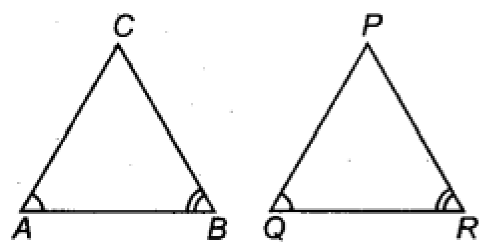
त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं असमिकाएँ

Exercise 7.1

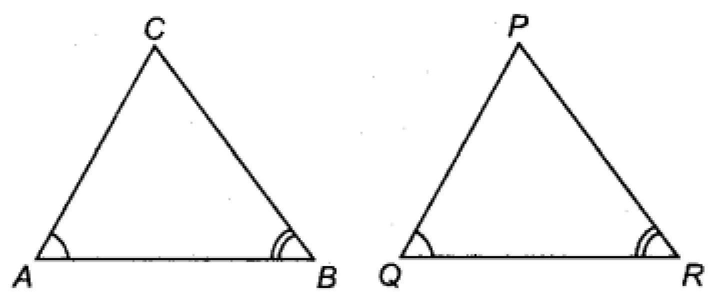
प्रश्न 1. त्रिभुजों ABC और PQR में ∠A = ∠Q और ∠B = ∠R है। ΔPQR की कौन सी भुजा ΔABC की भुजा AB के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: ΔPQR की भुजा QR, ΔABC की भुजा AB के बराबर होगी क्योंकि दो त्रिभुज सर्वांगसम होने के लिए एक त्रिभुज के दो संगत कोणों और उनकी अन्तरित भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अन्तरित संगत भुजा के बराबर होती है।



प्रश्न 2. त्रिभुजों ABC और PQR में ∠A = ∠Q और ∠B = ∠R है। ΔPQR की कौन-सी भुजा ΔABC की भुजा BC के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: ΔPQR में भुजा RP, ΔABC की भुजा BC के बराबर होगी क्योंकि दो त्रिभुज सर्वांगसम होने के लिए एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों व संगत भुजा के बराबर होते हैं।



प्रश्न 3. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगसम होने चाहिए। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

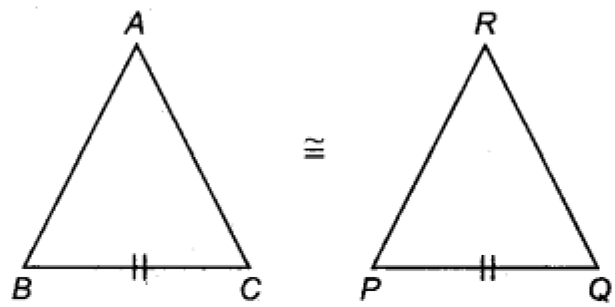
हल: नहीं, यह कथन सत्य नहीं है। क्योंकि सर्वांगसम होने के लिए कोण दोनों भुजाओं के अन्तर्गत होने चाहिए।

प्रश्न 4. "यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा के बराबर हों, तो त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगसम होने चाहिए।' क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

हल: नहीं, यह कथन सत्य नहीं है।, क्योंकि भुजाएँ संगत होनी चाहिए।

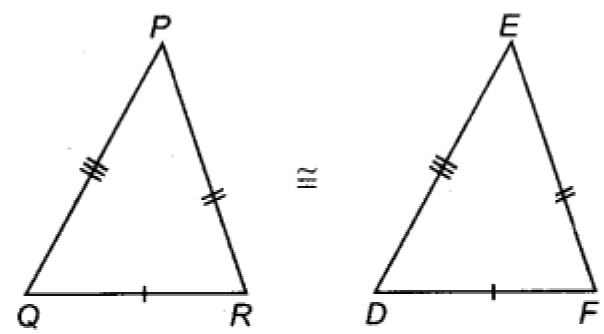
प्रश्न 5. ∆ABC = ∆RPQ दिया हुआ है। क्या यह कहना सत्य है कि BC = QR है? क्यों?

हल: नहीं, यह कथन सत्य नहीं है, क्योंकि QR, BC की संगत भुजा नहीं।

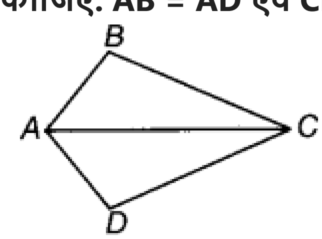


प्रश्न 6. यदि ∆PQR = ∆EDF है, तो क्या यह कहना, सत्य है कि PR = EF है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

हल: हाँ, यह कथन सत्य है क्योंकि PR की संगत भुजा EF है।

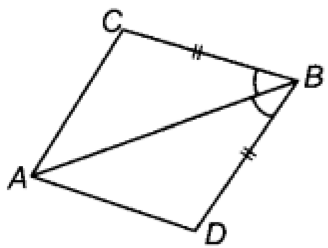


प्रश्न 7. चित्र में चतुर्भुज ABCD का विकर्ण AC शीर्ष कोण A एवं C का समद्विभाजक हो तो सिद्ध कीजिए: AB = AD एवं CB = CD



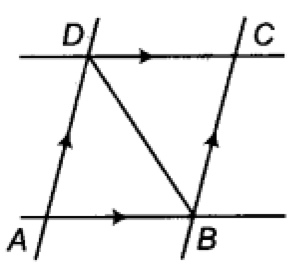
हल: दिया है : चतुर्भुज ABCD, जहाँ AC, 2A व C को समद्विभाजक है।
सिद्ध करना है: AB = AD तथा CB = CD
उपपत्ति : ∠BAD = 2∠BAC = 2∠DAC
∠BAC = $\frac{1}{2}$ ∠BAD = ∠DAC ...(i)
इसी प्रकार ∠BCD = 2∠BCA = 2∠DCA
∠BCA = $\frac{1}{2}$ ∠BCD = ∠DCA ...(ii)
ΔABC तथा ΔADC में
∠BAC = ∠DAC (समी (i) से]
∠BCA = ∠DCA (समी (ii) से]
AC = AC [उभयनिष्ठा ... कोण भुजा कोण सर्वांगसमता गुणधर्म से]
ΔABC = ΔADC
सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत कोण व संगत भुजाएँ समान होती हैं।
AB = AD तथा CB = CD
इति सिद्धम।

प्रश्न 8. चित्र में चतुर्भुज ΔDBC के ∠ABC = ∠ABD एवं BC = BD हो, तो सिद्ध कीजिए कि ΔABC = ΔABD



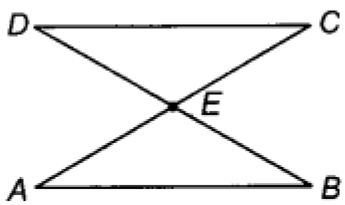
हल:
ΔABC तथा ΔABD में,
∠ABC = ∠ABD (दिया है)
भुजा BC = भुजा BD (दिया है)
भुजा AB = भुजा AB (उभयनिष्ठ)
भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से
ΔABC = ΔABD
इति सिद्धम

प्रश्न 9. चित्र के अनुसार, AB || DC एवं AD || BC हों, तो सिद्ध कीजिए ΔADB = ΔCBD



हल:
दिया AB || DC तथा AD || BC
अत: ABCD समान्तर चतुर्भुज है व
AB = CD
तथा BC = AD ...(i)
अब, ∆ADB तथा ∆CBD में
AB = CD तथा AD = BC [समी (i) से]
BD = BD (उभयनिष्ठ)
भुजा-भुजा-भुजा (SSS) सर्वांगसमता गुणधर्म से,
∆ADB = ∆CBD
इति सिद्धम

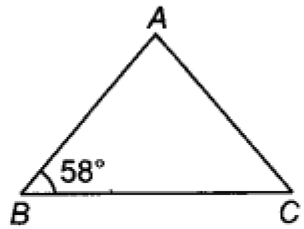
प्रश्न 10. चित्र में, यदि AB || DC एवं E भुजा AC का मध्य बिन्दु हो, तो सिद्ध कीजिए कि E, भुजा BD का मध्य बिन्दु होगा।



हल:
∆ABE तथा ∆CDE में
∠ABD = ∠BDC (∵ AB || DC एकान्तर कोण)
इसी प्रकार ∠BAC = ∠ACD (एकान्तर कोण)
और AE = EC (∵ E, भुजा AC का मध्य बिन्दु है)
कोण-कोण भुजा (AAS) सर्वांगसम गुणधर्म से
∆ABE = ∆CDE
अतः इनकी संगत भुजाएँ बराबर होंगी।
BE = DE (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)
इस प्रकार, E भुजा BD को मध्य बिन्दु है।
इति सिद्धम

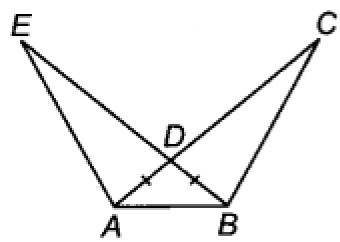
Exercise 7.2

प्रश्न 1. चित्र में AB = AC एवं ∠B = 58° हो तो ∠A का मान ज्ञात कीजिए।



हल: AB = AC
अतः ∠B = ∠C = 58° (समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)
ΔABC के लिए,
∠A + ∠B + ∠C = 180°
∠A + 58° + 58° = 180°
∠A = 180° – 116° = 64°

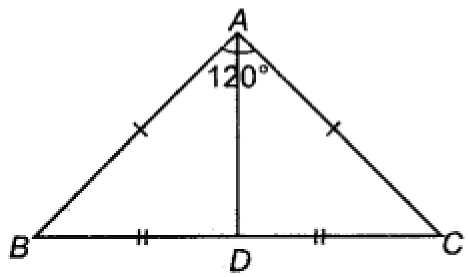
प्रश्न 2. चित्र में AD = BD एवं ∠C = ∠E हो, तो सिद्ध कीजिए BC = AE



