15
रेखा गणितीय रचनाएँ
(GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS)

349HDJ

स्केल का उपयोग (Using the Scale)

आप जब कपड़ा खरीदने बाजार जाते हैं तो दुकानदार अक्सर एक लोहे की छड़ से नाप कर कपड़ा देता है। आपने भी लम्बाई नापने के लिए कई बार अपने कम्पास बॉक्स में रखे स्केल का उपयोग किया है। अपने कम्पास बॉक्स में रखे स्केल को देखिए तथा नीचे पूछे गए सवालों का जवाब ढूंढ़िए–

स्केल में मापने के लिए दो प्रकार के पैमाने होते हैं। पता करें कि दोनों पैमानों की इकाई कितने–कितने छोटे खण्डों में बंटी है? सबसे छोटे खण्ड की माप क्या है?

स्केल का उपयोग आप समय–समय पर करते रहते हैं, क्या अपनी कॉपी पर ऐसे तीन रेखाखण्ड खींच सकते हैं, जिनकी लम्बाई क्रमशः 3.5 सेमी, 4.2 सेमी और 8.9 सेमी हो

और भी ऐसे विभिन्न मापों के रेखाखण्ड खींचे।

स्केल का उपयोग आप जीवन में कहाँ–कहाँ करते हैं, सूची बनाएं।

वृत्त बनाना (Drawing A Circle)

वृत्त बनाने के लिए आपने परकार का उपयोग तो किया ही होगा। आप यह भी जानते हैं कि वृत्त क्या होता है? कौन–सी आकृतियां वृत्ताकार हैं। चलिए आस–पास की वृत्ताकार चीजों की सूची बना लें। यह सूची आपने पहले भी बनाई होगी, इस बार और लम्बी सूची बनाएं।

परकार के बारे में जानना (Knowing About the Compass)

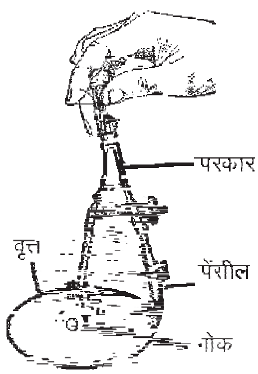
(1) एक परकार की कितनी भुजाएँ होती हैं?

(2) क्या यह भुजाएँ समान लम्बाई की है?

(3) नोकवाली भुजा का क्या उपयोग है? क्या नोक तिरछी होनी चाहिए?

(4) वृत्त बनाते समय यदि नोंक वाली भुजा अपने स्थान से खिसक जाए तो क्या वृत्त ठीक बनेगा?

आप परकार की बनावट एवं उपयोग करने का तरीका समझते हैं। अपनी कॉपी पर 3.2 सेमी, 4.7 सेमी और 5.1 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाएं? कुछ और भी वृत्त अपने मन से सोच कर बनाएं।



चित्र 1

ज्यामितीय बॉक्स के अन्य उपकरण

रेखा खण्ड के अध्याय में आपने डिवाइडर का उपयोग भी किया है। क्या आप बता सकते हैं कि परकार और डिवाइडर का उपयोग क्या–क्या है?

इस प्रकार आपके ज्यामिति बॉक्स में एक चाँदा भी रखा हुआ है। इसे ध्यान से देखिए और दिए गए

प्रश्नों का उत्तर दीजिए –

(1) चाँदा की आकृति कैसी है?

(2) चाँदा का अर्द्धवृत्ताकारनुमा भाग कुल कितने खण्डों में बँटा है।

(3) क्या आप अपनी कॉपी पर 47°, 95° तथा 170° का कोण बना सकते हैं?

अपने ज्यामिति बॉक्स में रखे स्केल, परकार, डिवाइडर और चाँदा से तो परिचित हो ही चुके हैं। क्या आपके ज्यामिति बॉक्स में और कोई उपकरण भी है?

