਡੇਰੀਵੇਟ (Derivative)

ਕੁਝ ਖਾਸ ਡੇਰੀਵੇਟ ਦੇ ਫੰਕਸ਼ਨ

Derivative of Some Standard Functions

ਥਿਊਰਮ 1. ਅਚਲ (constant) function ਦਾ Derivative ਜ਼ਿਰੋ (zero) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ $f(x) = C$ ਇਕ ਅਚਲ function ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

ਥਿਊਰਮ 2. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\ n \in N$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ,

$$f(x) = x^n$$

ਇਸ ਲਈ,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{Put } x + h = t \text{ as } x \to t, h \to 0$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - (x)}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x}$$

$$= nx^{n-1}$$

ਥਿਊਰਮ 3. $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = n(ax+b)^{n-1} \cdot a, n \in N.$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ,

$$f(x) = (ax + b)^n$$

ਇਸ ਲਈ,

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[a(x+h)+b]^n - [ax+b]^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[(ax+b)^n\left[\left(1 + \frac{ah}{ax+b}\right)^n - 1\right]\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} (ax+b)^n \frac{1}{h}\left[1+n\left(\frac{ah}{ax+b}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{ah}{ax+b}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ah}{ax+b}\right)^n - 1\right]$$

$$= \frac{h}{h}(ax+b)^n \lim_{h\to 0}\left[\frac{na}{ax+b}+0+\dots+0\right]$$

$$f'(x) = na\,(ax+b)^{n-1}$$

ਥਿਊਰਮ 4. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a, a>0, a\neq 1.$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ, $f(x) = a^x$

ਇਸ ਲਈ,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x[a^h-1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$f'(x) = a^x \log a$$

Cor. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ $a = e$ ਪਹਿਲੇ ਥਿਊਰਮ ਵਿੱਚ

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \log e = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

ਥਿਊਰਮ 5. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\log a}\ x>0$

ਸਬੂਤ :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_e (1+h/x)}{\log_e a\, h} \qquad \left\{\log_n m = \frac{\log m}{\log n}\right.$$

$$= \frac{1}{\log_e a} \lim_{h\to 0} \frac{\log (1+h/x)}{x\cdot h/x}$$

$$= \frac{1}{x\log_e a} \lim_{h\to 0} \frac{\log (1+h/x)}{h/x}$$

$$= \frac{1}{x\log_e a} \qquad \left\{\lim_{x\to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = 1\right.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\log a}$$

Cor. $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0$

ਸਬੂਤ : ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $a = e$ in above ਥਿਊਰਮ,

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\log a}$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

ਥਿਊਰਮ 6. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

ਸਬੂਤ :

$$f(x) = \sin x$$

ਇਸ ਲਈ,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin (x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin(h/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + h/2) \frac{\sin(h/2)}{h/2}$$

$$= \cos(x + 0)(1)$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

ਥਿਊਰਮ 7. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

ਸਬੂਤ :

$$f(x) = \cos x$$

$$\therefore \; f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \qquad \left\{ \because f'(x) = \frac{f(k+h) - f(x)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\sin(x + h/2) \frac{\sin(h/2)}{h/2}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\sin(x + 0) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2}$$

$$= -\sin x \,.\, 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ਥਿਊਰਮ 8. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ,

$$f(x) = \tan x$$

$$\therefore \; f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\sin(x+h-x)}{\cos x \cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \frac{1}{\cos x[\cos x + 0]}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 \cdot \sec^2 x$$

ਥਿਊਰਮ 9. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ,

$$f(x) = \cot x$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right] \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos x \cos(x+h)}\right] \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos(x+h)\, h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h/2)}{\cos x(\cos(x+h))} \frac{\sin(h/2)}{h/2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

ਥਿਊਰਮ 11. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = -\text{cosec}\, x \cot x$

ਸਬੂਤ :

$$f(x) = \text{cosec}\, x$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{cosec}(x+h) - \text{cosec}\, x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\sin x - \sin x (x+h)}{\sin x \cdot \sin (x+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2 \cos \left(\frac{x+x+h}{2} \right) \sin \left(\frac{x-x-h}{2} \right)}{\sin x \cdot \sin (x+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \left(-\frac{h}{2} \right)}{\sin x \cdot \sin (x+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[(-1) \frac{2 \cos (x+0)}{\sin x} \cdot \frac{\sin (h/2)}{\sin (x+0)\, h/2} \cdot 2 \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x}$$

$$\frac{d}{dx} (\text{cosec } x) = \lim_{h \to 0} -\text{cosec } x \cot x$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. xe^x ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Differentiate ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ,

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\, e^{x+h} - xe^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{xe^{x+h} + he^{x+h} - xe^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{xe^x e^h}{h} + \frac{h \cdot e^{x+h}}{h} - \frac{xe^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} xe^x \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) + e^{x+h}$$

$$= xe^x \cdot 1 + e^{x+0} = xe^x + e^x$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = (x+1)\, e^x$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Derivative ਕਰੋ :

(*i*) $\cos^2 x$ (*ii*) $\tan \sqrt{x}$

हल : (i)

$$f(x) = \cos^2 x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(x+h)-\cos^2 x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-\sin^2(x+h))-(1-\sin^2 x)}{h}$$

$\{\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 x-\sin^2 (x+h)}{h}$$

$$\because \left\{\frac{-\sin(2x+h)\cdot\sin h}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}(-)\frac{\sin(2x+h)\sin h}{h} = -\sin 2x \cdot 1 = -\sin 2x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^2 x) = -\sin 2x$$

(ii)

$$\frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{x}\right) = \sec^2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan\sqrt{x+h}-\tan\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin\sqrt{x+h}}{\cos\sqrt{x+h}}-\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\sqrt{x+h}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x+h}}{h\cos\sqrt{x+h}\cos\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\,\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{\cos\sqrt{x+h}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot h}$$

{Rationalising}

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\,\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x+h}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot h}$$

$$= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x+h}\ \cos\sqrt{x}.h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+h-x}{h.\cos\sqrt{x+h}\ \cos\sqrt{x}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos\sqrt{x+0}\ \cos\sqrt{x}(\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ਅਭਿਆਸ 1 (C)

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ w.r.t. x Derivative ਕਰੋ :

$(i)\frac{1}{x^4}\ (ii)\frac{1}{\sqrt{4-5x}}\ (iii)\ (3x+4)^5$

2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ w.r.t. x Derivative ਕਰੋ :

$(i)\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ (ii)\sqrt{x^3}\ (iii)\ \sqrt{4x+6}\ (iv)\ (4-3x)^{-2}$

3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ w.r.t. x Differentiate ਕਰੋ :

$(i)\ 3^x\ \ (ii)\ \log_x x\ \ (iii)\ \log_x 7$

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ First Principal ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Derivative ਕਰੋ :

$(i)\ x^2e^x\ (ii)e^{\sqrt{ax+b}}\ (iii)\ a^{\sqrt{x}}$

5. First Principal ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ Derivative ਕਰੋ :

$(i)\sin 3x (ii)\sin(x^2+1)(iii)\frac{\sin x}{x}$

ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਬਾਬਤ ਕੁਝ ਖਾਸ ਥਿਊਰਮਾਂ :-

ਥਿਊਰਮ 12. $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x))$ ਇੱਥੇ c ਇੱਕ ਕਾਨਸਟੈਂਟ (ਸਥਿਰ) ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ

$$g(x) = cf(x)$$

$$\therefore g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= cf'(x)$$

ਥਿਊਰਮ 13. $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$

ਮੰਨ ਲਓ, $\phi(x)=f(x)+g(x)$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)}{h}-\frac{f(x)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

ਇੱਥੇ $\frac{d}{dx}(fx)+g(x))=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਥਨ : $\frac{d}{dx}[C_1f_1(x)\neq C_2f_2(x)+\ldots+C_nf_n(x)]=4\frac{d}{dx}f_1(x)\neq C_2\frac{d}{dx}f_2(x)+\ldots+C_n\frac{d}{dx}f_n(x)$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ 'x' ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਤਰੇਕ ਹਲ ਕਰੋ :

$(i)x^3(5+3x)$ (ii) $2\ \tan\ x-7\ \sec\ x$

ਹੱਲ : *(i)*

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-3}(5+3x)\right)=\frac{d}{dx}(5x^{-3}+3x^{-2})$$

$$=\frac{d}{dx}(5x^{-3})+\frac{d}{dx}(3x^{-2})$$

$$=5\frac{d}{dx}(x^{-3})+3\frac{d}{dx}(x^{-2})$$

$$=5(-3)x^{-4}+3(-2)x^{-3}$$

$$=\frac{-15}{x^4}-\frac{6}{x^3}$$

(ii)

$$\frac{d}{dx}(2\tan x-7\sec x)=2\frac{d}{dx}(\tan x)-7\frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$=2\sec^2 x-7\sec x\tan x$$

2. $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\ldots+\frac{x^2}{2}+x+1$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ: $f'(1)=100f'(0)$

ਹੱਲ : $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\ldots+\frac{x^2}{2}+x+1$

$$f'(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\ldots+\frac{2x}{2}+1+0$$

$$f'(x)=x^{99}+x^{98}+\ldots+x+1$$

M/S ਪਾਪੂ ਸਟੇਸ਼ਨ ਟਾਪ 8

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ (L.H.S.) $= f'(1) = (1)^{99} + (1)^{98} + ... + 1 + 1$ (100 terms)

$= 100$

ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ (R.H.S.) $= 100 f'(0)$

$= 100 [0 + 0 + ... + 0 + 1]$

$= 100$

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਉਦਾਹਰਨ 3. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dr}$ ਕੱਢੋ ਅਤੇ $\left.\frac{dV}{dr}\right]_{r=5}$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ 100π ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi . 3r^2 = 4\pi r^2$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dV}{dr}\right]_{r=5} = 4\pi (5)^2 = 100\pi$$

ਉਦਾਹਰਨ 4. ਜੇਕਰ $f(x) = \alpha x^n$, ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\alpha = \frac{f'(1)}{n}$.

ਹੱਲ :

$$f(x) = \alpha x^n$$

$$f'(x) = \alpha \frac{d}{dx}(x^n) = \alpha n x^{n-1}$$

x ਨੂੰ 1 ਭਰਨ ਤੇ,

$$f'(1) = \alpha n (1)^{n-1} = \alpha n.$$

$$\therefore \ \alpha = \frac{f'(1)}{n}.$$

ਉਦਾਹਰਨ 5. $y = \log_x x + e^{3\log x} + e^{\log x^3} + 4^{3\log_4 x}$, $\frac{dy}{dx}$ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਆਪਾਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ,

$$e^{\log f(x)} = f(x)$$

$$a^{\log_a n} = n$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_x x = 1$$

$$e^{3\log x} = e^{\log x^3} = x^3$$

$$3^{\log_3 x} = x$$

$$4^{3\log_4 x} = x^3$$

$$\therefore \quad y = 1 + x^3 + x^3 + x^3 = 1 + 3x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2$$

ਅਭਿਆਸ 1(d)

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ w.r.t. x, ਨਾਲ Derivate ਕਰੋ :
   (i) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$ (ii) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$ (iii) $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$
2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ w.r.t. x, ਨਾਲ Derivate ਕਰੋ :

   (i) $x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x + 2$ (ii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

3. ਦਿੱਤੀ ਗਈ x ਦੇ ਮਾਨ ਤੇ Derivate ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $f(x) = x\ ;\ x = 1$ (ii) $f(x) = 99x, x = 100$
4. ਜੇਕਰ $f(x) = x^n$ ਅਤੇ $f'(1) = 10$, n ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਜੇਕਰ $z = t^5 - 3t^4 + 2t^3 + 8$, $\frac{dz}{dt}$ ਕੱਢੋ।

   $t = 0, 1, 5$ ਤੇ ਵੀ $\frac{dz}{dt}$ ਕੱਢੋ।

6. Derivate ਕਰੋ :
   (i) $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$ (ii) $\frac{\cos(x-2)}{\sin x}$
7. ਦਿੱਤੀ ਗਈ curve ਦੀ tangent ਦੀ ਢਲਾਨ (slope) ਪਤਾ ਕਰੋ :
   $y = 3x^4 - 5x^3 + 2$ at $x = 1$

Differentiation ਦਾ (Product Rule) ਗੁਣਨ ਰੂਲ

ਥਿਊਰਮ : $\frac{d}{dx}(f(x).g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x))$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ,

$$\phi(x) = f(x).g(x)$$

$$\therefore\ \phi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$f(x+h)\,g(x)$ ਨੂੰ ਅੰਸ਼ ਵਿਚ ਜੋੜੋ ਅਤੇ ਘਟਾਉ।

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

$$\phi'(x) = f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x))$$

Product Rule ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ।
ਦੋ function ਦੇ Product ਦਾ Derivative = (ਪਹਿਲਾ ਫੰਕਸ਼ਨ) × (Derivative ਦੂਜੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦਾ) + (ਦੂਜਾ ਫੰਕਸ਼ਨ) × (Derivative ਪਹਿਲੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦਾ)

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. x ਦੇ w.r.t. Derivate ਕਰੋ।
(*i*) $(x^2-5x+6)(x^3+2)$ (*ii*) $2\sin x\cos x$

ਹੱਲ :

$$f(x) = (x^2-5x+6)(x^3+2)$$

Product Rule,

$$f'(x) = (x^2-5x+6)\frac{d}{dx}(x^3+2)+(x^3+2)\frac{d}{dx}(x^2-5x+6)$$
$$= (x^2-5x+6)(3x^2)+(x^3+2)(2x-5)$$
$$= 3x^4-15x^3+18x^2+2x^4-5x^3+4x-10$$
$$= 5x^4-20x^3+18x^2+4x-10$$

(*ii*)

$$f(x) = 2\sin x\cos x$$
$$f'(x) = 2\left[\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)\right]$$
$$= 2[\sin x(-\sin x)+\cos x.\cos x]$$
$$= 2[-\sin^2 x+\cos^2 x]$$
$$= 2[\cos^2 x-\sin^2 x]$$
$$f'(x) = 2\cos 2x$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. Derivative w.r.t. x.
$f(x) = x^5e^x+x^6\log x.$

ਹੱਲ : $f'(x) = x^5\frac{d}{dx}(e^x)+x^6\frac{d}{dx}(\log x)+e^x\frac{d}{dx}(x^5)+\log x\frac{d}{dx}(x^6)$

$$= x^5.e^x+x^6.\frac{1}{x}+e^x.5x^4+\log x.6x^5$$
$$f'(x) = x^5.e^x+x^5+5x^4e^x+6x^5\log x$$

ਅਭਿਆਸ 1(*e*)

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :
(*i*) $(4x-7)^5(2x+9)^7$ (*ii*) $x(x-3)(x^2+x)$
2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :
(*i*) x^3e^x (*ii*) $e^x(x+\log x)$
3. Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :
(*i*) $x^2\sin x\log x$ (*ii*) $x^n\log_a n\, e^x$

Differentiation ਦਾ Quotient Rule

ਥਿਊਰਮ : $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x)\neq 0$

ਸਬੂਤ :

$$\phi(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$\therefore\ \phi'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x)+g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x).g(x+h).h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{g(x).g(x+h)}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{-1}{g(x).g(x+0)}g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{-1}{[g(x)]^2}$$

Cor. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

ਸਬੂਤ : $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]$

$$= f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]+\frac{1}{g(x)}\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= f(x)\cdot\left(\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\right)+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :

(*i*) $\frac{ax+b}{cx+d}$ (*ii*) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

ਹੱਲ : $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(cx+d)\frac{d}{dx}(ax+b)-(ax+b)\frac{d}{dx}(cx+d)}{(cx+d)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(cx+d)(a)-(ax+b)(c)}{(cx+d)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

(ii) $$y = \frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2)-2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}-\left[\frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(x^2)-x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}\right]$$

$$= \frac{0-2}{(x+1)^2}-\left[\frac{(3x-1)(2x)-x^2.3}{(3x-1)^2}\right]$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2}-\frac{(6x^2-2x-3x^2)}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2}-\frac{(3x^2-2x)}{(3x-1)^2}$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. Derivate w.r.t. x.

$$y=\frac{e^x+\sin x}{1+\log x}$$

ਹੱਲ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)\,D(e^x+\sin x)-(e^x+\sin x)\,D(1+\log x)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{(1+\log x)(e^x+\cos x)-(e^x+\sin x)\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+\log x)(e^x+\cos x)-(e^x+\sin x)}{x(1+\log x)^2}$$

ਅਭਿਆਸ 1(f)

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Quotient Rule ਨਾਲ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\dfrac{x^n - a^n}{x-a}$ (ii) $\dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$

2. Differentiate w.r.t. x :

(i) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ (ii) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\dfrac{e^x}{1+\sin x}$ (ii) $\dfrac{e^x-\tan x}{\cot x - x^n}$

ਕੰਪੋਜ਼ਟ ਫਕੰਸ਼ਨ (Composite Function) ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟ Derivative

ਲੜੀ ਨਿਯਮ (Chain Rules), ਜੇਕਰ y ਇੱਕ ਵਿਤਕਰੀ ਯੋਗ ਫਲਨ u ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ u, x ਦਾ ਫੰਕਸ਼ਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. Chain Rules ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟ Derivative ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sin(\cos x^2)$ (ii) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ , $y = \sin(\cos x^2)$

Chain Rules ਲਈ $\cos x^2$ ਨੂੰ u ਭਰਨ ਤੇ

$u = \cos(x^2)$ $\qquad y = \sin u$

$\dfrac{du}{dx} = -\sin(x^2)\dfrac{d}{dx}x^2$ $\qquad \dfrac{dy}{du} = \cos u$

$= -\sin(x^2).2x$

ਇਸ ਲਈ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = \cos u(-2x\sin(x^2))$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x\cos(x^2)\sin(x^2)$$

(ii) $y = \log(x+\sqrt{1+x^2})$

Chain Rules ਲਈ $x+\sqrt{1+x^2}$ ਨੂੰ u ਭਰਨ ਤੇ

$y = \log u$ $\qquad u = x+\sqrt{1+x^2}$

$\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$ $\qquad \dfrac{du}{dx} = 1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\dfrac{d}{dx}(1+x^2)$

$= 1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\therefore$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \times \frac{u}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ਪਾਠ–3

ਇੰਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
INTEGRATION

Intergration ਨੂੰ Differentiation ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $f(x), g(x)$ ਦਾ Derivative ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $g(x), f(x)$ ਦਾ Anti Derivative ਯਾ Integral ਹੈ।

$$\int f(x)dx = g(x) + C$$

e.g. $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

ਜੇਕਰ C ਕੋਈ Constant ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$$

ਇਸ ਲਈ, $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

ਉੱਤੇ ਦੱਸੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇੰਨਟਿਗਰਲ (Integral) ਇਕੋ ਹੀ (Unique) ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਕਈ ਇਨਟੇਗਰਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜੋ ਕਿ Constant C ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ , $\int f(x)dx = g(x) + C$ ਹੈ ਤਾਂ

ਇੱਥੇ $\int(x)$ ਨੂੰ Integrand ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

dx ਨੂੰ differential ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$\int \rightarrow$ Integrand sign ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕੁਝ ਖਾਸ Integrals :

1. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \; n \neq -1 \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

   $\frac{d}{dx}(x) = 1 \Rightarrow \int 1.dx = x + C$

2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1).a}\right] = (ax+b)^n, n \neq 1.$

   $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)} + C$

3. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + C$

4. $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x \Rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

5. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \Rightarrow \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

6. $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x \Rightarrow \int \text{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

7. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x + \tan x \, dx \Rightarrow \sec x + C$

8. $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x \Rightarrow \int \text{cosec}\, x \cot x \, dx = -\text{cosec}\, x + C$

9. $\frac{d}{dx}(\log(x)) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \int e^x \, dx = e^x + C.$

11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x, a > 0\ a \neq 1,\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

12. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

13. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C,\ \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Indefinite Integral ਦੀਆਂ Properties

ਨਿਯਮ :

1. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x) + C$, where C is constant.
2. $\int K\, f(x)\, dx = K \int f(x)\, dx$, where $x \in R$.
3. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int F(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

(*i*) e^{2x} (*ii*) $\sin 2x - 4e^{3x}$

ਹੱਲ : (*i*) $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2.e^{2x}$

$\Rightarrow \quad \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

(*ii*) $\frac{d}{dx}(\cos 2x) = -2 \sin 2x$

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x}\right] = \sin 2x - 4.e^{3x}$$

$$\int(\sin 2x - 4.e^{3x})\,dx = \frac{-1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x} + C.$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. (*i*) $\int(2x - 3\cos x + e^x)\,dx = 2\int x\,dx - 3\int \cos x\,dx + \int e^x\,dx$

$$= \frac{2\cdot x^2}{2} - 3\sin x + e^x + C$$

(*ii*) $\int\left(\frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{2}{\cos^2 x}\,dx - 3\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$$= 2\int \sec^2 x\,dx - 3\int \tan x + \sec x\,dx$$

$$= 2\tan x - 3\sec x + C$$

(*iii*) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int\sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \int\sqrt{2}\cos x\,dx = \sqrt{2}\sin x + C$

(*iv*) $\int\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)dx = \int\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)-2\sin x/2\cos x/2}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)+2\sin(x/2)\cos(x/2)}}\right)$

$$= \int\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\cos(x/2)-(\sin x/2)^2}{(\cos x/2+\sin x/2)^2}}\,dx\right)$$

$$= \int\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)^2}{(\cos x/2+\sin x/2)^2}}\right)dx$$

$$= \int\tan^{-1}\frac{1-\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\,dx$$

$$= \int\tan^{-1}(\tan(\pi/4 - x/2))\,dx$$

$$= \int\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{\pi x}{4} - \frac{x^2}{4} + C.$$

ਅਭਿਆਸ 2(ੳ)

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Anti-derivative by Inspection method ਕਰੋ :
$(3x^2 + 4x^3)$ (*ii*) $ax + b)^2$
2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

(*i*) $\int\left(\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\right)dx$ (*ii*) $\int\left(\frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}\right)dx$ (*iii*) $\int(1-x)\sqrt{x}\,dx$

3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

(*i*) $\int(2x^2-3\sin x+5\sqrt{x})\,dx$ (*ii*) $\int\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right)dx$ (*iii*) $\int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)dx$

4. Integral ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ :

(*i*) $\int\tan^2 x\,dx$ (*ii*) $\int\cot^2 x\,dx$

5. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

(*i*) $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ (*ii*) $\int\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\right)dx$

6. $\frac{d}{dx}[f(x)] = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ ਅਤੇ $f(2) = 0, f(x)$ ਕੱਢੋ ।

7. $f'(x) = \sec^2 x + \text{cosec}^2 x - 1$ ਅਤੇ $f(\pi/4) = 1$, find $f(x)$.

ਦੂਸਰਾ ਤਰੀਕਾ :

ਜੇਕਰ $\int f(x)\,dx$ ਦਾ ਸਿੱਧਾ Integral ਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਈ ਵਾਰ ਅਸੀਂ variable x ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਕੋਈ ਹੋਰ variable ਵਿਚ Integral ਦੀ form ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ

$$x = \phi(t)$$
$$I = \int f(x)\,dx$$
$$x = \phi(t)$$
$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t)$$
$$dx = \phi'(t)\,dt$$
$$I = \int f(\phi+t)\phi'(t)\,dt$$

ਥਿਊਰਮ 1. ਜੇਕਰ $\int f(x)\,dx = g(x)$, $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}g(ax+b), a, b \in R$

ਸਬੂਤ :

$$I = \int f(ax+b)\,dx$$

$(ax + b)$ ਨੂੰ ਭਰਣ 'ਤੇ so that $a = \frac{dt}{dx}$ i.e. $dx = \frac{dt}{a}$

ਇਸ ਲਈ, $$I = \int f(ax+b)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\,g(t)$$

$$= \frac{1}{a}\,g(ax+b)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਈ ਹੋਰ formulas ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ :

(i) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

(ii) $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)+C$

(iii) $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

(iv) $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cot(ax+b)+C$

(v) $\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b)+C$

(vi) $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b)+C$

(vii) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b|+C.$

(viii) $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

(ix) $\int \alpha^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\frac{\alpha^{ax+b}}{\log\alpha}+C,\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1$

ਥਿਊਰਮ 3. (i) $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$

(ii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $I = \int [f(x)]^n f'(x)\,dx$

$f(x) = t$ ਰੱਖੋ, ਇਸ ਲਈ $f'(x)\,dx = dt$

$$I = \int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$$

(ii) $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$f(x)$ ਨੂੰ t ਲਕਨ ਤੇ, $f'(x)\,dx = dt$

$$I = \int \frac{1}{t} dx = \log|t| + C$$

$$= \log|f(x)| + C$$

ਸਿਧ੍ਰਾਂਤ 4

(i) $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cos x\, dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + C = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log|\operatorname{cosec}(x - \cot x)| + C = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

ਹੱਲ : (i) $\int \tan x\, dx = \int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx$

$$= -\int\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) dx$$

$$= -\log|\cos x| + C$$

{ਕਿਉਂਕਿ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$}

$$= \log \sec x + C$$

(ii) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x\, dx = \int \sec x\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx$

$$= \int \frac{(\sec^2 x + \sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$= \log|\sec x + \tan x| + C\{\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C.$

$$\log|\sec x + \tan x| = \log\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right|$$

$$= \log\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|$$

$$\log|\sec x + \tan x| = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

$$= \log\left|\frac{1-\cos(\pi/2+x)}{\sin(\pi/2+x)}\right|$$

$$= \log\left|\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\right|$$

$$= \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$$

$$= \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

(iv)

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \operatorname{cosec} x \frac{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}\,dx$$

$$= -\int \frac{-(\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}$$

$$= -\int\left(\frac{-\operatorname{cosec}^2 x \cot x - \operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec} x + \cot x}\right)dx$$

$$= -\log|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= \log\frac{1}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)} + C$$

$$= \log\left|\frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}\right| + C$$

$$= \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C$$

, ਫਿਰ ਵੀ

$$\log|\operatorname{cosec} x - \cot x| = \log\left|\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right|$$

$$= \log\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$$

$$= \log\left|\frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\right|$$

$= \log|\tan(x/2)| + C$

$$\int \text{cosec}\, x\, dx = \log|\text{cosec}\, x - \cot x| = \log|\tan(x/2)| + C$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ Integral ਕਰੋ :

(*i*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$ (*ii*) $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$ (*iii*) $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$

ਹੱਲ : (*i*)

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}{(x+1)-(x+2)} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{1-2} dx$$

$$= \int \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{(x+2)^{3/2}}{3/2} - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + C$$

(*ii*)

$$I = \int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$$

Put $\tan^{-1} x = t$

$\frac{dx}{1+x^2} = dt$

$$= \int e^t\, dt$$

$$= e^t + C$$

$$= e^{\tan^{-1} x} + C.$$

(*iii*)

$$I = \int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

Put $\log x = t$

$\frac{1}{x} dx = dt$

$$= \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{(\log x)^3}{3} + C$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. Integrate ਕਰੋ :

(*i*) $\int \left(\frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}\right) dx$ (*ii*) $\int \frac{dx}{1+\cot x}$

ਹੱਲ : (*i*) $\int \left(\frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}\right) dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2\cos x - 3\sin x}{3\cos x + 2\sin x}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \qquad\qquad 3\cos x + 2\sin x = t$$

$$= \frac{1}{2}\log t + C \qquad\qquad (-3\sin x + 2\cos x)\,dx = dt$$

$$I = \frac{1}{2}\log|3\cos x + 2\sin x| + C$$

(ii)

$$\int \frac{dx}{1+\cot x} = \int \frac{dx}{1+\frac{\cos x}{\sin x}} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2\sin x)\,dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log(\sin x + \cos x) + C$$

ਉਦਾਹਰਨ 3. Integrate ਕਰੋ :

(i) $\int \frac{x\sin^{-1}(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ (ii) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

ਹੱਲ : (i) Put $\sin^{-1} x^2 = t$

$$\therefore \quad \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = dt$$

$$I = \int \frac{t\,dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4}(\sin^{-1} x^2)^2 + C$$

(ii) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ Polynomial ਵਿਚ $\sqrt{ax+b}$ ਨੂੰ y ਭਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\sqrt{x+2} = y$$

$$x + 2 = y^2$$

$$x = (y^2 - 2)$$

$$dx = 2y\,dy$$

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \int (y^2 - 2)\,y \,.\, 2y\,dy$$

$$= 2\int (y^2 - 2y^2)\,dy$$

$$= 2\left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3}\right] + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + C$$

ਉਦਾਹਰਨ 4. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+\alpha)} dx$

$$I = \int \frac{\sin(x+\alpha-\alpha)}{\sin(x+\alpha)} dx$$

$$= \int \frac{\sin(x+\alpha)\cos\alpha}{\sin(x+\alpha)} - \frac{\cos(x+\alpha)\sin\alpha}{\sin(x+\alpha)} dx$$

$$= \cos\alpha \int dx - \sin\alpha \int \cot(x+\alpha)\, dx$$

$$= \cos\alpha \,.\, x - \sin\alpha \,.\, \log|\sin(x+\alpha)| + C.$$

ਅਭਿਆਸ 2(ਅ)

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   (i) $\int \sec^2(7-4x)\, dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$ (iii) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (iv) $\int \sqrt{\sin 2x} \cos 2x\, dx$ (v) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

2. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   (i) $\int \frac{dx}{x + x\log x}$ (ii) $\int \frac{dx}{x(\log x)^m}$ (iii) $\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx$ (iv) $\int \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx$ (v) $\int \frac{\cot(\log x)}{x} dx$

3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   (i) $\int \left(\frac{x^{e-1} + e^{x-1}}{x^e + e^x}\right) dx$ (ii) $\int 5^{5^{5^x}} 5^{5^x} 5^x\, dx$ (iii) $\int \left(\frac{1-\cot x}{1+\cot x}\right) dx$ (iv) $\int \frac{dx}{1-\tan x}$

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   (i) $\int \frac{2x\tan^{-1}(x^2)}{1+x^4} dx$ (ii) $\int \frac{x^2\tan^{-1}(x^3)}{1+x^6} dx$

5. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ (ii) $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$

6. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   (i) $\int x\sqrt{3x-2}\, dx$ (ii) $(x-1)\sqrt{x+2}\, dx$

7. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ Integral ਕਰੋ :

   $\int \frac{\sin 3x\, dx}{\sin 5x \sin 2x}$

8. ਹੱਲ ਕਰੋ ; $(i) \int \sec^4 x\, dx$ $(ii) \int \text{cosec}^4 x\, dx$ $(iii) \int \tan^4 x\, dx$

9. ਹੱਲ ਕਰੋ : $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x-b)}$

10. ਹੱਲ ਕਰੋ : $(i) \int \frac{dx}{1+\sin x}$ $(ii) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$

ਤਿਕੋਣ ਮਿਤੀ ਦੇ ਫਾਰਮੂਲੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ Integral ਹੱਲ ਕਰਨਾ (Integration Using Trigrometric Identify) :

Type 1. ਜੇਕਰ Integral $\int \sin^m x\ dx$ ਜਾਂ $\int \cos^m\ x\, dx$ ਦੀ ਬਣਤਰ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਫਾਰਮੂਲੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ Integral ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$(i) \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $(ii)\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$(ii)\ \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ $(iv)\ \cos^3 x \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

Type 2. ਜੇਕਰ Integral $\int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$ ਦੀ ਬਣਤਰ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਫਾਰਮੂਲਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ :

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$$
$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$
$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. Integral ਕਰੋ:

$(i)\int \sin^2(2x+5)dx$ $(ii) \int \sin^4 x\, dx$

ਹੱਲ :