हल: ΔADEE तथा ΔBDC में
AD = BD (दिया है) ...(i)
∠ADE = ∠BDE (शीर्षाभिमुख कोण) ...(ii)
∠E = ∠C (दिया है)
∠EAD = ∠CBD (दोनों त्रिभुजों के तीसरे कोण) ...(iii)
कोण-भुजा-कोण सर्वांगसमता गुणधर्म.
ΔADE = ΔBDC
सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होती हैं।
AE = BC
इति सिद्धम्।

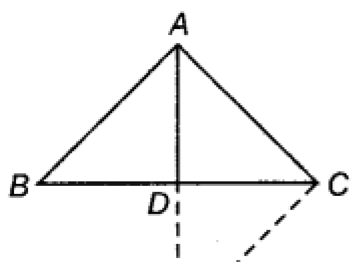
प्रश्न 3. यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की माध्यिका AD हो तथा ∠A = 120° एवं AB = AC हो, तो ∠ADB का मान ज्ञात कीजिए।

हल: ΔADB तथा ΔADC में,
AB = AC (दिया है)
BD = CD (∵ AD, ΔABC की माध्यिका है)
तथा AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)
भुजा-भुजा-भुजा (SSS) सर्वांगसमता गुणधर्म से
ΔADB = ΔADC



सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होते हैं।
∠ADB = ∠ADC
माना कि ∠ADB = ∠ADC = x
x + x = 180°(रैखिक कोण-युग्म)
⇒ 2x = 180°
⇒ x = 90°
अतः ∠ADB = 90°

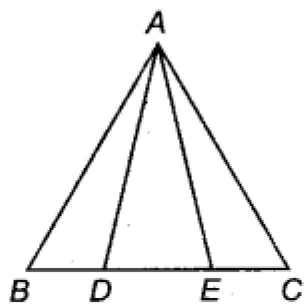
प्रश्न 4. यदि त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।



हल:
माना दिया गया त्रिभुज ABC है।
दिया हुआ है : कोण ∠BAC का B समद्विभाजक, AD सम्मुख भुजा BC को समद्विभाजित करता है।
सिद्ध करना है : ΔABC (एक समद्विबाहु त्रिभुज है) अर्थात् AB = AC
रचना : AD को E तक बढ़ाया जहाँ AD = DE तथा E और C को मिलाया।
उपपत्ति: ΔADB और ΔEDC में,
BD = DC (दिया है)
AD = DE (रचना से)

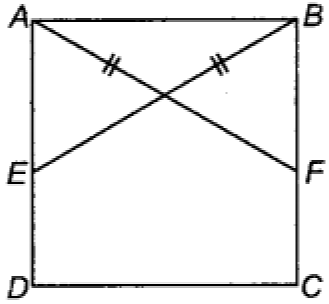
∠ADB = ∠EDC (शीर्षाभिमुख कोण)
भुजा-कोण-भुजा गुणधर्म से,
ΔADB = ΔEDC
AB = EC ...(i) और
∠BAD = ∠CED (संगत कोण तथा संगत भुजाएँ समान होंगी)
लेकिन ∠BAD = ∠CAD [AD, ∠A का समद्विभाजक है।]
∠CAD = ∠CED
AC = EC ...(ii) [∵ समान कोणों के सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।]
AB = AC (समीकरण (i) व (ii) से
अत: ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुजे होगा।

प्रश्न 5. चित्र में, AB = AC एवं BE = CD हो, तो सिद्ध कीजिए AD = AE



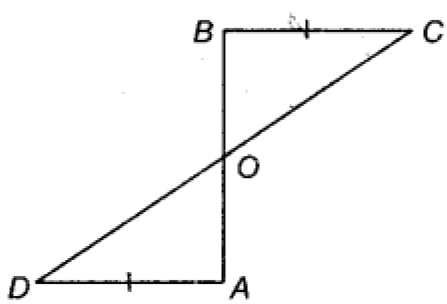
हल: ΔABD और ΔACE में,
AB = AC ....(i)(दिया है)
∠B = ∠C ...(ii)
BE = CD (दिया है)
दोनों ओर से DE घटाने पर
BE – DE = CD – DE
⇒ BD = CE ...(iii)
भुजा कोण भुजा गुणधर्म से, ΔABD = ΔACE
सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होती हैं।
अतः AD = AE
इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. एक वर्ग ABCD की भुजाओं AD एवं BC पर क्रमशः E एवं F दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि AF = BE तो सिद्ध कीजिए कि :
(i) ∠BAF = ∠ABE
(ii) BF = AE



हल:
ΔAEB तथा ΔBFA में,
BE = AF (दिया है)
∠A = ∠B (प्रत्येक 90° है) तथा
AE = BF (दिया है)
भुजा कोण भुजा गुणधर्म से,
ΔAEB = ΔBFA
हम जानते हैं कि सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ व संगत कोण बराबर होते हैं।
∠ABE = ∠BAF (संगत कोण)
तथा AE = BF (संगत भुजा)
इति सिद्धम्।

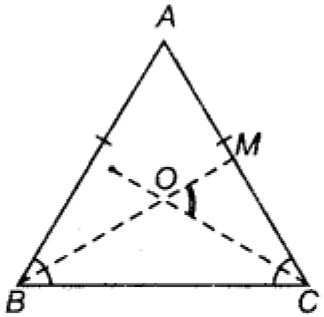
प्रश्न 7. एक रेखाखण्ड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखण्ड हैं (देखिए चित्र)। दर्शाइए कि CD, रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करता है।



हल: चूंकि AB और CD, O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
इसलिए, ∠AOD = ∠BOC ...(1) (शीर्षाभिमुख कोण)
ΔAOD और ΔBOC में,
∠AOD = ∠BOC [(1) से]
∠DAO = ∠CBO [प्रत्येक 90° और
AD = BC [दिया है।]
कोण-कोण-भुजा सर्वांगसम गुणधर्म से,
ΔAOD = ΔBOC
⇒ OA = OB

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं।
अत: CD, रेखाखण्ड AB को समद्विभाजित करता है।

प्रश्न 8. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर 0 पर प्रतिच्छेद करते हैं। BO को एक बिन्दु M तक बढ़ाया जाता है। सिद्ध कीजिए ∠MOC = ∠ABC है।

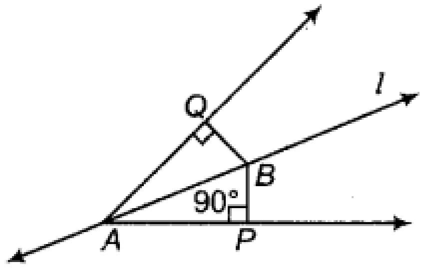


हल: ΔABC में,
AB = AC या ∠B = ∠C (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बरोबर होते हैं)
माना ∠B = ∠C = x
BO व OC कोण B व ∠C को समद्विभाजित करते हैं।
∠OBC + ∠OCB = $\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{2}$ x
∠OBC + ∠OCB = x
किसी त्रिभुज का बहिष्कोण दोनों अन्य आन्तरिक (सम्मुख) कोणों के योग के बराबर होता है।
ΔOBC में,
∠MOC = ∠OBC+ ∠OCB
∠MOC = x = ∠ABC
अतः ∠MOC = ∠ABC
इति सिद्धम्।

प्रश्न 9. रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं। (देखिए चित्र)।

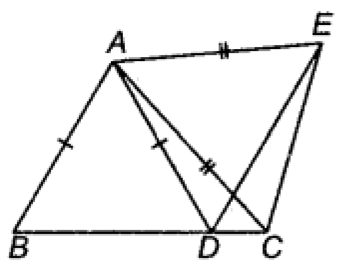
दर्शाइए कि :
(i) ΔAPB = ΔAQB

(ii) BP = BQ है, अर्थात् बिन्दु B कोण की। भुजाओं से समदूरस्थ है।



हल: (i) ΔAPB तथा ΔAQB में,
∠APB = ∠AQB [प्रत्येक = 90°]
∠PAB = ∠QAB [∵ AB, ∠PAQ का समद्विभाजक है।]
तथा AB = AB [उभयनिष्ठा]
कोण-कोण-भुजा गुणधर्म से,
ΔAPB = ΔAQB
(ii) BP = BQ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]
अतः बिन्दु B, ∠A की भुजाओं से समदूरस्थ है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 10. चित्र में, AC = AE, AB = AD और ∠BAD = ∠EAC है। दर्शाइए कि BC = DE है।



हल:
ΔABC तथा ΔADE में,
AB = AD
(i) दिया है।
∠BAD = ∠EAC [दिया है।]
दोनों और ∠DAC जोड़ने पर,
∠BAD + ∠DAC = ∠EAC + ∠DAC
∠BAC = ∠DAE और AC = AE [दिया है।]
भुजा-कोण-भुजा गुणधर्म से, ΔABC = ΔADE
⇒ BC = DE [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं।]
इति सिद्धम्।

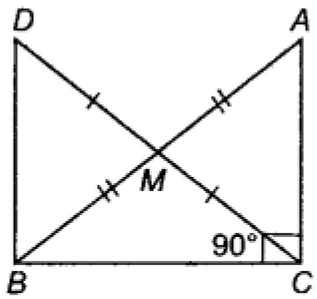
प्रश्न 11. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया कि DM = CM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :

(i) ΔAMC = ΔBMD

(ii) ∠DBC एक समकोण है।

(iii) ΔDBC = ΔACB

(iv) CM = $\frac{1}{2}$ AB



हल: (i) ΔAMC तथा ΔBMD में,

AM = BM [∵ M, AB का मध्य-बिन्दु है।]

∠AMC = ∠BMD (शीर्षाभिमुख कोण)

CM = MD [दिया है।]