जो दो त्रिभुजाकर उपकरण बचे हैं उन्हें निकाल कर अपनी कॉपी पर रखिए एवं प्रत्येक से सटा कर पेन्सिल को इस प्रकार चलाइए कि उपकरणों की बाहरी आकृति कॉपी पर उभर आए।

दोनों उपकरणों के प्रत्येक कोण को मापिये।

अब तो आप समझ ही चुके हैं कि प्रत्येक त्रिभुजाकार उपकरण का एक कोण 90° है तथा बाकी दोनों कोण एक में 45°-45° के हैं एवं दूसरे में 30° एवं 60° के हैं।

इन दोनों उपकरणों को सेट स्क्वायर (गुनिया) कहा जाता है।

आप सेट स्क्वायर की सहायता से किसी रेखा पर 90° का कोण बनाइए एवं चाँदे की सहायता से कोण को मापकर जाँच कीजिए।

यदि सेट स्क्वायर से बनाये गए कोण का माप ठीक 90° का नहीं है तो कितना अलग है? इस अंतर का कारण सोचिए?

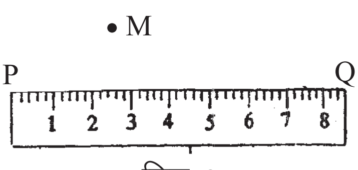
सेट स्क्वायर की सहायता से रचनाएँ करना

किसी दी हुई रेखाखण्ड पर ऐसे बिन्दु से लम्ब खींचना जो रेखा पर स्थित नहीं है:

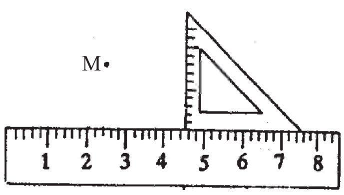
PQ कोई रेखाखण्ड है तथा M इस रेखाखण्ड के बाहर कोई बिन्दु है

रचना के पद

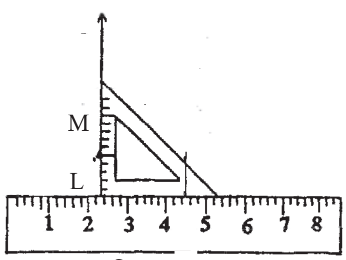
1. स्केल के इस प्रकार रखिए कि उसका एक किनारा PQ अनुदिश रहे।(चित्र–2)
2. स्केल से सटा कर सेटस्क्वायर की एक लम्बवत भुजा को रखिए। ध्यान रहे कि स्केल हिल न पाये। दूसरी भुजा स्केल के लम्बवत है।
3. स्केल को कसकर दबाए रहिए तथा सेटस्क्वायर को स्केल से रगड़ते हुए इस प्रकार चलाइए कि सेटस्क्वायर की दूसरी लम्बवत भुजा दिए गए बिन्दु M को छूने लगे। (चित्र–4)
4. बिन्दू M को छू रही सेटस्क्वायर की भुजा के अनुदिश रेखाखण्ड खींचिए।
5. यह ML रेखाखण्ड PQ पर लम्ब होगी।



चित्र 2



चित्र 3



चित्र 4

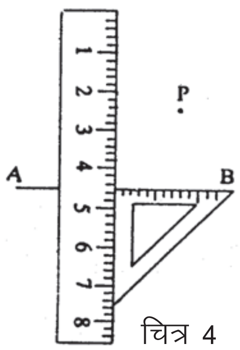
सेट स्क्वायर और स्केल की सहायता से समान्तर रेखाएं खींचना

आपने यह पढ़ा है कि दो समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरी हमेशा समान होती है। आपने सेट स्क्वायर से किसी सरल रेखा पर लम्ब खींचना सीख लिया है। क्या आप सेट स्क्वायर और स्केल की सहायता से अपनी कॉपी पर दी गई सरल रेखा के समान्तर कोई सरल रेखा खींच सकते हैं? प्रयास करके देखिए। आपने किस तरीके से समान्तर रेखा खींची है वह भी लिखिए।