(i) $$\int \sin^2(2x+5)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin^2(2x+5)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1-\cos(4x+10)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(4x+10}{4}\right] + C$$

(ii) $$\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\ dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\cos^2 2x-2\cos 2x\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{2-4\cos 2x+1+\cos 4x}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{3}{2}+\frac{\cos 4x}{2}-\frac{4\cos 2x}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\left[3x+\frac{\sin 4x}{4}-\frac{4\sin 2x}{2}+C\right]$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. $\int \sin mx\cos nx$ dx ਕੱਢੋ ਇੱਥੇ $m \,\&\, n$ ਇਕੋ +ve Integers ਹਨ।

ਹੱਲ : $$1=\int \sin mx\cos nx\;dx$$

ਇਸ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਦੋ case ਹਨ :

case 1. Where $m\neq n$,

$$1=\frac{1}{2}\int 2\sin mx\cos nx\;dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int \sin(m+n)dx+\int \sin(m-n)x\;dx\right]$$

$$=\frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{(m+n)}+\frac{\cos(m-n)x}{(m-n)}\right]+C$$

Case 2. When $m=n$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ Double Angle formule ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

$$I=\int \sin^2(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int 2\sin^2(nx)\;dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2nx)\;dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2nx}{2n}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2nx}{2n}\right]+C$$

Type 3. $\int \sin^m x\cos^n x\;dx$

ਜੇਕਰ $\sin x$ *is* exp*onent* ਦੀ ਪਾਵਰ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ $\cos x = t$ ਭਰੋ।

ਜੇਕਰ $\cos x$ ਦੀ ਪਾਵਰ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ $\sin x = t$ ਭਰੋ।

ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਦੀ ਪਾਵਰ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ $\sin x$ ਜਾਂ $\cos x = t$ ਭਰੋ।

ਉਦਾਹਰਨ 3 ਹੱਲ ਕਰੋ : $(i)\int \sin^3 x\;\cos^4 x\;dx$

$\cos x$ ਨੂੰ t ਲਗਾਉਣ ਤੇ $\cos x = t$
ਇਸ ਲਈ $-\sin x\, dx = dt$

$$I = \int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$$

$$I = \int \sin^2 x . \cos^4 x . \sin x\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \cos^4 x . \sin x\, dx \qquad \text{Put } \cos x = t.$$

$$= -\int (1-t^2)(t^4)\, dt \qquad -\sin x\, dx = dt$$

$$= \int (-t^4 + t^6)\, dt$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C$$

$$I = \frac{(\cos x)^7}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

(*ii*)

$$I = \int \sin^3 x \cos^5 x\, dx \qquad \cos x = t, -\sin x\, dx = dt$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \cos^5 x . \sin x\, dx$$

$$= \int (1-t^2)(t^5)(-dt)$$

$$= \int (t^7 - t^5)\, dt$$

$$= \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C$$

$$I = \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

ਅਭਿਆਸ 2(ਞ)

1. ਹੱਲ ਕਰੋ :
   (*i*) $\int \sin^2 x\, dx$ (*ii*) $\int \sin^3 x\, dx$
2. ਹੱਲ ਕਰੋ :
   (*i*) $\int \cos^3 x\, dx$ (*ii*) $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$
3. ਹੱਲ ਕਰੋ :
   (*i*) $\int \sin 2x . \cos 3x\, dx$ (*ii*) $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$
4. ਹੱਲ ਕਰੋ :
   (*i*) $\int \cos^3 x\, e^{\log \sin^3 x}\, dx$ (*ii*) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$

ਕੁਝ ਮਾਨਕ Integrals (Some Standard Integrals)

ਥਿਊਰਮ (*i*) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(*ii*) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(*iii*) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(*iv*) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(*v*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

(*vi*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

ਹੱਲ : (*i*)

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$x = a \sin t$ ਭਰੋ, $\sin t = x/a$, $t = \sin^{-1}(x/a)$
ਤਾਂਕਿ $dx = a \cos t \, dt$.

$$I = \int \frac{a\cos t \, dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}$$

$$= \int \frac{a\cos t \, dt}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)}}$$

$$= \int \frac{a\cos t \, dt}{a\cos t} = \int dt$$

$$= t + C$$

$$I = \sin^{-1}(x/a) + C$$

(*ii*)

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$x = a \tan t$ ਭਰੋ।
ਇਸ ਲਈ

$$dx = a \sec^2 t \, dt$$

$$I = \int \frac{a\sec^2 t \, dt}{a^2 \tan^2 t + a^2} = \int \frac{a\sec^2 t \, dt}{a^2 \sec^2 t}$$

$$= \frac{1}{a}\int dt$$

$$= \frac{1}{a} t + C$$

$$I = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(iii) $$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \int \frac{1}{2a}\left[\frac{2a}{(x-a)(x+a)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{[(x-a)+(x+a)]}{(x-a)(x+a)} dx$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{(x-a)} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a} \log(x-a) - \frac{1}{2a} \log(x+a) + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(iv) $$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a-x)(a+x)}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{(a-x)} + \frac{1}{a+x}\right]$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{(a-x)} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+x}$$

$$= \frac{-1}{2a} \log|a-x| + \frac{1}{2a} \log|a+x| + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(v) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$x = a \sec t$ ਭਰਨ ਤੇ
ਇਸ ਲਈ $dx = a \sec t \tan t \, dt$

$$I = \int \frac{a \sec t \tan t \, dt}{\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}}$$

$$= \int \frac{a \sec t \tan t \, dt}{a \tan t}$$

$$= \int \sec t \, dt$$

$$I = \log|\sec t + \tan t| + C$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + C$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \log|a| + C$$

$$I = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1 \qquad C_1 = C - \log|a|$$

(vi)

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$x = a \tan t$ ਭਰਨ ਤੇ, $dx = a \sec^2 t \, dt$

$$I = \int \frac{a \sec^2 t \, dt}{\sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}}$$

$$= \int \frac{a \sec^2 t \, dt}{a \sec^2 t} = \int \sec t \, dt$$

$$= \log|\sec t + \tan t| + C$$

$$= \log|\sec t + \tan t| + C$$

$$= \log\left|\sqrt{1 + \tan^2 t} + \tan t\right| + C$$

$$= \log\left|\sqrt{1 + x^2/a^2} + x/a\right| + C$$

$$= \log\left|\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}\right| + C$$

$$= \log\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right| - \log a + C$$

$$I = \log\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C_1 \qquad C_1 = C - \log|a|$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ (ii) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$

ਹੱਲ : (i)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{25}-x^2}}$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{(3/5)^2 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{5} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3/5}\right) + C$$

$$= \frac{1}{5} \sin^{-1}\left(\frac{5x}{3}\right) + C$$

(ii)

$$\int \frac{dx}{4+9x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(3x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)}{3} + C$$

Or

$$\frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{4}{9}+x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2/3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2/3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + C$$

ਉਦਾਹਰਨ 2.

(i) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^8}}$ (ii) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

ਹੱਲ :

$$I = \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^8}}$$

$x^4 = t$ ਭਰਨ ਤੇ, $4x^3\, dx = dt$

$$x^3\, dx = \frac{1}{4} dt$$

$$I = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\sin^{-1}(t) + C$$

$$I = \frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + C$$

(ii) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

$\sin x$ ਨੂੰ t ਰਖਨ ਤੇ $\sin x = t,\ \cos x\,dx = dt$

$$I = \int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$$

ਉਦਾਹਰਨ 3. $\int\frac{(\sin x - \cos x)}{\sqrt{\sin 2x}}dx = \int\frac{(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1+\sin 2x - 1}}dx$

$$I = \int\frac{(\sin x - \cos x)\,dx}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x - 1}}$$

$$= \int\frac{(\sin x - \cos x)\,dx}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}}$$

$\sin x + \cos x = t$

$(\cos x - \sin x)\,dx = dt$

$$I = \int\frac{-dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= -\log\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C$$

$$I = -\log\left[(\sin x + \cos x) + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}\right] + C$$

$$= -\log\left[(\sin x + \cos x) + \sqrt{\sin 2x + C}\right]$$

ਉਦਾਹਰਨ 4. $\int\left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right)dx$

$$I = \int\left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right]dx$$

$$= \int\frac{(\sqrt{\sin x})^2 + (\sqrt{\cos x})^2}{\sqrt{\sin x}\,\sqrt{\cos x}}dx$$

$$= \int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt{\frac{\sin x \cos x}{2} \cdot 2}}$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx$$

$\sin x - \cos x = t$ ਭਰਨ ਤੇ,

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = t^2 \qquad 1 - \sin 2x = t^2$$

$$(\cos x + \sin x)\, dx = dt$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \sin 2x = 1 - t^2$$

$$= \sqrt{2} \sin^{-1}(t) + C$$

$$I = \sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x + \cos x) + C$$

ਅਭਿਆਸ 2(ਸ)

1. ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (ii) $\int \frac{dx}{x^2+16}$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (iv) $\int \frac{x^2}{1-x^6}\, dx$

2. ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\int \frac{3x}{1+2x^4}\, dx$ (ii) $\int \frac{3x^2}{x^6-1}\, dx$ (iii) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\, dx$ (iv) $\int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}\, dx$ (v) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}$

3. ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$ (ii) $\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}\, dx$

4. Integral ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt{\sin 2x}}$$

5. ਹੱਲ ਕਰੋ : $\int \sqrt{\sec x - 1}\, dx$

6. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$

Answers (ਉੱਤਰ)

ਅਭਿਆਸ 1 (*a*)

1. 0 2. 1 3. −2

ਅਭਿਆਸ 1 (*b*)

1. (*i*) 0 (*ii*) 10 (*iii*) $\frac{-1}{x^2}$ (*iv*) $\frac{1}{x^2}$

2. (*i*) $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (*ii*) $\frac{-1}{2}x^{-3/2}$ (*iii*) $\frac{-3}{4}x^{-7/4}$ (*iv*) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

ਅਭਿਆਸ 1 (*c*)

1. (*i*) $\frac{-4}{x^5}$ (*ii*) $\frac{5}{2(4-5x)^{3/2}}$ (*iii*) $15(3x+4)^4$

2. (*i*) $\frac{-1}{3x^{4/3}}$ (*ii*) $\frac{3}{2}x^{1/2}$ (*iii*) $\frac{2}{\sqrt{4x+6}}$ (*iv*) $\frac{6}{(4-3x)^3}$

3. (*i*) $3^x \log 3$ (*ii*) 0 (*iii*) $\frac{-\log(7)}{x(\log x)^2}$

4. (*i*) $x^2 e^x + 2xe^x$ (*ii*) $\frac{ae^{\sqrt{ax+b}}}{2(\sqrt{ax+b})}$ (*iii*) $\frac{a^{\sqrt{x}}\log a}{2\sqrt{x}}$

5. (*i*) $3\cos 3x$ (*ii*) $2x\cos(x^2+1)$ (*iii*) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

ਅਭਿਆਸ 1 (*d*)

1. (*i*) $20x^3-15x^2+6x-4$ (*ii*) $\frac{-12}{x^5}+\frac{36}{x^{10}}$ (*iii*) $nx^{n-1}+a(n-1)x^{n-2}+\ldots+a^{n-1}+0$

2. (*i*) $4x^3+21x^2+16x+3$ (*ii*) $1-\frac{1}{x^2}$

3. (*i*) 1 (*ii*) 99
4. $n=10$
5. 0, −1, 1776
6. (*i*) $\cos a \sec^2 x$ (*ii*) $-\cos 2\,\mathrm{cosec}^2 x$
7. −3

ਅਭਿਆਸ 1 (*e*)

1. (*i*) $2(4x-7)^4(2x+9)^6(48x+41)$ (*ii*) $4x^3-6x^2-6x$
2. (*i*) $x^2e^x(x+3)$ (*ii*) $e^x(1+1/x)+(x+\log x)e^x$
3. (*i*) $x(\sin x + x\log x\cos x + 2\sin x\log x)$ (*ii*) $e^x \cdot x^{n-1}\left(x\log_a x+\frac{1}{\log a}+n\log_a x\right)$

ਅਭਿਆਸ 1 (*f*)

1. (*i*) $\frac{(n-1)x^n-nax^{n-1}+a^n}{(x-a)^2}$ (*ii*) $\frac{-apx^2-26px+ar-bq}{(px^2+qx+r)^2}$

2. (*i*) $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ (*ii*) $\frac{-1}{(1+\sin x)}$

3. (*i*) $\frac{e^x\,(1+\sin x-\cos x)}{(1+\sin x)^2}$ (*ii*) $\frac{(\cot x-x^n)\,(e^x-\sec^2 x)+(e^x-\tan x)\,(\operatorname{cosec}^2 x+nx^{n-1})}{(\cot x-x^n)^2}$

ਅਭਿਆਸ 1 (g)

1. (*i*) $\frac{30x-1}{2\sqrt{15x^2-x+1}}$ (*ii*) $\frac{1}{x\log x\log 7}$

2. (*i*) $8x\,(4x^3-5x^2+1)^3\,(6x-5)$ (*ii*) $\frac{\pi}{180}\cos x^\circ$ (*iii*) $\frac{2x+3}{(x^2+3x-1)\log_e 10}$

3. (*i*) $\frac{12\,(3x-1)}{(3x+1)^3}$ (*ii*) $\frac{-2x\operatorname{cosec}^2(x^2)}{\sqrt{\cot x^2}}$ (*iii*) $1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4. (*i*) $\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}-\frac{2x}{(2x^2+4)^{3/2}}$ (*ii*) $\frac{\cos\sqrt{ax^2+bx+c}}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}(2ax+b)$ (*iii*) $\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\,e^{\sqrt{x}}}}$

5. (*i*) $\frac{1}{x+2}+\frac{3x^2-1}{x^3-x}$ (*ii*) $3+\frac{1}{3}\left[\frac{5}{5x-3}-\frac{4}{4x+2}\right]$ (*iii*) $\frac{1}{x\log 10}-\frac{\log 10}{x\,(\log x)^2}$

6. $\frac{x}{4\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{a+\sqrt{a+x^2}}\,\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x^2}}}}$

7. $\frac{1}{\sqrt{4x^2+a^2}}$

Integral Answers (ਉੱਤਰ)

ਅਭਿਆਸ 2 (*a*)

1. (*i*) x^3+x^4+C (*ii*) $\frac{(ax+b)^3}{3a}+C$

2. (*i*) $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$ (*ii*) $\frac{2}{5}x^{5/2}+2x^{3/2}+8x^{1/2}+C$ (*iii*) $\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}+C$

3. (*i*) $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{3/2}+C$ (*ii*) $x-\sin x+C$ (*iii*) $x-(\tan x-\sec x)+C$

4. (*i*) $\tan x-x+C$ (*ii*) $-\cot x-x+C$

5. (*i*) $-\sqrt{2}\cos x+C$ (*ii*) $\frac{x^2}{2}+C$

6. $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$

7. $\tan x-\cot x-x+\pi/4+1$

অনুশীলনী 2 (*b*)

1. (*i*) $\frac{-1}{4}\tan(7-4x)+C$ (*ii*) $\frac{1}{3}\log(1+x^3)+C$ (*iii*) $\log|\sin^{-1}x|+C$ (*iv*) $\frac{1}{3}\sin(2x)^{3/2}+C$

   (*v*) $2\sin\sqrt{x}+C$

2. (*i*) $\log(1+\log x)+C$ (*ii*) $\frac{1}{(1-m)}\frac{1}{(\log x)^{m-1}}+C$ (*iii*) $\frac{1}{m}e^{m\tan^{-1}x}+C$ (*iv*) $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$

   (*v*) $\log\sin(\log x)+C$

3. (*i*) $\frac{1}{e}\log|x^e+e^x|+C$ (*ii*) $\frac{1}{(\log 5)^3}5^{5^{5^x}}+C$ (*iii*) $-\log|\sin x+\cos x|+C$ (*iv*) $\frac{1}{2}[x+\log|\cos x$

   $-\sin x|]+C$

4. (*i*) $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x^2)^2+C$ (*ii*) $\frac{1}{6}(\tan^{-1}x^3)^2+C$

5. (*i*) $2\log|\sqrt{x}+1|+C$ (*ii*) $\frac{2}{3}(x+4)^{3/2}-8\sqrt{x+4}+C$

6. (*i*) $\frac{2}{9}\left[\frac{1}{5}(3x-2)^{5/2}+\frac{2}{3}(3x-2)^{3/2}\right]+C$ (*ii*) $2\left[\frac{1}{5}(x+2)^{5/2}-(x+2)^{3/2}\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\log|(\sin 2x)|-\frac{1}{5}\log|\sin 5x|+C$

8. (*i*) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$ (*ii*) $-[\cot x+1/3\cot^3 x]+C$ (*iii*) $\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C$

9. $\frac{1}{\sin(b-a)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

10. (*i*) $\sqrt{2}\log|\tan(x/4+\pi/8)|+C$ (*ii*) $2(\sin(x/2)-\cos(x/2)-\sqrt{2}\log\tan(x/4+\pi/8)+C$

অনুশীলনী 2 (*c*)

1. (*i*) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$ (*ii*) $\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 3x}{3}-3\cos x\right)+C$

2. (*i*) $\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right]+C$ (*ii*) $\frac{1}{128}\left[3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right]+C$

3. (*i*) $\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 5x}{5}+\cos x\right]+C$ (*ii*) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 7x}{7}+\sin x\right]+C$

4. (*i*) $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$ (*ii*) $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$

অভিয়াস 2 (*d*)

1. (*i*) $\sin^{-1}(x/2)+C$ (*ii*) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x/4)+C$ (*iii*) $\frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$ (*iv*) $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

2. (*i*) $\frac{3\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x^2)+C$ (*ii*) $\tan^{-1}(x^3)+C$ (*iii*) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x-2}{e^x+2}\right|+C$

   (*iv*) $\frac{-1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\cos^2 2x\right)+C$

3. (*i*) $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$ (*ii*) $3\sin^{-1}(x/3)-\sqrt{9-x^2}+C$

4. $\sin^{-1}(\sin x+\cos x)+C$

5. $-2\log\left|\sqrt{2}\cos(x/2)\sqrt{2\cos^2(x/2)-1}\right|+C$

6. $2\left[\sqrt{e^x-1}-\tan^{-1}\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right]+C$

ਪਾਠ–4

(ਵਿਤਕੇਰੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ)
DIFFERENTIAN EQUATION

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ: ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਨਿਰਭਰ ਅਨਿਰਭਰ ਚਲ (Variable) ਤੇ ਵਿਤਕੇਰੀ ਗੁਣਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

$$(i)\frac{d^{2y}}{dx^2}+14y=0\ (ii)\ \frac{d^2}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+7y=0\ \ (iii)\ y^2+\sin x\frac{dy}{dx}=7 (iv)\ \frac{dy}{dx}=\frac{x(1+y^2)}{x(1-y^2)}$$

ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of an Equation) : ਵਿਤਕੇਰੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਉਸਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਕੋਫੀਸੈਂਟ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\sec y$ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ $=\sec x\dfrac{dy}{dx}$ ਇਹ ਇੱਕ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਸਮੀਰਕਨ ਹੈ।

$$\frac{d^2y}{dx^2}+14y=0$$

ਇਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ।

ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ (Degree of Differential) : ਵਿਤਕੇਰੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਉਸ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਡੇਰੀਵੇਟਟ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ : $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+xy\dfrac{dy}{dx}-6y^2=0$

ਇਹ ਇੱਕ ਪਹਿਲੇ ਹੁਕਮ ਦੀ ਵਿਤਕੇਰੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਦੋ ਹੈ।

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy\frac{dy}{dx}-7y^2=0$$

ਇਹ ਵੀ ਪਹਿਲੇ ਹੁਕਮ ਤੇ ਦੂਸਰੀ ਡਿਗਰੀ ਦੀ ਵਿਤਕੇਰੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ।

$$\frac{d^2y}{dx^2}-14\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}-14=\sin x$$

ਇਹ ਇੱਕ ਤੀਸਰੇ ਹੁਕਮ ਪਰੰਤੂ ਪਹਿਲੇ 'ਡਿਗਰੀ' ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ।

ਨੋਟ : ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਲੱਭਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਡੈਰੀਵੀਏਟ ਦੀ ਇਹ ਫਰੈਕਸ਼ਨ ਤੇ ਰੈਡੀਅਕਲ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਵਿਤਕੇਰੀ ਕੋਫੀਸੈਂਟ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵੈਰੀਏਬਲ ਵਿੱਚ ਰਾਬਤਾ ਕਾਇਮ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਲ 1. ਨਿਮਨ ਵਿਤਕੇਰੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਤੇ 'ਡਿਗਰੀ' ਲੱਭੋ:

$$(i)\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\left[\frac{dy}{dx}\right]^3+2y=0\ (ii)\ (y''')^2+(y'')^3+(y')^4+y^5=0\ (iii)\ \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\cos\left[\frac{dy}{dx}\right]=0$$

ਹੱਲ:1. ਸਾਨੂੰ ਡਿਫੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2+\left[\frac{dy}{dx}\right]^3+2y=0$$

ਇਸ ਡਰੀਵੇਟਿਵ ਵਿਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ 'ਹੁਕਮ' $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ 'ਹੁਕਮ' 2 ਹੈ।

ਦੁਆਰਾ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਵਿਚ ਇਕ ਪੋਲੀਨੋਮੀਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦੀ ਡਿਗਰੀ 2 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਦੀ ਡਿਗਰੀ 2 ਹੈ।

(*ii*) ਸਾਨੂੰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ y' ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਹੁਕਮ '3' ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ y' ਵਿਚ ਪੋਲੀਨੋਮੀਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਤੇ y''' ਦੀ ਡਿਗਰੀ 2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ 2 ਹੈ।

(*iii*) ਸਾਨੂੰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 + \cos\left[\frac{dy}{dx}\right] = 0$ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਇਸ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ 'ਹੁਕਮ' ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਹੁਕਮ '2' ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦਿੱਤੀ $\frac{dy}{dx}$ ਸਮੀਕਰਨ ਇਕ ਪੋਲੀਨੋਮੀਨਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 2. ਸਮੀਕਰਨ $y = px\sqrt{a^2p^2 + b^2}$ ਦਾ ਹੁਕਮ ਤੇ ਡਿਗਰੀ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$y = px\sqrt{a^2p^2 + b^2}$$

ਇਸ ਲਈ,

$$y - px = \sqrt{a^2p^2 + b^2}$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ ਸਕੇਅਰ ਕਰਨ 'ਤੇ,

$$(y - px)^2 = (\sqrt{a^2p^2 + b^2})^2$$

$$(y - px)^2 = a^2p^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + p^2x^2 - 2pxy = a^2p^2 + b^2$$

ਇਸ ਲਈ $y^2 + (x^2 - a^2)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - b^2 = 0$ ...(1)

ਇਸ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੁਕਮ ਦੀ $\frac{dy}{dx}$ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਮੌਜੂਦ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ 1 ਹੁਕਮ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (1) ਇਕ ਪੋਲੀਨੋਮੀਅਲ ਹੈ, ਇਸ ਦੀ ਪਾਵਰ '2' ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ '2' ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4(*a*)

1. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਦੱਸੋ :

(*i*) $14x\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 - \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \log x$ (*ii*) $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2 - 7\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 1 = 0$

2. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ 'ਹੁਕਮ' ਦੇ 'ਡਿਗਰੀ' ਦੱਸੋ:

(i) $y^2+\left(y^t\right)^2+7y=0$

(ii) $y^n+14y^2+y=0$

(iii) $y^t+y=e^x$

(iv) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4+11s\frac{d^2s}{dt^2}=0$

(v) $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2-4\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]+7y=\sin x$

(vi) $\frac{d^2y}{dx^4}+\sin\left(y^m\right)=0$

(vii) $y^m+y^2+e^{x^4} = 0$

(viii) $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2+7\left[\frac{dy}{dx}\right]^3+y = 0$

ਹੱਲ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾ (Types of Solution):

ਆਮ ਹੱਲ : ਇਹ ਇਸ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਨ ਮੰਨਿਆ ਸਥਿਤ ਨੂੰ ਕੋਈ ਖਾਸ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ।

ਉਦਾਹਰਨ : $\frac{dy}{dx}-x=0$ ਦਾ ਆਮ ਹੱਲ ਹੈ

$$y=\frac{x^2}{2}+C$$

C ਇੱਕ ਮੰਨ ਮੰਨਿਆ ਸਥਿਤ ਹੈ।

2. **ਖਾਸ ਹੱਲ (Particular Solution) :** ਇਹ ਇਸ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹੱਲ (General Solution) ਦੇ ਕੰਨਸੋਟੈਂਟ ਇਕ ਇਕੋ ਹੀ ਕਿਸਮ ਦੀ ਕੀਮਤ ਨਾਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ : $\frac{dy}{dx}-x=0$; $y(0) = 1$

ਆਮ ਹੱਲ :

$$y=\frac{x^2}{2}+C$$

$x=0$ ਤੇ $y=1$ ਭਰੋ :

$$1=0+C$$

$$C=1$$

ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ : -

$$y=\frac{x^2}{2}+1$$

ਚਲ ਨੂੰ ਅਲਗ ਕਰਨ ਦੀ ਤਰੀਕੇ (Method of Separation of Variables) : ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਵਿੱਚ dx ਦੇ ਸਾਰੇ ਚਲ 'x' ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਹਨ ਤੇ dy ਦੇ ਸਾਰੇ 'y' ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਦੂਸਰੇ ਹੱਥ ਲਿਖੇ ਹਨ।

ਚਲ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ ਇੰਨੀਟੀਗਰੇਟ (Integrate) ਕਰਨ ਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਕਨੋਸਟੈਂਟ ਨੂੰ ਜੋੜਣ ਨਾਲ।

ਕਿਸਮ 1. ਮੰਨ ਲਓ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $\frac{dy}{dx} = f(x)$

ਸਮੀਕਰਨ (i) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ 'dx' ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$dy = f(x)dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integrate ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int dy = \int f(x)dx$$

ਜਾਂ $y = f(x)dx + C$

ਇੱਥੇ 'C' ਇੱਕ ਸਮ ਸੰਖਿਆ (constant) ਹੈ ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨਾਂ 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$dy = \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ 'Integration' ਕਰਨ ਤੇ

$$\int dy = \int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

ਜਾਂ $$y = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \text{ ਜਾਂ } y = \tan^{-1}(x+1) + C$$

ਇਹ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 2. $\frac{dy}{dx} = 5x+7$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ $\frac{dy}{dx} = 5x+7$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਇਸ ਦਿੱਤੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$dy = (5x+7)\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ 'ਤੇ,

$$\int dy = \int (5x+7)\,dx$$

$$\therefore \quad y = \frac{5x^2}{2} + 7x + C$$

ਇਹੀ ਇਕ ਅਸਲ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 3. $\frac{dy}{dx} = 3x^2+2$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਨ :

$$dy = (3x^2+2)\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\int dy = \int (3x^2+2)\,dx$$

$$\therefore \quad y = \frac{3x^2}{3} + 2x + C$$

ਇਸ ਕਰਕੇ $x^2 + 2x + C$ ਇਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 4. $\frac{dy}{dx} = \sin x - x$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਨ :

$$dy = (\sin x - x)\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\int dy = \int (\sin x - x)\,dx$$

$$\therefore \quad y = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 5. $x^2 \frac{dy}{dx} = 2$ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$dy = \frac{2}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \quad dy = 2x^{-2} dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int dy = 2\int x^{-2} dx$$

$$y = 2(x^{-1}) + C$$

$$y = -\frac{2}{x} + C$$

ਉਦਾਹਰਨ 6. $(1 + \cos x)\, dy = (1 - \cos x)\, dx$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$dy = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\int dy = \int\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) dx$$

ਜਾਂ

$$y = \int \frac{2\sin^2 x/2}{2\cos^2 x/2} dx \qquad \left[\begin{array}{l} \because 1-\cos u = 2\sin^2 xy_2 \\ 1+\cos u = 2\cos^2 xy_2 \end{array}\right.$$

$$= \int \tan^2 x/2\, dx = \int (\sec^2 x/2 - 1)\, dx$$

$$= 2\tan\frac{x}{y} - x + C$$

ਇਹੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 7. $\frac{dy}{dx} = x \log x$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$dy = (x \log x)\, dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ ਤੇ

$$\int dy = \int (x \log x)\, dx$$

$$y = \log x\left(\frac{x}{g}\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{g}\right) dx$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$=\frac{x^2 \log x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$$

$$=\frac{x^2 \log x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$$

ਉਦਾਹਰਨ 8. $\frac{dy}{dx}=\sec x\,(\tan x+\sec x)$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$dy=\sec x\,(\tan x+\sec x)\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int dy=\int \sec x\,(\tan x+\sec x)\,dx$$

$$\int dy=\int \sec x \tan x\,dx+\int \sec^2 x\,dx$$

$$y=\sec x+\tan x+C$$

ਉਦਾਹਰਨ 9. $(\sin x+\cos x)\,dy+(\cos x-\sin x)\,dx=0$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$(\sin x+\cos x)\,dy=-(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$dy=-\frac{(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)}\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$\int dy=-\int\left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\right)dx$$

ਜਾਂ $y=-\log(\sin x+\cos x)+\log C$

ਜਾਂ $y+\log(\sin x+\cos x)=\log C$

ਜਾਂ $y\log C+\log(\sin x+\cos x)=\log C$

$\log e^y-(\sin x+\cos x)=\log C$

$\therefore$ $e^y(\sin x+\cos x)=C$

ਅਭਿਆਸ 4(*b*)

1. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ :

(*i*) $\frac{dy}{dx}=6\sin x$ (*ii*) $\frac{dy}{dx}=e^{-2x}-3x$ (*iii*) $\frac{dy}{dx}=e^x$ (*iv*) $\frac{dy}{dx}=\log(x+1)$

2. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(e^x+e^{-x})\frac{dy}{dx}=e^x-e^{-x}$ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

3. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{dy}{dx}=x^2+\sin 3x$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

4. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=2$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

5. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{dy}{dx}=2\sin x+3\cos x$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

ਕਿਸਮ–II. ਜਦੋਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ :

(*i*) $\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ $$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \qquad \text{(ਅਲੱਗ–ਅਲੱਗ ਵੈਰੀਏਬਲ)}$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ਼ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C$$

ਇੱਥੇ 'C' ਇਕ ਏਰੀਬੀਟੀਰੇਰੀ ਕਾਨਸਟੈਂਟ ਹੈ।

(*ii*) $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\phi(y)}$

ਇੱਥੇ $f(x)$ ਤੇ $\phi(y)$ ਇਕ x ਤੇ y ਦੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਹਨ।

ਹੱਲ : $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\phi(y)}$$

ਵੈਰੀਏਬਲ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ

$$\phi(y)\, dy = f(x)\, dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ

$$\int \phi(y)\, dy = \int f(x)\, dx + C$$

ਇਸ ਦੀ ਜਨਰਲ ਫਾਰਮ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਵੈਰੀਏਬਲ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ

$$f(x)\, dx + \phi(y)\, dy = 0$$

(*iii*)

ਹੱਲ : $$f(x)\, dx + \phi(y)\, dy = 0$$

ਇੱਥੇ $f(x)$ ਅਤੇ $\phi(y)$; x, y ਦੇ ਫੰਕਸ਼ਨ ਹਨ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$f(x) + \phi(y)\frac{d}{dx} = 0$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\int f(x)\, dx + \int \phi(y)\frac{dy}{dx}\, dx = C$$

$$\int (f(x))\, dx + \int \phi(y)\, dy = C$$

ਇਹ ਹੀ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\frac{dy}{dx} = (e^x + 1)\, y$$