भुजा-कोण-भुजा गुण से,

ΔAMC = ΔBMD

(ii) जब ΔAMC = ΔBMD

AC = BD ...(i)

व ∠ACM = ∠BDM (∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इसीलिए तिर्यक रेखा CD, CA तथा BD को C तथा D पर क्रमश:

इस प्रकार काटती है कि एकान्तर कोण ∠BDM = ∠ACM

अत: BD || CA

∠CBD + ∠BCA = 180° [तिर्यक रेखा के एक ही ओर के आन्तरिक कोणों का योग 180° होता है।]

∠CBD + 90° = 180° [∠BCA = 90°]

∠DBC = 90°

(iii) अब ΔDBC तथा ΔACB में,

BD = CA [भाग (ii) से]

∠DBC = ∠ACB [प्रत्येक 90°]

BC = BC (उभयनिष्ठ)

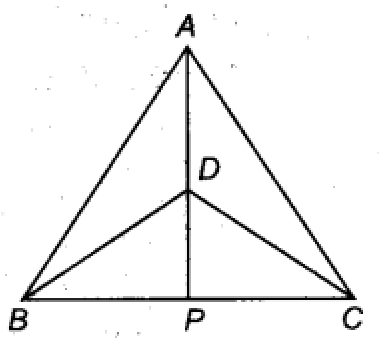
भुजा-कोण-भुजा गुण से, ΔDBC = ΔACB

(iv) CD = AB (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]

या $\frac{1}{2}$ CD = CM = $\frac{1}{2}$ AB
इति सिद्धम्।

Exercise 7.3

प्रश्न 1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए चित्र)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि :



(i) ΔABD = ΔACD
(ii) ΔABP = ΔACP
(iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।
(iv) AP रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

हल: (i) ΔABD तथा ΔACD में,
AB = AC दिया है।
BD = DC दिया है।
और AD = AD [उभयनिष्ठ]
भुजा-भुजा-भुजा गुणधर्म से, ΔABD = ΔACD
∠BAD = ∠CAD [सर्वांगसम त्रिभुज के संगत कोणी]
∠BAP = ∠CAP ...(i)

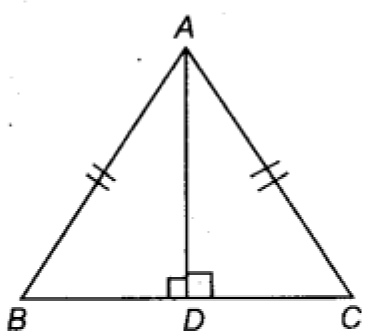
(ii) ΔABP तथा ΔACP में,
AB = AC [दिया है।]
∠BAP = ∠PAC [समी (i) से]
और AP = AP [उभयनिष्ठ भुजा]
भुजा-कोण-भुजा गुणधर्म से, ΔABP = ΔACP
BP = CP ...(ii) (सर्वांगमस त्रिभुजों के संगत भाग]

(iii) ΔABD = ΔACD
∠BAD = ∠CAD
AP, ∠A को समद्विभाजित करता है। ...(iii)

ΔBDP तथा ΔCDP में,
BD = CD [दिया है।]
BP = PC [समी (ii) से]
तथा DP = DP (उभयनिष्ठ भुजा)
भुजा-भुजा-भुजा गुणधर्म से,
ΔBDP = ΔCDP
तथा ∠BDP = ∠CDP
DP, ∠D को समद्विभाजित करता है। ...(iv)
समीकरण (iii) तथा (iv) से,
AP, ∠A तथा ∠D को समद्विभाजित करता है।

(iv) ΔBAP = ΔCAP
∠APB = ∠APC
∠APB + ∠APC = 180° [समान्तर युग्म]
परन्तु ∠APB = ∠APC [ऊपर सिद्ध किया जा चुका है।]
∠APB = ∠APC = $\frac{180}{2}$ = 90°
तथा BP = PC (ऊपर सिद्ध किया गया है)
या AP, BC का लम्ब समद्विभाजक है।
इति सिद्धम्।

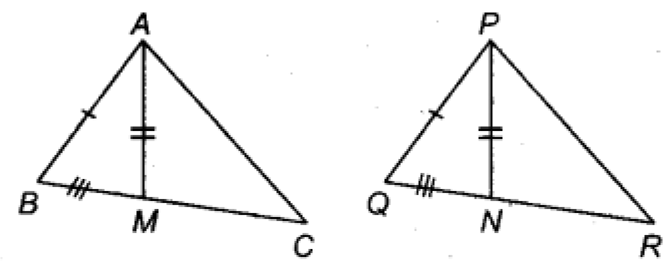
प्रश्न 2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि
(i) AD रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करता है।
(ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।



हल:
(i) AD शीर्ष A से BC पर लम्ब है, जो कि समद्विबाहु त्रिभुज ABC के आधार BC के सम्मुख है।
AB = AC,
∠ADC = ∠ADB = 90°
अब ΔADB तथा ΔADC में,
कर्ण AB = कर्ण AC [दिया है।]
AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)
तथा ∠ADC = ∠ADB [प्रत्येक 90°]

समकोण-कर्ण-भुर्जी सर्वांगसमता गुणधर्म से,
ΔADB = ΔADC
BD = DC [सर्वांगसमता त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं।]
AD, BC को संमद्विभाजित करता है।
(ii) ΔADB = ΔADC
अतः ∠BAD = ∠CAD [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं।]
AD, ∠A को समद्विभाजित करता है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमश: एक दूसरे त्रिभुजं की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं। (देखिए चित्र)। दर्शाइए कि

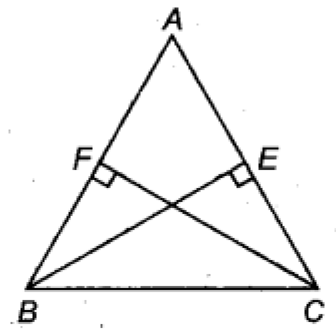


(i) ΔABM = ΔPQN
(ii) ΔABC = ΔPQR

हल:
ΔABC तथा ΔPQR में,
AB = PQ, BC = QR तथा AM = PN
चूंकि AM तथा PN क्रमशः ΔABC तथा ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं।
अब BC = QR [दिया है।]
⇒ $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ QR
⇒ BM = QN ...(i)
अब, ΔABM तथा ΔPQN में,
AB = PQ [दिया है।]
BM = QN [(i) से]
तथा AM = PN दिया है।
भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,
ΔABM = ΔPQN इति सिद्धम्।
∠B = ∠Q ...(ii) [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं।]
अब ΔABC तथा ΔPQR में,
AB = PQ दिया है।
∠B = ∠Q – [(ii) से]
BC = QR [दिया है।]
भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,

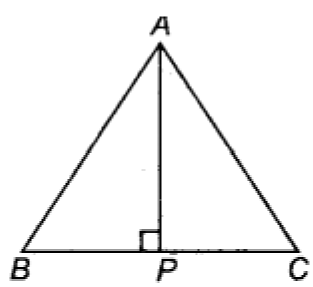
ΔABC = ΔPQR
इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल:
ΔBCF तथा ΔCBE में,
∠BFC = ∠CEB [प्रत्येक 90° है।
कर्ण BC = कर्ण BC (उभयनिष्ठ भुजा)
FC = EB [दिया है]
समकोण-कर्ण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,
ΔBCF = ΔCBE
∠FBC = ∠ECB (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)
या ∠ABC = ∠ACB
AB = AC
ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। AP ⊥ BC खींचकर दर्शाइए कि ∠B = ∠C है।



हल: ΔABP तथा ΔACP में,
AB = AC [दिया है।

AP = AP (उभयनिष्ठ भुजा)
∠APB = ∠APC [प्रत्येक 90°]
समकोण-कर्ण-भुजा गुणधर्म से,
ΔABP = ΔACP
∠B = ∠C (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)
इति सिद्धम्।

Miscellaneous Exercise

विविध प्रश्नमाला

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (प्रश्न 1 से 16 तक)

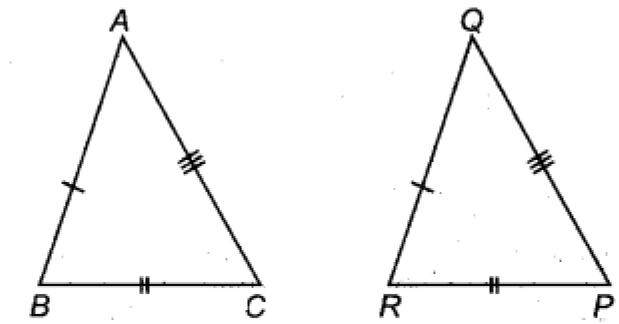
प्रश्न 1. निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों की सर्वांगसमता की एक कसौटी नहीं है?
(A) SAS
(B) ASA
(C) SSA
(D) SSS

उत्तर: (C) SSA

प्रश्न 2. यदि AB = QR, BC = PR और CA = PQ है, तो
(A) ΔABC = ΔPQR
(B) ΔCBA = ΔPR
(C) ΔBAC = ΔRPQ
(D) ΔPQR = ΔBCA

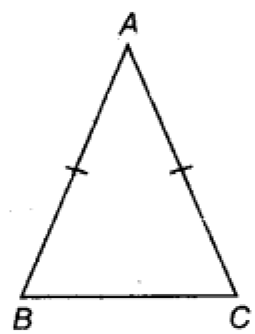
उत्तर: (B) ΔCBA = ΔPR

संकेत : प्रश्नानुसार



∆ABC = ∆QRP या ∆CBA = ∆PRQ

प्रश्न 3. ∆ABC में, AB = AC और ∠B = 50° है, तब ∠C बराबर है:



(A) 40°
(B) 50°
(C) 80°
(D) 130°

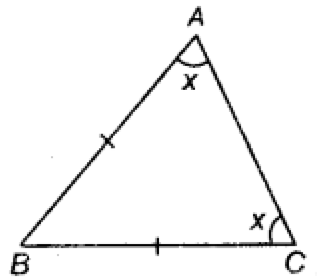
उत्तर: (B) 50°

संकेत : समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।
अत: ∠B = ∠C = 50°

प्रश्न 4. ∆ABC में, BC = AB और ∠B = 80° है, तब ∠A बराबर है:
(A) 80°
(B) 40°
(C) 50°
(D) 100°

उत्तर: (C) 50°

संकेत : समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं,



अतः ∠A = ∠C = x (माना) तो

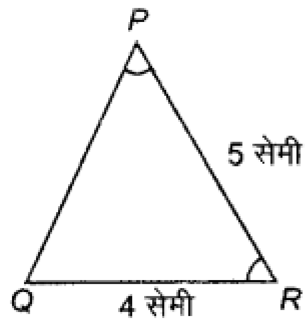
∠x + ∠x + ∠B = 180°

⇒ ∠x + ∠x + 80° = 180°

⇒ 2∠x = 180° – 80° = 100°

⇒ ∠x = ∠A = 50°

प्रश्न 5. △PQR में ∠R = ∠P और QR = 4 सेमी और PR = 5 सेमी है, तब PQ की लम्बाई हैं,



(A) 4 सेमी

(B) 5 सेमी।

(C) 2 सेमी

(D) 2.5 सेमी

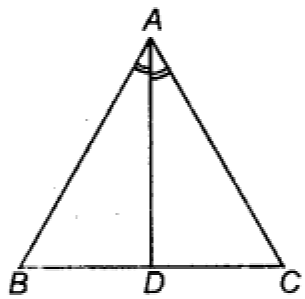
उत्तर: (A) 4 सेमी

संकेत : ∠P = ∠R,

QR = PQ

PQ = QR = 4 सेमी

प्रश्न 6. D एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि AD कोण BAC को समद्विभाजित करता है, तब :

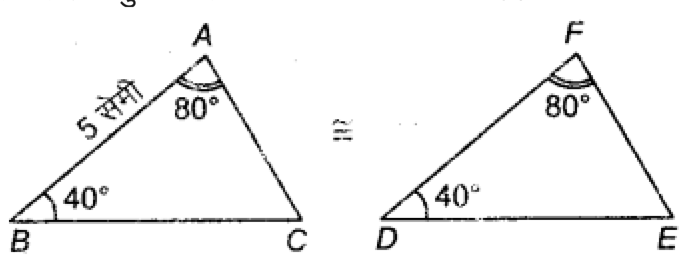


(A) BD = CD
(B) BA > BD
(C) BD > BA
(D) CD > CA

उत्तर: (B) BA > BD
संकेत : ΔABC में, AD, ∠BAC समद्विभाजक है।
∠BAD = ∠CAD...(i)
AB = AC (ABC समद्विबाहु Δ है।)
∠B = ∠C
ΔACD में,
∠ADB = ∠C + ∠CAD [बिहिष्कोण, सम्मुख अन्तराभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।]
∠ADB = ∠B + ∠BAD [समी (i) तथा (ii) को प्रयोग करने पर]
∠ADB > ∠BAD
AB > BD [किसी A में बड़े कोण की सम्मुख भुजा लम्बी होती है।]

प्रश्न 7. यह दिया है कि ΔABC = ΔFDE है तथा AB = 5 सेमी, ∠B = 40° और ∠A = 80° है। निम्नलिखित में से कौन सत्य है?
(A) DF = 5 सेमी, ∠F = 60
(B) DF = 5 सेमी, ∠E = 60°
(C) DE = 5 सेमी, ∠E = 60°
(D) DE = 5 सेमी, ∠D = 40°

उत्तर : (B) DF = 5 सेमी, ∠E = 60°
संकेत : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180°



∠E + ∠D + ∠F = 180°

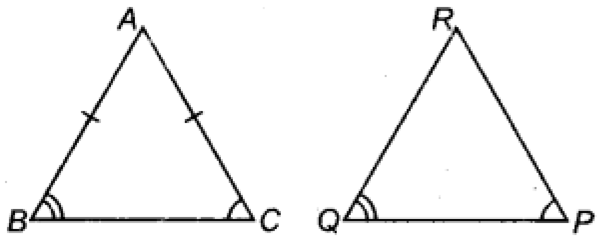
$\angle E + 40° + 80° = 180°$
$\angle E = 180° – 120° = 60°$
$\Delta ABC = \Delta FDE$ तथा DF = BA = 5 सेमी [सर्वांसगम त्रिभुज के संगत भुजाएँ।]
DF = 5 सेमी तथा $\angle E = 60°$

प्रश्न 8. एक त्रिभुज की दो भुजाओं को लम्बाइयाँ 5 सेमी और 1.5 सेमी हैं। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा को लम्बाई निम्नलिखित नहीं हो सकती :
(A) 3.6 सेमी
(B) 4.1 सेमी
(C) 3.8 सेमी
(D) 3.4 सेमी

उत्तर: (D) 3.4 सेमी
संकेत : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।
1.5 + 3.6 = 5.1 सेमी,
1.5 + 4.1 = 5.6 सेमी
1.5 + 3.8 = 5.3 सेमी,
1.5 + 34 = 4.9 सेमी < 5 सेमी तीसरी भुजा की लम्बाई 3.4 सेमी नहीं हो सकती। प्रश्न 9. ΔPQR में, यदि $\angle R > \angle Q$ है, तो
(A) QR > PR
(B) PQ > PR
(C) PQ < PR
(D) QR < PR उत्तर : (B) PQ > PR
संकेत : किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण को सम्मुख भुजा से बड़ी होती है।
अतः $\angle R$ की सम्मुख भुजा (=PQ) > $\angle Q$ की सम्मुख भुजा (=PR)
PQ > PR

प्रश्न 10. त्रिभुजों ABC और PQR में, AB = AC, $\angle C = \angle P$ और $\angle B = \angle Q$ है। ये दोनों त्रिभुज है।
(A) समद्विबाहु परंतु सर्वांगसम नहीं
(B) समद्विबाहु और सर्वांगसम
(C) सर्वांगसम परन्तु समद्विबाहु नहीं
(D) न तो सर्वांगसम और न ही समद्विबाहु

उत्तर: (A) समद्विबाहु परंतु सर्वांगसम नहीं
संकेत :

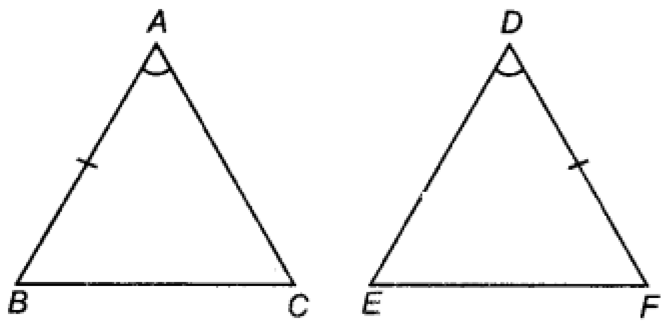


चूंकि AB = AC, इसलिए ये त्रिभुज समद्विबाहु हैं। ये सर्वांगसम नहीं हैं क्योंकि RQ = RP परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि ये AB के बराबर हों।

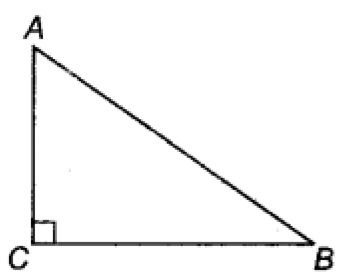
प्रश्न 11. त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = FD तथा ∠A = ∠D है। दोनों त्रिभुज SAS अभिगृहीत के अन्तर्गत सर्वांगसम होगे, यदि :

(A) BC = EF
(B) AC = DE
(C) AC = EF
(D) BC = DE

उत्तर : (B) AC = DE
संकेत : अत: SAS अभिगृहीत के अन्तर्गत सर्वांगसम होने के लिए AC = DE होना चाहिए।



प्रश्न 12. समकोण त्रिभुज ABC में कोण C समकोण हो तो, सबसे बड़ी भुजा होगी:



(A) AB
(B) BC
(C) CA
(D) कोई नहीं

उत्तर: (A) AB
संकेत : सबसे बड़े कोण के सामने वाली भुजी सबसे बड़ी होती है। चित्र में ∠C (=90°) सबसे बड़ा कोण है।
इसलिए AB सबसे बड़ी भुजा होगी।

प्रश्न 13. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को अन्तर तीसरी भुजा से होता है:
(A) अधिक
(B) समान
(C) कम
(D) आधा

उत्तर: (C) कम

प्रश्न 14. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हो, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण होता है:
(A) बड़ा
(B) छोटा
(C) बराबर
(D) आधा

उत्तर: (A) बड़ा

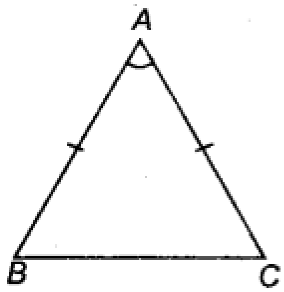
प्रश्न 15. त्रिभुज का परिमाप उसकी मध्यिकाओं के योग से होता है-
(A) अधिक
(B) कम
(C) समान
(D) आधा

उत्तर: (A) अधिक

प्रश्न 16. त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का योग उसके परिमाप से होता है:
(A) अधिक
(B) समान
(C) आधा
(D) कम

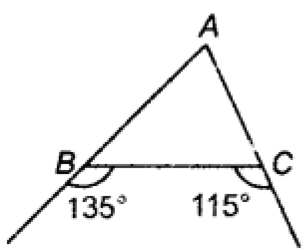
उत्तर: (D) कम

प्रश्न 17. यदि ΔABC में AB = AC हो तथा ∠A < 60° हो, तो भुजा BC एवं AC में सम्बन्ध लिखिए।



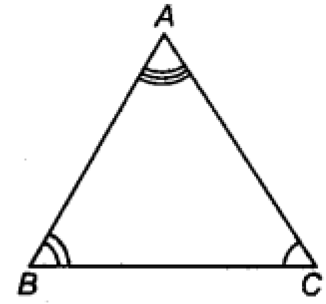
हल: ΔABC में,
AB = AC तथा ∠A < 60°
∠B = ∠C (समान भुजाओं के सम्मुख कोण) हम जानते हैं कि ΔABC में,
∠A + ∠B + ∠C = 180°
⇒ ∠A < 60° और ∠B = ∠C ⇒ ∠B = ∠C > 60°
और ∠A < 60° (दिया है) अब ∠B = ∠C > ∠A
∠B > ∠A (सम्मुख भुजाओं के कोण)
⇒ AC > BC
⇒ BC < AC

प्रश्न 18. चित्र में, भुजा AB एवं AC में सम्बन्ध लिखिए।



हल: ΔABC में,
∠CBA = 180° – 135° = 45°
तथा ∠BCA = 180° – 115° = 65°
∠BCA > ∠CBA
AB > AC (सम्मुख कोणों की भुजाएँ)

प्रश्न 19. किसी त्रिभुज ABC में, ∠A > ∠B एवं ∠B > ∠C हो, तो सबसे छोटी भुजा कौन-सी होगी?