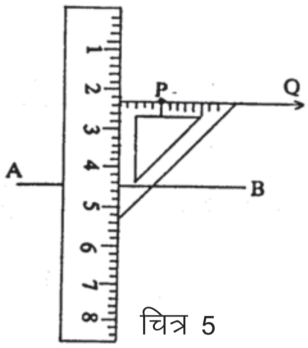
किसी रेखा के बाहर स्थित बिन्दु से इस रेखा के समान्तर दूसरी रेखा खींचना।

रचना के पद :–

AB रेखा के बाहर कोई बिन्दु P है, बिन्दु P से AB के समान्तर एक रेखा खींचनी है।



चित्र 4



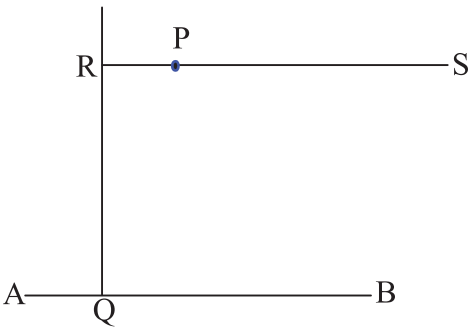
चित्र 5

1. AB रेखा के अनुदिश सेट स्क्वायर की लम्बवत भुजाओं में से एक भुजा को रखिए।
2. सेटस्क्वायर हिलने न पाये, अब सेट स्क्वायर की दूसरे लम्बवत भुजा के अनुदिश सटाकर स्केल को रखिए (चित्र 4)।
3. स्केल को इस तरह से दबाए रहिए कि वह हिल न पाए।
4. स्केल से रगड़ते हुए सेटस्क्वायर को दिये गए बिन्दु की ओर तब तक ले जाइए जब तक कि सेटस्क्वायर की भुजा बिन्दु P को छूने न लगे (ध्यान रहे स्केल सरकने न पाये)
5. अंत में सेटस्क्वायर को उसी बिन्दु पर स्थिर रखकर P से होकर सेटस्क्वायर की भुजा के अनुदिश एक सरल रेखा खीचें। यह PS सरल रेखा AB के समान्तर होगी। चाहे तो अलग–अलग जगह पर AB और PS के बीच की दूरी को माप कर जाँच लें।

किसी रेखा के समान्तर रेखा खींचने का अर्थ यह है कि उस रेखा पर एक लम्ब रेखा खींचना तथा लम्ब रेखा पर फिर से एक लम्ब खींचना। जैसे चित्र में दर्शाया गया है, AB रेखा पर RQ लम्ब है, RQ पर RS फिर से एक लम्ब है। अब AB तथा RS समान्तर है।

किसी दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर दूसरी समान्तर रेखा खींचना।

मान लीजिए AB रेखा से 6 सेमी दूर एक समान्तर रेखा खींचना है।



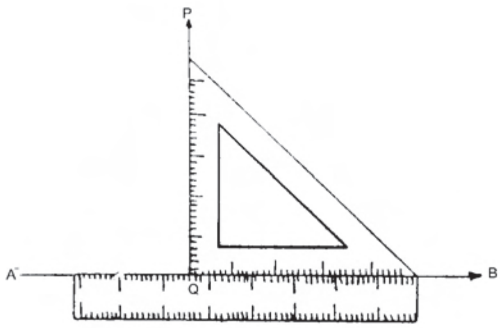
चित्र 6

रचना के पद : (1) AB रेखा खींचिए।

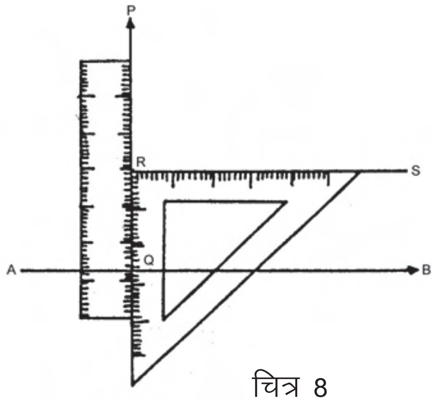
(2) सेटस्क्वायर और स्केल का प्रयोग कर AB पर एक लम्ब खींचिए। (चित्र 7)