ਹੱਲ : ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = (e^x + 1)\,y$$

ਵੈਰੀਏਬਲ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\frac{dy}{y} = (e^y + 1)\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integrating ਕਰਨ ਤੇ

$$\int\frac{dy}{y} = \int(e^x + 1)\,dx$$

$$\therefore \quad \log y = e^x + x + C$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 2. $\frac{dy}{dx}+\frac{1+\cos 2y}{1-\cos 2x} = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{1+\cos 2y}+\frac{dx}{1-\cos dx} = 0$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{2\cos^2 y}+\frac{dx}{2\sin^2 x} = 0 \qquad \{\because 1+\cos 2y = 2\cos^2, 1-\cos 2x = 2\sin y$$

ਜਾਂ $$\sec^2 y\,dy + \operatorname{cosec}^2 x\,dx = 0$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\int\sec^2 y\,dy + \int\operatorname{cosec}^2 x\,dx = 0$$

ਜਾਂ $$\tan y - \cot x = C$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 3. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(1-y)\,x\frac{dy}{dx}+(1+x)\,y = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$\left(\frac{1-y}{y}\right)dy+\left(\frac{1+x}{x}\right)dx = 0$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ

$$\int\left(\frac{1-y}{y}\right)dy+\int\left(\frac{1+x}{x}\right)dx = C$$

ਜਾਂ $$\log y - y + \log x + x = \log C$$

ਜਾਂ $$\log x + \log y = \log C + x - y$$

ਜਾਂ $$\log xy = \log C + \log^{y-x}$$

ਜਾਂ $$\log xy = \log Ce^{y-x}$$

ਜਾਂ $$\log xy = \log Ce^{y-x}$$

ਜਾਂ $$xy = Ce^{y-x}$$

ਉਦਾਹਰਨ 4. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$$

$$\Rightarrow \quad (x + 1) + (y + xy) \Rightarrow (x + 1) + y(1 + x) \Rightarrow (1 + x)(1 - y)$$

ਵੇਰੀਏਬਲ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ

$$\frac{dy}{1+y} = (1 + x)\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ

$$\int\frac{dy}{1+y} = \int(1+x)\,dx$$

ਜਾਂ $\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + C$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + x^2y^2 = 0$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ :

$$x^2(1-y)\frac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0$$

ਜਾਂ $$\frac{(1-y)}{y^2}dy + \frac{(1+x)}{x^2}dx = 0$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = 0$$

ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int\frac{1}{y^2}dy - \int\frac{1}{y}dy + \int\frac{1}{x^2}dx + \int\frac{1}{x}dx = 0$$

$$-\frac{1}{y} - \log y - \frac{1}{x} + \log x + C$$

ਜਾਂ $$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + C$$

ਇਹ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 6. $dy + xy\,dx = x\,dx$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ :

$$dy = x(1-y)\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{1-y} = x\,dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\int\frac{dy}{1-y} = \int x\,dx$$

ਜਾਂ $$-\log(1-y) = \frac{x^2}{2}+C$$

ਉਦਾਹਰਨ 7. $xy(y+1)\,dy = (x^2+1)\,dx$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।
ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਵੇਰੀਏਬਲ ਅਨੁਸਾਰ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ :

$$y(y+1)\,dy = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਹਾਸਿਲ ਕੀਤਾ

$$\int y(y+1)\,dy = \int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)dx$$

$$\int(y^2+y)\,dy = \int x\,dx + \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2}+\log x + C$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 8. $\sec^2 x \tan y\,dx + \sec^2 y \tan x\,dy = 0$ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।
ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਵੇਰੀਏਬਲ ਅਨੁਸਾਰ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ

$$\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 0$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ

$$\log\tan x + \log\tan y = \log C$$

ਜਾਂ $$\log(\tan x\tan y) = \log C$$

ਜਾਂ $$\tan x\tan y = C$$

ਉਦਾਹਰਨ 9. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(e^x+1)\,y\,dy = (y+1)\,e^x\,dx$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।
ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ :

$$\left(\frac{y}{y+1}\right)dy = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

ਜਾਂ $$\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy = \int\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx \qquad \left\{\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log x\right\}$$

ਜਾਂ $$y - \log(y+1) = \log(e^x+1) + C$$

ਇਹ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਨ 10. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਵੇਰੀਏਬਲ ਅਨੁਸਾਰ ਅਲੱਗ ਕਰਕੇ ਲਿਖਿਆ

$$\frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{x}+2x\right)dx$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\int\frac{dy}{y}=\int\left(\frac{1}{x}+2x\right)dx$$

ਜਾਂ $\log y=\log x+x^2+\log C$

ਜਾਂ $\log y-\log x-\log e=x^2$

ਜਾਂ $\log\left[\frac{x}{Cx}\right]=x^2$

ਜਾਂ $y=Cxe^{x^2}$

ਉਦਾਹਰਨ 11. $x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਵੇਰੀਏਬਲ ਅਨੁਸਾਰ ਅਲੱਗ ਕਰਕੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ :

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{1+y^2}\right)dy=0$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\int\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx+\int\left(\frac{y}{1+y^2}\right)dy=C$$

ਜਾਂ $\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2y}{1+y^2}\right)dy=C$

ਜਾਂ $\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\frac{1}{2}\log(1+y^2)=C$

ਜਾਂ $\frac{1}{2}\log[(1+x^2)(1+y^2)]=C$

$\therefore$ $\log(1+x^2)(1+y^2)=2C=\log C$

$\therefore$ $(1+x^2)(1+y^2)=C$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4(*c*)

1. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(1-y)x\frac{dy}{dx}+(1+x)y=0$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

2. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{dy}{dx}+\frac{\cos x\sin y}{\cos y}=0$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭੋ।

3. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $y\,dx + x\,dy = xy\,dx$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

4. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $x^2(1+y)\frac{dy}{dx}+(1-x)y^2=0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

6. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $\tan y\,dx + \sec^2 y \tan x\,dy = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(1-x)\,dy-(1+y)\,dx=0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

8. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(1-x^2)(1-y)\,dx = xy(1+y)\,dy$

9. ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ $(e^y-1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

10. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{dy}{dx}+\frac{1+x^2}{1-y^2}=0$ (ii) $\frac{dy}{dx}+\frac{1+y^2}{1+x^2}=0$

11. $\sin x \cos y\frac{dy}{dx}+\cos x \sin y=0$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

12. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=3x+2y$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

13. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $(1+x^2)\,dy - xy\,dx = 0$ (ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{(1-x)(1+y)}$ (iii) $xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ (iv) $(y^2+1)\cos x\,dx$

$+ 2y \sin x\,dy = 0$

14. ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $xy\,dy = (y-1)(x+1)\,dx$ (ii) $y\,dx - 2x^2\,dy = 0$ (iii) $\sec x\,dy + \sec y\,dx = 0$ (iv) $(1+y)\,xy\frac{dy}{dx}=$

$(1-x^2)(1-y)$ (v) $(1-x)\,dy-(1+y)\,dx=0$ (vi) $\frac{dy}{dx}=\frac{4y}{x(y-3)}$ (vii) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$

ਕਿਸਮ III. ਮੰਨ ਲਓ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਕਿਸਮ $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ ਵਿਚ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ ਦੀ ਕਿਸਮ ਵਿਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x)$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)\,dx + C = \phi(x)+C$$

ਜਿੱਥੇ $\phi(x)=\int f(x)\,dx$

ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ dx ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\int dy = \int[\phi(x)+C]\,dx + C_1$$

ਜਾਂ

$$y = \int\phi(x)\,dx + C\int dx + C_1$$

$$= \phi(x) + C_1x + C_2$$

$$y = \phi(x) + C_1x + C_2$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਸੀ।

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. $\frac{d^2y}{dx^2} = x$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{d^2y}{dx^2} = x$ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ ਤੇ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\frac{dy}{dx} = \int x\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C \text{ ਜਾਂ } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) dx$$

ਦੁਆਰਾ ਫਿਰ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$\int dy = \int\left(\frac{x^2}{2} + C\right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{4} + Cx + C_1$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = C$$

ਦੁਆਰਾ ਫਿਰ ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \int C\,dx \Rightarrow Cx + C_1$$

$$dy = (Cx + C_1)\,dx$$

$\therefore$

Integrating $\int dy = \int (Cx + C_1)\,dx$

$$y = Cx + C_1 + C_2$$

ਜਾਂ

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 3. $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

$\therefore$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

ਦੋਨੋਂ ਤਰਫ Integration ਕਰਨ ਤੇ $\frac{dy}{dx} = \int 1.\,dx = x + C$

$\therefore$

$$dy = (x + C)\,dx$$

Integrating, $\int dy = \int (x + C)\,dx$

$\therefore$

$$y = \frac{x}{2} + Cx + C_1$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 4. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + e^{2x}$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + e^{2x}$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2 + e^{2x}$$

Integrating, $\frac{dy}{dx} = \int (x^2 + e^{2x})\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

$$\therefore\ dy = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}e^{2x} + C\right)dx$$

Integrating $\int dy = \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}e^{2x} + C\right)dx$

$$\therefore \quad y = \frac{x^4}{12} + \frac{1}{4}e^{2x} + Cx + C_1$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + \sin 3x$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + \sin 3x$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2 \sin 3x$$

$$\text{Integrating } \frac{dy}{dx} = \int (x^2 + \sin 3x)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{\cos 3x}{3} + C$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{\cos 3x}{3} + C_1\right) dx$$

$$\text{Integrating } \int dy = \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{\cos 3x}{3} + C_1\right) dx$$

$$\text{ਜਾਂ } y = \frac{x^4}{12} + \frac{\sin 3x}{9} + Cx + C_1$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 6. $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + \sec^2 x$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + \sec^2 x$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਜਾਂ
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 6x + \sec^2 x$$

$$\text{Integrating } \frac{dy}{dx} = \int (6x + \sec^2 x)\, dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2} + \tan x + C$$

$$dy = (3x^2 + \tan x + C)\, dx$$

$$\text{Integrating } \int dy = \int (3x^2 + \tan x + C)\, dx$$

$$\therefore \quad y = \frac{3x^2}{3} + \log \sec x + Cx + C_1$$

$$y = x^2 + \log \sec x + Cx + C_1$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 7. $\frac{d^2y}{dx^2} = (\cos x - \sin x)$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ $\frac{d^2y}{dx^2} = (\cos x - \sin x)$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \cos x - \sin x$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

Integrating ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \int(\cos x - \sin x)\,dx$$

ਜਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - (-\cos x) + C$$

$$\therefore \quad dy = (\sin x + \cos x + C)\,dx$$

ਦੁਆਰਾ ਫਿਰ Integration ਕਰਨ ਤੇ

$$\int dy = \int(\sin x + \cos x + C)\,dx$$

$$y = -\cos x + \sin x + Cx + C_1$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4(d)

ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} = ax^2 + bx + c$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + \cos x$
4. $\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + \sin 3x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} = \log x$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + e^{2x}$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - \sec^2 x$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x + x$
10. $(1 - \cos 2x)\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + \cos 2x)$
11. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

ਕਿਸਮ IV. ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਵੈਰੀਏਬਲ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਘਟਾਉਣ ਬਾਰੇ (Equations Reducible to Variable Separable)

$\frac{dy}{dx} = \int(ax+by+c)$ ਨੂੰ ਵੈਰੀਏਬਲ ਅਲੱਗ ਕਰਨ, ਘਟਾਉਣ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ ਭਰਨ ਨਾਲ

$$ax + by + c = z$$

ਹੱਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 1. $(x-y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ $(x-y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ...(i)

ਮੰਨ ਲਓ $(x-y) = z$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$

$\therefore$ ਸਮੀਕਰਨ (i) ਤੋਂ

$$z^2\left[1-\frac{dz}{dx}\right] = a^2$$

ਜਾਂ $1-\frac{dz}{dx} = \frac{a^2}{z^2}$

ਜਾਂ $\frac{dz}{dx} = 1-\frac{a^2}{z^2} = \frac{z^2-a^2}{z^2}$

ਜਾਂ $\frac{z^2}{z^2-a^2}dz = dx$ ਜਾਂ $\left[1+\frac{a^2}{z^2-a^2}\right]dz = dx$

Integration ਕਰਨ ਤੇ

$$(z + a^2) \times \frac{1}{2}\log\left[\frac{z-a}{z+a}\right] = x + C$$

ਜਾਂ $z - y + \frac{a}{2}\log\left[\frac{z-y-a}{x-y+a}\right] = x + C$

$$y + C = \frac{a}{2}\left[\frac{x-z-a}{x-y+a}\right]$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. $\cos(x+y)\,dy = dx$ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)} \quad ...(1)$$

ਮੰਨ ਲਓ, $x + y = z \;\; \therefore \;\; 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਤੋਂ,

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{1+\cos z}{\cos z} \quad \therefore \frac{\cos z}{1+\cos z} dz = dx$$

ਜਾਂ $$\left[1 - \frac{1}{1+\cos z}\right] dz = dx$$

ਜਾਂ $$\left[1 - \frac{1}{2\cos^2 z/2}\right] dz = dx$$

ਜਾਂ $$\left[1 - \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{z}{2}\right)\right] dz = dx$$

Integrating ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ

$$z = \tan\left(\frac{z}{g}\right) = z + C$$

ਜਾਂ $$x + y - \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = z + C$$

ਜਾਂ $$y = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) + C$$

ਇਹੀ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 3. $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$ ਸਮੀਕਰਨ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਹੁਣ, $$4x + y + 1 = z$$

$$\therefore \quad 4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} - 4 = \frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dz}{dx} - 4 = x^2$$

ਜਾਂ $$\frac{dz}{dx} = 4 + z^2 \text{ ਜਾਂ } \frac{dz}{4+z^2} = dx$$

Integration ਕਰਨ ਤੇ, $$\int \frac{dz}{4+z^2} = \int dx \quad \therefore \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) = x + C$$

$$\left\{\because \int \frac{1}{1^2 + x^2} dx = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right.$$

ਜਾਂ $$\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) = 2x + A$$

ਜਾਂ $$z = 2\tan(2x + A)$$

ਜਾਂ $$4x + y + 1 = 2\tan(2x + A)$$

ਅਭਿਆਸ 4(e)

ਨਿਮਨ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਨਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $(x+y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$
2. $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y}$

□□□

5.1 ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ (DBMS)ਨਾਲ ਜਾਣ ਪਛਾਣ–

DBMS ਤੋਂ ਭਾਵ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ ਹੈ। DBMS ਇੱਕ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਯੂਜਰ ਤੋਂ ਸੂਚਨਾਂ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਵਿਵਸਥਿਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿੱਚ ਸਟੋਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਸ਼ਬਦ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵੱਲ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਲੋੜ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕੇ, ਉਸ ਤੱਕ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਹੁੰਚਿਆ ਜਾ ਸਕੇ ਜਾਂ ਪ੍ਰਬੰਧਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਸ਼ਬਦ ਹੈ ਡਾਟਾ। ਡਾਟਾ ਕੱਚੇ ਤੱਥਾਂ ਅਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਆਪਣੇ ਆਪ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਰਾਮ, 18, ਦਿੱਲੀ, ਵੈਸਟ ਆਦਿ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕ, ਅੱਖਰ ਅਤੇ ਕੋਈ ਸਪੈਸ਼ਲ ਚਿੰਨ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਡਾਟਾ ਤੋਂ ਅਰਥ ਲੈਣ ਲਈ ਇਸ ਡਾਟਾ ਦੀ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅਰਥ ਭਰਪੂਰ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕੀਏ। ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇਹ ਡਾਟਾ ਰਾਮ, 18 ਵੈਸਟ ਦਿੱਲੀ ਹੋ ਜਾਏਗਾ। ਜਿਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਡਾਟਾ ਦੀ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸੂਚਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੂਚਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਲੜੀ ਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਇੱਕਤਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਉਸ ਨ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। DBMS ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਲੇਬਲਜ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਲ ਕੇ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ।

(ਡਾਟਾ) Data ⟹ (ਸੂਚਨਾਂ) Information ⟹ (ਡਾਟਾ ਬੇਸ) DataBase

DBMS ਦੇ ਲਾਭ:–

1. ਜਿਆਦਾ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਕਾਬੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
2. ਵੱਖ–ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਕਰਦਾ ਹੈ।
3. ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਸਾਂਝਾਂ (Share) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
4. ਬੈਕਅੱਪ ਅਤੇ ਰਿਕਵਰੀ ਦੀ ਸਹਲਤ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।
5. ਅਖੰਡਤਾ (Integrity) ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
6. ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਅਕਤੀ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਆਗਿਆ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਚਲਾ ਸਕਦਾ।
7. ਵਾਰ–ਵਾਰ ਨਾ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਕੰਮਾਂ ਅਤੇ ਬਦਲਦੀਆਂ ਪਰਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮਰਥਨ ਕਰਨ ਲਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਤੇਜ ਯੋਜਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ।

DBMS ਦੀਆਂ ਹਾਨੀਆਂ:–

1. ਇਹ ਗੁੰਝਲਦਾਰ (Complicated) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਡਾਟਾ ਦੇ ਖਰਾਬ ਹੋਣ ਦਾ ਖਤਰਾ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਅਕਾਰ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕਾਫੀ ਜਿਆਦਾ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
4. ਮਹਿੰਗਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਜਿਆਦਾ ਹਾਰਡਵੇਅਰ ਦੀ ਜਰੂਰਦ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।
6. ਘੱਟ ਕਪੈਸਿਟੀ ਵਾਲੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀ ਪ੍ਰਦਸ਼ਿਤਾ (Display) ਉੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

5.2 ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ

RDBMS ਤੋਂ ਭਾਵ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ ਹੈ। ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਅਤੇ ਟੇਬਲਜ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਦੇ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਫੀਲਡਜ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ। ਹਰ ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜਿਆਦਾ ਕਾਲਮ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਟੇਬਲ ਵਿਚਲੇ ਹਰ ਇੱਕ ਕਾਲਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿੱਲਖਣ ਨਾਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਕਸਟਮਰ ਨਾਮ ਦੇ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਕਸਟਮਰ ਨਾਮ, ਕਸਟਮਰ ਸਟਰੀਟ, ਕਸਟਮਰ ਸਿਟੀ ਅਤੇ ਅਕਾਊਂਟ ਨੰਬਰ ਚਾਰ ਕਾਲਮ ਹਨ।

CUSTOMER-I

CUSTOMER_NAME	CUSTOMER_STREET	CUSTOMER_CITY	ACC NO.
ABC	NORTH	MOHALI	A-101
DEF	MAIN	CHANDIGARH	A-102
GHI	NO. 10	AMBALA	A-103
JKL	PARK11	AMBALA	A-104

RDBMS ਟੇਬਲਜ ਦੀ ਕੁਲੈਕਸ਼ਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਦਾ ਦੂਸਰੇ ਟੇਬਲ ਨਾਲ ਸਬੰਧ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। RDBMS ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਦੇ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦਾ ਸਬੰਧ ਦੂਸਰੇ ਟੇਬਲ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਨਾਲ ਵੀ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

CUSTOMER-II

BRANCH_NAME	ACC_NO	BALANCE
MOHALI	A-101	10,000
CHANDIGARH	A-102	50,000
AMBALA	A-1047	1,00,000

ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸਬੰਧ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀਅਜ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਅਤੇ ਫੌਰਨ ਕੀਅ। ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਹਰੇਕ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਕੀਅ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰੀ ਵਾਰ ਨਹੀਂ ਵਰਤੀ ਜੀ ਸਕਦੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ ਉੱਪਰ ਦਿਖਾਏ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਅਕਾਊਂਟ ਨੰਬਰ (Account No) ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ (Key) ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਕੀਅ ਹੈ ਜੋ ਕੀਅ (Key) ਦੂਸਰੇ ਟੇਬਲ ਦੀ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਪਹਿਲੇ ਟੇਬਲ ਦੀ ਫੌਰਨ ਕੀਅ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਦੋ ਟੇਬਲਜ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਹੈ।

RDBMS ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ:–

1. ਇੱਕ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ:– ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਖ ਪਹਿਲੇ ਟੇਬਲ ਦੀ ਇੱਕ ਰੋਅ ਦੂਸਰੇ ਟੇਬਲ ਦੀ ਇੱਕ ਰੋਅ ਨਾਲ ਸਬੰਧ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਤੋਂ ਅਨੇਕ ਸੰਬੰਧ:– ਇਸ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਦੀ ਇੱਕ ਰੋਅ ਦੂਸਰੇ ਟੇਬਲ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਰੋਅ ਨਾਲ ਸਬੰਧ ਬਣਾਉਦੀਆਂ ਹਨ।
3 ਅਨੇਕ ਤੋਂ ਅਨੇਕ ਸੰਬੰਧ:– ਇਸ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਟੇਬਲ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਰੋਅ ਦੂਸਰੇ ਟੈਬਲ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾ ਰਅ ਨਾਲ ਸਬੰਧ ਬਣਾਉਦੀਆਂ ਹਨ।

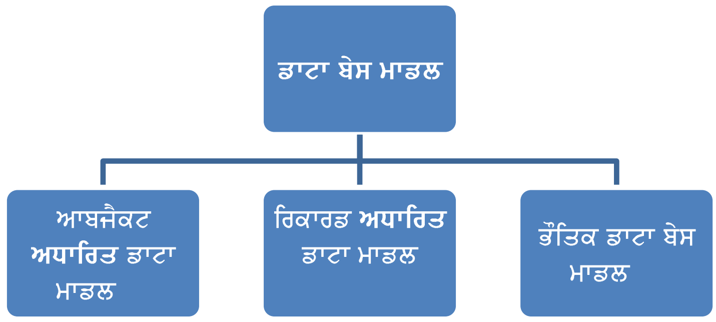
<u>**5.3 ਫਾਇਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਸਿਸਟਮ:**</u>– ਡਾਟਾਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ ਇੱਕ ਕੰਪਿਊਟਰ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਾਂ ਦਾ ਸੈਟ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਫਾਇਲਾਂ ਬਣਾਉਣ , ਮੇਨਟੇਨ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਸਥਾ ਨੂੰ ਆਗਿਆ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਸਥਾ ਕੰਟਰੋਲ ਕਰਨ ਦਾ ਕੰਮ ਕਿਸੇ ਉੱਚ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਐਡਮਨਿਸਟ੍ਰੇਟਰ ਜਾਂ ਮਾਹਿਰ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਿਸਟਮ ਜੋ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦੀ ਲੌਜਿਕ ਬਣਤਰ, ਡਾਟਾ ਦੇ ਵਹਾਅ, ਡਾਟਾ ਦੀ ਅਖੰਡਤਾ, ਨਿਯੰਤਰਣ ਅਤੇ ਅਤੇ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਤੋਂ ਸਟੋਰ ਕਰ ਸਕਣ ਦੀ ਸੁਵਿਧਾ ਦਿੰਦਾ ਹੋਵੇ। ਫਾਇਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਸਿਸਟਮ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਿਸਟਮ ਹੈ ਜੋ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਅੱਲਗ–ਅੱਲਗ ਕੰਪਿਊਟਰ ਫਾਇਲਾਂ ਵਿੱਚ ਸਟੋਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਫਾਇਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਸਿਸਟਮ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਸਟੋਰ ਕਰਨ, ਮੇਨਟੇਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਡਿਪਾਰਟਮੈਂਟ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਹਰੇਕ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹੋਵੇ।

ਫਾਇਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਸਿਸਟਮ ਦੀਆ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations) :–

1. ਡਾਟਾ ਦਾ ਬੇਲੋੜਾ ਦੁਹਰਾਅ ਅਤੇ ਡਾਟਾ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨਤਾ
2. ਡਾਟਾ ਅਸੈਸ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਡਾਟਾ ਦੀ ਸਕਿਉਰਟੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਟਾਇਮ ਜਿਆਦਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।
5. ਡਾਟਾ ਅੱਲਗ–ਅੱਲਗ ਫਾਇਲਾਂ ਅਤੇ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਫਾਰਮੈਟ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਕਾਰਨ ਇੱਕਠਾ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
6. ਭਰੋਸੇਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

<u>**5.4 ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ:–**</u>

ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਟੂਲ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਡਾਟਾ ਦੀ ਲੌਜਿਕ ਬਣਤਰ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਟੋਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਹੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਟੋਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਸਹੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਿਆਂਦਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ, ਡਾਟਾ ਦਾ ਆਪਸ ਵਿੱਖ ਸਬੰਧ, ਡਾਟਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰਤਾ ਦੀ ਕਮੀ ਆਦਿ ਸਭ ਗੱਲਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੱਖ–ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।



1. **ਆਬਜੈਕਟ ਅਧਾਰਿਤ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ:** ਇਸ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਆਬਜੈਕਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਆਬਜੈਕਟ ਓਰਿਐਂਟਿਡ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿੱਚ ਆਬਜੈਕਟ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਤੋਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਟੇਬਲਜ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਾਫੀ ਲਚਕੀਲੀ ਸੰਰਚਨਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ ਡਾਟਾ ਦੀ ਕਮੀ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਉਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਡਾਟਾਬੇਸ ਦੇ ਲੌਜਿਕ ਬਣਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

Maintenance

Date	
Activity Code	
Rate No.	
Daily Production	
Equipment	
Late Hours	

Obj-1

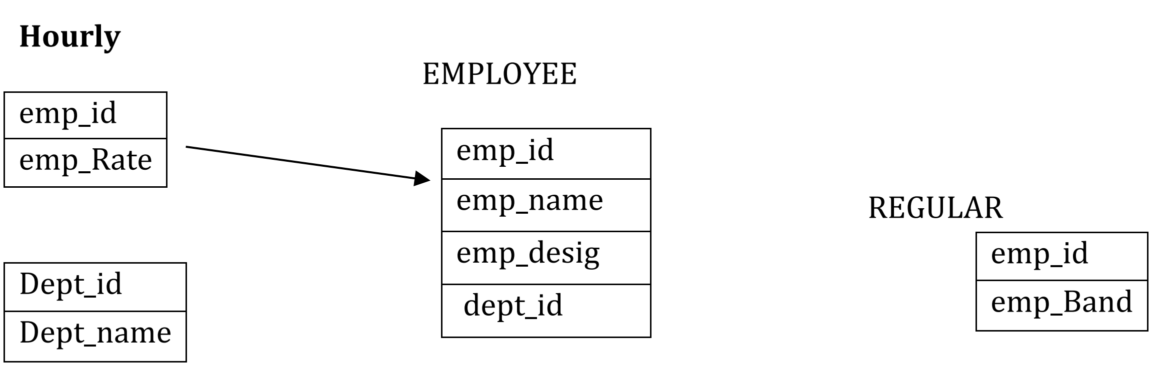
1-12-01
24
1-96
25
6.0
6-9

Obj-2

Activity Code
Activity Name
Product Unit
Avg. Daily Production Rate

2. **ਰਿਕਾਰਡ ਬੇਸਡ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ:**-ਇਹ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਆਬਜੈਕਟ ਬੇਸਡ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੌਜਿਕ ਬਣਤਰ ਅਤੇ ਡਾਟਾ ਦੇ ਵਿਊ ਲੈਵਲ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦੇ ਲੌਜਿਕਲ ਬਣਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਉੱਚ ਪੱਧਰੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਦਸਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਰਿਕਾਰਡ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਫੀਲਡ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਲੰਬਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਫਾਰਮੈਟ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

3. ਭੌਤਿਕ (Physical) **ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ:** ਇਹ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਭੌਤਿਕ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਟੇਬਲ ਦੀ ਬਣਤਰ, ਕਾਲਮ ਨੇਮ, ਕਾਲਮ ਦਾ ਡਾਟਾ ਟਾਈਪ, ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ, ਫੌਰਨ ਕੀਅ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਖ ਸਬੰਧ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

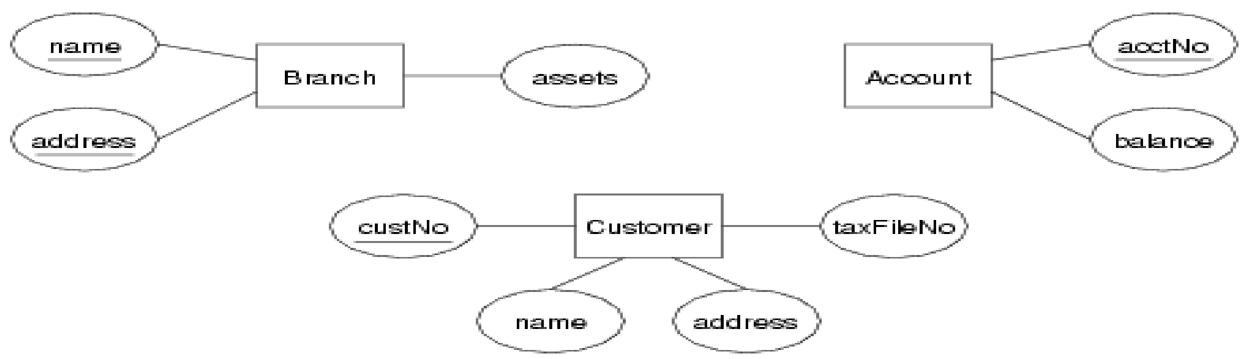


5.5 ਐਂਟਰੀ ਰਿਲੇਸ਼ਨਸ਼ਿਪ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ (Entity Relationship Model)–

ਐਟਟੀ ਰਿਲੇਸ਼ਨਸ਼ਿਪ ਮਾਡਲ (**ERD)** ਇੱਕ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲਿੰਗ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੂਚਨਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਚਾਰਿਕ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਦੀ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਈ ਆਰ ਟੈਕਨਾਲੋਜੀ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦੇ ਲੌਜਿਕ ਸਟਰਕਚਰ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪੇਸ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਰਿਕਟੈਂਗਲ ਇੱਕ ਰਿਕਾਰਡ, ਅਲਿਪਸ ਇੱਕ ਐਟਰੀਬਿਊਟ ਅਤੇ ਡਾਇਮੰਡ ਇੱਕ ਸਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਇੱਕ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿਚਲੇ ਰਿਕਾਰਡ ਅਤੇ ਟੇਬਲਜ ਵਿਚਕਾਰ ਸਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਅੱਛਾ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਬਣਾਂਉਣ ਲਈ ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਈ ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟ ਹਨ:-

1. **ਰਿਕਾਰਡ**: ਜਿਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੂਚਨਾ ਇੱਕਤਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਕਿਸੇ ਪਰਸਨ, ਕੋਈ ਥਾਂ, ਕੋਈ ਘਟਨਾ ਕੋਈ ਥਾਂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦਾ ਹੋਵੇ।
2. **ਰਿਲੇਸ਼ਨਸ਼ਿਪ**:- ਦੋ ਰਿਕਾਰਡ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ।