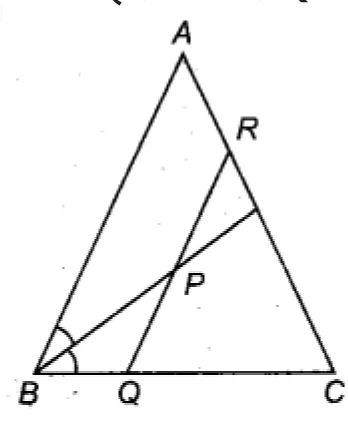


हल: ∠A > ∠B
तथा ∠B > ∠C
∠A > ∠B > ∠C
सबसे छोटा कोण C है।
अत: सबसे छोटी भुजा = ∠C के सामने वाली
भुजा = AB

प्रश्न 20. एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल: समबाहु त्रिभुज में तीनों कोण समान होते हैं।
माना प्रत्येक कोण x है। तब तीनों कोणों का योग = 180°
x + x + x = 180°
3x = 180°
x = 60° अतः एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का। होता है।

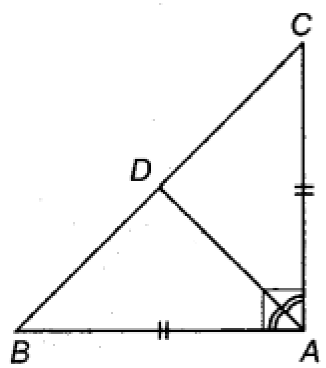
प्रश्न 21. P कोण ABC के समद्विभाजक पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि P से होकर BA के समान्तर खींची गई रेखा BC से Q पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि BPQ एक समद्विबाहु त्रिभुजे है।



हल: ΔABC में,
RQ || AB

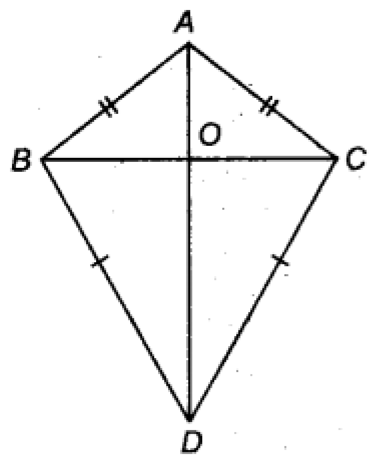
∠PBA = ∠PBQ ...(i)
RQ || AB
∠PBA = ∠BPQ (एकान्तरं कोण) ...(ii)
समी (i) तथा (ii) से
∠PBQ = ∠BPQ [समी (i) से]
बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
BQ = QP
अत: ABPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।
इति सिद्धम्

प्रश्न 22. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है। ∠A का समद्विभाजक BC से D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि BC = 2AD है।



हल: ΔABC में, ∠A समकोण है।
AD, ∠A का समद्विभाजक है।
ΔABD तथा ΔACD में,
∠DAB = ∠DAC = 45° ...(i)
AB = AC (दिया है) ...(i)
∠C = ∠B
अतः ΔABD = ΔACD
तब ∠DAB = ∠DBA = 45°
इसी प्रकार ∠DAC = ∠DCA = 45°
अतः AD = CD ...(iv)
इसी प्रकार AD = BD अतः BD = CD
बायाँ पक्ष
BC = BD + DC
= BD + BD (समीकरण (iv) से)
= 2BD
= 2AD
= दायाँ पक्ष
इति सिद्धम्

प्रश्न 23. ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित दो त्रिभुज इस प्रकार हैं कि बिन्दु A और D आधार BC के विपरीत ओर स्थित हैं, AB = AC और DB = DC है। दर्शाइए कि AD रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।



हल: यहाँ AB = AC तथा DB = DC दिया हुआ है। हमें दर्शाना है कि AD ⊥ BC है और AD रेखाखण्ड BC को समद्विभाजित करती है। माना, रेखा AD रेखाखण्ड BC को O पर प्रतिच्छेद करती है। ΔABD तथा ΔACD में, AB = AC (दिया है)

BD = CD (दिया है)

AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

भुजा–भुजा-भुजा गुणधर्म से,

ΔABD = ΔACD

इसलिए, ∠BAD = ∠CAD

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग

अब ΔAOB व ΔAOC में,

AB = AC (दिया है)

∠BAO = ∠OAC (∠BAD = ∠CAD)

तथा AO = AO (उभयनिष्ठ)

भुजा कोण भुजा गुणधर्म से, ΔAOB = ΔAOC

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं।

और ∠BOA = ∠COA एवं BO = CO …… (i)

साथ ही, ∠BOA + ∠COA = 180° (रैखिक कोण युग्म)

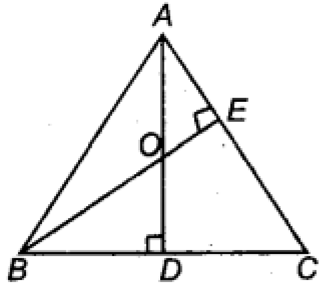
इसलिए, 2∠BOA = 180°

⇒ ∠ BOA = 90°…(ii)

समीकरण (i) व (ii) से स्पष्ट है कि रेखा AD रेखाखण्डे BC का लम्ब समद्विभाजक है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 24. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AC = BC है। AD और BE क्रमशः BC और AC पर शीर्ष लम्ब है। सिद्ध कीजिए कि AE = BD है।



हल: दिया है: AC = BC ⇒ ∠B = ∠A ...(i) (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

ΔADB तथा ΔBEA में

AB = AB (उभयनिष्ठ भुजा)

∠B = ∠A (समी (i) से)

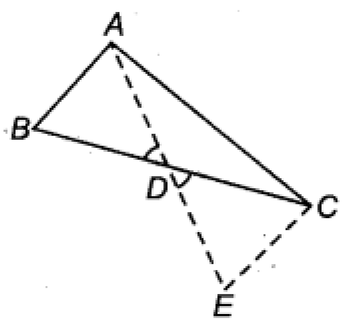
∠ADB = ∠BEA (प्रत्येक 90° है)

कोण-कोण-भुजा गुणधर्म से, ΔADB = ΔBEA

BD = AE (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

इति सिद्धम्

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा की संगत माध्यिका के दोगुने से बड़ा होता है।



हल: दिया है : त्रिभुज ABC की माध्यिका AD है।

सिद्ध करना है : AB + AC > 2AD

रचना : चित्रानुसार AD को E तक इस प्रकार आगे बढ़ाया कि DE = AD हो एवं C तथा E को मिलाया।

उपपत्ति: ΔADB एवं ΔEDC में,

AD = DE (रचना से)

BD = DC (दिया है)

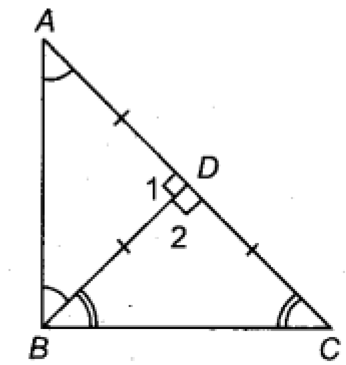
∠ADB = ∠EDC (शीर्षाभिमुख कोण)

भुजा-कोण-भुजा गुणधर्म से,

ΔADB = ΔEDC

AB = CE
अब ΔACE में,
AC + CE > AE
AC + AB > AE [∵ CE = AB]
AC + AB > 2AD [∵ AE = 2AD]
इति सिद्धम।

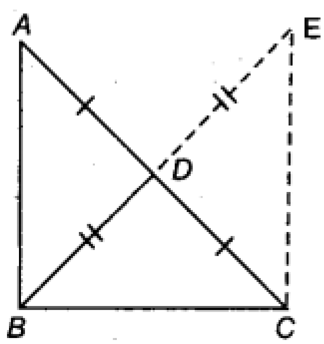
प्रश्न 26. एक त्रिभुज ABC में, D भुजा AC का मध्य-बिन्दु है तथा BD = $\frac{1}{2}$ AC है। दर्शाइए कि ∠ABC एक समकोण है।



हल: दिया है : BD = $\frac{1}{2}$ AC तथा D, AC का मध्य बिन्दु है।
अर्थात AD = CD
AD = CD = BD
AD = BD
∠BAD = ∠ABD (समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं)
माना ∠BAD = ∠ABD = ∠x
ΔABD में,
∠ABD + ∠BAD + ∠1 = 180°
∠x + ∠x + ∠1 = 180
∠1 = 180 – 2∠x ...(i)
इसी प्रकार ΔBCD में,
BD = CD
∠CBD = ∠BCD
माना ∠BCD = ∠CBD = ∠y
⇒ ∠BCD + ∠CBD + ∠2 = 180°
⇒ ∠y + ∠y + ∠2 = 180°
⇒ ∠2 = 180° – 2∠y ...(ii)
समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर
∠1 + ∠2 = 180° – 2∠x + 180° – 2∠y
⇒ 180° = 360° – 2(∠x + ∠y) (रैखिक कोण युग्म से, ∠1 + ∠2 = 180°]

⇒ 2(∠x + ∠y) = 360° – 180° = 180°
⇒ ∠x + ∠y = 90°, ∠A + ∠C = 90° …(iii)
ΔABC में,
∠A + ∠B + ∠C = 180°
⇒ ∠B + 90° = 180°
⇒ ∠B = 90° [समी (iii) का प्रयोग करने पर]
⇒ ∠ABC = एक समकोण,
इति सिद्धम

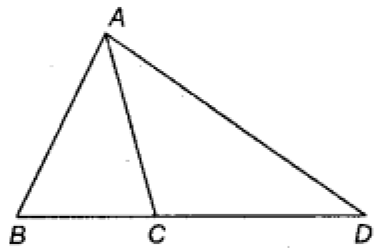
प्रश्न 27. एक समकोण त्रिभुज में सिद्ध कीजिए कि कर्ण के मध्य-बिन्दु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाला रेखाखण्ड कर्ण का आधा होता है।



हल: दिया है : माना, त्रिभुज ABC मे, ∠B = 90° तथा कर्ण AC का मध्य बिन्दु D है।
सिद्ध करना है : BD = $\frac{1}{2}$ AC
रचना : BD को E तक
इस प्रकार बढ़ाते हैं कि BD = DE तथा CE को मिलाया।
उपपत्ति :
ΔABD तथा ΔCED में
AD = DC
BD = DE (रचना से)
∠ADB = ∠CDE (शीर्षाभिमुख कोण)
भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से।
ΔABD = ΔCED
AB = CE
तथा ∠ABD = ∠CED
∠ABE = ∠CBE
(∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग समान होते हैं। अतः रेखाओं AB तथा CE को एक त्रिर्यक रेखा इस प्रकार काटती है कि एकान्तर कोण ∠ABE तथा ∠CEB समान हैं)
अत: AB || CE
∠ABC + ∠ECB = 180°
[तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का योग 180° होता है।

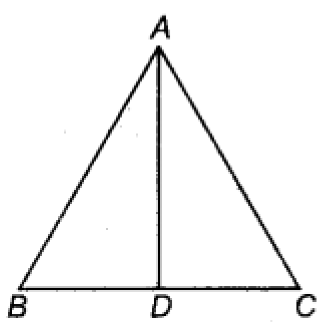
90° + ∠ECB = 180°
∠ECB = 180° – 90° = 90°
अब ΔABC तथा ΔECB में,
AB = EC (समी (i) से)
BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा]
तथा ∠ABC = ∠ECB [प्रत्यक 90° है।
भुजा कोण भुजा गुणधर्म से, ΔABC = ΔECB
AC = BE
$\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ BE = BD
इति सिद्धम्।

प्रश्न 28. चित्र में, यदि AB = AC हो, तो भुजा AB एवं AD में संबंध लिखिए।



हल: AB = AC (दिया है)
∠B = ∠ACB ...(i)
ΔACD में, (बहिष्कोण, अपने सम्मुख दो कोणों के योग के बराबर होता है।)
∠B = ∠CAD + ∠D [समी (i) का प्रयोग करने पर)]
⇒ ∠B > ∠D
⇒ AD > AB [किसी त्रिभुज में कोण की सम्मुख भुजा लम्बी होती है।]

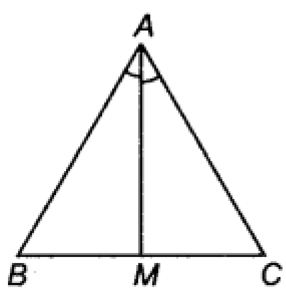
प्रश्न 29. AD किसी त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है। क्या यह कहना सत्य है कि AB + BC + CA > 2AD है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।



हल: हाँ, यह सत्य है।

कारण : हम जानते हैं कि त्रिभुज में दो भुजाओं का योग त्रिभुज की तीसरी भुजा से अधिक होता है।
ΔABD में,
AB + BD > AD ...(i)
तथा ΔACD में,
AC + CD > AD ...(ii)
समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर
AB + BD + AC + CD > 2AD
⇒ AB + (BD + DC) + CA > 2AD
अतः AB + BC + CA > 2AD

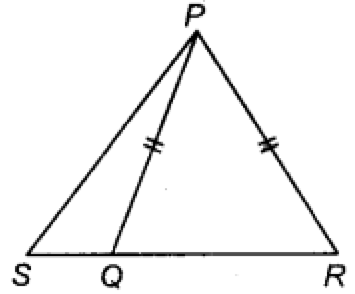
प्रश्न 30. M किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर स्थिति एक बिन्दु ऐसा है कि AM कोण BAC का समद्विभाजक है। क्या यह कहना सत्य है कि त्रिभुज का परिमाप 2AM से अधिक है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।



हल: हाँ यह सत्य है।

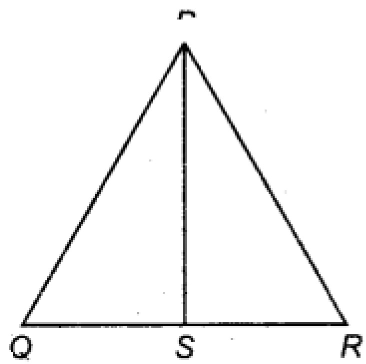
कारण : हम जानते हैं कि त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं । का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।
ΔABM तथा ΔACM में,
AB+ BM > AM ...(i)
AC + CM > AM ...(ii)
समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर
AB + BM + AC + CM > 2AM
⇒ AB + (BM + MC) + CA > 2AM
⇒ AB + BC + CA > 2AM
अतः परिमाप > 2AM

प्रश्न 31. एक ΔPSR की भुजा SR पर एक बिन्दु Q इस प्रकार स्थित है कि PQ = PR है। सिद्ध कीजिए कि PS > PQ है।



हल: ΔPQR में, PQ = PR
ΔPSQ में,
∠PQR = ∠SPQ + ∠S [∵ बहिष्कोण, अपने सम्मुख दो अन्त कोणों के योग के बराबर होता है।]
⇒ ∠PRQ = ∠SPQ + ∠S (∵ ∠PQR = ∠PRQ)
⇒ ∠PRQ > ∠S
PS > PR [∵ किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा लम्बी होती है।
इति सिद्धम्।

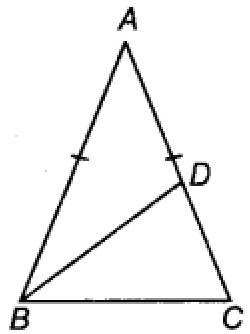
प्रश्न 32. ΔPQR की भुजा QR पर S कोई बिन्दु स्थित है। दर्शाइए कि PQ + QR + RP > 2PS है।



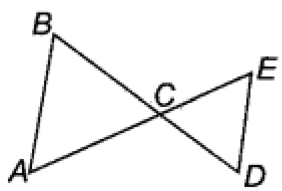
हल: दिया है: ΔPQR में, QR पर बिन्दु S है।
हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।
ΔPQS में,
PQ + QS > PS ...(i)
तथा ΔPSR में,
PR + RS > PS ....(ii)
समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर
(PQ + QS) + (PR + RS) > 2PS
⇒ PQ + (QS + SR) + RP > 2PS

⇒ PQ + QR + RP > 2PS
इति सिद्धम्।

प्रश्न 33. AB = AC वाले एक त्रिभुज ABC की भुजा AC पर D कोई बिन्दु स्थित है। दर्शाइए कि CD < BD है।

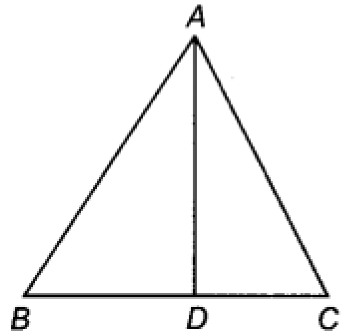


हल: ΔABC, जिसमें AB = AC व AC पर बिन्दु D है।
सिद्ध करना है : CD < BD उपपत्ति : AB = BC ∠ABC = ∠ACB ΔBCD में, ∠DCB > ∠CBD
बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा तथा छोटी भुजा के सामने का कोण छोटा होता है।
भुजा BD > भुजा CD
अत: CD ∠A एवं ∠D > ∠E हो, तो सिद्ध कीजिए की AE > BD.



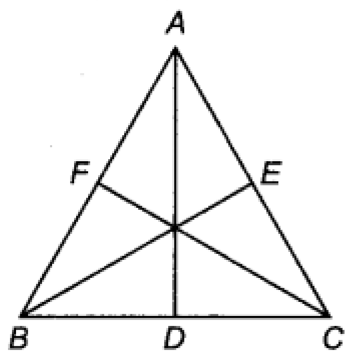
हल: ∠B > ∠A तथा
∠D > ∠E (दिया है)।
AC > BC ...(i)
तथा CE > CD ...(ii)
समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर,
AC + CE > BC + CD
AE > BD
इति सिद्धम्।

प्रश्न 35. किसी त्रिभुज ABC में, AB > AC एवं भुजा BC पर कोई बिन्दु D हो, तो सिद्ध कीजिए AB > AD



हल: दिया है, ΔABC में,
AB > AC ...(i)
∠C > ∠B [किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।]
∠ADB = ∠CAD + ∠C
⇒ ∠ADB > ∠C ...(ii)
समी. (i) द (ii) से, ∠ADB > ∠B [किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजो लम्बी होती है।]
इति सिद्धम्।

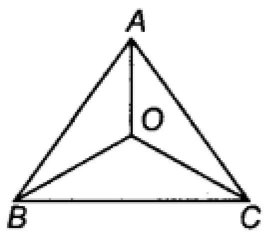
प्रश्न 36. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसकी तीनों माध्यिकाओं के योग से अधिक होता है।



हल: दिया है : ΔABC में,
AD, BE और CF इसकी माध्यिकाएँ हैं।
सिद्ध करना है : AB + BC + AC > AD + BE + CE
उपपत्ति: हम जानते हैं B , कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा पर खींची गई माध्यिका के दुगुने से अधिक होता है।
चित्र में शीर्ष A से खींची गई भुजा BC पर AD माध्यिका है।
AB + AC > 2AD ...(i)
B शीर्ष से खींची गई भुजा CA पर BE माध्यिका है।

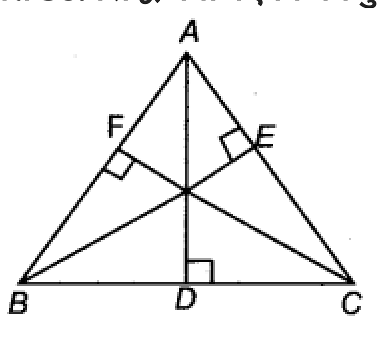
BC + AB > 2BE ......(ii)
C शीर्ष से खींची गई भुजा AB पर CF माध्यिका है।
AC + BC > 2CF ...(iii)
समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर,
(AB + AC) + (BC + AB) + (AC + BC) > 2AD + 2BE + 2CF
⇒ 2 (AB + BC + AC) > 2 (AD + BE + CF)
⇒ AB + BC + AC > AD + BE + CF
इति सिद्धम्।

प्रश्न 37. चित्र में त्रिभुज में कोई अन्त: बिन्दु O हो तो सिद्ध कीजिए कि (BC + AB + AC) < 2(OA + OB + OC) हैं



हल: दिया है : ΔABC में, O एक अन्तः बिन्दु है।
सिद्ध करना है :
(BC + AB + AC) < 2 (OA + OB + OC) उपपत्ति: ΔAOB में, AO + BO > AB...(i)
(किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है)।
इसी प्रकार ΔBOC में, OB + OC > BC ...(ii)
इसी प्रकार ΔAOC में, OC + OA > AC...(iii)
समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर,
(AO + BO) + (OB + OC) + (OC + OA) > AB + BC + AC
⇒ 2 (OA + OB + OC) > AB + BC + AC
⇒ AB + BC + AC < 2 (OA + OB + OC)
इति सिद्धम्।

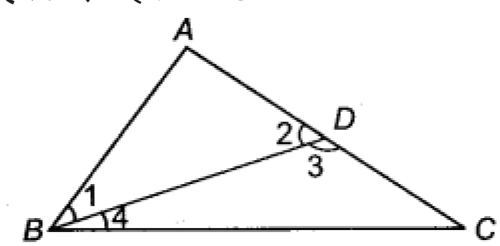
प्रश्न 38. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का योग त्रिभुज के परिमाप से कम होता है।



हल: दिया है : ΔABC में,
A, B तथा C से BC, AC व AB पर डाले गये लम्ब AD, BE तथा CF हैं।
सिद्ध करना है : AD + BE + CF < AB + BC + CA
उत्पत्ति : हम जानते हैं कि किसी सरल रेखा या रेखाखण्ड बाह्य बिन्दु से खींचे गए सभी रेखाखण्डों में लम्ब सबसे छोटा होता है।
ΔABD में, ∠ADB =90°
AD < AB ...(i)
ΔBEC में,
BE ⊥ AC
BE < BC ...(ii)
इसी प्रकार, ΔACF में, CF ⊥ AB
CF < AC ...(iii)
(i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर,
AD + BE + CF < AB + BC + AC
इति सिद्धम्।

प्रश्न 39. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

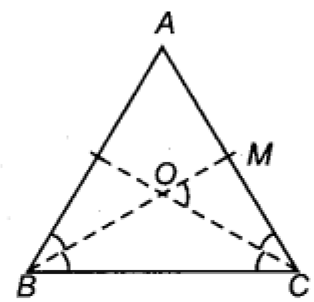
हल: दिया है : ΔABC



सिद्ध करना है
(i) AC – AB < BC,
(ii) BC – AC < AB,
(iii) BC – AB < AC रचना : भुजा AC पर ऐसा बिन्दु D लिया जिसमें AD = AB, B और D को मिलाया।
उपपत्ति: ΔABD में, ∠3 > ∠1 ......(i)
(किसी त्रिभुज को बहिष्कोण किसी भी अन्तःकोण से बड़ा होता है।)
ΔBCD में, ∠2 > ∠4 ......(ii)
(∵ बहिष्कोण, किसी भी अन्तःकोण से बड़ा होता है।)
ΔABD में, AB = AD
∠2 = ∠1 ...(iii)
(∵ समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)
समीकरण (i) और (iii) से, ∠3 > ∠2 ...(iv)
समीकरण (ii) और (iv) से, ∠3 > ∠2
और ∠2 > ∠4
∠3 > ∠4

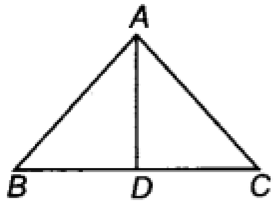
BC > CD (∵ किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सम्मुख भुजा लम्बी होती है)।
CD < BC
⇒ AC – AD < BC [CD = AC – AD]
⇒ AC – AB < BC [AD = AB]
इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि
BC – AC < AB
और BC – AB < AC.
इति सिद्धम्।

प्रश्न 40. AB = AC वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ∠ABC के आसन्न एक बहिष्कोण ∠BOC के बराबर है।

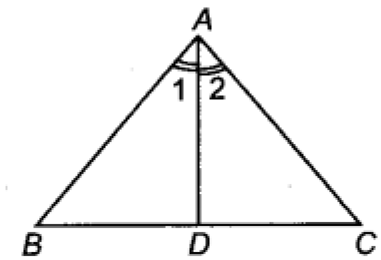


हल: दिया है, ΔABC में,
AB = AC तो AB व AC के द्वारा BC पर बनाया गया कोण ∠B व ∠C समान होंगे।
∠B = ∠C ...(i)
OB तथा OC कोण B व C के क्रमशः समद्विभाजक हैं।
∠ABO = ∠OBC तथा ∠ACO = ∠OCB
∠OBA = ∠OBC = ∠ACO = ∠OCB = x (माना)
त्रिभुजों के तीनों अन्त: कोणों का योग 180° होता है।
∠BOC + ∠OCB + ∠CBO = 180°
∠BOC + x + x = 180°
∠BOC = 180° – 2x ...(ii)
∠MOB = 180°(सरल रेखा कोण)
या ∠MOC + ∠BOC = 180°
∠MOC = 180° – ∠BOC ...(iii)
समीकरण (ii) से ∠BOC का मान समी (iii) मे रखने पर,
∠MOC = 180° – (180° – 2x)
= 180° – 180° + 2x
= 2x
∠BOC = x + x = ∠OBC + ∠OCB = ∠OBA + ∠OBC = ∠ABC
अतः ∠ABC के आसन्न एक बहिष्कोण ∠BOC के बराबर है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 41. चित्र में, AD कोण BAC का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि AB > BD है।



हल: AD, ∠BAC का समद्विभाजक हैं ।
∵ ∠1 = ∠2



ΔADC में,
∠ADB = ∠2 + ∠C
∠ADB > ∠2
∠ADB > ∠1 [∵ ∠1 =∠2]
AB > BD [∵ बड़े कोण की सम्मुख भुजा लम्बी होती है।]
इति सिद्धम्।

Additional Questions

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्न

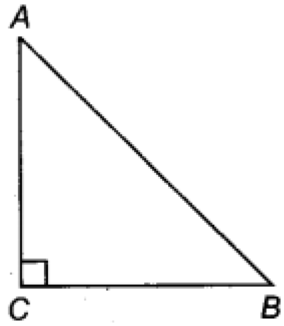
प्रश्न 1. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से होता है:
(A) बड़ा
(B) छोटा
(C) बराबर
(D) कोई नहीं

प्रश्न 2. किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा होती
(A) बड़ी
(B) छोटी
(C) बराबर .
(D) कोई नहीं

प्रश्न 3. किसी त्रिभुज में बराबर कोंणों की सम्मुख भुजाएँ होती हैं:
(A) बड़ी
(B) छोटी
(C) बराबर
(D) कोई नहीं

प्रश्न 4. समरूप व सर्वांगसम हैं :
(A) एक समान
(B) अलग-अलग
(C) कह नहीं सकते
(D) कोई नहीं

प्रश्न 5. समकोण त्रिभुज ABC में कोण C समकोण हो, तो बड़ी भुजा होगी :

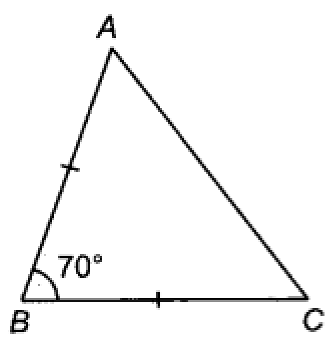


(A) AB
(B) BC
(C) CA
(D) कोई नहीं

प्रश्न 6. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से होता है:
(A) अधिक
(B) समान
(C) कम
(D) आधा

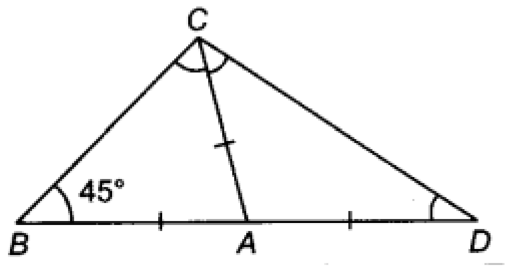
प्रश्न 7. त्रिभुज के तीनों शीर्षालम्बों का योग उसके परिमाप | से होता है :
(A) अधिक
(B) समान
(C) आधा
(D) कम।

प्रश्न 8. चित्र में, यदि AB = BC A एवं ∠B = 70°, तो ∠A का मान होगा:



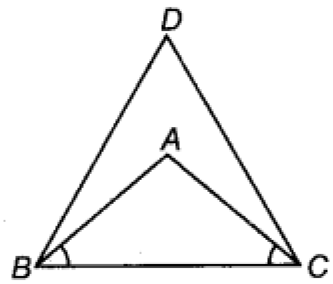
(A) 70°
(B) 40°
(C) 55°
(D) 90°

प्रश्न 9. एक समद्विबाहु त्रिभुज में, AB = AC तथा ∠B = 45° है, एवं भुजा BA को D तक इस प्रकार बढ़ाया कि AB = AD हो, तो ∠BCD की माप होगी



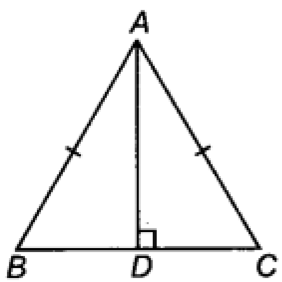
(A) 70°
(B) 90°
(C) 60°
(D) 45°

प्रश्न 10. चित्र में, AB = AC एवं ∠ABD = ∠ACD हो, तो ΔBDC होगा:



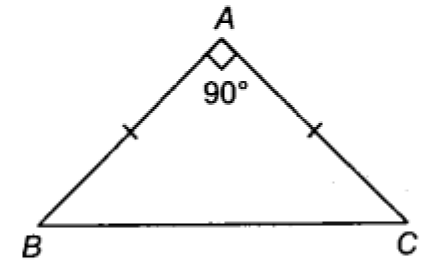
(A) समबाहु त्रिभुज
(B) समद्विबाहु त्रिभुज
(C) समानकोणिक त्रिभुज
(D) विषमबाहु त्रिभुज

प्रश्न 11. ΔABC में, AB = AC एवं AD ⊥ BC हो, तो भुजा AD समद्विभाजक होगी:



(A) कोण A की।
(B) भुजा BC की
(C) कोण A एवं भुजा BC की
(D) किसी की नहीं

प्रश्न 12. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें ∠A = 90° और AB = AC है। ∠B और ∠C का मान होगा:



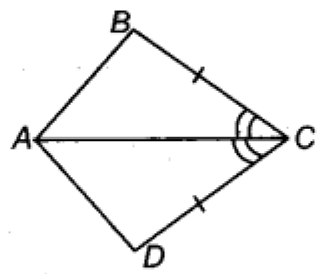
(A) 45°, 45°
(B) 60°, 30°
(C) 30°, 60°
(D) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (B)
2. (B)
3. (C)
4. (A)
5. (B)
6. (C)
7. (B)
8. (A)
9. (B)
10. (A)
11. (C)
12. (A)

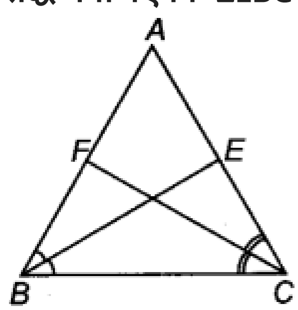
अतिलघूत्तरीय/लघूत्तरीय प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. चित्र में, चतुर्भुज ABCD के ∠ABC = ∠ABD एवं BC = BD हों, तो सिद्ध कीजिए कि ΔABC = ΔABD



हल: दिया है : चित्र में,
∠ABC = ∠ABD, BC = BD
सिद्ध करना है : ΔABC = ΔABD
उपपत्ति: ΔABC और ΔABD में,
BC = BD (दिया है)
∠ABC = ∠ABD
AB = AB (उभयनिष्ठ)
अतः भुजा-कोण-भुजा नियम से
ΔABC = ΔABD
इति सिद्धम्।

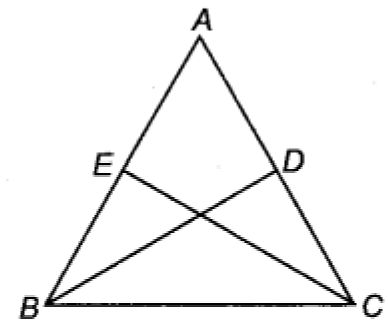
प्रश्न 2. निम्न आकृति में, ΔABC में, AB = AC, BE और CF क्रमशः ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि ΔEBC = ΔFCB



हल: दिया है : ΔABC में,
AB = AC व BF तथा CF क्रमशः ∠B और ∠C के समद्विभाजक हैं।
सिद्ध करना है: ΔEBC = ΔFCB
उपपत्ति: ΔABC में, AB = AC
∠B = ∠C
⇒ ∠ABC = ∠ACB ...(i)

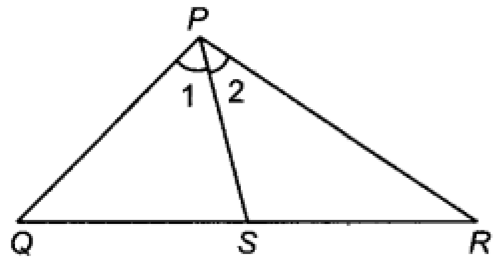
⇒ $\frac{1}{2}$ ∠ABC = $\frac{1}{2}$ ∠ACB
∠EBC = ∠FCB ...(ii)
ΔEBC और ΔFCB में,
∠EBC = ∠FCB (∵ समीकरण (ii) से]
BC = BC (∵ उभयनिष्ठ भुजा]
∠ECB = ∠FBC [∵∠ABC = ∠ACB]
कोण-भुजा-कोण के गुणधर्म से,
ΔEBC = ΔFCB
इति सिद्धम्।

प्रश्न 3. दी गई आकृति में, ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। BD और CE त्रिभुज की दो माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध कीजिये की BD = CE



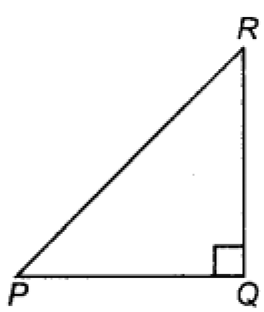
हल: दिया है : समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, AB = AC और BD भुजा AC की तथा CE भुजा AB की माध्यिका है।
सिद्ध करना है : BD = CE
उपपत्ति: ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें
AB = AC तथा ∠ABC = ∠ACB
∠EBC = ∠DCB ...(i)
AB = AC = AB = AC [D, AC का तथा E, AB का मध्य बिन्दु है।]
BE = CD ...(ii)
जब ΔBCE तथा ΔCBD में,
भुजा BE = भुजा CD (सिद्ध किया है)
∠EBC = ∠DCB [समीकरण (1) से]
BC = BC [उभयनिष्ठ भुजा (i)]
भुजा कोण भुजा गुणधर्म में, ΔBCE = ΔCBD
अतः CE = BD (CPCT से)
इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. आकृति में, PR > PQ है और PS कोण PPR को समद्विभाजित करती है। सिद्ध कीजिए कि ∠PSR > ∠PSQ है।



हल: ΔPQR में, PR > PQ दिया है।
या ∠PQR > ∠PRQ [∵ बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।]
या ∠PQR + ∠1 > ∠PRQ + ∠1
या ∠PQR + ∠1 > ∠PRQ + ∠2 ...(i)
[∵ PS, ∠P का कोण समद्विभाजक है : ∠1 = ∠2]
अब ΔPSQ में,
∠PSR = ∠PQS + ∠1
∠PSR = ∠PQR + ∠1 ...(ii)
तथा ΔPSR में,
∠PSQ = ∠PRS + ∠2
∠PSQ = ∠PRQ + ∠2 ...(iii)
समी. (i), (ii) तथा (iii) से
∠PSR > ∠PSQ
इति सिद्धम्।

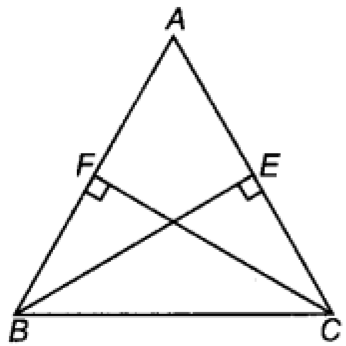
प्रश्न 5. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी भुजा होती है।



हल: माना ΔPQR में, ∠PQR = 90°
परन्तु ∠PQR + ∠QRP + ∠RPQ = 180°
90° + ∠QRP + ∠RPQ = 180°
∠QRP + ∠RPQ = 90°
∠QRP तथा ∠RPQ न्यूनकोण होंगे।

∠QRP < 90°
तथा ∠RPQ < 90° PR > PQ तथा PR > QR
[∵ बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।]
अतः त्रिभुज में कर्ण सबसे लम्बी भुजा होती है।
इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. ABC एक त्रिभुज है। जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर हैं। (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि



(i) ΔABE = ΔACF
(ii) AB = AC अर्थात ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल: (i) ΔABE तथा ΔACF में,
∠AEB = ∠AFC (प्रत्येक 90°]
∠BAE = ∠CAF [उभयनिष्ठ कोण]
तथा BE = CF [दिया है।]
कोण-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,
∵ ΔABE = ΔACF

(ii) ΔABE = ΔACF
AB = AC [∵ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं।]
अत: ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।