(3) PQ पर कोई बिन्दु R इस प्रकार लीजिए कि Q से R की दूरी 6 सेमी हो।

(4) सेटस्क्वायर की सहायता से R पर लम्ब RS खींचिए। RS ही AB के समान्तर होगी तथा AB से 6 सेमी की दूरी पर होगी।



चित्र 7



चित्र 8

अभ्यास (Practice) 1

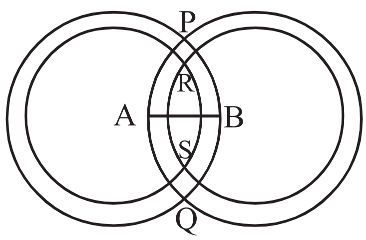
1. 3 सेमी का रेखाखण्ड खींचकर उससे निम्नलिखित दूरी पर समान्तर रेखा खींचिए।
   (i) 1.5 सेमी (ii) 2.0 सेमी (iii) 2.2 सेमी (iv) 3.1 सेमी

परकार और स्केल की सहायता से रेखाखण्ड का समद्विभाजक खींचना :

आइए, एक क्रियाकलाप करें –

✍ क्रियाकलाप (Activity) 1.

किसी माप का एक रेखाखण्ड AB खींचिए, A बिन्दु पर परकार रखकर B तक फैलाइए और A को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। अब इसी नाप का एक वृत्त B को केन्द्र मानकर खींचिए। दोनों वृत्त जिन बिन्दुओं पर कटते हैं उन्हें चिह्नांकित करें एवं नाम दीजिए।



चित्र 9

अब परकार के फैलाव को कुछ कम करके पुनः A बिन्दु पर रखकर एक वृत्त तथा B बिन्दु पर रखकर उसी नाप का दूसरा वृत्त खींचिए ये दोनों वृत्त ऊपर नीचे जिन बिन्दुओं पर एक दूसरे को काटते हैं उन बिन्दुओं को पुनः चिह्नांकित कर R एवं S नाम दीजिए।

इसी प्रकार परकार के फैलाव को कम करते जाइए तथा A एवं B बिन्दुओं से वृत्त बनाते जाइए तथा समान नाप के वृत्तों के कटान बिन्दुओं को चिह्नांकित करते जाइए। नीचे पूछे गए सवालों का जवाब ढूंढ़िए –

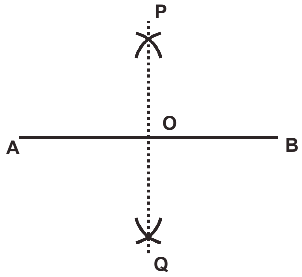
1. आप वृत्तों को क्रमशः छोटा करते जा रहे हैं, क्या दो समान नाप के वृत्त जो बिन्दु A एवं बिन्दु B से खींचे जा रहे हैं, हमेशा एक दूसरे को काटेंगे? यदि नहीं तो किस नाप तक A और B बिन्दुओं से खींचे गए वृत्त एक दूसरे को काटेंगे।
2. आपने जो P, Q, R, S, T, U, ... इत्यादि बिन्दु प्राप्त की हैं, क्या वे सभी समरेख हैं? क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?
3. रेखा AB को रेखा PQ किस अनुपात में काटती है।
4. रेखा AB रेखा PQ के साथ कितने अंश का कोण बनाती है।

उपरोक्त क्रियाकलाप को हल करते समय आपने पाया होगा कि जैसे ही A और B बिन्दुओं से खींचे गए समान आकार के वृत्त की त्रिज्या, रेखाखण्ड की लम्बाई के आधे से कम हो जाती है तो वे एक दूसरे को नहीं काटते। P, Q, R, S, T, U,...... इत्यादि सभी बिन्दु समरेख हैं एवं PQ रेखा AB रेखा को समद्विभाजित करती है तथा इन दोनों रेखाखण्ड के मध्य 90^o का कोण बनता है।