5.6 ਨਾਰਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ਨ (Normalization):-

ਇਹ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅਰਥਹੀਣ ਅਤੇ ਬੇਲੋੜੇ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਨੂੰ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਡਾਟਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜਿਆਦਾ ਜਗ੍ਹਾਂ ਉਪਰ ਸਟੋਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਸੰਭਾਲਣਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਨਾਰਮਲਾਈਜੇਸ਼ਨ ਵਾਧੂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦੀ ਦੂਜੇ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਉੱਪਰ ਨਿਰਭਰਤਾ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚ ਟੇਬਲ ਅਤੇ ਫੀਲਡਜ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਨਾਰਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ਨ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਕਿਸਮਾਂ ਤੇ ਪਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਫੀਲਡ ਵੈਡਯੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਿੰਗਲ ਵੈਲਯੂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਡਾਟਾ ਦੇ ਬੇਲੋੜੇ ਦੁਹਰਾਅ ਤੋਂ ਬਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦੀ ਸਹੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸੰਭਾਲ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

Order No.	Date	Cust Name	C_Phone	Sal_Asst	Part No.	Part	Qty	Price
2335	17/03/07	P.Gopal	469876	Shyam	P1 P5	Wheel Door	4 2	75 68
2496	24/07/07	Mr. Dutt	956274	Ram	P2	Widget	1	90
2570	12/09/07	Ravi	864962	Ashok	P1 P5	Wheel Door	2 3	75 68

ਅਨਨਾਰਮੇਲਾਈਜਡ ਡਾਟਾ

ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਨਾਰਮੇਲਾਈਜ ਕਰਨ ਲਈ ਲੌਜਿਕਲ ਸਟੈਪਸ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਫਲੋ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।
1. First NF 2.2nd NF 3. 3rd NF

1. **ਪਹਿਲੀ ਨਾਰਮਲ ਫਾਰਮ (1NF)**:- ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਕਾਲਮ(ਫੀਲਡ) ਆਟੋਮੈਟਿਕ (Automatic) ਹੋਣਗੇ । ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਡਾਟਾ ਰਿਪੀਟ ਨਹੀਂ
ਹੋਵੇਗਾ। ਡਾਟਾ ਇੱਕ ਹੀ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਹਰੇਕ ਐਟਰੀ ਬਿਊਨ ਲਈ ਅੱਲਗ ਤੋਂ ਟੇਬਲ ਬਣਾਓ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਸੈਟ ਕਰੋ।

2. **ਦੂਸਰੀ ਨਾਰਮਲ ਫਾਰਮ (2NF)** :-1. ਟੇਬਲ ਦੇ ਹਰੇਕ ਸੈੱਲ ਵਿੱਚ ਕੀਮਤ ਹੋਵੇ।
   2. ਇੱਕੋ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਸੈਟ ਹੋਵੇ।
   3. NF ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਕੀਅ ਕਾਲਮ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ।

Membership Id	Full Name	Address
1	AMIT	1ST STREET NO. 1
2	JOHN	3RD STREET NO. 4
3	ROHAN	5TH AVENUE

Table -1 2NF

Membership Id	Book rented
1	Fundamental
1	C++
2	Visual Basic
3	Programming in C

Table -2 2NF

2NF ਨਾਰਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਨੀਂ ਦੇਰ ਅੱਗੇ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੇ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕੀ ਅਸੀਂ ਟੇਬਲ ਨੂੰ ਦੋ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਵੰਡ ਲੈਂਦੇ। ਇਥੇ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਮੈਂਬਰਸ਼ਿਪ ਆਈ.ਡੀ.ਬਣਾਵਾਗੇਂ ਜੋ ਕਿ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਵਿੱਲਖਣ ਰਿਕਾਰਡ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਹੋਵੇਗੀ।

3. **ਤੀਸਰੀ ਨਾਰਮਲ ਫਾਰਮ (3NF):-** 1. ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ 2NF ਟੇਬਲ ਨੂੰ 3 NF ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਲਈ ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਤੋਂ ਵੰਡਣਾ ਪਵੇਗਾ

CUSTOMER_ID	NAME	ADDRESS	GENDER_ID
1	Anil	#490 West New Delhi	M 1
2	Raj	#912 West New Delhi	M 1
3	Roshani	1st Street No.2	F 1

TABLE 1

CUSTOMER_ID	NAME	ADDRESS	GENDER_ID
1	Anil	#490 West New Delhi	1
2	Raj	#912 West New Delhi	1
3	Roshani	1st Street No.2	1

TABLE 2

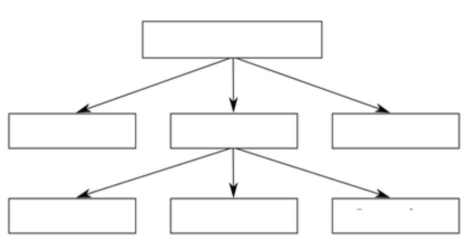
2. ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਕਾਲਮ ਇੱਕ ਉਪ ਵਸਤੂ ਜਾਂ ਵਸਤੂ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ।

GENDER_ID	GENDER
1	M
2	F
3	M

TABLE 3

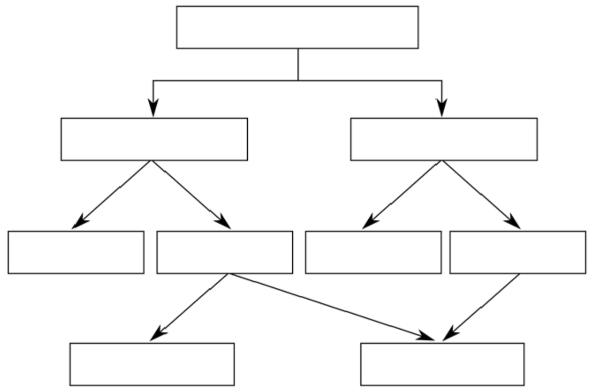
5.7 ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਹੈਰਾਰੀਕਲ ਡਾਟਾ ਅਧਾਰਿਤ ਮਾਡਲ (Relational Hierarchical Data Base Model)-

ਇਸ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਇੱਕ ਟ੍ਰੀ ਦੀ ਸ਼ਕਲ (Structure) ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਟਰਕਚਰ ਇਨਫਰਮੇਸ਼ਨ (ਸੂਚਨਾ/ਡਾਟਾ) ਨੂੰ ਪੇਰੈਂਟ/ ਚਾਈਲਡ (Parent/child) ਸੰਬੰਧ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪੇਰੈਂਟ (Parent) ਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਜਿਆਦਾ ਚਾਈਲਡ ਟੇਬਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਹਰੇਕ ਚਾਈਲਡ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਪੇਰੈਂਟ ਟੇਬਲ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰਿਕਾਰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ (ਐਂਟਰੀ ਬਿਊਟ) ਇੱਕ ਹੀ ਲਿਸਟ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਬੱਧ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



5.8 ਨੈਟਵਰਕ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ-

ਨੈਟਵਰਕ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਆਬਜੈਕਟ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਲਚਕੀਲਾ (flexible) ਤਰੀਕਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਦੀ ਖਾਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਇਸ ਦੀ ਰੂਪ ਰੇਖਾ (scheme) ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਬਜੈਕਟ ਟਾਈਪ ਨੋਡਸ ਅਤੇ ਰਿਲੇਸ਼ਨਸ਼ਿਪ ਟਾਈਪ ਆਰਕ (Ares) ਦਾ ਇੱਕ ਹਿਰਾਰਕੀ (Hierarchy) ਵਿੱਚ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹਿਰਾਰਕੀਕਲ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੇਰੈਂਟ/ਚਾਈਲਡ (Parent/child) ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਹਰੇਕ ਰਿਕਾਰਡ ਦੇ ਮਲਟੀਪਲ ਪੇਰੈਂਟ ਅਤੇ ਮਲਟੀਪਲ ਚਾਈਲਡ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।



5.9 E.F.Codd's Rules-

ਈ.ਐਫ.ਕੋਡ ਨੇ 12 ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਜੋ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਲਈ ਮਾਨਦੰਡ (Benchmark) ਹਨ। ਇਹ 12 ਨਿਯਮ ਦਿਸ਼ਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਹਨ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 1- ਇਨਫਰਮੇਸ਼ਨ ਰੂਲ:- ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀ ਸੂਚਨਾਂ (information) ਲੌਜਿਕ ਪੱਧਰ ਤੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਟੇਬਲ ਦੇ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 2- ਦਾ ਗਰੰਟੀ ਰੂਲ:-ਇੱਕ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੱਥ (datum) ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲੌਜਿਕਲੀ ਪਹੁੰਚਯੋਗ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਟੇਬਲ ਕੀਅ, ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਅਤੇ ਕਾਲਮ ਨਾਮ ਨਾਲ ਸਟੋਰ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 3- ਸਿਟੇਮੈਟਿਕ ਟਰੀਟਮੈਂਟ ਆਫ ਨਲ ਵੈਲਯੂ:-ਇੱਕ ਡਾਟਾ ਟਾਈਪ ਵਿੱਚ ਨਲ ਵੈਲਯੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗੁਪਤ ਸੂਚਨਾ ਜਾਂ ਨਾਂ ਲਾਗੂ (inapplicable) ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵੈਲਯੂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸਪੋਰਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਡਾਟਾ ਦੀ ਕਿਸਮ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਾ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ।

ਨਿਯਮ 4- ਡਾਇਨੈਮਿਕ ਆਨ-ਲਾਈਨ ਕੈਟਾਲਾਗ ਬੇਸਡ ਆਨ ਦਾ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਮਾਡਲ:-ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦਾ ਵਰਨਣ ਲੌਜਿਕਲ ਲੈਵਲ ਉਤੇ ਆਮ ਡਾਟਾ ਜਿਹਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਅਧਿਕਾਰਿਤ ਯੂਜਰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਸਵਾਲ (interrogation) ਕਰਨ ਲਈ ਕਰ ਸਕਣ ਜੋ ਕਿ ਉਹ ਸਧਾਰਣ (regular) ਡਾਟਾ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਨਿਯਮ 5- ਕੰਪਰੀਹੈਨਸਿਵ (comprehensive) ਡਾਟਾ ਸਬ ਲੈਂਗੂਏਜ ਰੂਲ:-ਇੱਕ ਰਿਲਸ਼ਨਲ ਸਿਸਟਮ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂਅਤੇ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਟਰਮੀਨਲ ਦੀ ਵਰਤੋ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਭਾਸ਼ਾ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਡਾਟਾਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ, ਡਾਟਾ ਦਾ ਅੱਛਾ ਉਪਯੋਗ, ਅਖੰਡਤਾ, ਪ੍ਰਾਧਿਕਰਣ ਅਤੇ ਲੈਣ-ਦੇਣ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੇ।

ਨਿਯਮ 6- ਵਿਊ ਅਪਡੇਟਿੰਗ ਰੂਲ:-ਉਹ ਸਾਰੇ ਵਿਊ (views) ਜੋ ਲਿਖਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਪਡੇਟੇਬਲ (updatable) ਹਨ, ਉਹ ਸਿਸਟਮ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਅਪਡੇਟੇਬਲ (updatable) ਹਨ।

ਨਿਯਮ 7- ਹਾਈ ਲੈਵਲ ਇਨਸਰਟ, ਅਪਡੇਟ ਅਤੇ ਡਿਲੀਟ:-ਇੱਕ ਇਕੱਲੇ ਅਪਰੈਂਡ ਦੇ ਡਾਟਾ ਦਾ ਅਸਲ ਜਾ ਨਕਲੀ ਰਿਲੇਸ਼ਨ ਨੂੰ ਹੈਂਡਲ ਕਰਨਾ, ਡਾਟਾ ਰਿਟਰੀਵ ਕਰਨਾ ਹੀ ਨਹੀਂ ਸਗੋਂ ਡਾਟਾ ਦਾਖਲ ਕਰਨਾ, ਬਦਲਣਾ ਅਤੇ ਮਿਟਾਉਣਾ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 8- ਫਿਜੀਕਲ ਡਾਟਾ ਇਨਡੀਪੈਡੈਸ (Physical data independance):- ਐਪਲੀਕੇਸ਼ਨ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਅਤੇ ਟਰਮੀਨਲ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਲੌਜੀਕਲੀ ਅਣਛੂਹੇ ਰਹਿ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਡਾਟਾ ਸਟੋਰ ਕਰਨ ਜਾਂ ਵਰਤਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਨਿਯਮ 9- ਲੌਜੀਕਲ ਡਾਟਾ ਇਨਡੀਪੈਡੈਂਸ (logical data independence):- ਐਪਲੀਕੇਸ਼ਨ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਅਤੇ ਟਰਮੀਨਲ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਲੋਜਿਕਲੀ ਅਣਛੂਹੇ ਰਹਿ ਜਾਂਦੀਆ ਹਨ।

ਨਿਯਮ 10- ਇੰਟੀਗਰਿਟੀ ਇਨਡੀਪੈਡੈਂਸ (integrity independence):-ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰਿਲੇਸ਼ਨ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚ ਅਖੰਡਤਾ ਦਾ ਨਿਯੰਤਰਣ ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਉਪ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਸਟੋਰ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਐਪਲੀਕੇਸ਼ਨ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ।

ਨਿਯਮ 11- ਡਿਸਟੀਬਿਊਸ਼ਨ ਇਨਡੀਪੈਡੈਂਸ(distribution independence):-ਇੱਕ ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਉਪ ਭਾਸ਼ਾ ਅਤੇ ਡਾਟਾ ਫੇਰ ਬਦਲ (manipulate) ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਕਾਰ ਐਪਲੀਕੇਸ਼ਨ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਨੂੰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਕਿ ਬਾਕੀ ਬਚਿਆ ਡਾਟਾ ਲੌਜਿਕਲੀ ਅਤੇ ਫਿਜੀਕਲੀ ਕੇਂਦਰਿਤ ਜਾਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਵੰਡਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 12– ਨਾਨ ਸਬ ਵਰਜਨ ਰੂਲ (non-sub version rule):– ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰਿਲੇਸ਼ਨ ਸਿਸਟਮ ਲੋ ਲੈਵਲ ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਹੈ। ਉਹ ਲੋ ਲੈਵਲ ਭਾਸ਼ਾ ਅਖੰਡਤਾ ਦੇ ਨਿਯਮ, ਨਿਯੰਤਰਣ ਨੂੰ ਨਸ਼ਟ ਅਤੇ ਬਾਈਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਉਹ ਹਾਈ ਲੈਵਲ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ।

Different type of key attributes.

ਡੀ ਬੀ ਐਮ ਐਸ ਵਿੱਚ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੀਅ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

1. **ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ**– ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਇੱਕ ਰਿਕਾਰਡ ਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।
2. **ਫੌਰਨ ਕੀਅ**– ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਵਿਚਲੀ ਵੈਲਯੂ ਦੂਸਰੇ ਟੇਬਲ ਦੀ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਨਾਲ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।
3. **ਕੰਪੋਜ਼ਿਟ ਕੀਅ**– ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹੋਣ।
4. **ਕੈਡੀਡੇਟ ਕੀਅ**– ਇੱਕ ਟੇਬਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਾਲਮ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਬਣਨ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਹੋਵੇ।
5. **ਅਲਟਰ ਨੇਟ ਕੀਅ**– ਕੋਈ ਵੀ ਕੈਡੀਡੇਟ ਕੀਅ ਜੋ ਕਿ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਨਹੀਂ ਅਲਟਰਨੇਟ ਕੀਅ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
6. **ਸੈਕੰਡਰੀ ਕੀਅ**– ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਕੀਅ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਹੱਲ।

ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ ਗੱਲਾਂ

1. ਡਾਟਾ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੂਚਨਾ (information) ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਅਤੇ ਟੇਬਲ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਈ.ਆਰ.ਟੈਕਨਾਲੋਜੀ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਈ.ਆਰ.ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. ਨਾਮਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ਨ ਦੁਆਰਾ ਡਾਟਾ ਦਾ ਸਹੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਬੰਧ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
5. ਡੀ.ਬੀ ਐਮ.ਐਸ. ਵਿੱਚ ਛੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੀਅ ਐਟਰੀਬਿਊਟ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।
6. E.F.Codd ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਲਈ 12 ਰੂਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ cods ਰੂਲ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਖਾਲੀ ਥਾਂਵਾ ਭਰੋ।

1. ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮਾਡਲ ਇੱਕ ਟੂਲ ਹੈ ਜੋ ਡਾਟਾ ਦੀ.......................ਬਣਤਰ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਹਿਰਾਰਕੀਕਲ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ......................ਅਤੇ..................ਸੰਬੰਧ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਨਾਰਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ਨ ਦੇ........................ਫਾਰਮ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।
4. ਈ.ਆਰ.ਟੈਕਨਾਲੋਜੀ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚਿਤਰ ਨੂੰ.....................ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
5. ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ.........................ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਛੋਟੇ ਉੱਤਰ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?
2. ਨਾਰਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ ਕੀ ਹੈ?
3. ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਕੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ?
4. ਫਾਈਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਸਿਸਟਮ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਸੀਮਾਵਾਂ (limitations) ਲਿਖੋ।
5. ਵੱਖ–ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੀਅਜ਼ ਦੇ ਨਾਲ ਦੱਸੋ?

ਵੱਡੇ ਉੱਤਰਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਤੇ ਨੋਟ ਲਿਖੋ।
   1. ਰਿਕਾਰਡ ਬੇਸਡ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ 2. ਭੌਤਿਕ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ
2. ਈ.ਐਫ.ਕੋਡ ਦੇ ਰੂਲਜ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ(ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ)?
3. ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਾਭ ਲਿਖੋ?
4. ERD ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਕੀ ਹੈ? ਇੱਕ ਈ.ਆਰ ਡਾਇਗ੍ਰਾਮ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ?
5. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ।
   1) 1 NF 2) 2 NF 3) 3 NF

ਸਹੀ /ਗਲਤ ਦੱਸੋ।

1. ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

2. ਫਾਈਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸਿੰਗ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਫਾਈਲਾਂ ਨੂੰ ਸੰਭਾਲ ਕੇ ਨਹੀਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ।
3. ਰਿਲੇਸ਼ਨਲ ਹਿਰਾਰਕੀਕਲ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਪੇਰੈਂਟ/ਚਾਈਲਡ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
4. ਨਾਰਮੇਲਾਈਜੇਸ਼ਨ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਬਣਾਉਂਦੀ।
5. ਇੱਕ ਅੱਛਾ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ER ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪਾਠ-6 **ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜਾਇਨ**

SYSTEM ANALYSIS AND DESIGN

ਜਾਣ ਪਛਾਣ:- ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜਾਇਨ (SAD) ਇੱਕ ਸੰਸਥਾ ਨੂੰ ਅਕਾਰ ਦੇਣ, ਵਧੀਆ ਬਣਾਉਣ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਕਾਰਗੁਜਾਰੀ ਵਧਾਉਣ, ਲਾਭ ਦੇਣ ਅਤੇ ਵਿਕਾਸ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਅਤੇ ਉਪ ਸਿਸਟਮ ਵੱਲੋਂ ਕਿਸੇ ਲਕਸ਼ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਯੋਗਦਾਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

6.1 ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜਾਇਨ ਦੀ ਕਿਉਂ ਲੋੜ ਹੈ ?

ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਮੁੱਖ ਗੱਲਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਸਿਸਟਮ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ (System Analysis)

2. ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ(System Design)

1. **ਸਿਸਟਮ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ** (System Analysis)-- ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਵਿੱਚ ਅਰਥ ਭਰਪੂਰ ਅੰਕੜੇ ਇੱਕਠੇ ਕਰਨਾ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ, ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਨਾ, ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਉਚਿਤ ਸੁਝਾਅ ਦੇਣਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਪੂਰੇ ਡਾਟਾ ਬੇਸ ਦਾ ਅਧਿਐਨ (study) ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਲੋੜੀਦੇ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਸੂਚਨਾ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ (flow) , ਕਮੀਆਂ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਉਤੇ ਕਾਬੂ ਪਾਉਣ ਲਈ ਸਮਾਧਾਨ ਲੱਭਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਉਚਿਤ ਸਿਟਮ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਹਰੇਕ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭਣਾ, ਕੀ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਕਿਵੇ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ , ਕੌਣ ਇਸ ਨੂੰ ਕਰ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਕਦੋ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਕਿਉਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਵੇ ਸੁਧਾਂਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

2 **ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ** (System Design)- ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੀਆ ਜਰੂਰਤਾਂ ਅਤੇ ਮੌਜੂਦਾ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੂਰਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਨਵਾਂ ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਡਿਜਾਇਨ ਕਰਨ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪੜਾਅ ਹੈ। ਇਸ ਪੜਾਅ ਤੇ ਲੌਜਿਕਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਭੌਤਿਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਦੇ ਦੋ ਪੜਾਅ ਹਨ ਜਾਂ ਇਹ ਦੋ ਪੜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਜਨਰਲ ਡਿਜਾਇਨ (General Design)
2. ਸੰਚਰਾਤਮ (structural) ਜਾਂ ਡਿਟੇਲਡ ਡਿਜਾਇਨ

ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਕਰਨ ਲਈ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਟੂਲਜ਼ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋ ਫਲੋ ਚਾਰਟ, ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ (DFD), ਡਾਟਾ ਡਿਕਸ਼ਨਰੀ , ਡਿਸੀਜਨ ਟੇਬਲ, ਡਿਸੀਜਨ ਟ੍ਰੀ ਆਦਿ। ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਬਲੂ ਪ੍ਰਿੰਟ (Blue print) ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਤੋਂ ਬਿਨਾ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਮਸ਼ਕਿਲ ਹੈ।

<u>6.2 **ਕਦਮ ਅਤੇ ਤਕਨੀਕ (steps and technique**</u>)– ਸਿਮਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕੁਝ ਕਦਮ ਅਪਣਾਉਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

1. **ਸਿਸਟਮ ਉਪਭੋਗਤਾ ਲੱਭਣਾ**–(Identify system user) ਇਹ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਉਪਭੋਗਤਾ ਨੂੰ ਭੁੱਲ ਜਾਓਗਾ ਤਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਲਤ ਹੱਲ ਨਿਕਲੇਗਾ। ਸਾਰੇ ਅਗਲੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੇ ਰੋਲ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਕੌਣ ਵਰਤੇਗਾ।

2. **ਉਪਭੋਗਤਾ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ**–(Define main users goal) ਹਰ ਇੱਕ ਉਪਭੋਗਤਾ ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਉਦੇਸ਼ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਉਪਭੋਗਤਾ ਜੋ ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਵਰਤਦਾ ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਜੋ ਉਪਭੋਗਤਾ ਸਿਸਟਮ ਲਈ ਹਰ ਰੋਜ ਦੋ ਘੰਟੇ ਵਰਤਦਾ ਹੈ ਉਹ ਕਾਫੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸਮੱਆਿਵਾ ਦਾ ਹੱਲ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਸਰਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਕਿਉਂ ਉਪਭੋਗਤਾ ਇਸ ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਵਰਤੇਗਾ? ਉਹ ਕੀ ਪਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਮੱਦਦ ਨਾਲ?

3. **ਸਿਸਟਮ ਵਰਤੋ ਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ (**Define system usages pattern)–ਹਰ ਇੱਕ ਉਪਭੋਗਤਾ ਦਾ ਇੱਕ ਆਮ ਵਿਵਹਾਰ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਮੈਨੇਜਰ ਕੰਮ ਤੇ ਆਉਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦਿਨ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕੱਲ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮਾ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸੇਲ ਪਰਸਨ ਆਪਣੇ ਨਾ ਖੁਸ਼ ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੀ ਫੋਨ ਕਾਲ ਅਟੈਂਡ(attend) ਕਰਦਾ ਹੈ , ਰਿਸੋਰਸ ਮੈਨੇਜਰ ਹੋਰ ਨਾਲ ਦੇ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਡਿਵੈਲਪਰ ਤੋਂ ਹੋਰ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਦਾ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਆਮ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਪਰ ਇਹ ਕੰਮ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆਂ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਆ ਰਹੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਪਤਾ ਚੱਲਦਾ ਹੈ, ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਅੱਛੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਕੋਈ ਬਿਹਤਰ ਹੱਲ ਵੀ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹੋ।

4. **ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪਾਉਣ ਲਈ ਕੋਈ ਕੰਮਕਾਜੀ ਹੱਲ ਲੱਭਣਾ ਅਤੇ ਵਰਤੰ ਤਰੀਕ** (Invent functional solution to meet the users goal and usage pattern)– ਇਹ ਪਿਛਲੇ ਕਦਮ ਦੀ ਤਾਰਕਿਕ (Logical), ਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continution) ਹੈ। ਪਰ ਸ਼ਾਇਦ ਸਭ ਤੋਂ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਕਦਮ ਇਥੇ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਸਮੱਸਿਆ ਪ੍ਰਤੀ ਹੋਰ ਦੂਸਰਿਆ ਨਾਲ ਗੱਲਬਾਤ ਕਰੋ, ਕੋਈ ਹੱਲ ਮਿਲਣ ਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਸੋਧਣਾ, ਫਿਰ ਉਸ ਨੂੰ ਲਿਖਣਾ ਅਤੇ ਅਗਲੇ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਵੱਲ ਵਧਣਾ।

5. **ਮੇਨ ਨੈਵੀਗੇਸ਼ਨ ਰਸਤਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ** (Define main navigation path) ਇਹ ਅਤੇ ਅਗਲਾ ਕਦਮ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕਦਮ 4 ਦੇ ਨਾਲ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਿਨਾ ਉਪਭੋਗਤਾ ਨੂੰ ਲੱਭੇ (track) ਕਿਸੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭਣਾ ਅਤੇ ਕੁਝUI (user Interface) ਡਰਾਇੰਗ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚUI ਤੋਂ ਦੂਰ ਰਹਿਣਾ ਹੀ ਬਿਹਤਰ ਹੈਉਸ ਸੂਚਨਾ ਉਪਰ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਉਪਭੋਗਤਾ ਹਰ ਕਦਮ ਉਪਰ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. **ਨਕਲੀ** UI **ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ**(create UI mockups)–UI ਮੋਕਅਪ ਸੰਭਵ ਉਪਯੋਗ ਕਰਤਾਵਾ। ਸਿਸਟਮ ਗੱਲਬਾਤ ਲਈ ਵਧੀਆ ਹੈ। ਪਰ ਡੈਸ਼ਬੋਰਡ ਨਮੂਨੇ ਪਰਿਪੂਰਵ ਹਨ। ਡੈਸ਼ ਬੋਰਡ ਨਮੂਨੇ (sketches) ਦੇ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਤੇਜ , ਸੌਖਾ ਅਤੇ ਰੋਮਾਂਚਕ ਹੈ। ਹਰ ਕੋਈ ਮਾਰਕਰ ਨਾਲ ਆਪਣਾ– ਆਪਣਾ ਨਮੂਨਾ ਤਿਆਰ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਗਰੁੱਪ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਇਹ ਸੋਚਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਹੱਥ ਵਿੱਚ ਮਾਰਕਰ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਵਧੀਆ UI ਨਮੂਨਾ ਤਿਆਰ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

7. **ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨਾ** (Polish UI elements)– ਇਥੇ ਅਤੇ ਉਥੇ ਕੁਝ ਸੁਧਾਰ ਕਰਨ ਲਈ, ਚੀਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਬਿਹਤਰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਅੱਛਾ ਰਵਈਆ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋਗੇ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਲਾਗੂ ਹੋਏਗਾ। ਲੇਕਿਨ ਧਿਆਨ ਰਹੇUI ਉਪੱਰ ਜਿਆਦਾ ਸਮਾਂ ਖਰਚਣ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀ ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਵਿਕਾਸ ਦੌਰਾਨ UI ਬਦਲਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਸਿਸਟਮ (ਪ੍ਰਣਾਲੀ) ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਕਦਮਾਂ ਦ ਨਾਲ–ਨਾਲ ਕੁਝ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵੀ ਵਰਤਣੀਆਂ ਪੈਂਦੀਆ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿ ਵਧੀਆ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਹੋ ਸਕੇ।

1. **ਤਾਰਕਿਕ ਡੇਟਾ ਮਾਡਲਿੰਗ** (Logical data modeling) ਇਹ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀਆਂ ਡਾਟਾ ਜਰੂਰਤਾਂ ਅਤੇ ਦਸਤਾਵੇਜਾਂ ਦੇ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਨ ਦੀ ਪਰਕ੍ਰਿਆ ਹੈ।

2. **ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਮਾਡਲਿੰਗ** (Data flow modeling)– ਇਹ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਆਸ ਪਾਸ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਡਾਟਾ ਚੱਲੇਗਾ ਅਤੇ ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

3. **ਐਂਟਿਟੀ ਬੀਹੇਵੀਅਰ ਮਾਡਲਿੰਗ** (Entity Behaviour modeling)– ਇਹ ਡਾਟਾ ਮਾਡਲਿੰਗ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਜੋ ਕਿ ਤੱਥ ਨੂੰ ਇਫੈਕਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ

4. **ਐਕਟਿਵਿਟੀ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ**- ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਤਕਨੀਕਾਂ ਅਤੇ ਸਮੱਗਰੀਆ ।

6.3 ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਦਾ ਕੀ ਰੋਲ ਹੈ? (What are the roles of System Analyst?)

ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਅਧਿਐਨ (study)ਦਾ ਆਯੋਜਨ (conduct) ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਗਤੀਵਿਧੀਆ ਅਤੇ ਉਦੇਸ਼ਾ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਦੇਸ਼ਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਸੰਸਥਾ ਦੀ ਲੋੜ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦਾ ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਦਾ ਕੰਮ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਦਾ ਹੈ। ਕੰਪਿਊਟਰ ਟੈਕਨਾਲੋਜੀ ਦੁਆਰਾ ਬਿਜਨਸ ਤੋਂ ਲਾਭ ਲੈਣ ਲਈ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਦੀ ਮੁੱਖ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ।

ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਇੱਕ ਖਾਸ ਕਸ਼ਲ ਵਾਲਾ ਵਿਅਕਤੀ ਹੈ ਜੋ ਆਪਣੇ ਕੌਸ਼ਲ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਲਕਸ਼ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਦਾ ਹੈ।

1. ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਕੰਮ ਹੈ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ।
2. ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ (ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਕ) ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਪਤਾ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੱਲ ਹੋਏਗੀ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਮੈਨੇਜਰ , ਉਪਭੋਗਤਾ ਅਤੇ ਮਾਹਿਰਾਂ ਨਾਲ ਇਸ ਬਾਰੇ ਗੱਲਬਾਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭਦਾ ਹੈ।
3. ਸਮੱਸਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਡਾਟਾ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਉਹਨਾਂ ਬਾਰੇ ਅੱਛੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਸੋਚਦਾ ਹੈ।
4. ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਨਾਲ ਤਾਲਮਲ(Coordinate) ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਨੂੰ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਏ ਹੱਲ (solutions) ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰਦਾ ਹੈ।

5. ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਪਲੈਨਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ (ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਕ) ਦੀ ਨੌਕਰੀ ਦਾ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕੰਮ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ ਯੋਜਨਾ ਵਿਕਸਤ ਕਰਨਾ ਹੈ।

6.4 ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ (SDLC)

ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਵਿਸ਼ੇਲਸ਼ਕ (Analyst) ਵੱਲੋਂ ਇਨਫਰਮੇਸ਼ਨ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨ, ਟ੍ਰੇਨਿੰਗ ਦੇਣ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਹਾਈ ਕੁਆਲਟੀ ਦਾ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ, ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੀਆਂ ਜਰੂਰਤਾਂ ਪੂਰੀਆ ਕਰਨ ਅਤੇ ਮਿੱਥੇ ਗਏ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੋਣਾ, ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਗਈ ਯੋਜਨਾ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਅਤੇ ਕੁਸ਼ਲਤਾ ਪੂਰਵਕ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਿ ਉਸ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਰੱਖਰਖਾਵ ਘੱਟ ਲਾਗਤ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੋਵੇ। ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਦੀ ਸਟਰਕਚਰ (ਢਾਂਚਾ) ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨਰ ਅਤੇ ਡਿਵੈਲਪਰ ਨੂੰ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਲੜੀ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ ਕਦਮਾਂ (steps) ਅਤੇ ਫੇਜ਼ (Phase) ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਫੇਜ਼ ਪਹਿਲੇ ਫੇਜ਼ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫੇਜ਼ (Phase) ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਰ ਲਈ ਅਪਣਾਉਣੇ ਜਰੂਰੀ ਹਨ।

1. ਯੋਜਨਾ (Planning)

2. ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ (Analyst)

3. ਡਿਜਾਇਨ (Design)

4. ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ (Implementation)

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਕਾਸ (Develop) ਅਤੇ ਟੈਸਟਿੰਗ ਵੀ ਇਸ ਦੇ ਫੇਜ਼ ਹਨ।

1. **ਪਲੈਨਿੰਗ**– ਫੇਜ਼–1 ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਮੁਢਲਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ, ਦੂਸਰਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਦੇਣਾ, ਲਾਗਤ ਅਤੇ ਫਾਇਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਫਰਮਾਇਸ਼ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁਢਲੀ ਯੋਜਨਾ ਦੇਣਾ।
2. **ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ**(analysis)– ਫੇਜ਼–2 ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਪਲੀਕੇਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਫੰਕਸ਼ਨ ਅਤੇ ਕੰਮਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਲਕਸ਼ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਖੀਰ ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੀਆਂ ਜਰੂਰਤਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।
3. **ਡਿਜਾਇਨ**– ਫੇਜ਼–3 ਇੱਛੁਕ ਗੁਣ (desired feature) ਅਤੇ ਕੰਮਾਂ ਦਾ ਡਿਟੇਲ, ਸਕਰੀਨ ਲੇਅ ਆਊਟ, ਬਿਜਨਸ ਨਿਯਮ, ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਚਿੱਤਰ, ਸੂਡੋ ਕੋਡ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਦਸਤਾਵੇਜਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।
4. **ਵਿਕਾਸ**– ਫੇਜ਼–4 ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦਾ ਅਸਲੀ ਕੋਡ ਇਸ ਫੇਜ਼ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
5. **ਟੈਸਟਿੰਗ**– ਫੇਜ਼–5 ਸਾਰੇ ਕੋਡ ਲਿਖਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਜਗਾ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਟੈਸਟਿੰਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਥੇ ਕੋਡ ਵਿੱਚੋਂ ਗਲਤੀਆ , ਬਗ (bugs) ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।

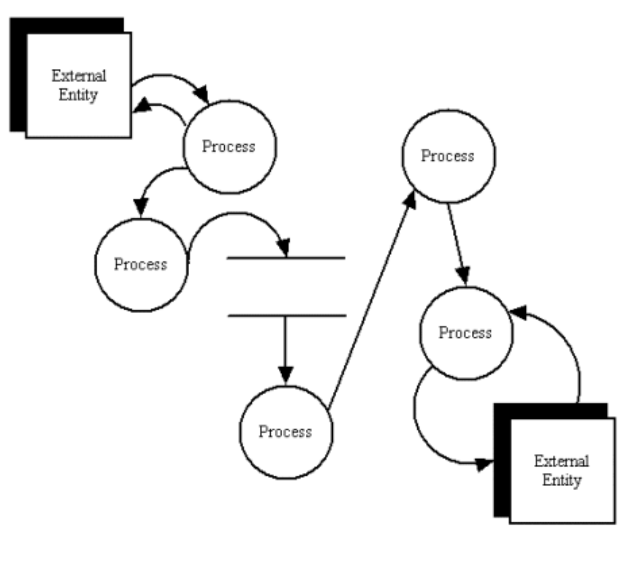
ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ :– ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਦੌਰ ਦੇ ਆਖਰੀ ਸਟੇਜ ਤੇ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਨੂੰ ਉਤਪਾਦਨ (Production) ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ (actual) ਸਿਸਟਮ ਚੱਲ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ (Objective of SDLC) :-

1. ਵਧੀਆਂ ਕੁਆਲਟੀ ਦਾ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ ਜੋ ਕਿ ਉਪਭੋਗਤਾ ਦੀਆਂ ਉਮੀਦਾ ਤੇ ਪੂਰਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਸੋਚੀ ਗਈ ਲਾਗਤ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ।
2. ਇੱਕ ਢਾਚਾਂ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਧੀਆਂ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲਈ।
3. ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਸਟਰਕਚਰ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪੂਰੀ ਜਿੰਦਗੀ ਇਹ ਸਾਈਕਲ ਠੀਕ ਤਰਾਂ ਕੰਮ ਕਰੇਗਾ।
4. ਸਿਸਟਮ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਪਾਰਟੀਜ ਨੂੰ ਆਪਣੀਆਂ ਆਪਣੀਆਂ ਜਿੰਮੇਵਾਰੀਆਂ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।
5. ਫੈਕਸ਼ਨਲ ਅਤੇ ਤਕਨੀਕੀ ਮੈਨੇਜਰ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਦੀਆਂ ਜਰੂਰਤਾਂ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹਨ।
6. ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਅਧਾਰਿਟੀ ਦਾ ਇੱਕ ਲੈਵਲ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਮੇਂ-ਸਮਂ ਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਕੋਆਰਡੀਨੇਸ਼ਨ, ਕੰਟਰੋਲ, ਰੀਵਿਊ ਅਤੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਕਰਨ ਦਾ ਅਪਰੂਵਲ ਵੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।
7. ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਲੈਨਿੰਗ, ਸੂਚਨਾ ਟੈਕਨਾਲੋਜੀ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਇਆ ਹੈ।
8. ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟ ਦੇ ਰਿਸਕ (**risk**) ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਵੀ ਵਾਪਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਉਸ ਦੇ ਹੱਲ ਬਾਰੇ ਸੋਚਣਾ।

6.5 ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ (Data Flow Digaram):-

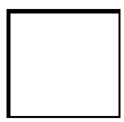
ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰੇਮ (**DFD**) ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਦਸਤਾਵੇਜੀ ਕਰਣ (**documentary**) ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਰਤਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਨਾਮ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਇੱਥ ਚਿੱਤਰਕਾਰੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਡਾਟਾ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਬਾਹਰ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨੂੰ ਦਿਖਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨੂੰ ਦਿਖਾਉਣ ਦੀ ਗ੍ਰਾਫੀਕਲ ਪੇਸ਼ਕਾਰੀ ਹੈ।



ਫਲੋ ਚਾਰਟ ਦੇ ਉਲਟ ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰੇਮ ਸ਼ਡਿਊਲ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਪ੍ਰੰਤੂ ਗ੍ਰਾਫੀਕਲੀ ਦੱਸਦੇ ਹਨ ਕਿ ਡਾਟਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸਿਸਟਮ ਨਾਲ ਵਰਤਾਵ (**interact**) ਕਰਦਾ ਹੈ। ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਸਾਨੂੰ ਅਧਿਕਾਰ (**enable**) ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀ ਦੇਖ ਸਕੀਏ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਕਿਵੇ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਆਊਟਪੁੱਟ ਕੀ ਹੈ, ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ (**implement**) ਅਤੇ ਪੂਰੇ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਬਦਲਾਵ, ਕਾਂਟ-ਛਾਂਟ (**modification**) ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ।

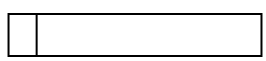
ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਚਾਰ ਮੁੱਖ ਭਾਗਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ।

1. ਬਾਹਰੀ ਤੱਥ (**External Entity**) :- ਬਾਹਰੀ ਤੱਥ ਸਿਸਟਮ ਲਈ ਇਨਪੁੱਟ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸਰੋਤ (**source**) ਦਾ ਤਰਜਮਾਨੀ (**represent**) ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸਿਸਟਮ ਡਾਟਾ ਲਈ ਪਹੁੰਚ ਸਥਲ (**destination**) ਵੀ ਹਨ। ਬਾਹਰੀ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਬਾਹਰੀ ਡਾਟਾ ਸਟੌਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਆਇਤ ਦੀ ਸ਼ਕਲ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



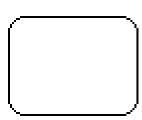
External Entity

2. ਡਾਟਾ ਸਟੋਰ (**Data Store**) :- ਡਾਟਾ ਸਟੋਰ ਡਾਟਾ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਟੋਰ ਹੋਣ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ ਕੰਪਿਊਟਰ ਫਾਈਲਜ ਜਾਂ ਡਾਟਾਬੇਸ। ਇੱਕ ਓਪਨ ਐਂਡਿਡ (**open ended**) ਬਾਕਸ ਡਾਟਾ ਸਟੋਰੇਜ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਵਾਧੂ (ਬਾਕੀ) ਬਚਿਆ ਡਾਟਾ ਜਾਂ ਅਸਥਾਈ ਡਾਟਾ ਭੰਡਾਰ।



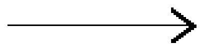
Data Store

3. ਪ੍ਰੋਸੈਸ(**Process**) :- ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਹੋ ਰਹੀਆਂ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਦਾ ਅਦਲ-ਬਦਲ ਕਰਨਾ, ਸਟੋਰ ਕਰਨਾ ਜਾਂ ਕੱਢਣਾ, ਜਾਂ ਕਿਤੇ ਹੋਰ ਭੇਜਣਾ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਇਨਪੁੱਟ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਆਊਟਪੁੱਟ ਡਾਟਾ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਹੈ। ਸਰਕਲ ਪ੍ਰੋਸੈਸ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਸੂਚਨਾ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।



Process

4. ਡਾਟਾ ਫਲੋ(**Data flow**) :– ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਟਾ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦਾ ਹ (**movement**)। ਐਰੋ ਡਾਟਾ ਦੇ ਫਲੋ (ਪ੍ਰਵਾਹ) ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਪਾਈਪ ਲਾਈਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਪ੍ਰਵਾਹ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਥ ਸਾਈਡ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (one way data flow)। ਬਾਹਰੀ ਤੱਤਾਂ (external entities) ਲਈ ਡਾਟਾ ਡੋਟਿਡ (dotted) ਲਾਈਨ (––––) ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



Data Flow

6.6 ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ (Documentation) :–

ਇਹ ਇੱਥ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸੰਚਾਰ ਕਰਨ (Communication), ਹਦਾਇਤਾਂ ਦੇਣ , ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਦਰਭ (reference) ਜਾਂ ਚਾਲੂ ਕੰਮ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਰਤਮਾਨ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਰਸਮੀ ਪ੍ਰਵਾਹ (Formal flow) ਦਿਖਾਉਣ ਲਈ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਦਸਤਾਵੇਜ ਦੀ ਮੱਦਦ ਨਾਲ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਤਰੱਕੀ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦਾ ਟ੍ਰੈਕ (Track) ਰੱਖਣਾ ਬਹੁਤ ਅਸਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਵਾਲੀ (ਸਿਸਟਮ) ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਵੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੱਸਿਆ (explained) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ ਹੁਣ ਤੱਕ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮਾਂ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਦਸਤਾਵੇਜ ਯਿਮਤ ਤੌਰ ਤੇ ਅਪਡੇਟ ਹੋਣ ਤਾਂ ਜੋ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਤਰੱਕੀ (progress) ਦਾ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਲੱਗ ਸਕੇ। ਉਚਿਤ ਅਤੇ ਚੰਗੇ ਦਸਤਾਵੇਜ ਦੇ ਨਾਲ ਇਹ ਸਮਝਣਾ ਕਾਫੀ ਸੌਖਾਹੋ ਜਾਂਦਾਹੈ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਉਸ ਕੰਪਨੀ (company) ਵਿੱਚ ਕਿਸਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰੇਗਾ ਜਿੱਥੇ ਉਸ ਨੂੰ ਲਗਾਇਆਜਾਣਾ ਹੈ। ਇਹ ਡਾਟਾ ਦੀ ਟਾਈਪ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਮਦਦ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਇਨਪੁੱਟ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਵਰਤਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਊਟਪੁੱਟ ਕਿਵੇ ਲਈ ਜਾਣੀ ਹੈ।

ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਜੇਕਰ ਸਿਸਟਮ ਠੀਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਕਰ ਰਿਹਾ ਤਾਂ ਐਡਮਨਸਟ੍ਰੇਟਰ ਨੂੰ ਦਸਤਾਵੇਜਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਡਾਟਾ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਬਹੁਤ ਅਸਾਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਸਿਸਟਮ ਦੀਆਂ ਖਾਮੀਆਂ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਕੇ ਠੀਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੰਮ ਲੈਣਾ ਅਸਾਨ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ ਦੀ ਵਰਤੋ (Uses Of Documentaion) :–

1. ਇਹ ਤਕਨੀਕੀ ਅਤੇ ਗੈਰ ਤਕਨੀਕੀ ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਸਬੰਧ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਵੀ (effective communication) ਦੀ ਸਹੂਲਤ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।
2. ਇਹ ਨਵੇ ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਟ੍ਰੇਨਿੰਗ ਦੇਣ ਲਈ ਬਹੁਤ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹੈ। ਚੰਗੇ ਦਸਤਾਵੇਜਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਨਵੇ ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨਾਲ ਸੌਖੇ ਵਾਕਿਫ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

3. ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ ਉਪਭੋਗਤਾ ਨੂੰ ਟਰਬਲ ਸ਼ੂਟਿੰਗ (trouble shooting) ਵਰਗੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮੱਦਦ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਗੈਰ ਤਕਨੀਕੀ ਉਪਭੋਗਤਾ ਵੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆਂ ਨੂੰ ਠੀਕ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

4. ਇਹ ਵਿਕਾਸ ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦਾ ਹੈ।

5. ਇਹ ਸੰਸਥਾ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੰਮਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੰਟਰੋਲ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਬਲਕਿ ਆਡਿਟ (audit) ਦੌਰਾਨ ਬਾਹਰੀ ਕੰਮਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਕੰਟਰੋਲ ਕਰਦਾ ਹੈ।

6. ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ ਮੈਨੇਜਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਸਥਾ ਦੇ ਵਿੱਤੀ ਫੈਸਲਾ ਲੈਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਮੱਦਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ ਗੱਲਾਂ

1. ਸਿਸਟਮ ਅਨੈਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜਾਇਨ ਕਿਸੇ ਸੰਸਥਾ (organisation) ਤੋਂ ਵਧੀਆਂ ਕੰਮ ਲੈਣ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

2. ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਵਿੱਚ ਲੌਜਿਕਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ, ਸਿਸਟਮ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਭੌਤਿਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

3. ਕਿਸੇ ਸੰਸਥਾ ਨੂੰ ਆਪਣਾ ਉਦੇਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਉਸ ਦੀ ਡਿਜਾਇੰਨਿਗ ਦਾ ਕੰਮ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਦਾ ਹੈ।

4. ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਇੱਕ ਚਿਤਰਕਾਰੀ ਹੈਜੋ ਡਾਟਾ ਦੇ ਫਲੋ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

5. ਦਸਤਾਵਜੀਕਰਣ ਨਾਲ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਤਰੱਕੀ ਦੇ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦਾ ਟ੍ਰੈਕ ਰੱਖਣਾ ਬਹੁਤ ਅਸਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ:–

1. ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ .... ਵੱਲੋਂ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
2. ਕੰਪਿਊਟਰ ਟੈਕਨਾਲੋਜੀ ਦੁਆਰਾ ਬਿਜਨਸ ਤੋਂ ਲਾਭ ਲੈਣ ਲਈ .... ਦੀ ਮੁੱਖ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ।
3. ਸਿਸਟਮ ਡਿਜਾਇਨ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸਿਸਟਮ ਦਾ .... ਹੈ।
4. ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ .... ਮੁੱਖ ਭਾਗਾ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ।
5. ....ਹੁਣ ਤੱਕ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮਾਂ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮੱਦਦ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਛੋਟੇ ਉੱਤਰ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜਾਇਨ (SAD) ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹ ?
2. ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਦੇ 4 ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਨਾਮ ਲਿਖੋ ।
3. ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਫੇਜ਼ ਹਨ? ਨਾਮ ਲਿਖੋ।
4. ਸਿਸਟਮ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?
5. ਦਸਤਾਵੇਜੀ ਕਰਣ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ?

ਵੱਡੇ ਉੱਤਰ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ :-

1. ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਅਤੇ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਵਿੱਚ ਅਪਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਕਦਮ ਅਤੇ ਤਕਨੀਕ ਬਾਰੇ ਦੱਸੋ?
2. ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਕੀ ਹੈ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ?
3. ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਟ ਦਾ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀ ਰੋਲ ਹੈ?
4. ਸਿਸਟਮ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਅਤੇ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਦੱਸੋ?
5. ਸਿਸਟਮ ਡਿਵੈਲਪਮੈਂਟ ਲਾਈਫ ਸਾਈਕਲ ਦਾ ਕੀ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ?

ਸਹੀ/ਗਲਤ ਦੱਸੋ।

1. ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਡਿਜਾਇਨ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦਾ ਕੰਮ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਿਸਸ ਦਾ ਨਹੀ।
2. ਡਾਟਾ ਫਲੋ ਡਾਇਆਗ੍ਰਾਮ ਡਾਟਾ ਦੇ ਫਲੋ ਦਾ ਚਿੱਤਕਾਰੀ ਰੂਪ ਹੈ।
3. ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਕਦਮ ਉਪਭੋਗਤਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਹੈ।
4. ਦਸਤਾਵੇਜੀਕਰਣ ਦੀ ਸਿਸਟਮ ਐਨਾਲਸਿਸ ਵਿੱਚ ਲੋੜ ਨਹੀ।
5. ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲੱਗੇ ਉਪਭੋਗਤਾ ਅਤੇ ਹੋਰ ਮੈਬਰ ਜੋ ਸਿਸਟਮ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਨੂੰ ਪੁੱਛਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਨਹੀਂ।

ਵਿੱਤੀ ਲੇਖਾਂਕਨ ਪੇਕੇਜ਼

Financial Accounting Package

7.1 ਲੇਖਾਂਕਨ- ਜਾਣ ਪਹਿਚਾਣ

ਪੁਰਾਣੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਵਪਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰ ਬਹੁੱਤ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਸੀ, ਜਿਸ ਕਾਰਨ ਲੇਖਾ - ਵਿਧੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਮਹਿਸੂਸ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਸੀ। ਹੁਣ ਸਮੇਂ ਦੀ ਤਬਦੀਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਵਪਾਰ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁੱਤ ਵਿਕਾਸ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਵਪਾਰੀ ਅਪਣੀ ਵਿਕਰੀ ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ ਲਈ ਅਪਣੇ ਪਿੰਡ, ਸ਼ਹਿਰ, ਜਿਲ੍ਹੇ, ਰਾਜ ਤੋਂ ਵੀ ਬਾਹਰ ਦੇਸ਼ ਵਿਦੇਸ ਵਿੱਚ ਅਪਣੇ ਵਪਾਰ ਨੂੰ ਫੈਲਾਉਣ ਲਈ ਉਪਰਾਲੇ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਅਪਣਾ ਮਾਲ ਸਿਰਫ਼ ਨਕਦ ਨਾ ਵੇਚ ਕੇ ਉਧਾਰ ਵੀ ਵੇਚਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪਾਰਟੀਆਂ ਤੋਂ ਮਾਲ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਾਲ ਵੇਚਦਾ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਹੁੱਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋ ਗਈ ਹੈ।ਇੱਥੇ ਹੀ ਬਸ ਨਹੀਂ ਇਨ੍ਹੇ ਵੱਡਾ ਵਪਾਰ ਨੂੰ ਚਲਾਉਣਾ ਕਈ ਵਾਰ ਇੱਕਲੇ ਮਾਲਕ ਦੇ ਬਸ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਦੀ ਗੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਵਪਾਰ ਵਿੱਚ ਬਹੁੱਤ ਪੈਸੇ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕਲਾ ਮਾਲਕ ਉਸ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ ਜਿਸ ਕਾਰਨ ਉਸ ਨੂੰ ਸਾਂਝੇਦਾਰੀ ਜਾਂ ਕੰਪਨੀ ਬਣਾਉਣੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਕਰਕੇ ਵਪਾਰ ਦਾ ਸਾਰਾ ਹਿਸਾਬ ਕਿਤਾਬ ਜ਼ਬਾਨੀ ਯਾਦ ਰੱਖਣਾ ਮੁਸਕਲ ਹੀ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਅਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਪਾਰ ਦਾ ਸਾਰਾ ਲੇਖਾ ਰੱਖਣ ਲਈ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਮਹਿਸੂਸ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਲੱਗ ਪਈ।

7.1.1 ਬਹੀ ਖਾਤਾ (Book-keeping)

ਵਪਾਰ ਦੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਇਸ ਵਿਕਾਸ ਕਾਰਨ ਲੈਣ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰੀਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਮਿਤੀ ਵਾਰ ਅਤੇ ਸੁੱਚਜੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖਣ ਲਈ ਬਹੀ ਖਾਤੇ (Book-keeping) ਦੀ ਲੋੜ ਮਹਿਸੂਸ ਹੋਈ।

ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾਵਾਂ (Definitions):

ਜੇ ਆਰ ਬਾਟਲੀਬਾਈ ਅਨੁਸਾਰ, "*ਬਹੀ-ਖਾਤਾ ਵਪਾਰਕ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਨੂੰ ਨਿਸਚਿਤ ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦੀ ਕਲਾ ਹੈ।*" ("*Book-keeping is the art of recording business dealings in a set of books"*- **J. R. Batliboi)**

ਏ ਜੇ ਫਵੈਲ ਅਨੁਸਾਰ, "*ਬਹੀ-ਖਾਤਾ ਵਪਾਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਵਿੱਤੀ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਨੂੰ ਵਿਧੀ-ਪੂਰਵਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖਣ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸੰਬੰਧੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਿਸਮ ਦੀ ਸੂਚਨਾ*

ਤੁਰੰਤ ਮਿਲ ਸਕੇ।" ("*Book-keeping is the recording of financial transactions of a business in a methodical manner so that information on any point in relation to them may be quickly obtained"*- **A. J. Favell)**

ਨਾਰਥਕਾਟ ਅਨੁਸਾਰ, "*ਬਹੀ-ਖਾਤਾ ਲੇਖੇ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਵਪਾਰਕ ਜਾਂ ਵਿੱਤੀ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਦੇ ਮੁਦਰਿਕ ਪੱਖ ਦਾ ਲੇਖਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਲਾ ਹੈ।*" ("*Book-keeping is the art of recording in a book of accounts the monetary aspect of commercial or financial transactions"*- **Northcot)**

7.1.2 ਲੇਖਾ-ਵਿਧੀ (Accountancy)

ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਦਾ ਕੰਮ ਬਹੀ ਖਾਤੇ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੁਰੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਜਿੱਥੋਂ ਬਹੀ ਖਾਤੇ ਦੇ ਕੰਮ ਦੀ ਸਮਾਪਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉੱਥੋਂ ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸੁਰੂਆਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਬਹੀ ਖਾਤੇ ਦੇ ਲੇਖਿਆਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਤੇ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿੱਤੀ ਆਂਕੜਿਆ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਇਸ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾਵਾਂ (Definitions):

ਅਮਰੀਕਾ ਦੀ ਸਰਟੀਫਾਈਡ ਅਕਾਉਂਟ ਸੰਸਥਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, "*ਲੇਖਾ-ਵਿਧੀ ਇੱਕ ਕਲਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਰਾਹੀਂ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਵਿੱਤੀ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਮੁਦਰਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਣਾਮਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।।*" ("*Accounting is the art of recording, classifying and summarizing in a significant manner and in terms of money, transactions and events, which are, in part, at least, of a financial character, and interpreting the result there of."*- **American Institute of Certified Public Accountants)**

ਸਮਿੱਥ ਅਤੇ ਆਸ਼ਬਰਨ ਅਨੁਸਾਰ, "*ਲੇਖਾ-ਵਿਧੀ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਵਿੱਤੀ ਸੁਭਾਅ ਵਾਲੇ ਵਪਾਰਕ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕਰਨ ਅਤੇ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕਰਨ ਦਾ ਵਿਗਿਆਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਲੈਣਦੇਣਾਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਮੱਹਤਵ ਪੂਰਨ ਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕਰਨ, ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਤੇ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਜਿਨ੍ਹਾ ਨੇ ਫੈਸਲੇ ਕਰਨੇ ਜਾਂ ਨਿਰਣੇ ਬਣਾਉਣੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਨੂੰ ਸੂਚਨਾ ਦੇਣ ਦੀ ਕਲਾ ਹੈ।*" ("*Accounting is*

the art of recording and classifying business transactions and events, primarily of a financial character and the art of making significant summaries, analysis and interpretations of those transactions and events and communicating the results to persons who must make decisions or form judgements."- **Smith and Ashburne.**

ਆਰ ਐਨ ਐਨਥੋਨੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, "ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਹਰੇਕ ਵਪਾਰਕ ਅਦਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ *ਲੇਖਾ-ਵਿਧੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਹ ਵਪਾਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਮੁਦਰਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕਠਾ ਕਰਨਾ, ਸੰਖੇਪ ਕਰਨਾ, ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇਣ ਦਾ ਇੱਕ ਸਾਧਨ ਹੈ।*" ("*Nearly every business enterprise has a accounting system. It is a means of collecting, summarizing, analyzing and reporting in monetary terms, information about business."*- **R.N.Anthony**

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਵਪਾਰਿਕ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਨੂੰ ਵਿਧੀ ਪੂਰਵਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖਣ ਦਾ ਵਿਗਿਆਨਕ ਢੰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਲੈਣ-ਦੇਣਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਕਰਨ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕਲਾ ਹੈ।

7.2 ਲੇਖਾ-ਵਿਧੀ ਦੇ ਕੰਮ (Functions of Accounting)

ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਦੇ ਨਿਮਨ ਕੰਮ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ:

1. **ਲੈਣ-ਦੇਣਾਂ ਦਾ ਲੇਖਾ (Recording of transactions) :** ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਦਾ ਮੁੱਖ ਕੰਮ ਵਿੱਤੀ ਸੁਭਾਅ ਵਾਲੇ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੇਖਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਹੈ।ਉਹ ਲੈਣ ਦੇਣ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁਦਰਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੁਲਾਂਕਣ ਨਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਦਰਜ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ।
2. **ਆਂਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ (Classification of data):** ਰੋਜ਼ਨਾਮਚਾ ਜਾਂ ਸਹਾਇਕ ਬਹੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਕੀਤੇ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਮੱਦਾ ਅਧੀਨ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਾਤਾ ਬਹੀ (Ledger) ਵਿੱਚ ਖਤਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ।
3. **ਸੰਖੇਪ ਕਰਨਾ (Summarising):** ਖਾਤਾ ਬਹੀ ਦੇ ਬਕਾਇਆਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸੂਚੀ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਤਲਪਟ (Trial Balance) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
4. **ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਅਤੇ ਵਿਆਖਿਆ (Analysis and interpretation):** ਤਲਪਟ ਤੋਂ ਵਪਾਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਜਾਣਨ ਲਈ ਵਪਾਰਕ ਖਾਤਾ, ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ

ਚਿੱਠਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਵਪਾਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਭਵਿਖ ਵਿੱਚ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਮਦਦਗਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

7.3 ਲੇਖਾਂਕਨ ਦਾ ਉਦੇਸ਼ (Objectives of Accounting):

ਆਧੁਨਿਕ ਯੁਗ ਵਿੱਚ ਲੇਖਾਂਕਨ ਵਿਸ਼ਾ ਹਰ ਇੱਕ ਵਪਾਰ ਲਈ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ਾ ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਲੇਖਾਂਕਨ ਹਰ ਕਿਸਮ ਦੀ ਫਰਮ ਲਈ ਵਪਾਰਕ ਉਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਲਈ ਅਹਿਮ ਭੁਮਿਕਾ ਨਿਭਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਲੇਖਾਂਕਨ ਸਿਰਫ ਵਪਾਰ ਲਈ ਹੀ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਬਹੁੱਤ ਸਾਰੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਹਿੱਤਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਲਈ ਸਹਿਯੋਗੀ ਹੈ। ਲੇਖਾਂਕਨ ਮਾਲਕ, ਹਿੱਸੇਦਾਰ, ਬੈਂਕ, ਸਰਕਾਰ, ਕਰਮਚਾਰੀ, ਗ੍ਰਾਹਕ ਆਦਿ ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਹਿਤਾਂ ਲਈ ਸਿੱਧੇ ਜਾਂ ਅਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਪਣਾ ਯੋਗਦਾਨ ਪਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਲੇਖਾਂਕਨ ਦੇ ਮੱਹਤਵਪੂਰਨ ਉਦੇਸ਼ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ:

1. **ਲੈਣ-ਦੇਣਾਂ ਦਾ ਵਿਧੀ ਪੂਰਵਕ ਲੇਖਾ (Systematic recording of transactions) :** ਲੇਖਾਂਕਨ ਵਿੱਚ ਵਿੱਤੀ ਸੁਭਾਅ ਵਾਲੇ ਲੈਣ ਦੇਣਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੇਖਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਲੈਣ ਦੇਣ ਦਾ ਲੇਖਾ ਨਿਯਮਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹਰ ਇੱਕ ਲੈਣ ਦੇਣ ਨੂੰ ਦੋਹਰੀ ਲੇਖਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਰੋਜ਼ਨਾਮਚਾ ਇੰਦਰਾਜ ਜਾਂ ਸਹਾਇਕ ਬਹੀਆਂ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਖਾਤਿਆਂ ਵਿੱਚ ਖਤਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਿਸਮ ਦੀ ਭੁੱਲ ਦਾ ਸੁਧਾਰ ਤਲਪਟ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਜਾਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਤਰ੍ਹਾਂ ਵਪਾਰ ਦੀ ਵਿੱਤੀ ਹਾਲਤ ਦਾ ਪਤਾ ਲਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
2. **ਵਪਾਰਕ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਾਉਣਾ (To calculate the Profit or loss of business) :** ਹਰ ਇੱਕ ਵਪਾਰ ਵਿੱਚ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਖਾਤੇ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਉਤਪਾਦਨ ਖਾਤਾ, ਫਿਰ ਵਪਾਰਕ ਖਾਤਾ ਅਤੇ ਫਿਰ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਲਾਗਤ, ਸਕਲ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਅਤੇ ਸ਼ੁੱਧ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

   ਲੇਖਾਕਨ ਤੋਂ ਵਪਾਰ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਗੱਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ:

   (ੳ) ਇੱਕ ਨਿਸਚਤ ਸਮੇਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਜਾਂ ਮਾਲ ਖਰੀਦਿਆਂ।

(ਅ) ਉਸ ਨਿਸਚਤ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਤੇ ਕਿੰਨਾ ਖਰਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

(ੲ) ਉਸ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਮਾਲ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ?