इस प्रकार आप कह सकते है कि किसी दी गई माप की रेखा खण्ड का यदि लम्ब समद्विभाजक खींचना है तो परकार को रेखा की लम्बाई के आधे से ज्यादा फैलाइए तथा रेखाखण्ड के प्रारम्भिक एवं अंतिम बिन्दुओं पर परकार रख वृत्त या वृत्त खण्ड बनाइए। अब दोनों वृत्त या वृत्त खण्डों की जो कटान बिन्दुएं होंगी उन्हें मिलाने पर रेखा का लम्ब समद्विभाजक प्राप्त होगा।

क्रियाकलाप (Activity) 2.

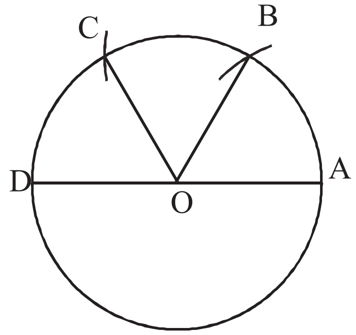
1. अपनी कॉपी में A एवं B को दो बिन्दु लीजिए और उन्हें मिलाइये। A •————————• B
2. बिन्दु A पर परकार की नोक रखकर ABरेखाखण्ड के आधे से अधिक माप लेकर रेखा AB के दोनों ओर माप (वृत्तखण्ड) बनाइये।
3. परकार की नोक को अब B बिन्दु पर रखकर उसी नाप से पुनः AB के दोनों ओर चाप बनाइये जो पूर्व में बनाए गए चाप को काटते है, इन्हें P एवं Q का नाम दीजिए।
4. अब PQको मिलाइए।
5. रेखाखण्ड PQ, AB को जिसे बिन्दु पर काटता है उसे O का नाम दीजिए। अब AO एवं OB का माप कर देखिए। क्या AO = OB ?
6. $\angle POB$ को मापिए। क्या $\angle POB=90^0$,इस प्रकार प्राप्त रेखा PQ रेखा AB का लम्ब समद्विभाजक होगा।



परकार की सहायता से अलग–अलग नाप के कोण बनाना :

क्रियाकलाप 3.

1. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचकर उसके केन्द्र को चिह्नित कीजिए।
2. वृत्त पर कोई बिन्दु A लीजिए। A पर परकार को रखकर, जिस त्रिज्या का आपने वृत्त बनाया है, उसी त्रिज्या का एक चाप वृत्त पर काटिए।
3. जिस बिन्दु पर चाप कटा है उस बिन्दु पर परकार को रखकर उसी त्रिज्या का चाप पुनः काटिए।
4. वृत्त पर चाप काटने की इस प्रक्रिया को दोहराइए।



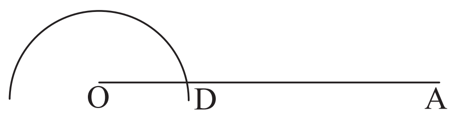
चित्र 10

नीचे दिए प्रश्नों के उत्तर ढूंढिए।

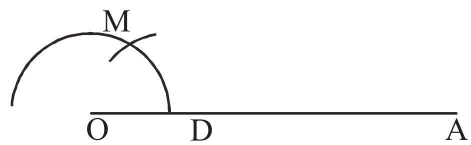
1. वृत्त को उसकी त्रिज्या के नाप वाले कितने चापों में बाँट सकते हैं?
2. केन्द्र से सभी चापों के कटान बिन्दु को मिलाइए। दो क्रमागत कटान बिन्दुओं द्वारा केन्द्र के साथ जो कोण बनाया जा रहा है उनका माप क्या है?
3. क्या सभी कोण समान माप के हैं?
4. यदि सभी कोण समान माप के हैं तो एक कोण का माप क्या होगा?