(ਸ) ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਮਾਲ ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ। ਕਿੰਨੇ ਸਿੱਧੇ ਖਰਚ ਕੀਤੇ, ਕਿੰਨਾ ਮਾਲ ਬਚਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਵਪਾਰ ਸਕਲ ਲਾਭ ਕਿੰਨਾ ਹੋਇਆ।

(ਹ) ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਅਸਿੱਧੇ ਖਰਚ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਦਿਖਾ ਕੇ ਅਸਲ ਲਾਭ ਜਾਂ ਹਾਨੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(ਕ) ਲੇਖਾਂਕਨ ਤੋਂ ਸਹੀ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਪਾਰਕ ਖਰਚ ਅਤੇ ਆਮਦਨ ਦਾ ਪਤਾ ਲਾਉਣਾ ਆਸਾਨ ਹੈ।

3. **ਵਪਾਰਕ ਵਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ (Business financial position):** ਲੇਖਾਂਕਨ ਦੁਆਰਾ ਅੰਤਿਮ ਖਾਤਿਆਂ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਚਿੱਠਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਚਿੱਠਾ ਸੰਪਤੀਆਂ ਅਤੇ ਦੇਣਦਾਰੀਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਵਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਠੇ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵਪਾਰ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪਤੀਆਂ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਸਾਰੀਆਂ ਦੇਣਦਾਰੀਆਂ ਅਤੇ ਪੂੰਜੀ ਨੂੰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਵਰਣ ਵਪਾਰ ਦੀ ਵਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਹੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਲੇਖਾਂਕਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਵਿਵਰਣ ਤੋਂ ਨਿਮਨ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲ ਸਕਦੀ ਹੈ:

(ੳ) ਵਪਾਰ ਕੋਲ ਕਿੰਨਾ ਪੈਸਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿੰਨਾ ਪੈਸਾ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਪਿਆ ਹੈ।

(ਅ) ਵਪਾਰ ਨੇ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਵਿਅਕਤੀ ਤੋਂ ਕਿੰਨਾ ਪੈਸਾ ਲੈਣਾ ਹੈ ਉਸਦੇ ਦੇਣ ਦਾਰ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਹਨ।

(ੲ) ਵਪਾਰ ਨੇ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਕਿੰਨਾ ਪੈਸਾ ਦੇਣਾ ਹੈ ਉਸਦੇ ਲੈਣਦਾਰ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਹਨ।

(ਸ) ਵਪਾਰ ਅੰਤਿਮ ਸਟਾਕ ਕਿੰਨਾ ਪਿਆ ਹੈ।

(ਹ) ਵਪਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਪਤੀਆਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ।

(ਕ) ਵਪਾਰ ਨੇ ਕਿਹੜੇ ਕਿਹੜੇ ਅਦਾਰੇ ਤੋਂ ਕਿੰਨਾ ਕਰਜਾ ਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

(ਖ) ਵਪਾਰ ਦੇ ਮਾਲਕ ਨੇ ਸਾਲ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਕਿੰਨਾ ਆਹਰਣ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਮਾਲਕ ਦੀ ਪੂੰਜੀ ਹੁਣ ਕਿੰਨੀ ਰਹਿ ਗਈ ਜਾਂ ਹੋ ਗਈ ਹੈ।

(ਗ) ਵਪਾਰ ਦੀ ਸ਼ਾਖ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿੰਨਾ ਹੈ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਗੱਲਾ ਦਾ ਪਤਾ ਚਿੱਠੇ ਤੋਂ ਭਾਵ ਲੇਖਾਂਕਨ ਕਰਨ ਨਾਲ ਲਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

4. **ਹੋਰ ਸੂਚਨਾਵਾਂ (Other Informations)**: ਵਪਾਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਰੱਖਣ ਵਾਲੀਆਂ ਹੋਰ ਪਾਰਟੀਆਂ ਨੂੰ ਵੀ ਲੇਖਾਂਕਨ ਤੋਂ ਸੁਚਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵਪਾਰ ਦੇ ਮਾਲਕ, ਬੋਰਡ ਆਫ ਡਾਇਰੈਕਟਰਜ਼, ਲੈਣਦਾਰ, ਦੇਣਦਾਰ, ਕਰਮਚਾਰੀ, ਸਰਕਾਰੀ ਕਰਮਚਾਰੀ ਜਾਂ ਅਧਿਕਾਰੀ, ਬੈਂਕ ਨੂੰ ਕਰਜ਼ ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਭਿੰਨ ਭਿੰਨ ਕਿਸਮ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੂਚਨਾ ਲੇਖਾਂਕਨ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

5. **ਭਿੰਨ ਭਿੰਨ ਹੋਰ ਉਦੇਸ਼ (Other different Objectives)**: ਵਪਾਰ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਬਹੁੱਤ ਸਾਰੇ ਉਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਪੂਰਤੀ ਲੇਖਾਂਕਨ ਨਾਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕੰਮ ਨਿਮਨ ਹਨ:

(ੳ) ਵਪਾਰ ਦੇ ਮੁਕੰਮਲ ਲੇਖੇ ਰੱਖਣਾ।
(ਅ) ਕਾਨੂੰਨੀ ਜਰੂਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨਾ।
(ੲ) ਕਰ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਲਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮੁਹਈਆ ਕਰਨਾ।
(ਸ) ਵਪਰਾਕ ਲੇਖੇ ਵਿੱਚ ਰਹਿ ਗਈਆਂ ਅਸੁੱਧੀਆਂ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਨਾ।
(ਹ) ਵਪਾਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੇਰਾ ਫੇਰੀਆਂ ਨੂੰ ਰੋਕਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ।
(ਕ) ਵਪਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਕੰਮ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀ ਦਾ ਨੁਕਸਾਨਦਾਇਕ।
(ਖ) ਬੇਲੋੜੇ ਸਿੱਧੇ ਅਤੇ ਅਸਿੱਧੇ ਖਰਚਿਆਂ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ।
(ਗ) ਅਸਾਧਾਰਣ ਹਾਨੀ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਲਈ ਉਪਰਾਲੇ ਕਰਨਾ।
(ਘ) ਤਿਆਰ ਕੀਤੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨਾ।
(ਙ) ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਮੇਂ ਲਈ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲਈ ਸਹਾਈ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7.4 ਟੈਲ਼ੀ

ਸੰਸ਼ਾਰ ਭਰ ਵਿੱਚ ਟੈਲੀ ਦੀ ਲੋਕਪ੍ਰਿਯਤਾ ਇਸਦੀਆਂ ਵਿਸੇਸਤਾਵਾਂ ਕਾਰਨ ਦਿਨ ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਵੱਧਦੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।ਵਪਾਰ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਹਿਸਾਬ ਕਿਤਾਬ ਰੱਖਣ ਦੀ ਇਹ ਬੱਹੁਤ ਹੀ ਆਸਾਨ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਵਪਾਰ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਰਿਪੋਰਟਾਂ ਬਿਨ੍ਹਾ ਕਿਸੇ ਦੇਰੀ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

7.4.1 ਟੈਲ਼ੀ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸਤਾਵਾਂ :

ਟੈਲੀ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਲੇਖਾ ਜੋਖਾ ਰੱਖਣ ਦਾ ਇਹ ਬੱਹੁਤ ਹੀ ਉੱਤਮ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਹੈ। ਇਸਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸਤਾਵਾਂ ਨਿਮਨ ਹਨ:

1. ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ ਆਸਾਨ: ਇਸ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਬੜੀ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਫੀਡ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਲੱਗੇ ਕਿਸੇ ਕਿਸਮ ਦੀ ਕੋਈ ਦਿੱਕਤ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ।

2. ਤੁਰੰਤ ਰਿਜਲਟ: ਇਸ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਦੋਂ ਵੀ ਕੋਈ ਰਿਪੋਰਟ ਤਿਆਰ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਰੰਤ ਇੱਕ ਮਾਤਰ ਬਟਨ ਦੱਬ ਕੇ ਰਿਜਲਟ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

3. ਬਹੁਭਾਸ਼ੀ ਸਮਰਥਾ: ਇਸ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਨਾਲ ਅੱਲਗ ਅੱਲਗ ਭਾਸਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰਿਜਲਟ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

4. ਵਿਸਵਾਸਯੋਗ: ਟੈਲੀਸਾਫਟਵੇਅਰ ਬੱਹੁਤ ਵਿਸਵਾਸਯੋਗ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਤੁਰੰਤ ਸਹੀ ਰਿਜਲਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਡਾਟਾ ਸਹੀ ਢੰਗ ਨਾਲ ਫੀਡ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਤੇ ਪੂਰਨ ਵਿਸਵਾਸ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

5. ਡਾਟਾ ਸੁਰਖਿਆ: ਇਸ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਡਾਟਾ ਅਪਰੇਟਰ ਜੇ ਕਰ ਚਾਹੇ ਤਾਂ ਅਪਣਾ ਕੋਡ ਲਾ ਕੇ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵੱਲੋਂ ਦੇਖਣ ਜਾਂ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਰੋਕ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਡਾਟਾ ਸੁਰਖਿਅਤ ਰੱਖ ਸਕਦਾ ਹੈ।

6. ਭਿੰਨ ਭਿੰਨ ਕੰਪਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਡਾਟੇ ਦਾ ਤਬਾਦਲਾ: ਜੇਕਰ ਵਰਤੋਂ ਕਰਤਾ ਅਪਣੀ ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਡਾਟੇ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕੰਪਨੀ ਕੋਲ ਭੇਜਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਕੰਪਨੀ ਡਾਟਾ ਦੂਜੀ ਕੰਪਨੀਆਂ ਨੂੰ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸੁਵਿਧਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7. ਡਾਟੇ ਦਾ ਗਰਾਫਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ: ਇਸ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਜੇ ਕਰ ਡਾਟਾ ਅਪਰੇਟਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫਿਕ ਵਿਸ਼ੇਲਸਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਰਿਕਾਰਡਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

8. ਪ੍ਰਿੰਟ ਪ੍ਰਵਿਉ: ਕੋਈ ਵੀ ਡਾਟਾ ਜਾਂ ਰਿਪੋਰਟ ਦਾ ਪ੍ਰਿੰਟ ਲੈਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਪ੍ਰਿੰਟ ਪ੍ਰਵਿਊ ਦੀ ਸੁਵਿਧਾ ਵੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵਰਤੋਂਕਾਰ ਰਿਪੋਰਟ ਆਦਿ ਪ੍ਰਿੰਟ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਿੰਟ ਪ੍ਰਵਿਉ ਰਾਹੀ

ਚੈਕ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇ ਕਰ ਕਿਸੇ ਕਿਸਮ ਦੀ ਤਬਦੀਲੀ ਦੀ ਲੋੜ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰੇ ਤਾਂ ਉਹ ਤਬਦੀਲੀ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

9. ਇੰਟਰਨੈਟ ਰਾਹੀਂ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਭੇਜਿਆ ਅਤੇ ਵੈਬਸਾਈਟ ਤੇ ਅਪਲੋਡ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

7.4.2 ਟੈਲ਼ੀ ਦੇ ਲਾਭ:

ਪਹਿਲਾਂ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਨਹੀਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਤਾਂ ਬਿਜਨਸ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਵਿਅਕਤੀ ਅਤੇ ਪੈਸਾ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਲਈ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ । ਇਹ ਸਿਰਫ਼ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਡਾਟਾ ਨੂੰ ਮੈਨਟੇਨ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਨਹੀਂ ਸੀ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਾਈਲਾਂ ਨੂੰ ਇਕ ਵਿਭਾਗ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਵਿਭਾਗ ਵਿੱਚ ਸ਼ਿਫ਼ਟ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਾਫੀ ਸਮਾਂ ਅਤੇ ਪੈਸੇ ਦੀ ਬਰਬਾਦੀ ਹੁੰਦੀ ਸੀ । ਪਰ ਟੈਲੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਬਚਿਆ ਗਿਆ :

1. ਡਾਟਾ ਇੱਕ ਥਾਂ ਤੋਂ ਦੂਜੀ ਥਾਂ ਟਰਾਂਸਫਰ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਆਸਾਨ ਹੋ ਗਿਆ ।
2. ਮੈਨੂਅਲ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਵਿੱਚ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਤੇ ਬਹੁਤ ਸਮਾਂ ਲਗਦਾ ਸੀ ਟੈਲੀ ਨਾਲ ਇਹ ਕੰਮ ਬਹੁਤ ਜਲਦੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
3. ਇਨਸਾਨ ਕਿੰਨਾਂ ਵੀ ਸਮਝਦਾਰ ਹੋ ਕਿਤੇ ਨਾਂ ਕਿਤੇ ਗਲਤੀ ਹੋ ਹੀ ਜਾਂਦੀ ਸੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਟ੍ਰਾਂਜੈਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਥਾਂ ਤੇ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਸੀ । ਪਰ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤੋਂ ਬਚਿਆ ਗਿਆ ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਰਫ ਵਾਊਚਰ ਐਂਟਰੀ ਪਾਉਣ ਨਾਲ ਉਹੀ ਟ੍ਰਾਂਜੈਕਸ਼ਨ ਆਪਣੇ ਆਪ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਥਾਂ ਤੇ ਰਿਕਾਰਡ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
4. ਰਿਪੋਰਟਸ ਹਰ ਸਮੇਂ ਤਿਆਰ ਰਹਿੰਦੀਆਂ ਹਨ ਇਸ ਨਾਲ ਮੈਨੇਜਮੈਂਟ ਵੱਲੋਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਫੈਸਲੇ ਜਲਦੀ ਲਿੱਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ।

5. ਟੈਲੀ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ । ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਸਾਰਾ ਲੇਖਾ ਜੋਖਾ ਰੱਖ ਸਕਦਾ ਹੈ ।

6. ਵੱਖ ਵੱਖ ਭੂਗੋਲਿਕ ਥਾਵਾਂ ਤੇ ਬਣੀਆਂ ਬਿਜ਼ਨਸ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਡਾਟਾ ਵੈਬ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਟਰਾਂਸਫਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ।

7. ਕੋਈ ਵੀ ਟਰਾਂਜੈਕਸ਼ਨ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ ਵੀ ਤਬਦੀਲੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ।

8. ਵੱਖ ਵੱਖ ਯੂਜ਼ਰ ਨੂੰ ਵੱਖ ਵੱਖ ਅਧਿਕਾਰ ਦੇ ਕੇ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੰਮ ਕਰਵਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ।

9. ਡਾਟਾ ਦੀ ਸੰਭਾਲ ਲਈ ਜਿਆਦਾ ਥਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਹਜ਼ਾਰਾਂ ਸਾਲਾਂ ਦਾ ਰਿਕਾਰਡ ਇੱਕ ਸੀਡੀ. ਵਿੱਚ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਕੇ ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਥਾਂ ਤੇ ਰਹਿ ਕੇ ਹੀ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖਾਤੇ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ।

7.4.3 ਟੈਲੀ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ:

1. ਜੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਉਹ ਸਾਰੇ ਤਰਾਂ ਦੇ ਬਿਸਨਲ ਲਈ ਲਾਭਕਾਰੀ ਹੋਣ ਇਸ ਲਈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟੈਲੀ ਸਾਫ਼ਟਵੇਅਰ ਬਾਜ਼ਰ ਵਿੱਚ ਉਪਲਬਧ ਹੈ ਉਸੇ ਤਰਾਂ ਆਪਣੇ ਬਿਜਨਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

2. ਅਕਾਉਂਟ ਟੈਲੀ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਟੈਲੀ ਸਾਫ਼ਟਵੇਅਰ ਅਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਖਰੀਦਣਾ ਪਵੇਗਾ । ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਾਫ਼ੀ ਪੈਸਾ ਖਰਚ ਹੋਵੇਗਾ ।

3. ਤਕਨੀਕੀ ਖਰਾਬੀ ਆਉਣ ਦਾ ਡਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਕਾਰਨ ਸਾਰਾ ਡਾਟਾ ਖਰਾਬ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ।

4. ਜੇਕਰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਬੈਕਅੱਪ ਨਾ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਡਾਟਾ ਖਰਾਬ ਹੋਣ ਤੇ ਸਾਰਾ ਡਾਟਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ।

5. ਟੈਲੀ ਅਪਡੇਟ ਅਤੇ ਲਾਇਸੈਂਸ ਲਈ ਇੰਟਰਨੈੱਟ ਦੀ ਲੋੜ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

7.5 ਟੈਲੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ:

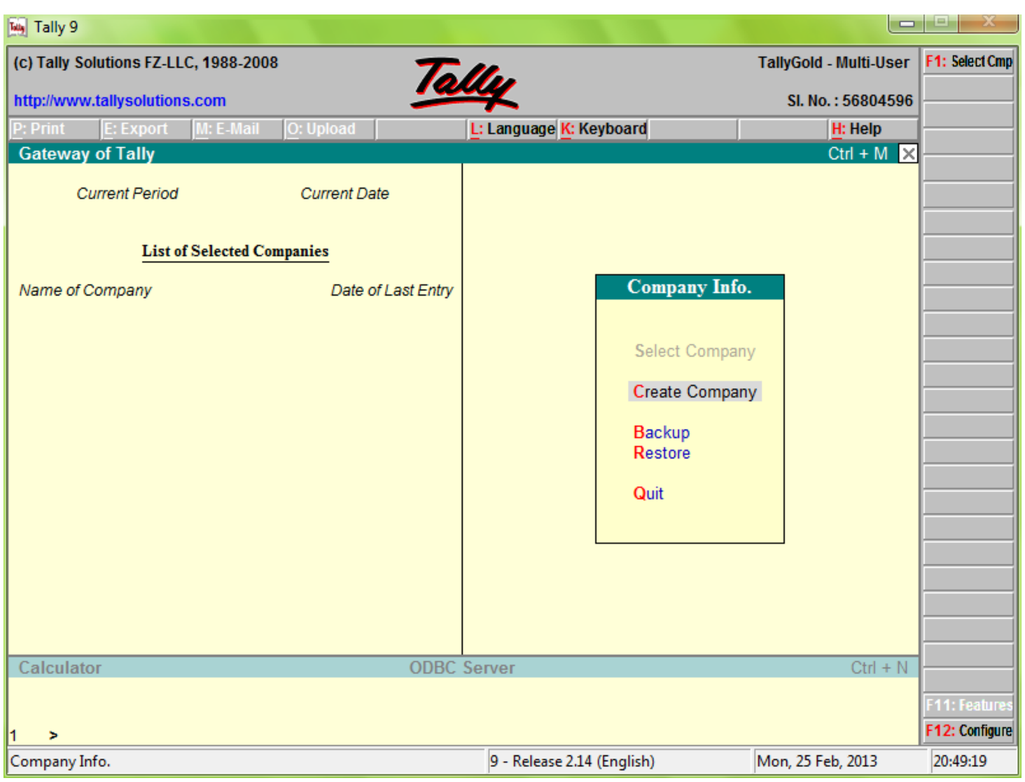
ਟੈਲੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਲਈ ਡੈਸਕਟਾਪ ਉੱਪਰ ਬਣੇ ਟੈਲੀ ਦੇ ਆਈਕਾਨ ਤੇ ਡਬਲ ਕਲਿਕ ਕਰੋ । ਜੇਕਰ ਟੈਲੀ ਆਈਕਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਮਾਈ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਵੀ ਚਲਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ।

ਮਾਈ ਕੰਪਿਊਟਰ → ਟੈਲੀ ਇੰਸਟਾਲੇਸ਼ਨ ਫੋਲਡਰ → ਟੈਲੀ

ਟੈਲੀ ਆਈਕਾਨ ਹੇਠ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ ।

ਸਕਰੀਨ-1

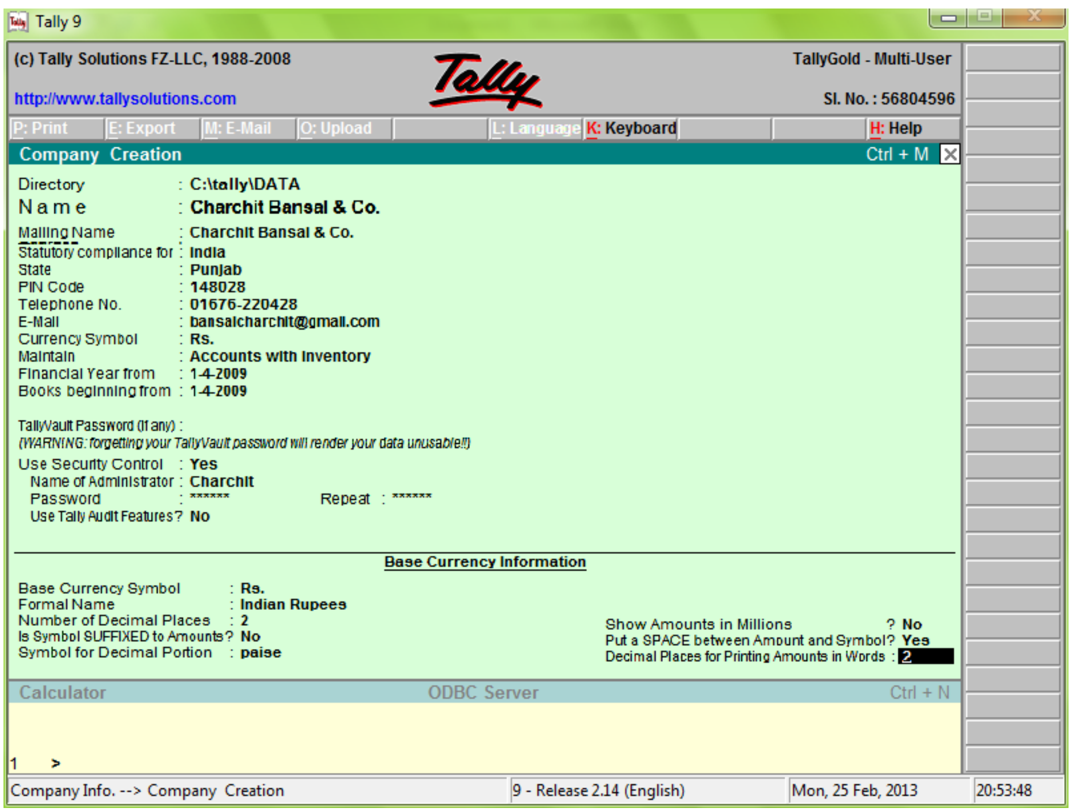
ਟੈਲੀ ਦੀ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਪਹਿਲੀ ਸਕਰੀਨ:



ਸਕਰੀਨ-2

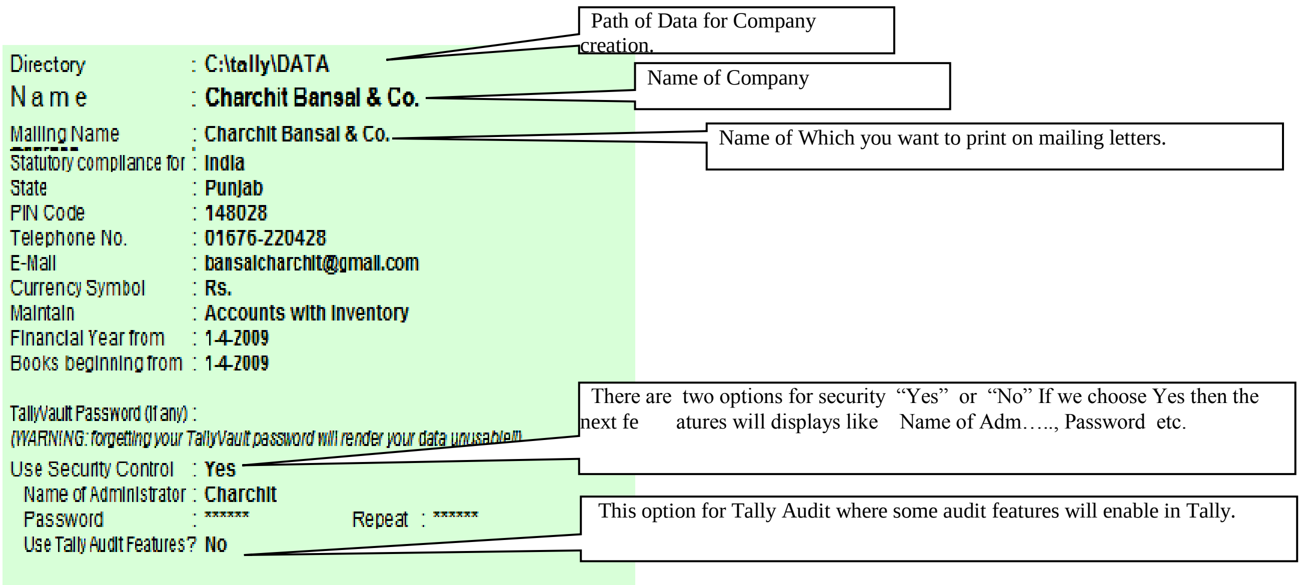
7.6 ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਨਵੀਂ ਕੰਪਨੀ ਬਣਾਉਣਾ

ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਟੈਲੀ ਨੂੰ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ "ਸਿਲੈਕਟ ਕੰਪਨੀ" ਦੀ ਆਪਸ਼ਨ ਡਿਮ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਹੀਂ ਵਰਤ ਸਕਦੇ ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਕੰਪਨੀ ਹੀ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਿਲੈਕਟ ਕਿਵੇਂ ਕਰਾਂਗੇ । ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜਿਸ ਕੰਪਨੀ / ਬਿਜਨਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਖਾਤੇ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਉਹ ਕੰਪਨੀ ਕਰੀਏਟ ਕਰੋ । ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਲਈ "Create Company" ਤੇ ਕਲਿੱਕ ਕਰੋ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਰੀਏਟ ਕੰਪਨੀ ਵਾਲੀ ਵਿੰਡੋ ਅੱਗੇ ਦਿਖਾਏ ਸਕਰੀਨ-3 ਅਨੁਸਾਰ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਆਪਣੀ ਕੰਪਨੀ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਭਰੋ ਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ "Accept" ਕਰੋ ।



ਸਕਰੀਨ-3

ਸਕਰੀਨ-3 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਫੀਲਡਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ :
(ਨਵੀਂ ਕੰਪਨੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਫੀਲਡ)



ਸਕਰੀਨ-4

Directory (ਡਾਇਰੈਕਟਰੀ): ਇਹ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦਾ ਉਹ ਫੋਲਡਰ ਹੈ (ਪੂਰੇ ਪਾਥ ਸਮੇਤ) ਜਿੱਥੇ ਬਣਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕੰਪਨੀ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਫਾਈਲਾਂ ਸਟੋਰ ਹੋਣਗੀਆਂ । ਇਹ ਫੀਲਡ ਨੂੰ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਛੱਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇ ਕਿਉਂਕਿ ਡਾਟਾ ਸਟੋਰ ਹੋਣ ਲਈ ਡਿਫਾਲਟ ਫੋਲਡਰ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ TALLY.INI ਫਾਈਲ ਵਿੱਚ ਸੈੱਟ ਕੀਤਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ।

Name (ਨੇਮ): ਇਸ ਫੀਲਡ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕੰਪਨੀ ਦਾ ਨਾਮ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਤਿਆਰ ਕਰਨੀਆਂ ਹਨ ।

Mailing Name and Address (ਮੇਲਿੰਗ ਨੇਮ ਐਂਡ ਐਡਰੈਸ): ਕੰਪਨੀ ਨਾਮ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਟੈਲੀ ਮੇਲਿੰਗ ਨਾਮ ਭਰਣ ਦੀ ਸਹੂਲਤ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੰਪਨੀ ਦਾ ਨਾਮ ਤਾਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਬਦਲਿਆ ਵੀ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ।
Statutory compliance for (ਸਟੈਚੁਰੀ ਕੰਪਲਾਈਂਸ ਫਾਰ): ਇਥੇ ਲਿਸਟ ਵਿੱਚੋਂ ਦੇਸ਼ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕਰਨਾ ਹੈ । ਸਟੈਟੂਚਰੀ ਪ੍ਰਾਵਧਾਨ ਅਤੇ ਕਰੰਸੀ ਚਿੰਨ੍ਹ ਆਦਿ ਉਸੇ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਾਗੂ ਹੋਣਗੇ । ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ INDIA ਸਿਲੈਕਟ ਕਰਨ ਨਾਲ ਕਰੰਸੀ ਚਿੰਨ੍ਹ ਭਾਰਤੀ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ।

State (ਸਟੇਟ): ਇਥੇ ਚੁਣੇ ਗਏ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੀ ਲਿਸਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਢੁਕਵਾਂ ਪ੍ਰਾਂਤ ਚੁਣੋ । ਇਸਦੇ ਨਾਲ ਉਸ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਲਾਗੂ ਟੈਕਸ ਆਦਿ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਮੈਨਟੇਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣਗੇ ।

PIN Code (ਪਿਨ ਕੋਡ) ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦਾ ਪਿਨ ਕੋਡ ਭਰਨਾ ਹੈ ।

Currency (ਕਰੰਸੀ) : ਕਰੰਸੀ ਚਿੰਨ ਉਹ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਟੈਲੀ ਵੱਲੋਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ । ਜਿਹੜਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਾਸ਼ੀ ਨਾਲ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦੇਸ਼ INDIA ਭਰਨ ਨਾਲ ਇਹ ਆਪਣੇ ਆਪ Rs. ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ ।

Maintain (ਮੈਨਟੇਨ): ਇਸ ਫੀਲਡ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ । ਇਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਆਪਸ਼ਨ ਨਜ਼ਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ "Accounts only" and "Accounts with Inventory"

ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਸਟਾਕ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਡਿਟੇਲ ਨਹੀਂ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਤਾਂ Accounts only ਸਿਲੈਕਟ ਕਰੋ । ਅਗਰ ਅੱਗੇ ਜਾਕੇ ਲੋੜ ਪਵੇ ਕਿ ਸਟਾਕ ਐਂਟਰੀ ਕਰਨੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਆਪਸ਼ਨ "Accounts-with-Inventory" ਵਰਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ।

Financial Year From (ਫਾਇਨੈਂਸ਼ਿਅਲ ਈਅਰ ਫਰੋਮ): ਕਈ ਦੇਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਖਾਤੇ 12 ਮਹੀਨੇ ਲਈ ਜਾਂ 15 ਮਹੀਨੇ ਲਈ ਵੀ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ । ਅਤੇ ਇਹ ਸਮਾਂ 01 ਜਨਵਰੀ ਤੋਂ 31 ਦਸੰਬਰ ਲਈ ਜਾਂ 01-ਅਪ੍ਰੈਲ ਤੋਂ 31-ਮਾਰਚ ਤੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਜੋ ਵੀ ਮਿਤੀ ਲਿਖੀ ਜਾਵੇਗੀ ਟੈਲੀ ਆਪਣੇ ਆਪ ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਫਾਈਨੈਂਸ਼ਿਅਲ ਸਾਲ ਮੰਨੇਗਾ । ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 01-04-2009 ਭਰੋਗੇ ਤਾਂ ਫਾਈਨੈਂਸ਼ਿਆਲ ਸਾਲ 01-04-2009 ਤੋਂ 31-03-2010 ਹੋਵੇਗਾ । ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 01-01-2009 ਭਰੋਗੇ ਤਾਂ ਫਾਈਨੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਾਲ 31-12-2009 ਤੱਕ ਹੋਵੇਗਾ ।