उपरोक्त क्रियाकलाप के प्रश्नों का उत्तर ढूंढ़ते हुए आपने पाया कि किसी वृत्त पर उसकी त्रिज्या के बराबर माप वाले छः चाप कट सकते हैं। क्रमागत कटान बिन्दुओं द्वारा बनाया गया प्रत्येक कोण 60^o का है। क्या अब आप स्केल और परकार की सहायता से 60^o कोण बना सकते हैं?

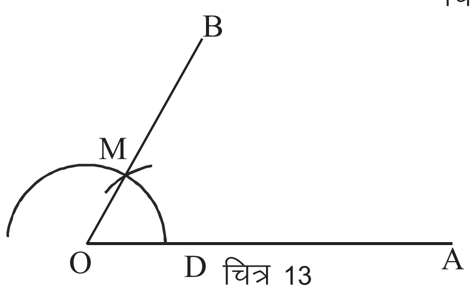
आइए, स्केल और परकार की सहायता से 60^0 का कोण बनायें :–



चित्र 11



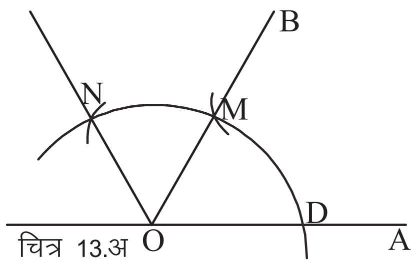
चित्र 12



चित्र 13

1. एक रेखाखण्ड खींचिए तथा इसके बिन्दु O पर एक ऐसा अर्द्धवृत्त बनाइए जो OA को D पर काटता है (चित्र 11)।

2. D पर परकार को रखकर जिस त्रिज्या का अपने अर्द्धवृत्त खींचा है, उसी त्रिज्या का चाप अर्द्धवृत्त पर कटान बिंदु M प्राप्त कीजिए (चित्र 12)।
3. OM को मिलाते हुए B तक बढ़ाइए (चित्र 13)।
4. $\angle AOB = 60^\circ$ होगा।



चित्र 13.अ

आपने पहले भी वृत्त को उसकी त्रिज्या के बराबर समान छः भागों में बाँटा है तथा यह भी देखा है कि प्रत्येक भाग केन्द्र से 60° का कोण बनाता है। ऊपर आपने एक बार चाप काटकर 60° का कोण प्राप्त किया है। इसी चाप को लेकर यदि आप एक बार M बिन्दु से आगे पुनः चाप काटेंगें, तो आपको 120° का कोण मिलेगा तथा तीन बार काटने पर 180°।

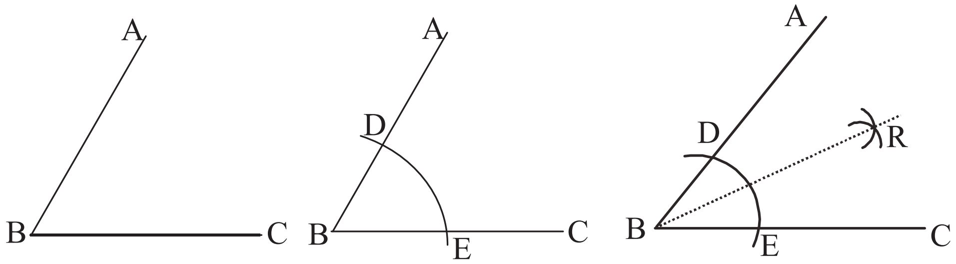
अभ्यास (Practice) 2

1. परकार और स्केल की सहायता से 120° का कोण बनाइए।

कोण का समद्विभाजक खींचना (Bisecting an Angle)

रचना के पद :

1. $\angle ABC$ के बिन्दु B को केन्द्र मानकर एक चाप इस प्रकार काटिए कि वह AB को D बिन्दु पर तथा BC को E बिन्दु पर काटे। (ध्यान रहे कि चाप न ही बहुत छोटी हो और न ही बहुत बड़ी)



चित्र 14 चित्र 15 चित्र 16

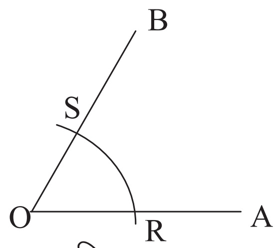
2. D को केन्द्र मानकर एक चाप बनाइए पुनः उसी त्रिज्या का चाप E से इस प्रकार बनाइए कि दोनों चाप एक दूसरे को R पर काटें। (चित्र **16**)
3. B को R से मिलाते हुए आगे बढ़ाइए।
4. रेखा BR ही $\angle ABC$ का समद्विभाजक है।

अभ्यास (Practice) 3

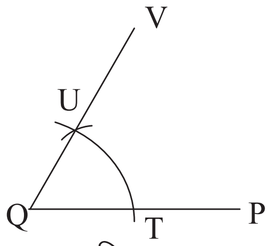
1. 52° का कोण बनाकर उसका समद्विभाजक खींचिए।
2. 170° का कोण बनाकर इसका समद्विभाजन कीजिए।
3. 60° का कोण बनाकर इसका समद्विभाजन कीजिए और नाप कर बताइये कि यह कोण कितने अंश का है।

दिए गए कोण के बराबर कोण की रचना करना।

मान लीजिए ∠AOB दिया हुआ है, ∠AOB के बराबर एक दूसरी कोण की रचना करनी है।



चित्र 17



चित्र 18

रचना के पद –

1. QP रेखा खींचिए। Q बिन्दु पर ∠AOB के बराबर कोण बनाना है।
2. परकार को थोड़ा सा फैलाकर O बिन्दु पर रखिए तथा इस प्रकार का एक चाप काटिये जो OA और OB दोनों भुजाओं को क्रमशः R एवं S पर काटता है।(चित्र 17)
3. इसी नाप का चाप Q बिन्दु पर परकार रखकर भी काटिए जो QP को T पर काटता है।
4. परकार को R पर रखकर S तक फैलाइए एवं उसी माप का चाप T पर रखकर TU काटिए और U प्राप्त कीजिए (चित्र 18)
5. QV को मिलाते हुए R तक आगे बढ़ाइए।
   ∠PQV = ∠AOB

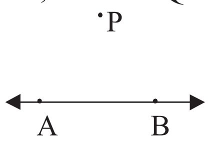
अभ्यास (Practice) 4

1. चाँदा की सहायता से 55° का एक कोण बनाइए तथा इसके बराबर एक कोण परकार एवं स्केल की सहायता से बनाइए।
2. चाँदा की सहायता से 120° का कोण बनाकर इसके बराबर एक कोण परकार एवं स्केल की सहायता से बनाइए।

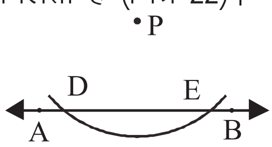
रेखाखंड के बाहर किसी बिन्दु से रेखाखंड पर लम्ब खींचना

रचना के चरण

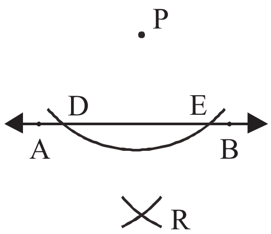
1. एक रेखा AB खींचिए और इसके बाहर बिन्दु P लीजिए।
2. P को केन्द्र मानकर सुविधाजनक त्रिज्या का एक चाप काटिए जो AB को D और E पर काटे। (चित्र 20)
3. D और E को केन्द्र मानकर सुविधाजनक त्रिज्या से दो चाप काटिए जो एक दूसरे को R पर काटें। (चित्र 21) PR को मिलाकर बढ़ाइए।
   इस प्रकार PR ⊥ AB
4. PR, AB को Q पर मिलता है (चित्र 22)।



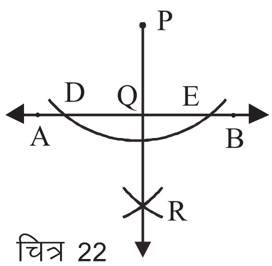
चित्र 19



चित्र 20



चित्र 21

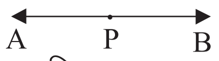


चित्र 22

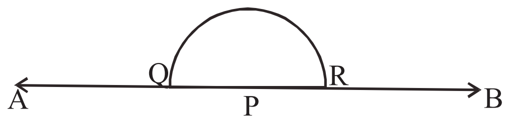
रेखाखंड पर स्थित बिन्दु से रेखाखंड पर लम्ब खींचना।

रचना के चरण (Steps of Construction) :

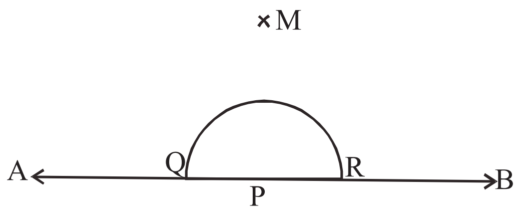
1. सर्वप्रथम एक रेखाखंड AB खींचिए जिस पर बिन्दु P चिह्नित कीजिए।
2. बिन्दु P पर परकार की नोक रखिए तथा किसी भी नाप की त्रिज्या लेकर रेखाखंड AB पर अर्द्धवृत्त काटिए जो कि रेखाखंड AB को दो बिन्दुओं Q तथा R पर काटता है। (चित्र 24)



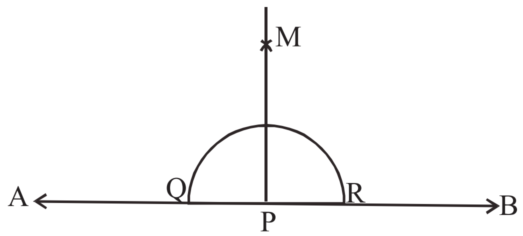
चित्र 23



चित्र 24



चित्र 25



चित्र 26

3. अब R पर परकार रखिए और किसी भी माप की त्रिज्या लेकर अर्द्धवृत्त के ऊपर की ओर एक चाप काटिए। पुनः 'Q' पर परकार रखकर उसी चाप की त्रिज्या लेकर अर्द्धवृत्त के ऊपर ओर एक और चाप काटिए, जो आपस में बिन्दु M पर काटते हैं। (चित्र 25)
4. बिन्दु M को P से मिला दीजिए। (चित्र 26)

   प्राप्त रेखाखंड PM ही वह लम्ब रेखा है।

   अर्थात् $PM \perp AB$

प्रश्नावली (EXERCISE) 15

34ISF7

1. 5 सेमी का एक रेखाखंड खींचिए इससे 3 सेमी की दूरी पर एक समान्तर रेखा खींचिए।
2. सेटस्क्वायर की सहायता से निम्नलिखित कोणों की रचना कीजिए।
   (i) 45° (ii) 60° (iii) 30° (iv) 90° (v) 120°
3. निम्नलिखित नाप का रेखाखंड लेकर उसका समद्विभाजन कीजिए।
   (i) 5 सेमी (ii) 4.5 सेमी (iii) 3.6 सेमी (iv) 5.4 सेमी
4. परकार व स्केल की सहायता से निम्नलिखित कोण बनाइये।
   (i) 60° (ii) 90° (iii) 120° (iv) 150°
5. परकार व स्केल की सहायता से उपरोक्त कोणों का समद्विभाजक कीजिए।
6. चाँदें की सहायता से निम्नलिखित नाप का कोण बनाइये एवं परकार व स्केल की सहायता से उसके समान कोण की रचना कीजिए।
   (i) 68° (ii) 92° (iii) 108° (iv) 126° (v) 153°