Books Beginning From (ਬੁਕਸ): ਟੈਲੀ ਵੱਲੋਂ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਸਾਲ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਹੀ ਲੇਖਾ ਕਿਤਾਬਾਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਆਪਣੇ ਆਪ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਲ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੀ ਤਰੀਕ ਦਿਖਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ । ਪਰ ਜੇਕਰ ਤੁਸ਼ੀਂ ਫਾਈਨੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਾਲ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੀ ਮਿਤੀ ਤੋਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਨਹੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਰਹੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹੋ ।

Use Tally Security (ਯੂਜ਼ ਟੈਲੀ ਸਿਕਉਰੀਟੀ): ਟੈਲੀ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੀ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸਹੂਲਤ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਕੰਪਨੀ ਤੇ ਪਾਸਵਰਡ ਲਗਾ ਕੇ ਉਸਨੂੰ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ ਦੂਸਰਾ ਕੋਈ ਸਾਡੀ ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਖਾਤੇ ਨਾ ਦੇਖ ਸਕੇ ।

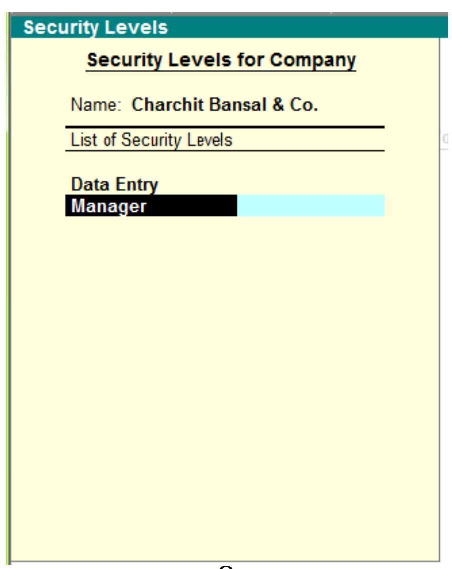
7.7 ਸਿਕਉਰਟੀ:

ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਬਾਏ ਡਿਫਾਲਟ ਦੋ ਸਿਕਉਰਟੀ ਲੇਵਲ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਇੱਕ "OWNER" ਅਤੇ ਦੂਜਾ "DATA ENTRY". OWNER ਨੂੰ ਟੈਲੀ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੁਵਿਧਾਵਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਅਧਿਕਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਸਿਵਾਏ ਟੈਲੀ ਆਡਿਟ ਅਤੇ ਕੰਪਨੀ ਅਲਟ੍ਰੇਸ਼ਨ ਦੇ । ਜੋ ਕਿ ਸਿਰਫ਼ ਐਡਮਿਨਿਸਟ੍ਰੇਟਰ ਵੱਲੋਂ ਹੀ ਵਰਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਡਾਟਾ ਐਂਟਰੀ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੋਰ ਸਿਕਉਰਟੀ ਲੇਵਲ ਬਣਾਉਣੇ ਪੈਂਦੇ ਹਨ । ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਢੰਗ ਅੱਗੇ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ।

ਨਵਾਂ ਸਿਕਉਰਟੀ ਲੇਵਲ ਬਣਾਉਣਾ (Create a New Security Level)

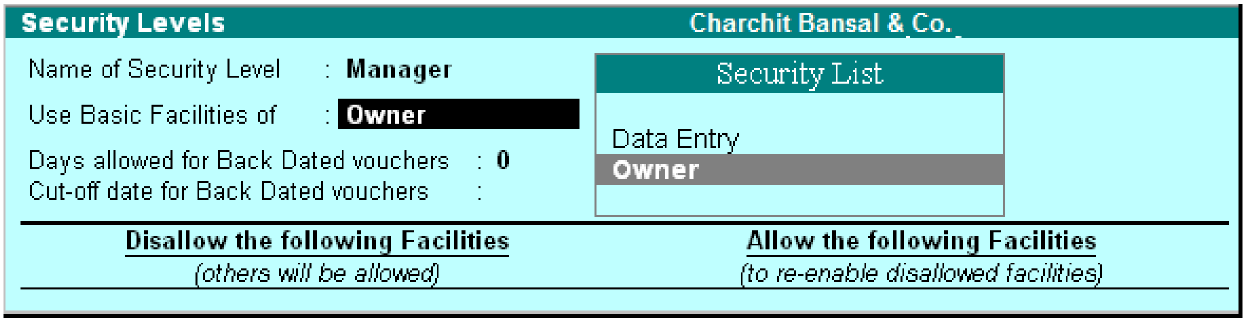
ਅਸੀਂ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ Security ਲੇਵਲ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਯੂਜ਼ਰ ਨੂੰ Data Entry ਜਾਂ OWNER ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਧਿਕਾਰ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ । ਇਹ ਯੂਜ਼ਰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਟੈੱਪ ਹਨ ।

Gateway of Tally → select Alt+F3: Cmp Info. → Security Control → Types of Security



ਸਕਰੀਨ-1

ਇਸ ਸਕਰੀਨ-1 ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਲੇਵਲ Data Entry ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗਾ ਨਵਾਂ ਲੇਵਲ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਰਸਰ ਨੂੰ ਇਸਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲੈਕੇ ਆਉ ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਲੇਵਲ ਲਈ ਨਾਂ ਟਾਈਪ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ Manager ਇਸਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇਸ ਲੇਵਲ ਲਈ ਹਦਾਇਤਾਂ ਸੈਟ ਕਰਨ ਲਈ ਐਂਟਰ ਦਬਾਓ ।



ਸਕਰੀਨ-2

ਫੀਲਡਾਂ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਜਾਣਕਾਰੀ

Name of security level: ਇਹ ਉਹ ਨਾਂ ਹੈ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਐਂਟਰ ਦਬਾਉਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਭਰਿਆ ਹੈ ਜਿਵੇਂ Manager.

Use Basic Facilities of: ਟੈਲ਼ੀ ਬਾਏ ਡਿਫਾਲਟ **OWNER** ਦਿਖਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ **Data Entry** ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹੋ । ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਸਿਕਉਰਟੀ ਲੇਵਲ ਹੋਣਗੇ ਤਾਂ ਉਹ ਵੀ ਸਿਕਉਰਟੀ ਲਿਸਟ ਵਿੱਚ ਨਜ਼ਰ ਆਉਣਗੇ । ਜੋ ਵੀ ਨਵਾਂ ਲੇਵਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ ਉਹ ਅਗਲੀ ਵਾਰੀ ਇੱਥੇ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗਾ ।

Days allowed for Backdated vouchers

ਇਹ ਉਹ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸ ਲਈ ਯੂਜ਼ਰ ਪਿੱਛਲੇ ਵਾਉਚਰਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੇਗਾ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿੱਚ 0 ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾ ਉਹ ਯੂਜ਼ਰ ਪਿਛਲਾ ਕੋਈ ਵਾਉਚਰ ਨਹੀਂ ਦੇਖ ਸਕੇਗਾ। ਅਤੇ ਜੇਕਰ 7 ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਯੂਜ਼ਰ ਸੱਤ ਦਿਨ ਪਿਛੇ ਵਾਉਚਰ ਭਰ ਸਕੇਗਾ ।

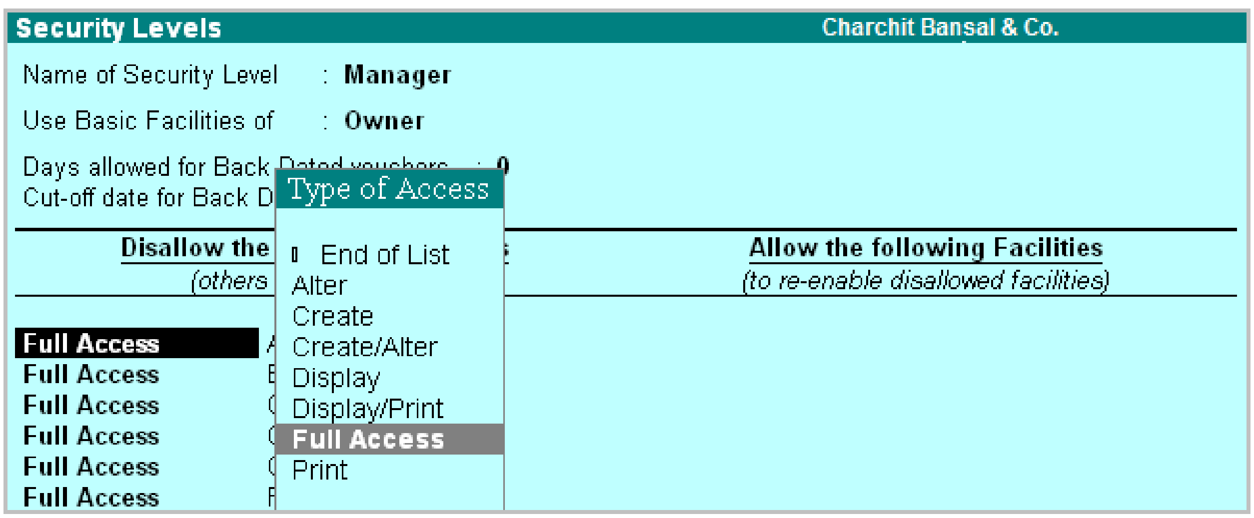
Cut-off date for Backdated vouchers.

ਇਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਮਿਤੀ ਭਰੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਵਾਉਚਰ ਸਬੰਧਤ ਯੂਜ਼ਰ ਨਾਂ ਤਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਨਾਂ ਹੀ ਬਦਲ ਸਕਦਾ ਹੈ । ਇਹ **Days allowed for Backdated vouchers** ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਨਿਯੰਤਰਣ ਹੈ । ਜਿਵੇਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ ਦੀ ਟੈਕਸ ਆਦਿ ਦੀ

ਰਿਟਰਨ ਭਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਨਹੀਂ ਚਾਹੋਗੇ ਕਿ ਉਸ ਮਿਤੀ ਤੱਕ ਦੇ ਡਾਟਾ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਵ ਆਵੇ ਉਸ ਸਮੇਂ ਇਹ ਆਪਸ਼ਨ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ।

Disallow the following facilities/Allow the following facilities

ਇਥੇ ਸਕਰੀਨ-2 ਅਤੇ ਸਕਰੀਨ-3 ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ । ਅਤੇ ਹਰ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕਾਲਮ ਹਨ। ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਉਹ ਆਪਸ਼ਨ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਵਰਤਣ ਤੋਂ ਯੂਜ਼ਰ ਨੂੰ ਰੋਕਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਉਹ ਆਪਸ਼ਨ ਆਉਣਗੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਯੂਜ਼ਰ ਨੂੰ ਅਧਿਕਾਰ ਦੇਣੇ ਹਨ । ਜਦੋਂ ਕਰਸਰ Access Right ਫੀਲਡ ਤੇ ਪਹੁੰਚੇਗਾ ਉਸ ਸਮੇਂ ਅਕਸੈਸ ਟਾਈਪ ਦੀ ਲਿਸਟ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗੀ। ਲਿਸਟ ਵਿੱਚੋਂ ਆਪਸ਼ਨ ਸਿਲੈਕਟ ਕਰੋ ਜਿਵੇਂ Full Access, Alter, Create, Display ਆਦਿ। ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਉਹ ਭਰੋ ਜਿਸ ਚੀਜ਼ ਲਈ ਅਧਿਕਾਰ ਰੋਕਣਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ Balance Sheet, Account Master ਆਦਿ।



ਸਕਰੀਨ - 3

ਕਿਸੇ ਆਪਸ਼ਨ ਨੂੰ ਅਸੈਸ ਕਰਨ ਤੋਂ ਰੋਕਣ ਲਈ, ਸਭ ਤੋਂ "Type of Access" ਲਿਸਟ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੈਸ ਟਾਈਪ ਚੁਣੋ। ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਰਿਪੋਰਟ ਸਿਲੈਕਟ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਅਸੈਸ ਰੋਕਣਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤਕ ਦੁਹਰਾਓ ਜਦੋਂ ਤਕ ਵੱਖ ਵੱਖ ਰਿਪੋਰਟ ਲਈ ਅਸੈਸ ਰੋਕਣਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਅਸੈਸ ਟਾਈਪ ਚੁਣਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਉਹ ਚੁਣੀ ਗਈ ਰਿਪੋਰਟ ਨੂੰ ਅਸੈਸ ਨਹੀਂ

ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ । ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਤੁਸੀਂ Full Access for Balance Sheet ਚੁਣਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਯੂਜ਼ਰ ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰਾਂ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕੇਗਾ।

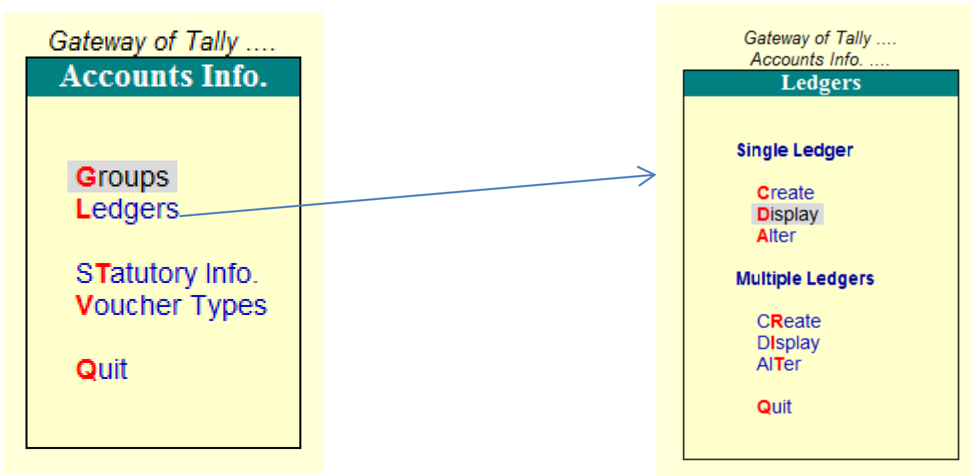
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, Allow the following Facilities ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਉਹ ਰਿਪੋਰਟ ਸਿਲੈਕਟ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਯੂਜ਼ਰ ਨੂੰ ਅਧਿਕਾਰ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ । ਜਿਵੇਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਵਿੱਚ Full Access for Balance Sheet ਸਿਲੈਕਟ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਯੂਜ਼ਰ ਨੂੰ ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਲਈ ਪੂਰੇ ਅਧਿਕਾਰ ਹੋਣਗੇ ।

7.8 ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਪਨੀ ਬਣਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਉੱਪਰ ਕਿਵੇਂ ਸਿਕਉਰਟੀ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪਾਠ ਅੰਦਰ ਅਸੀਂ ਕੰਪਨੀ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਵਪਾਰਿਕ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਨਾ ਹੈ ਉਹ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ।
ਕੋਈ ਵੀ ਵਪਾਰਿਕ ਗਤੀਵਿਧੀ ਜਿਸਨੂੰ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਆਂਕਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਉਸਦੀ ਖਾਤਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਯੂਜ਼ਰ ਲਾਗਇਨ ਪ੍ਰੋਸੀਜ਼ਰ ਰਾਹੀਂ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਲਾਗਇਨ ਕਰਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਗੇਟਵੇਅ ਆਫ਼ ਟੈਲੀ ਨਜ਼ਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਥੋਂ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਪਾਰਿਕ ਗਤੀਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਨ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ।
ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਟਰਾਂਜੈਕਸ਼ਨ ਦੀ ਜਰਨਲ ਐਂਟਰੀ ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਖਾਤਿਆ ਵਿੱਚ ਪੋਸਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਮਤਲਬ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ Journal ਐਂਟਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ ਫਿਰ LEDGER ਬਣਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ । ਪਰ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਖਾਤੇ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵਾਊਚਰ ਐਂਟਰੀ ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੇ ਕਿਉਂਕਿ ਪੋਸਟਿੰਗ ਦਾ ਕੰਮ ਟੈਲੀ ਆਪਣੇ ਆਪ ਕਰਦੀ ਹੈ । ਟੈਲੀ-9 ਵਿੱਚ ਖਾਤੇ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਗੇਟਵੇ-ਆਫ-ਟੈਲੀ ਵਿੱਚੋਂ ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਇੰਨਫੋ ਤੇ ਕਲਿਕ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ।

Gateway of Tally → Accounting Info:

ਕੰਪਨੀ ਲਾਗ-ਇਨ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ **ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਇਨਫੋ** ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਕਦਮ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਐਂਟਰੀ ਤਦ ਹੀ ਪੋਸਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਖਾਤਾ ਬਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ।

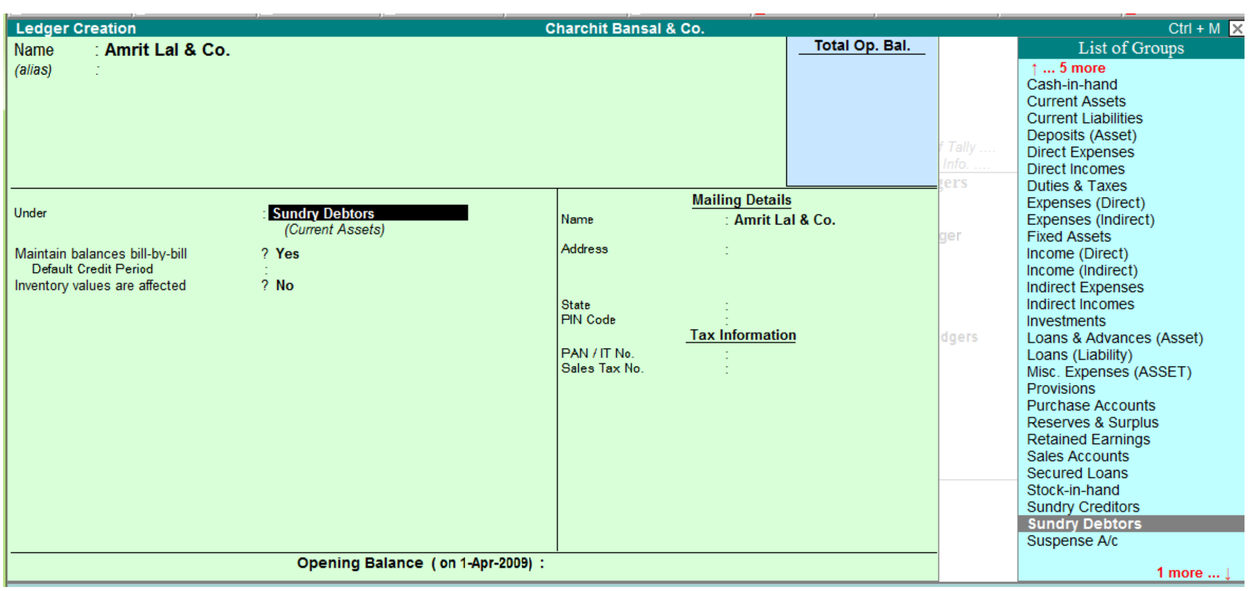


ਸਕਰੀਨ-1 ਸਕਰੀਨ-2

ਅਕਾਉਂਟਿੰਗ ਇੰਨਫੋ ਸਕਰੀਨ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਮਾਸਟਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ । ਇੰਨ੍ਹਾਂ ਮਾਸਟਰਾਂ ਵਿੱਚ CREATE, DISPLAY ਅਤੇ ALTER ਆਪਸ਼ਨਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਕਰੀਨ-2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ Single Ledger ਆਪਸ਼ਨ ਉਸ ਸਮੇਂ Useful ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਗਰੁੱਪ ਲਈ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਖਾਤੇ ਬਣਾਉਣੇ ਹੋਣ ਅਤੇ Multiple Legers ਉਸ ਸਮੇਂ Useful ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਗਰੁੱਪ ਲਈ ਕਈ LEDGER ਬਣਾਉਣੀਆਂ ਹੋਣ । ਇਸ ਨਾਲ ਸਮੇਂ ਦੀ ਬਹੁਤ ਬੱਚਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਕ ਸਿੰਗਲ ਲੈਜ਼ਰ ਬਣਾਉਣਾ :

Account info → Ledger → Create (This will show us the following screen)



ਸਕਰੀਨ-3

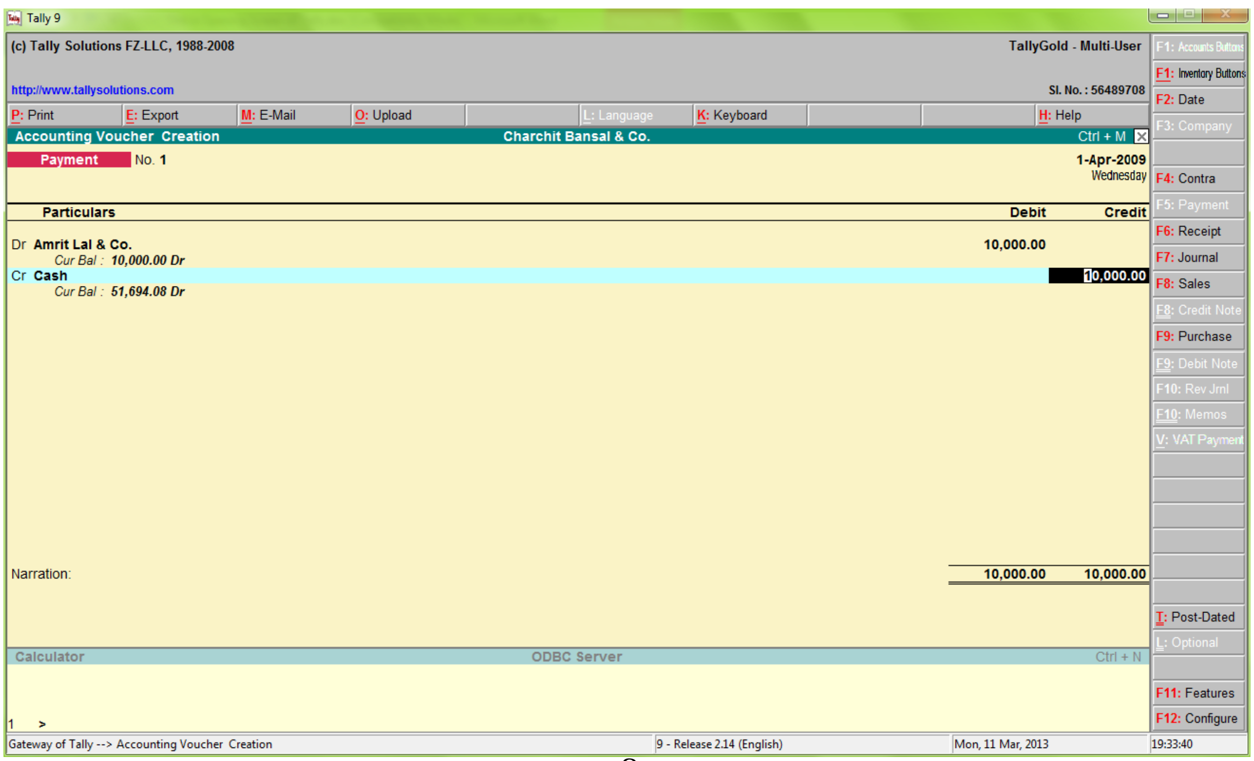
ਇਸ ਸਕਰੀਨ-3 ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਖਾਤੇ ਦੀ ਸਾਰੀ ਸੂਚਨਾ ਦਰਜ਼ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ । ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਖਾਤੇ ਦਾ ਨਾਂ ਖਾਤੇ ਦੀ ਕਿਸਮ, ਖਾਤੇ ਦਾ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਬਕਾਇਆ ਆਦਿ ।

7.9 ਵਾਊਚਰ ਐਂਟਰੀ (VOUCHER ENTRY)

ਵਪਾਰ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਵੀ Transaction ਵਾਊਚਰ ਐਂਟਰੀ ਅਧੀਨ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ । ਪਰ ਇਹ ਉਦੋਂ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ Transaction ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਖਾਤੇ ਬਣਾ ਲਏ ਹੋਣ ।

ਵਾਊਚਰ ਐਂਟਰੀ ਲਈ Gateway Of Tally → Accounting Vouchers ਤੇ ਕਲਿਕ ਕਰੋ । ਜਾਂ Gateway of Tally ਸਕਰੀਨ ਤੇ 'V' ਪ੍ਰੈਸ ਕਰੋ ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਕਰੀਨ-5 ਅਨੁਸਾਰ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗੀ ।



ਸਕਰੀਨ-5

ਹਰ Transaction ਉਸਦੀ ਕਿਸਮ ਅਨੁਸਾਰ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ । ਟੈਲੀ ਵੱਲੋਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ Transactions ਨੂੰ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਨ ਲਈ 16 ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਾਊਚਰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ Pre-defined Voucher ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਹਰ ਵਾਉਚਰ ਬਦਲਣ ਲਈ ਫੰਕਸ਼ਨ ਕੀਆਂ ਲਗਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਮਿਲ ਸਕਦੀ ਹੈ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਵਾਉਚਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ।

1. Payment F5
2. Receipt F6
3. Journal F7
4. Sale F8
5. Purchase F9
6. Contra F4
7. Stock Journal Alt + F7
8. Debit Note Ctlr + F9
9. Credit Note Ctrl + F8

Payment Voucher: ਇਹ ਵਾਉਚਰ ਸਾਰੀਆਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਭੁਗਤਾਨ ਨੂੰ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਜਦੋਂ ਵੀ ਕੋਈ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਚਾਹੇ ਉਹ ਨਕਦ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਚੈਕ ਰਾਹੀਂ ਉਸਦਾ ਰਿਕਾਰਡ ਇਸ ਵਾਊਚਰ ਅਧੀਨ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ Cash / Cheque paid to Amrit Lal & Co.

Dr Amrit Lal & Co.
Cr Cash / Bank A/c

Receipt Voucher: ਇਹ ਵਾਉਚਰ ਸਾਰੀਆਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤੀਆਂ ਨੂੰ ਰਿਕਾਰਡ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਜਦੋਂ ਵੀ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਨਕਦ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਚੈਕ ਰਾਹੀਂ ਉਸਦਾ ਰਿਕਾਰਡ ਇਸ ਵਾਊਚਰ ਅਧੀਨ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ।

Cash / Cheque Receive from Charchit Bansal

Cr. Charchit Bansal
Dr. Cash / Bank Account

Journal Voucher: ਇਹ ਵਾਊਚਰ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ Transactions ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਬੈਂਕ ਜਾਂ ਕੈਸ਼ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ । ਓਦਾਹਰਣ ਲਈ

Salary Credit in Partner's Capital Account

Dr. Partner's Salary A/c
Cr. Partner's Capital A/c

Sales Voucher: ਸੇਲਜ਼ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਸਾਰੀਆਂ Transactions ਇਸ ਵਾਊਚਰ ਵਿੱਚ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ।ਇਨਾਂ Transactions ਨੂੰ ਦੋ ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

1. As Voucher
2. As Invoice.

Purchase Voucher: ਖਰੀਦ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਸਾਰੀਆਂ Transactions ਇਸ ਵਾਊਚਰ ਵਿੱਚ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ । ਸੇਲਜ਼ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਾਂ Transactions ਨੂੰ ਦੋ ਢੰਗ ਨਾਲ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

1. As Voucher
2. As Invoice.

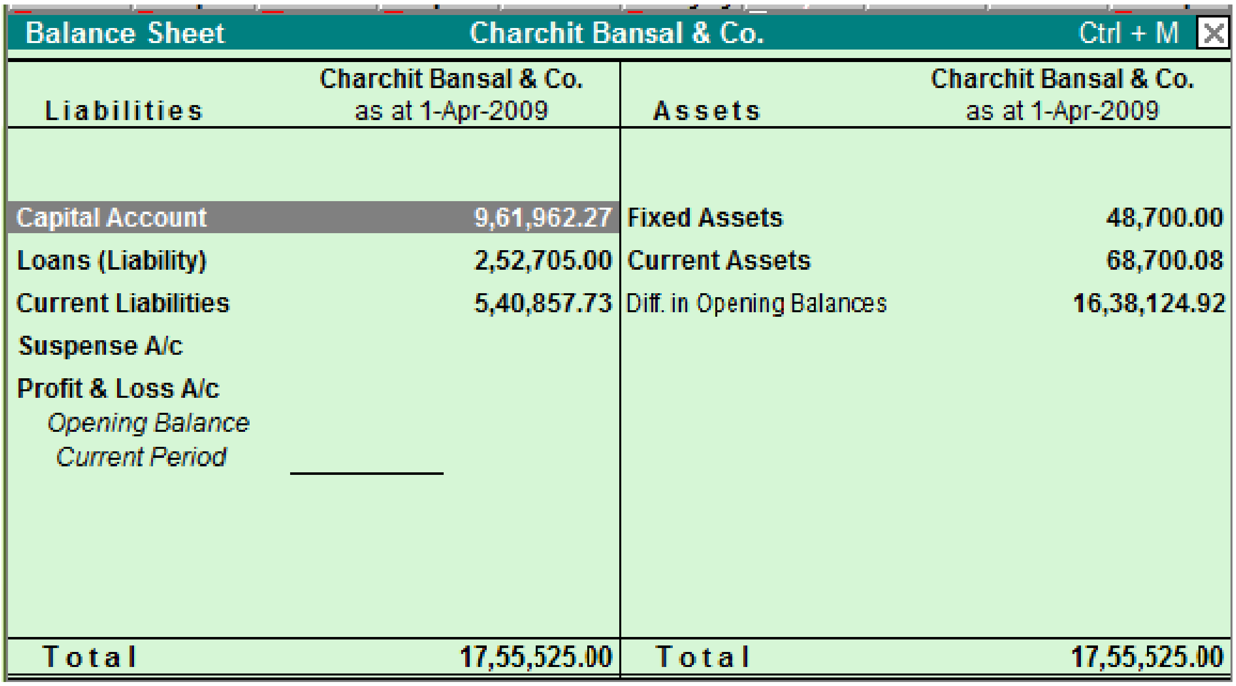
7.10 ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਫਾਈਨਲ ਰਿਪੋਰਟਸ:

7.10.1 BALANCE SHEET ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ

ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਲਾਈਨਾਂ : ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਦੁਆਰਾ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਬਿਜਨਸ ਵਿੱਚ ਕੀ ਬਕਾਇਆ ਹੈ ਕੀ ਦੇਣਾ ਹੈ ਕੀ ਲੈਣਾ ਹੈ ਪੂਰੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਇੱਕ ਹੀ ਨਜ਼ਰ ਵਿੱਚ ਦੇਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਮੈਨੂਅਲ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਫਾਈਨਲ ਸਟੇਟਮੈਂਟਸ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲਈ ਬਹੁਤ ਮਿਹਨਤ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ । ਪਰ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਫਾਈਨਲ ਸਟੇਟਮੈਂਟਸ ਹਰ ਟਰਾਂਜੈਕਸ਼ਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਤਿਆਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਕਾਰਣ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਪੈਸੇ ਦੀ ਬਹੁਤ ਬੱਚਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ।

ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਦੇਖਣ ਲਈ Gateway of Tally ਤੋਂ Balance Sheet ਤੇ ਐਂਟਰ ਕਰੋ।



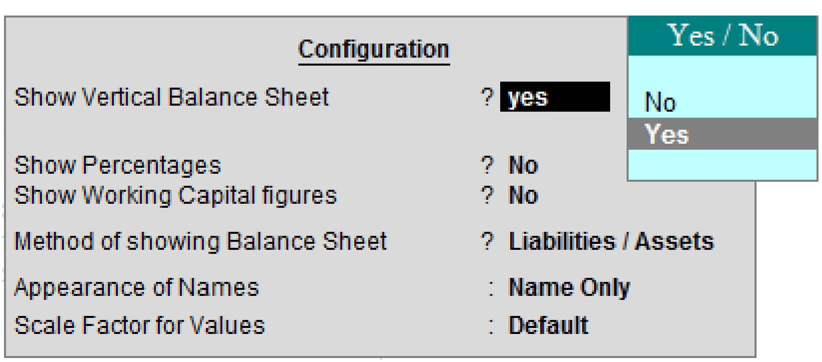
Balance Sheet | Charchit Bansal & Co. | Ctrl + M

Liabilities	Charchit Bansal & Co. as at 1-Apr-2009	Assets	Charchit Bansal & Co. as at 1-Apr-2009
Capital Account	9,61,962.27	Fixed Assets	48,700.00
Loans (Liability)	2,52,705.00	Current Assets	68,700.08
Current Liabilities	5,40,857.73	Diff. in Opening Balances	16,38,124.92
Suspense A/c			
Profit & Loss A/c			
Opening Balance			
Current Period			
Total	17,55,525.00	Total	17,55,525.00

ਸਕਰੀਨ-1

ਉਪਰੋਕਤ ਸਕਰੀਨ-1 ਅਨੁਸਾਰ ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗੀ ।

ਕੰਪਨੀ ਸਟਾਈਲ ਵਿੱਚ ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਦੇਖਣ ਲਈ F12 ਕੀਅ ਪ੍ਰੈਸ ਕਰੋ ਜਾਂ ਸਕਰੀਨ-1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ F12: Configuration ਤੇ ਕਲਿੱਕ ਕਰੋ। ਇਸ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਏ ਸਕਰੀਨ-2 ਅਨੁਸਾਰ Configuration ਬਾਕਸ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗਾ ।



Configuration

Show Vertical Balance Sheet	? yes
Show Percentages	? No
Show Working Capital figures	? No
Method of showing Balance Sheet	? Liabilities / Assets
Appearance of Names	: Name Only
Scale Factor for Values	: Default

Yes / No
No
Yes

ਸਕਰੀਨ-2

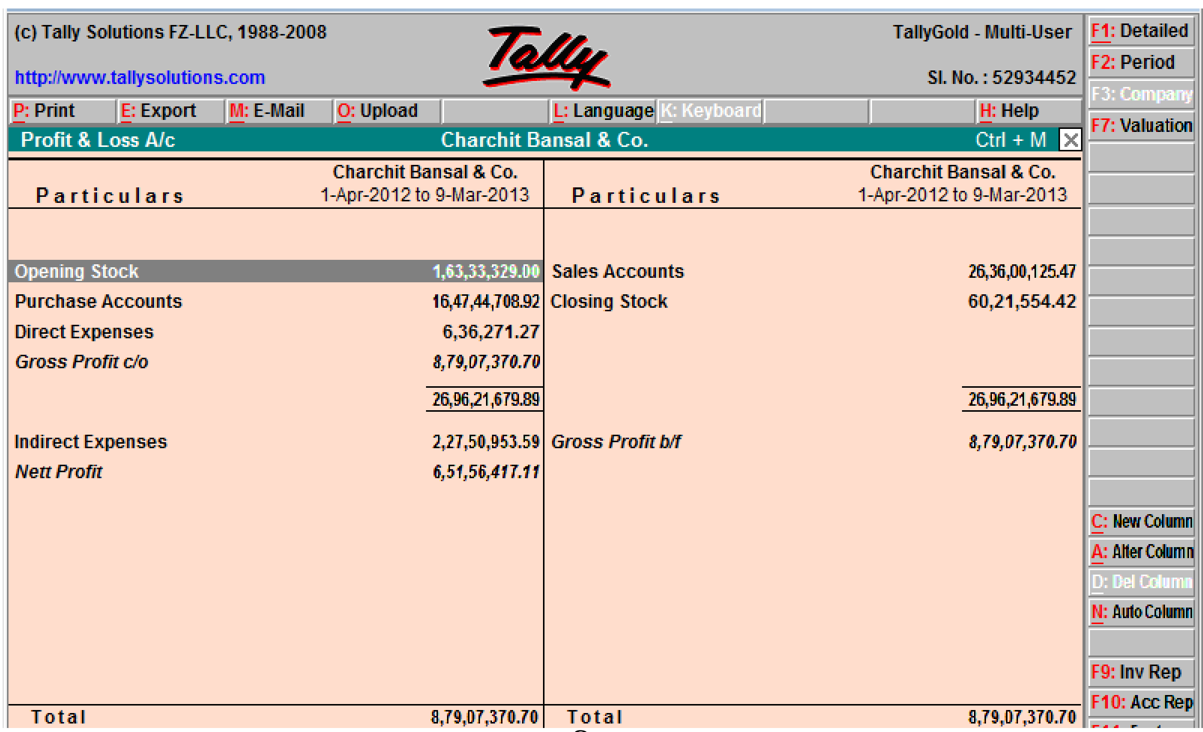
ਸਕਰੀਨ-2 ਵਿੱਚ Show Vertical Balance Sheet ਫੀਲਡ ਦੀ ਕੀਮਤ Yes ਸੈੱਟ ਕਰੋ । ਇਸਦੇ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਹੇਠਾਂ Show Working Capital figures ਫੀਲਡ ਵਿੱਚ ਵੀ Yes ਸੈੱਟ ਕਰੋ।

7.10.2 Profit & Loss A/c

ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਲਾਈਨਾਂ : ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਰਾਹੀਂ ਵਪਾਰ ਦੇ ਸਿੱਧੇ ਅਤੇ ਅਸਿੱਧੇ ਖਰਚਿਆਂ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਹੀ ਮੁਨਾਫਾ ਜਾਂ ਨੁਕਸਾਨ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ।

ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਵੀ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ Transaction ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਟ੍ਰੇਡਿੰਗ ਅਤੇ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਥਾਂ ਤੇ ਹੀ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੇ ਹਨ । ਪਰ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ

Gateway of Tally → Profit & Loss A/c ਤੇ ਕਲਿਕ ਕਰੋ ਜਾਂ Gateway of Tally ਵਿੱਚੋਂ 'P'



ਸਕਰੀਨ-3

ਦਬਾਓ । ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਸਕਰੀਨ-3 ਅਨੁਸਾਰ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਟ੍ਰੇਡਿੰਗ ਖਾਤੇ ਸਮੇਤ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ।

ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਖਰਚੇ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤੀਆਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਪਾਸੇ ਆਪਣੇ ਗਰੁੱਪ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣਗੀਆਂ । ਜਦੋਂ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਗਰੁੱਪ

ਹੀ ਨਜ਼ਰ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਗਰੁੱਪ ਦੀ ਡਿਟੇਲ ਦੇਖਣ ਲਈ ਉਸ ਗਰੁੱਪ ਤੇ ਕਲਿਕ ਕਰੋ ਤਾਂ ਉਸ ਗਰੁੱਪ ਦੇ ਸਾਰੇ ਖਾਤੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਕਾਏ ਨਜ਼ਰ ਆਉਣਗੇ ।

ਸਾਰੇ ਖਾਤਿਆਂ ਨੂੰ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਦੇਖਣ ਲਈ (ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਡਿਟੇਲ ਦੇਖਣ ਲਈ) ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਦਾ ਵਿਊ ਬਦਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਵਿਊ ਬਦਲਣ ਲਈ Alt + F1 ਦਬਾਓ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਸਦਾ ਵਿਊ ਬਦਲ ਜਾਵੇਗਾ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਗਰੁੱਪਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਸਕਰੀਨ-4 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਵੱਖ ਵੱਖ ਖਾਤੇ ਵੀ ਨਜ਼ਰ ਆਉਣਗੇ ।

P: Print | E: Export | M: E-Mail | O: Upload | L: Language | K: Keyboard | H: Help

Profit & Loss A/c — Charchit Bansal & Co. — Ctrl + M

Particulars	Charchit Bansal & Co. 1-Apr-2012 to 9-Mar-2013		Particulars	Charchit Bansal & Co. 1-Apr-2012 to 9-Mar-2013	
Opening Stock		1,63,33,329.00	**Sales Accounts**		26,36,00,125.47
Bardana (Bags) A/c			*Bardana Bag's*	6,12,400.00	
Bardana Katta A/c			*Bardana Katte A/c*	(-)7,74,843.00	
Bardana PP Bags			*Phuck A/c*	5,94,917.00	
Machinery Part			*Sale Out of State Paddy C Form)*	41,33,760.00	
Machinery Parts			*Sale Out Of State Rice (C Form)*	43,50,034.00	
Paddy 1121 DP (Basmati)	1,06,56,192.00		*Sale Out Of State Rice (F Form)*	5,76,33,060.72	
Paddy Husk			*Sale Out Of State Rice (H Form)*	8,01,66,050.00	
Paddy Out Of State			*Sale Paddy Husk*	80,367.00	
Paddy P.R A/c	16,83,850.00		*Sale Paddy P.R @5%*	19,47,062.00	
Phuck			*Sale Rice 1121 Basmati (H Form)*	8,96,55,868.00	
PR Rice A/c	15,25,600.00		*Sale Rice 1121 D.P Basmati (5%)*	37,58,000.00	
Rice 1121 DP Basmati	23,61,271.00		*Sale Rice 1121 Dp Basmati (C Form)*	8,64,598.00	
Rice Bran			*Sale Rice Bran A/c*	18,62,893.75	
Rice Out Of State	1,06,416.00		*Sale Rice P.R "H" Form*	1,07,89,590.00	
Rubber Roll			*Sale Rice P.R @ 5%*	41,75,459.00	
Purchase Accounts		16,47,44,708.92	*Sale Rice P.R.(C. Form)*	37,50,909.00	
		47 more ... ↓			18 more ... ↓
Total		8,79,07,370.70	**Total**		8,79,07,370.70

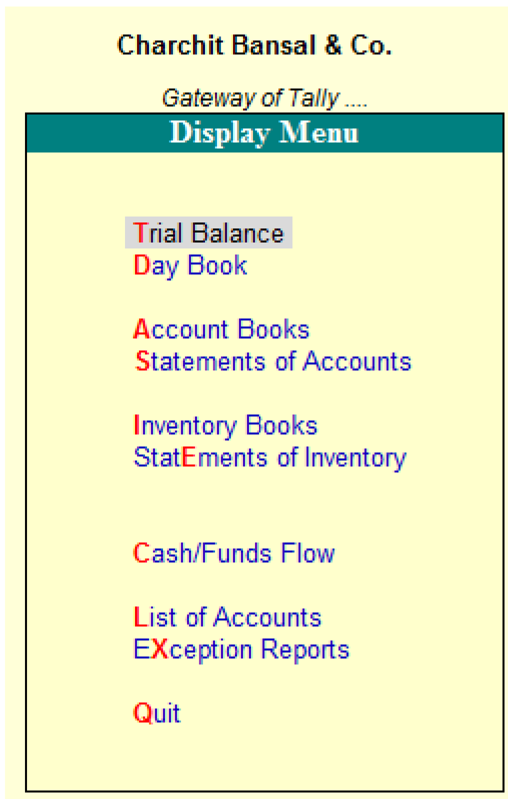
ਸਕਰੀਨ-4

ਹੇਠਾਂ ਤੱਕ ਪੂਰਾ ਦੇਖਣ ਲਈ ਐਰੋ ਕੀਜ਼ ਦੀ ਮਦਦ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ । ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਿੰਟ ਕਰਨ ਲਈ Ctrl+P ਦਬਾਓ ਜਾਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ Print ਬਟਨ ਤੇ ਕਲਿੱਕ ਕਰੋ ।

7.11 ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਰਿਪੋਰਟਸ

ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰਿਪੋਰਟਸ ਬਣਦੀਆਂ ਹਨ । ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਪਾਰ ਲਈ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫੈਸਲੇ ਲੈਣ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ । ਇਹਨਾਂ ਰਿਪੋਰਟਸ ਨੂੰ ਡਿਸਪਲੇਅ ਮੀਨੂੰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ / ਪ੍ਰਿੰਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ । ਡਿਸਪਲੇਅ ਮੀਨੂੰ ਗੇਟਵੇਅ ਆਫ਼ ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ।

7.11.1 ਡਿਸਪਲੇ ਮੀਨੂੰ (Display Menu)

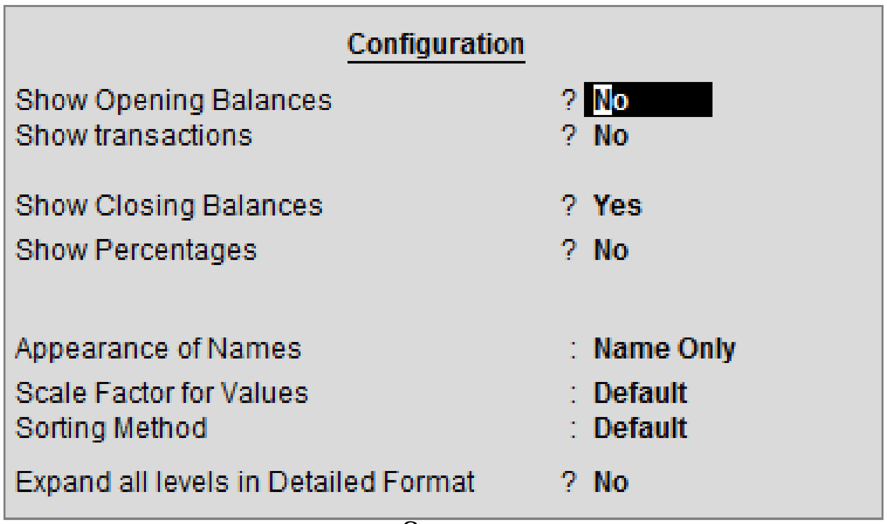


ਸਕਰੀਨ-5

ਵੱਖ ਵੱਖ ਸਮੇਂ ਦੌਰਾਨ ਵੱਖ ਵੱਖ ਰਿਪੋਰਟ ਦੇਖਣ ਲਈ ਡਿਸਪਲੇਅ ਮੀਨੂੰ ਜਿਵੇਂ ਸਕਰੀਨ-5 ਵਿੱਚ ਹੈ, ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੀਨੂੰ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ Trial Balance, Day Book, Account Books (Cash Book, Ledger, Sales Register, Purchase Register), Inventory Books (Stock Item, Stock Transfer, Movement Analysis) ਆਦਿ ਰਿਪੋਰਟਸ ਦੇਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ । ਇਸ ਮੀਨੂੰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਜਾਣ ਲਈ QUIT ਤੇ ਕਲਿੱਕ ਕਰੋ ।

Display Menu ਦੀਆਂ ਰਿਪੋਰਟਸ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ:

Trial Balance: (ਤਲਪਟ) ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤਲਪਟ Trial Balance ਦੇਖਣ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ Trial Balance ਨੂੰ ਵੱਖ ਵੱਖ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਅਤੇ ਪ੍ਰਿੰਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ । Trial Balance ਨੂੰ ਗਰੁੱਪ ਵਾਈਜ਼, ਗਰੁੱਪ ਵਾਈਜ਼ ਡਿਟੇਲਡ, Ledger Wise ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ । ਇਸਨੂੰ ਦੇਖਣ ਲਈ Gateway of Tally ਤੋਂ 'D' ਫਿਰ 'T' ਦਬਾਓ । Trial Balance ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਡਿਟੇਲ ਦੀ ਸੈਟਿੰਗ ਕਰਨ ਲਈ F12 ਫੰਕਸ਼ਨ ਕੀਅ ਦਬਾਓ।



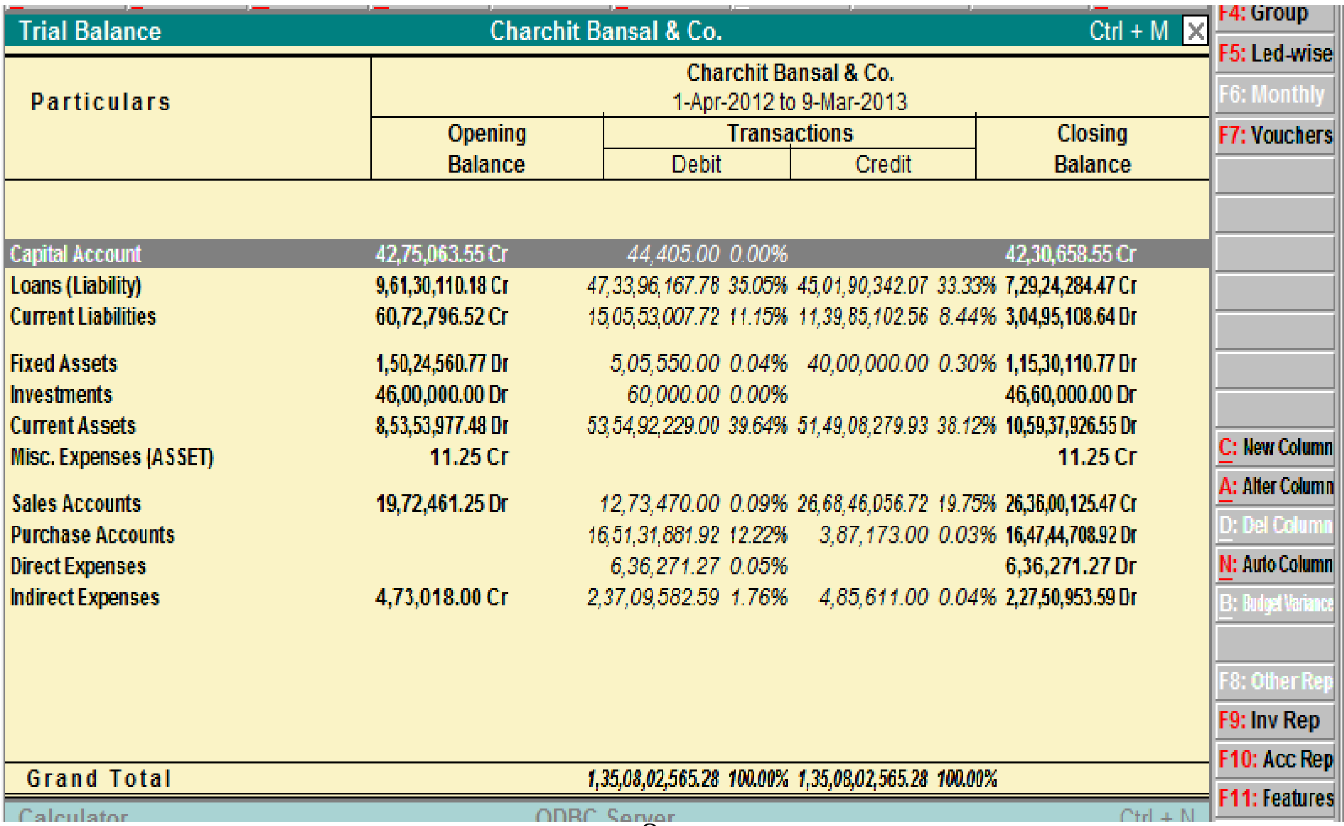
ਸਕਰੀਨ-6

ਜਦੋਂ F12 ਕੀਅ ਦਬਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸਕਰੀਨ-6 ਅਨੁਸਾਰ ਡਾਇਲਾਗ ਬਾਕਸ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨੂੰ ਸੈੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ।ਜਿਵੇਂ:

- ➔ ਹਰੇਕ ਖਾਤੇ ਦਾ ਓਪਨਿੰਗ ਬੈਲੈਂਸ ਦੇਖਣ ਲਈ ਉਸਦੇ ਸਾਹਮਣੇ Yes ਟਾਈਪ ਕਰੋ
- ➔ Trial Balance ਵਿੱਚ ਹਰ ਖਾਤੇ ਦੀਆਂ Transaction ਦੇਖਣ ਲਈ Show Transaction ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ Yes ਟਾਈਪ ਕਰੋ । ਜਦੋਂ ਇਸ ਫੀਲਡ ਦੀ ਕੀਮਤ Yes ਭਰੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਫੀਲਡ Nett transaction ਨਜ਼ਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਫੀਲਡ ਨੂੰ ਜੇਕਰ Yes ਸੈੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ Debit ਅਤੇ Credit ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ Transaction ਨਜ਼ਰ ਨਹੀਂ ਆਉਣਗੀਆਂ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਫੀਲਡ ਨੂੰ No ਸੈੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ Debit ਅਤੇ Credit ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ Transaction ਨਜ਼ਰ ਆਉਣਗੀਆਂ ।

➔ Show Percentage ਇਸ ਫੀਲਡ ਨੂੰ Yes ਸੈੱਟ ਕਰਨ ਨਾਲ Transaction's ਬਕਾਇਆਂ ਨਾਲ ਕੁੱਲ Transaction ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵੀ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗਾ ।

ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਲੋੜ ਅਨੁਸਾਰ Appearance of Name, Scale Factor of Values, Sorting Method ਆਦਿ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਸੈੱਟ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ । ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਮਤਾਂ ਸੈੱਟ ਕਰਨ ਨਾਲ ਜੋ ਡਿਟੇਲਜ਼ ਨਜ਼ਰ ਆਉਣਗੀਆਂ ਉਹ ਸਕਰੀਨ-7 ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣਗੀਆਂ ।


Trial Balance — Charchit Bansal & Co. — Ctrl + M

Charchit Bansal & Co. 1-Apr-2012 to 9-Mar-2013

Particulars	Opening Balance	Transactions Debit		Transactions Credit		Closing Balance
Capital Account	42,75,063.55 Cr	44,405.00	0.00%			42,30,658.55 Cr
Loans (Liability)	9,61,30,110.18 Cr	47,33,96,167.78	35.05%	45,01,90,342.07	33.33%	7,29,24,284.47 Cr
Current Liabilities	60,72,796.52 Cr	15,05,53,007.72	11.15%	11,39,85,102.56	8.44%	3,04,95,108.64 Dr
Fixed Assets	1,50,24,560.77 Dr	5,05,550.00	0.04%	40,00,000.00	0.30%	1,15,30,110.77 Dr
Investments	46,00,000.00 Dr	60,000.00	0.00%			46,60,000.00 Dr
Current Assets	8,53,53,977.48 Dr	53,54,92,229.00	39.64%	51,49,08,279.93	38.12%	10,59,37,926.55 Dr
Misc. Expenses (ASSET)	11.25 Cr					11.25 Cr
Sales Accounts	19,72,461.25 Dr	12,73,470.00	0.09%	26,68,46,056.72	19.75%	26,36,00,125.47 Cr
Purchase Accounts		16,51,31,881.92	12.22%	3,87,173.00	0.03%	16,47,44,708.92 Dr
Direct Expenses		6,36,271.27	0.05%			6,36,271.27 Dr
Indirect Expenses	4,73,018.00 Cr	2,37,09,582.59	1.76%	4,85,611.00	0.04%	2,27,50,953.59 Dr
Grand Total		1,35,08,02,565.28	100.00%	1,35,08,02,565.28	100.00%	

ਸਕਰੀਨ-7

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਗਰੁੱਪ ਨਜ਼ਰ ਆਉਂਦੇ ਸਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਡਿਟੇਲ ਵਿਉ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਗਿਆ ਸੀ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ Trial Balance ਦੇ ਵਿਉ ਨੂੰ ਵੀ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ।

Trial Balance ਨੂੰ Ledger Wise ਦੇਖਣ ਲਈ ਇਸਦੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ F5: Led-wise ਤੇ ਕਲਿੱਕ ਕਰੋ । ਜਾਂ F5 ਫੰਕਸ਼ਨ ਕੀਅ ਦਬਾਓ ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਾਟਾ ਸਕਰੀਨ-8 ਅਨੁਸਾਰ Ledger Accounts ਦੇ ਹਿਸਾਬ ਨਾਲ ਦਿਖਾਈ ਦੇਵੇਗਾ ।

P: Print | E: Export | M: E-Mail | O: Upload | L: Language | K: Keyboard | H: Help

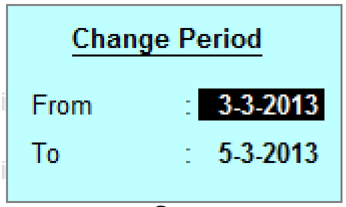
Trial Balance — Charchit Bansal & Co. — Ctrl + M

Particulars	Charchit Bansal & Co. 1-Apr-2012 to 9-Mar-2013			
	Opening Balance	Transactions		Closing Balance
		Debit	Credit	
Advance Tax & TDS A/c	82,692.00 Dr (-)0.51%	4,448.00 0.00%	41,782.00 0.00%	45,358.00 Dr (-)0.28%
Ajay Kumar Goyal (Panchkula)		6,00,000.00 0.04%		6,00,000.00 Dr (-)3.67%
Akash Trading Co. (Khanouri)		9,01,911.00 0.07%	8,12,752.00 0.06%	89,159.00 Dr (-)0.55%
Amar Nath Dharmider Kumar(Khanouri)	46,991.78 Dr (-)0.29%		46,991.78 0.00%	
Amar Nath Gupta	1,40,000.00 Cr 0.86%			1,40,000.00 Cr 0.86%
Anshul Kumar Mohit Kumar(Khanouri)		21,05,277.00 0.16%	21,79,850.51 0.16%	74,573.51 Cr 0.46%
Audit Fees	5,500.00 Cr 0.03%	5,500.00 0.00%		
Babu Ram Bhim Sain (Khanouri)		6,64,005.00 0.05%	6,64,005.93 0.05%	0.93 Cr 0.00%
Babu Ram Budh Ram (Khanouri)		5,00,000.00 0.04%	5,00,000.00 0.04%	
Bachana Ram Mange Ram (Khanouri)		3,00,000.00 0.02%	3,00,000.00 0.02%	
Bachan Lal Parveen Kumar (Khanouri)	4,50,000.00 Dr (-)2.76%	7,02,575.00 0.05%	10,61,447.00 0.08%	91,128.00 Dr (-)0.56%
Balbir Singh (Accountent)		5,200.00 0.00%	6,81,680.00 0.05%	6,76,480.00 Cr 4.14%
Balbir Singh (Hansdehar)	1,50,000.00 Dr (-)0.92%			1,50,000.00 Dr (-)0.92%
Balraj Ashok Kumar (Khanouri)		14,01,763.00 0.10%	13,99,962.00 0.10%	1,801.00 Dr (-)0.01%
Bank Exp. A/c		14,430.00 0.00%	36.00 0.00%	14,394.00 Dr (-)0.09%
				295 more ... ↓
Grand Total	**1,63,33,329.00 Cr 100.00%**	**1,35,08,02,565.28 100.00%**	**1,35,08,02,565.28 100.00%**	**1,63,33,329.00 Cr 100.00%**

ਸਕਰੀਨ-8

<u>DAY BOOK:</u> ਡੇ-ਬੁੱਕ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ Transactions ਦੇ ਵਾਊਚਰ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੇ ਹਨ । ਜਦੋਂ ਡੇ-ਬੁੱਕ ਖੋਲ੍ਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾ ਇਹ Current Date (ਜੋ ਮਿਤੀ ਗੇਟਵੇਅ ਆਫ਼ ਟੈਲੀ ਤੇ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀ ਹੈ) ਦੀਆਂ Transactions ਦਿਖਾਉਂਦਾ ਹੈ । ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਿਤੀ ਦੀਆਂ Transactions ਦੇਖਣ ਲਈ F2 ਫੰਕਸ਼ਨ ਕੀਅ ਦਬਾਓ ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਿਤੀ ਭਰਕੇ ਐਂਟਰ ਦਬਾਓ। ਟੈਲੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਸ ਮਿਤੀ ਦੀਆਂ Transactions ਦਿਖਾਵੇਗਾ।

- ਇੱਕ ਮਿਤੀ ਤੋਂ ਦੂਜੀ ਮਿਤੀ (ਕੋਈ ਪੀਰੀਅਡ) ਭਾਵ 03-03-2013 ਤੋਂ 05-03-2013 ਦੀਆਂ Transactions ਦੇਖਣ ਲਈ ALT + F2 ਦਬਾਓ ਜੋ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪੀਰੀਅਡ ਬਾਰੇ ਪੁੱਛੇਗਾ ।



ਸਕਰੀਨ-9

ਉਪਰੋਕਤ ਸਕਰੀਨ-9 ਵਿੱਚ ਅਨੁਸਾਰ ਮਿਤੀ ਦਰਜ਼ ਕਰੋ । ਜਿਸ ਨਾਲ ਭਰੇ ਗਏ ਪੀਰੀਅਡ ਦੀ ਡੇਅ ਬੁੱਕ ਨਜ਼ਰ ਆਵੇਗੀ।

ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ:

ਛੋਟੇ ਉੱਤਰਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸਨ:

1. ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦਿਉ।
2. ਬਹੀ ਖਾਤੇ ਤੋਂ ਤੁਹਾਡਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ? ਵਰਨਣ ਕਰੋ।
3. ਫਾਇਨੈਂਸ਼ਿਅਲ ਸਾਲ ਕਿਹੜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?
4. ਨਵਾਂ ਯੂਜ਼ਰ (ਸਿਕਉਰਟੀ ਲੇਵਲ) ਕਿਵੇਂ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ?
5. ਪੇਮੈਂਟ ਵਾਊਚਰ (Payment Voucher) ਬਾਰੇ ਲਿਖੋ?
6. ਰਿਸੀਪਟ ਵਾਊਚਰ (Receipt Voucher) ਬਾਰੇ ਲਿਖੋ?
7. ਜਰਨਲ ਵਾਊਚਰ (Journal Voucher) ਬਾਰੇ ਲਿਖੋ?
8. ਬੈਲੈਂਸ ਸ਼ੀਟ ਕੀ ਹੈ?

ਵੱਡੇ ਉੱਤਰਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ:

1. ਬਹੀ ਖਾਤੇ ਅਤੇ ਲੇਖਾ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਤੁਹਾਡਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
2. ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਯੂਜ਼ਰ ਲਈ ਸਿਕਉਰਟੀ ਸੈੱਟ ਕਰਨ ਦੇ ਕੀ ਸਟੈੱਪ ਹਨ? ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

3. ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਖਾਤਾ (Account) ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਕੀ ਸਟੈੱਪ ਹਨ ਅਤੇ ਖਾਤਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਫੀਲਡਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਭਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ?
4. ਵਾਊਚਰ ਐਂਟਰੀ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ? ਇਸਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਕੀ ਸਟੈੱਪ ਹਨ?
5. ਟੈਲੀ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਹਾਨੀ ਖਾਤਾ ਕਿਵੇਂ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਕਿਹੜੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰੋ ।
6. ਡਿਸਪਲੇਅ ਮੀਨੂੰ ਰਾਹੀਂ ਤਲਪਟ ਦੇਖਣ ਦਾ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਵਿਊ ਬਾਰੇ ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੋ ।