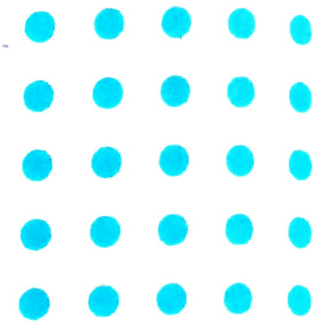
अध्याय – 5

वर्ग और वर्गमूल

(SQUARE AND SQUARE ROOT)

5.1 भूमिका



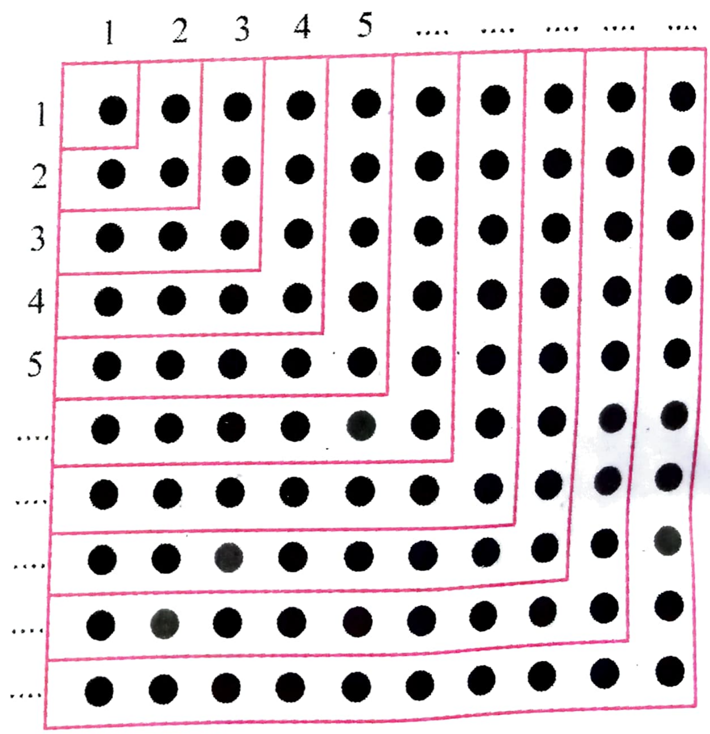
दिए गए चित्र के प्रत्येक पंक्ति (आड़ी) एवं स्तम्भ (खड़ी) में बिन्दुओं की संख्या समान हैं। इनमें से प्रत्येक में 5–5 बिन्दुएँ हैं, इस जमावट में बिन्दुओं की कुल संख्या कितनी होगी? ....

आपको इस प्रकार बिन्दु के जाल द्वारा बनी आकृति कैसी लग रही है? ....

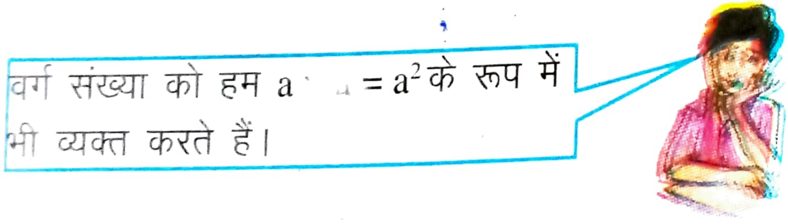
हाँ यह वर्ग के समान है?

आइए, जियो–बोर्ड पर रबरबैंड की सहायता से वर्गाकार आकृतियाँ बनायें।

सामने जियो–बोर्ड (Geo-board) दिया गया है इसमें समान दूरी पर पिन लगी होती है।



रबड़ बैंड की सहायता से प्रत्येक पंक्ति तथा स्तम्भ में समान संख्या में दो–दो, तीन–तीन, चार–चार, आदि बिन्दु लेकर कुछ वर्गाकार पैटर्न (प्रतिरूप) बनाइए तथा दी गई तालिका को भरिए।



सारणी 5.1

क्रमांक	प्रत्येक पंक्ति या स्तम्भ में बिन्दुओं की संख्या	वर्गाकार पैटर्न के अन्दर बिन्दुओं की कुल संख्या
1.	5	25
2.	2	....
3.	3	9
4.	4	....
5.	....	....
6.	....	....

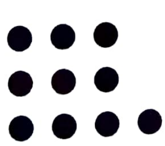
अंतिम स्तम्भ में आयी सभी संख्याएँ ऐसी हैं जो एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त की गई है। $25 = 5 \times 5$, $4 = 2 \times 2$ ये सभी संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25..... पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square Number) कहलाती है। आप भी 5 अन्य पूर्ण वर्ग संख्याएं लिखिए ....

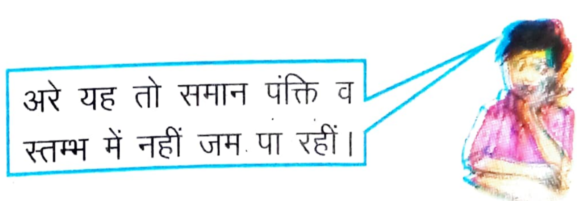
यह संख्याएँ तो हमने स्वयं पूर्ण वर्ग संख्याओं के रूप में बनाई हैं किन्तु यदि हमें कोई संख्या दी जाए तो हम कैसे पता करेंगे कि वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं? सोचिए।

5.2 पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

आप 9 बिन्दुओं को तीन–तीन बिन्दुओं की तीन पंक्तियों में जमा सकते हैं, इसी प्रकार 16 बिन्दुओं को चार–चार की चार पंक्तियों में जमा सकते हैं, क्रमशः 9 व 16 बिन्दु लेकर जमाकर देखे। इसी प्रकार क्या आप 10, 11, 12 बिन्दु इस तरह जमा सकते हैं कि कुल पंक्तियों की संख्या और प्रत्येक पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर हो। सोचिए?

आपने ठीक निकाला हम इन संख्याओं को समान खड़ी व आड़ी पंक्तियों में नहीं जमा सकते।





आपने जियो बोर्ड में पैटर्न से जाना था कि वे संख्याएँ जो समान पंक्ति व स्तम्भ के रूप में जमाई जा सकती है वह पूर्ण वर्ग संख्याएँ होती हैं।

10, 11, 12 बिन्दु होने पर तो हम इस प्रकार जमा कर देखने का प्रयास कर सकते हैं किन्तु यदि संख्या 109, 784 हो या और भी बड़ी हो तो इस तरह बिन्दुओं को जमा कर जाँचना कठिन हो सकता है।

पूर्ण वर्ग संख्या पहचानने के लिए एक और तरीका है, **अभाज्य गुणनखण्ड विधि।**

आपने अभाज्य गुणनखण्ड के बारे में पढ़ रखा है आइए पहले उसका स्मरण करें।

आप जानते हैं कि किसी भी संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड किया जा सकता है।

अर्थात् ऐसे गुणनखण्ड जिन्हें और छोटे भागों में विभाजित नहीं किया जा सके जैसे–

सोचिए क्या 1 अभाज्य संख्या है? अपने दोस्तों से इस पर चर्चा कीजिए।

2	12
2	6
3	3
	1

$12 = 2 \times 2 \times 3$

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

स्वयं करके देखिए

1. 16 व 20 के अभाज्य गुणनखण्ड
2. 64 व 72 के अभाज्य गुणनखण्ड

16 व 64 के तथा 20 व 72 के अभाज्य गुणनखण्डों को देखकर बताइए कि उनमें क्या अन्तर हैं? ....

आओ इस अन्तर को जानें।

5.2.1 अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

पूर्ण वर्ग संख्या में पंक्तियों की संख्या और पंक्ति में बिन्दुओं की संख्या बराबर है। जैसे पूर्ण वर्ग संख्या $36 = \underline{6 \times 6} = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$, $25 = \underline{5 \times 5}$, $49 = \underline{7 \times 7}$ इत्यादि। दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों में आपको क्या पैटर्न मिल रहा है?

जिस भी संख्या में इस तरह के गुणनखण्डों के जोड़े पूरे–पूरे बन जाएं वहीं पूर्ण वर्ग संख्या होगी। इसी तरह आपने देखा होगा कि 16 व 64 के अभाज्य गुणनखण्डों में आपको अभाज्य संख्याओं के जोड़े मिले होंगे, पर 20 व 72 में सभी गुणनखण्ड जोड़े में नहीं मिले।

5.2.3 अभाज्य गुणनखण्डन विधि (Prime Factorisation Method)

इस विधि में दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड करके जोड़े बनाते हैं। जिन संख्याओं में सभी अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं, वे पूर्ण वर्ग संख्या होंगी।

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

उदाहरण–1 क्या 256 एक पूर्ण वर्ग या अपूर्ण वर्ग है?

हल : $256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$

$= 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2$

हम देखते हैं कि 256 के सभी अभाज्य गुणनखंडों को ऊपर दर्शाए अनुसार जोड़े बन सकते हैं $\therefore$ 256 एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

यह $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ का वर्ग है।

2	200
2	100
2	50
5	25
	5

उदाहरण–2. क्या 200 एक पूर्ण वर्ग है।

हल : $200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 2 \times 5^2$

यदि हम 200 के अभाज्य गुणनखंडों को युगलों अथवा वर्गों में समूहित करें तो हम यह पाते हैं कि हमारे पास एक गुणनखंड 2 बाकी बच जाता है। अतः 200 परिपूर्ण वर्ग नहीं है।

स्वयं करके देखिए

1. क्या निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   (i) 400 (ii) 600

2. दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात करें।

   (i) 20 और 30 (ii) 50 और 60

3. आगे दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

सारणी – 5.2

क्र.सं.	संख्या	अभाज्य गुणनखण्ड	क्या सभी समान अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन रहे है।	पूर्ण वर्ग है या नही
1.	36	2 × 2 × 3 × 3	हाँ	पूर्ण वर्ग है
2.	32	2 × 2 × 2 × 2 × 2	नही	नही
3.	16			
4.	39			
5.	40			
6.	49			
7.	56			
8.	64			

5.3 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

निम्नलिखित सारणी का अध्ययन करें

संख्या	संख्या का वर्ग
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

संख्या	संख्या का वर्ग
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

I उपर्युक्त सारणी से वर्ग संख्याओं के इकाई के अंकों को देखें। क्या आपने कोई पैटर्न देखा?

II हम पाते हैं कि प्रत्येक वर्ग संख्या में इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 और 9 हैं, किन्तु किसी भी वर्ग संख्या के इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 और 8 नहीं है। क्या 12,22, 32, 23, 33, 78 आदि संख्याएं पूर्ण वर्ग हैं? हाँ अथवा नहीं कारण सहित बताइये। अतः हम कह सकते हैं कि जिस संख्या के इकाई के स्थान पर 2, 3, 7 और 8 है वह संख्या कभी भी पूर्ण वर्ग नहीं हो सकतीं।

200, 111, 54, 56, 89 में से कौन सी पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? अतः हम कह सकते हैं कि कुछ संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6, 9 होता है पूर्ण वर्ग संख्याएँ हो सकती हैं।

पीछे की सारणी से खोजिए। सम संख्याओं तथा विषम संख्याओं के वर्ग में आपको कोई पैटर्न मिलता है। --

----

हाँ, आपने ठीक ढूँढ़ा। सम संख्याओं के वर्ग सम व विषम संख्याओं के वर्ग विषम संख्या ही मिलते हैं। सोचिए इसका कारण क्या है? ------------------------------------

----

स्वयं करके देखिए

1. निम्न संख्याओं में से बिना अभाज्य गुणनखण्ड किये बताएँ कि कौन–सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हो ही नहीं सकती।

   (i) 522 (ii) 237 (iii) 23 (iv) 100 (v) 58

2. चार अंकों की पाँच संख्याएँ अपने से लिखिए। किन संख्याओं के बारे में आप दावे के साथ कह सकते हैं कि ये पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं?

3. रिक्त स्थान को भरें।

   (i) सम संख्या का वर्ग .... संख्या होते हैं।

   (ii) विषम संख्या का वर्ग .... संख्या होते हैं।

4. निम्नलिखित में से किन संख्याओं के वर्ग विषम/सम संख्या होंगे। क्यों?

   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

5.3.1 निम्न सारणी को देखिए।

संख्याएँ	वर्ग
1	1
9	81
11	121
19	361
21	441

स्वयं करके देखिए

निम्न में से कौन–सी संख्या के इकाई के स्थान पर 1 होगा?

(i) 23^2 (ii) 27^2 (iii) 22^2

(iv) 61^2 (v) 39^2

सारणी से स्पष्ट है कि जिस संख्या का इकाई का अंक 1 या 9 आता है उस संख्या के वर्ग का इकाई का अंक भी 1 ही होता है।

5.3.2 निम्न वर्ग सारणी को देखिए।

संख्याएँ	वर्ग
4	16
6	36
14	196
16	256

स्वयं करके देखिए

निम्न में से किस संख्या के इकाई के स्थान पर 6 होगा?

(i) 29^2 (ii) 19^2 (iii) 24^2

(iv) 36^2 (v) 34^2 (vi) 26^2

सारणी से स्पष्ट है कि जिस संख्या का इकाई का अंक 4 या 6 है उस संख्या के वर्ग का इकाई का अंक 6 होता है।

क्या आप इस प्रकार के कुछ और नियम, सारणी में लिखी गई संख्याओं एवं उनके वर्गों के अवलोकन से ज्ञात कर सकते हैं। ....

5.3.3 निम्नलिखित वर्ग सारणी पर विचार कीजिए

संख्याएँ	वर्ग
10^2	100
20^2	400
30^2	900
100^2	10000
200^2	40000
400^2	160000

मेरे पास 1 शून्य है।

मेरे पास दो शून्य हैं।

मेरे पास दो शून्य हैं।

मेरे पास चार शून्य हैं।

स्वयं दहाई की अन्य संख्याएँ लेकर उनके वर्ग निकालें। क्या उनके वर्गों में भी आपको दो शून्य मिलते हैं? ....

सोचिए यदि किसी संख्या में तीन शून्य हो तो उसके वर्गों में कितने शून्य होंगे?

स्वयं करके देखिए

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्य की संख्या क्या होगी?

(i) 50 (ii) 400 (iii) 5000

5.4 कुछ रोचक प्रतिरूप (Some Interesting Pattern)

5.4.1 निम्नलिखित दो क्रमागत वर्ग संख्याओं के अन्तर को देखिए।

$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$	$2 + 1$	$=$	3
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	$3 + 2$	$=$	5
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$	$4 + 3$	$=$	7
$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$	$5 + 4$	$=$	9

....

उक्त पैटर्न से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

उक्त संबंधों के आधार पर क्या आप बता सकते हैं कि

$8^2 - 7^2 =$ ---------------------- $25^2 - 24^2 =$ ----------------------

$9^2 - 8^2 =$ ---------------------- $225^2 - 224^2 =$ ----------------------

$12^2 - 11^2 =$ ---------------------- $50^2 - 49^2 =$ ----------------------

$15^2 - 14^2 =$ ----------------------

ये उत्तर आपने किस आधार पर ज्ञात किए।

5.4.2 निम्नलिखित प्रतिरूपों का प्रेक्षण करें

$15^2 = 1 \times 2$ (सैकड़े) $+ 5^2 = 225$

$25^2 = 2 \times 3$ (सैकड़े) $+ 5^2 = 625$

$35^2 = 3 \times 4$ (सैकड़े) $+ 5^2 = 1225$

$45^2 =$ ....

नियम

$(n\,5)^2 = (10n + 5)^2$

$= 100\,n^2 + 100\,n + 25$

$= 100\,n\,(n + 1) + 25$

$= n\,(n + 1)$ सैकड़े $+ 25$

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग निकाले।

(i) 75 (ii) 105 (iii) 85 (iv) 95

5.4.3 निम्न पर विचार कीजिए :

1 (एक विषम संख्या) = 1 = 1^2

1 + 3 (पहली दो विषम संख्याओं का योग) = 4 = 2^2

1 + 3 + 5 (पहली तीन विषम संख्याओं का योग) = 9 = 3^2

1 + 3 + 5 + 7 (.........) = 16 = 4^2

1 + 3 + 5 + 7 + 9 (..........) = 25 = 5^2

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 (.........) = 36 = 6^2

अतः हम कह सकते हैं कि पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 है।

उदाहरण–3. 1 से 51 तक की विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

1 से 51 के बीच कितनी विषम संख्याएँ है। आप अंतिम संख्या लें जैसे यहाँ 51 को 2 से भाग करें

$\frac{51}{2}$ = 25 पूरा + 1 शेषफल

अतः = 26 विषम संख्याएँ

हल : 1+3+5+............51

यहाँ = n = 26

अतः 1 से लगातार विषम संख्याओं के n पदों का योगफल = n^2

इसलिए□1 + 3 + 5 + ... + 51 = $(26)^2$ = 676

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात करें

(i) 1 + 3 + ... + 23 (ii) 1 + 3 + 5 + ... + 65

अब ज़रा सोचिए यदि आप 676 में से क्रमागत विषम संख्याएँ घटायेंगे तो क्या होगा?

26 क्रमागत विषम संख्या यानि 1 से 51 तक घटाने पर आपको शून्य प्राप्त होगा। क्या इस पैटर्न का उपयोग आप पूर्ण संख्याओं को ज्ञात करने में कर सकते हैं।

9–1 = 8; 8–3 = 5; 5–5 = 0; अतः 9 पूर्ण वर्ग संख्या है।

जबकि 14–1 = 13; 13–3 = 10; 10–5 = 5; 5–7 = –2 अतः 14 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

5.4.4 पाइथोगोरस त्रिक

नीचे दिए गए प्रतिरूप को समझिए–

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

अतः $3^2 + 4^2 = 5^2$

इसी प्रकार $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

अतः $8^2 + 15^2 = 17^2$

संख्या (3, 4, 5) एवं (8, 15, 17) आदि के समूह को पाइथोगोरस त्रिक कहते है। ऐसी संख्याएं जिनमें दो संख्याओं के वर्ग का जोड़ तीसरी वर्ग संख्या के बराबर हो, पाइथोगोरस त्रिक कहलाते हैं। आप अन्य संख्याओं के वर्गों को लेकर जोड़ें और देखें क्या यह सभी संख्याओं में होता है।

> $1^2 + 2^2$
> $= 1 + 4 = 5$
> क्या 5 वर्ग संख्या है

स्वयं करके देखिए

नीचे दी गई संख्याओं में से कौन–कौन सी पाइथोगोरस त्रिक है।

(i) (6,8,10) (ii) (3,8,9) (iii) (5,12,13)

5.4.5 निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों का अवलोकन कीजिए।

1^2 = 1

11^2 = 1 2 1

111^2 = 1 2 3 2 1

1111^2 = 1 2 3 4 3 2 1

11111^2 = ...

111111^2 = ...

संख्याओं 121, 12321, 1234321, 123454321 आदि के कुछ अतिरिक्त रोचक गुण है। इस प्रकार की सभी संख्याओं के अंकों का योग एक पूर्ण वर्ग होता है। जैसे :–

$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$

....

स्वयं करके देखिए

प्रतिरूप के प्रयोग से निम्न संख्याओं की वर्ग संख्याएँ लिखिए–

(i) 11111 (ii) 1111111 (iii) 1111

5.4.6 अन्य रोचक प्रतिरूप

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$666667^2 =$ ....

$666666667^2 =$ ....

क्रमागत वर्ग संख्याओं को आप निम्न तरह से बना सकते हैं जैसे–

$20^2 = 400$

$21^2 = 20^2 + 20 + 21 = 441$

अब सोचो अगर आपको 32 का वर्ग इस विधि से निकालना हो तो

$30^2 = 900$

$31^2 = 30^2 + 30 + 31 = 961$

$32^2 = 31^2 + 31 + 32 = 1024$

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 42 (ii) 46 (iii) 58 (iv) 98

(v) 94 (vi) 45

2. निम्नलिखित का वर्ग निकालें

(i) 25 (ii) 55 (iii) 95 (iv) 105 (v) 115

3. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन–सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग है? जाँच कीजिए।

(i) 256 (ii) 360 (iii) 324 (iv) 400

4. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन–कौन पूर्ण वर्ग है?

13, 16, 17, 48, 49, 64, 72, 343, 373758

5. निम्नलिखित में कौन सम संख्या के वर्ग हैं?

169, 196, 256, 1296, 6561

6. निम्नलिखित संख्याओं में से कौन-सी पूर्ण वर्ग हैं?

400, 4000, 330550, 12345600000

7. कोष्ठक में सही संख्या लिखें :

(a) $24^2 - 23^2$ = ☐ (b) $102^2 - 101^2$ = ☐

(c) $501^2 - 500^2$ = ☐ (d) $400^2 - 399^2$ = ☐

8. निम्नलिखित में कौन-सा त्रिक पाइथागोरस त्रिक है?

(1, 2, 3), (3, 4, 5), (6, 8, 10), (1, 1, 1), (2, 2, 3,), (15, 36, 39)

9. निम्नलिखित प्रतिरूप का प्रेक्षण करके छुटी हुई संख्याओं को ज्ञात करें :

1^2	+	2^2	+	2^2	=	3^2
2^2	+	3^2	+	6^2	=	7^2
3^2	+	4^2	+	12^2	=	13^2
4^2	+	$.....^2$	+	$.....^2$	=	21^2
5^2	+	6^2	+	$.....^2$	=	31^2
6^2	+	7^2	+	....	=	......

10. विषम संख्याओं के क्रमिक घटाव की क्रिया द्वारा निम्नलिखित संख्याओं की जाँच करें कि कौन-सी संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है?

(i) 81 (ii) 121 (iii) 144 (iv) 36

11. निम्नलिखित संख्याओं में से किन-किन संख्या का वर्ग विषम संख्या होगा?

(i) 531 (ii) 5436 (iii) 3249 (iv) 82004

12. योग संक्रिया किये बिना योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11

(ii) 1 + 3 + 5 + ... + 51

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 101

(iv) 7 + 9 + 11 + 13 + ... + 21

13. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 25 (ii) 64 (iii) 272

(iv) 799 (v) 5423 (vi) 2467

(vii) 5438 (viii) 99880 (ix) 43546

14. निम्नलिखित संख्याएँ स्पष्ट रूप से पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं हैं, इसका कारण दीजिए।

(i) 1052 (ii) 23457 (iii) 54328 (iv) 325473

(v) 25000 (vi) 743522 (vii) 543000 (viii) 56430

5.5 भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना (Division Method)

जब संख्याएँ बड़ी होती हैं तब अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना कठिन हो जाता है। एक अन्य तरीके से भी हम वर्गमूल निकाल सकते हैं। जिसे दीर्घ विभाजन विधि कहते हैं। जिससे बड़ी संख्याओं का वर्गमूल निकाला जाता है। इसके लिए हमें वर्गमूल में अंकों की संख्या को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

निम्नलिखित साारणी को देखें :

संख्या (वर्गमूल)	वर्ग संख्या	
1	$1^2 = 1$	जो 1 अंक की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
3	$3^2 = 9$	जो 1 अंक की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
4	$4^2 = 16$	जो 2 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
9	$9^2 = 81$	जो 2 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
10	$10^2 = 100$	जो 3 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
31	$31^2 = 961$	जो 3 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।
32	$32^2 = 1024$	जो 4 अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है।
99	$99^2 = 9801$	जो 4 अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या है।

उपर्युक्त सारणी का अवलोकन करने से पता चलता है कि यदि एक पूर्ण वर्ग संख्या 1 या 2 अंकों की है तब इसका वर्गमूल 1 अंक की होगी और यदि पूर्ण वर्ग संख्या 3 या 4 अंकों की है तब इसका वर्गमूल 2 अंकों का होगा। क्या आप 5 या 6 अंकों वाली पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

क्या हम कह सकते हैं कि एक पूर्ण वर्ग संख्या में यदि n अंक है तो उसके वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक होंगे जब $n =$ सम हों या $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ अंक होंगे जब $n =$ विषम हों?

निम्न विधि किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने में उपयोगी होगी।

576 का वर्गमूल दीर्घ विभाजन विधि द्वारा ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरणों पर विचार करें।

क्या आप इस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?

चरण 1 : इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म पर बार लगाएँ। यदि अंकों की संख्या विषम है तब बाएँ तरफ एक अंक पर बार लगाएँ। जैसे : $\overline{5}\,\overline{76}$ इस प्रकार लिखते हैं।

चरण 2 : वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाईं तरफ के बार के नीचे लिखी संख्या के बराबर या कम हो ($2^2 < 5 < 3^2$) सबसे बाईं बार के नीचे भाज्य (यहाँ 5) के साथ भाजक और भागफल के रूप में इस संख्या को लें। भाग करें और शेषफल ज्ञात करें (इस स्थिति में शेषफल 1 है।)

```
     |  2
  ---+------
  2  | 5̄ 7̄6̄
     |-4
  ---+------
     | 1
```

चरण 3 : अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखें (अर्थात् इस स्थिति में 76 हैं।) अतः अगली भाज्य 176 होगी।

```
     |  2
  ---+------
  2  | 5̄ 7̄6̄
     |-4
  ---+------
     | 1 7 6
```

चरण 4 : भाजक के साथ भाजक के बराबर जोड़ें (अथवा भाजक को दुगुना करें।) और इसे इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखें।

```
     |  2
  ---+------
  2  | 5̄ 7̄6̄
  2  |-4
  ---+------
  4_ | 1 7 6
```

चरण 5 : रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाएँ जो कि भागफल में नया अंक होगा और नये भाजक को नये भागफल से गुणा करने पर गुणनफल भाज्य के बराबर या भाज्य से कम होगी।

इस स्थिति में $43 \times 3 = 129$

चूंकि $44 \times 4 = 176$ अतः शेषफल प्राप्त करने के लिए एक नया अंक 4 चुनते हैं।

```
     |  24
  ---+------
  2  | 5̄ 7̄6̄
  2  |-4
  ---+------
  44 | 1 7 6
  4  | 1 7 6
  ---+------
     |     0
```

चरण 6 : क्योंकि शेषफल शून्य है और दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है। अतः
$\sqrt{576} = 24$

उदाहरण–4. अब 7056 को हल करें :

चरण 1 : इकाई स्थान से प्रारंभ करते हुए प्रत्येक युग्म के ऊपर बार लगाएँ (जैसे $\overline{70}\ \overline{56}$ इस प्रकार लिखते हैं।)

चरण 2 : एक सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो सबसे बाईं तरफ के बार के नीचे लिखी संख्या से कम या बराबर हो ($8^2 < 70 < 9^2$) इस संख्या को भाजक और सबसे बाईं ओर बार के नीचे संख्या को भाज्य के रूप में लें। भाग दे और शेषफल (इस स्थिति में 6 है।) ज्ञात करें।

	8
8	$\overline{70}\ \overline{56}$
	– 64
	6

चरण 3 : अगली बार के नीचे की संख्या को शेषफल के दाएँ लिखें। (इस स्थिति में 56 है।) अतः नया भाज्य 656 होगी।

	8
8	$\overline{70}\ \overline{56}$
	– 64
	6 56

चरण 4 : भाजक के साथ भाजक के बराबर जोड़ें (अथवा भाजक को दुगुना करें) और इसे इसके दाएँ में खाली स्थान के साथ लिखें।

	8
8	$\overline{70}\ \overline{56}$
8	– 64
16	656

चरण 5 : रिक्त स्थान को भरने के लिए सबसे बड़े संभावित अंक का अनुमान लगाएँ जो अंक भागफल में नया होगा। इस प्रकार नया अंक जब भागफल से गुणा होता है तब गुणनफल भाज्य के बराबर या छोटा होगा। इस स्थिति में हम देखते हैं कि $164 \times 4 = 656$ अतः भागफल में नया अंक 4 है।
शेषफल ज्ञात करें।

	84
8	$\overline{70}\ \overline{56}$
8	– 64
164	656
4	– 656
	0

नोट : यदि इसके बाद भी शेष बचे और संख्या के बार के नीचे की संख्या उतारनी पड़े तो भाजक के इकाई अंक को भाजक में जोड़कर चरण 5 का नियम लगाते हैं। यह क्रिया

तब तक चलती है जब तक की शेषफल शून्य न हो जाए। यह नियम पूर्ण वर्ग संख्या के लिए है।

चूँकि शेषफल शून्य है और कोई बार नहीं है अतः $\sqrt{\overline{70}\,\overline{56}} = 84$ है।

5.6 संख्या का अनुमान

उपर्युक्त पूर्ण वर्ग संख्या 576 और 7056 के वर्ग में अंकों की संख्या ज्ञात करने के लिए बार का उपयोग करते हैं।

$\sqrt{\overline{5}\,\overline{76}} = 24$ और $\sqrt{\overline{70}\,\overline{56}} = 84$

इन दोनों संख्याओं 576 और 7056 में बार की संख्या 2 है और उनके वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है।

क्या आप 25600 के वर्गमूल में अंकों की संख्या बता सकते हैं? बार लगाने पर हम $\overline{2}\,\overline{56}\,\overline{00}$ में 3 बार प्राप्त करते हैं। अतः 25600 का वर्गमूल 3 अंक का होगा।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित संख्याओं के बिना गणना किये वर्गमूल में अंकों की कुल संख्या ज्ञात करें।

(i) 19600 (ii) 6400000000 (iii) 4401604

उदाहरण–1. वह छोटी–सी–छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 16180 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल : सबसे पहले दीर्घ विभाजन विधि से ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। इस प्रकार हमें 51 शेषफल प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि 127^2, 16180 से 51 कम है। अर्थात् यदि हम 16180 में से 51 घटा देते हैं तो हमें एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होती है। अतः वांछित पूर्ण वर्ग संख्या $= 16180 - 51 = 16129$ है तथा $\sqrt{\overline{1}\,\overline{61}\,\overline{29}} = 127$

	127
1	$\overline{1}\,\overline{61}\,\overline{80}$
1	– 1
22	061
2	44
247	1780
7	– 1729
	051

उदाहरण–2. वह छोटी–सी–छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 7609 में जोड़ने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए। इस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल :

	8 7
8	$\overline{76}\,\overline{09}$
8	– 64
167	1209
7	– 1169
	040

स्पष्ट है कि $87^2 < 7609 < 88^2$

वह संख्या जिसे 7609 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग बनेगा वह है–

$88^2 - 7609 = 7744 - 7609 = 135$

अतः अभीष्ट संख्या = 135

अतः पूर्ण वर्ग संख्या = 7609 + 135 = 7744

अब 7744 का वर्गमूल निकालेंगे :

	8 8
8	$\overline{77}\,\overline{44}$
8	– 64
168	1344
8	– 1344
	0

$\therefore \sqrt{7744} = 88$

उदाहरण–3. पाँच अंकों की वह बड़ी–से–बड़ी संख्या ज्ञात करें जो कि पूर्ण वर्ग है। संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

हल : पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 99999 है, जो पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

अब हम छोटी–से–छोटी संख्या ज्ञात करते हैं जिसे 99999 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।

इसलिए हम 99999 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

	3 1 6
3	$\overline{9}\,\overline{99}\,\overline{99}$
3	− 9
6 1	099
1	− 61
626	3899
6	− 3756
	0143

स्पष्ट है कि $316^2 < 99999$

अन्तर है = 143

अतः अभीष्ट संख्या = 99999 − 143 = 99856

साथ ही = $\sqrt{99856} = 316$

उदाहरण–4. एक वर्गाकार खेत में घास लगाने का खर्च 15 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से 1837500 रु. है। इस खेत के चारों ओर तार लगाने का खर्च 60 रु. प्रतिमीटर की दर से कितना होगा?

हल : घास लगाने का खर्च = 1837500 रु.

खेत का क्षेत्रफल $= \frac{1837500}{15}$ वर्ग मीटर

= 122500 वर्गमीटर

अतः वर्गाकार खेत की भुजा $= \sqrt{122500}$ वर्गमीटर

= 350 मीटर

खेत का परिमाप = 4 × भुजा

= 4 × 350 = 1400 मीटर

अतः तार लगाने का खर्च = 60 × 1400 रु.

= 84000 रु.

उदाहरण–5. $\frac{144}{256}$ का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल : $\frac{144}{256}$ का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम–

	12
1	$\overline{1}\,\overline{44}$
1	−1
22	044
2	− 44
	0

$\therefore \sqrt{144} = 12$

और

	16
1	$\overline{1}\,\overline{56}$
1	−1
26	156
6	−156
	0

$\therefore \sqrt{256} = 16$

$$\text{अब} = \sqrt{\frac{144}{256}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{256}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

भिन्न संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए अंश और हर का वर्गमूल अलग–अलग ज्ञात करते हैं, फिर प्राप्त वर्गमूल को संगत $\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}$ के रूप में लिखते हैं।

5.7 दशमलव का वर्गमूल

अभी तक हमने पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ही निकाले हैं पर हम अन्य संख्याओं जैसे दशमलव संख्याओं के वर्गमूल भी निकाल सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों को समझें :

उदाहरण–1. 150.0625 का वर्गमूल ज्ञात करें।

हल :

	12.25
1	$\overline{1}\,\overline{50}.\overline{06}\,\overline{25}$
1	− 1
22	050
2	− 44
242	606
2	− 484
2445	12225
5	− 12225
	0

दशमलव वाली संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम पूर्णांक भाग का जोड़ा दाएँ से बाएँ की ओर लगाते हैं और फिर दशमलव वाली संख्या के अंकों का जोड़ा बाएँ से दाएँ की ओर लगाते हैं।

$\therefore \sqrt{150.0625} = 12.25$

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल दीर्घ विभाजन विधि से ज्ञात करें।

(i) 625 (ii) 900 (iii) 1444 (iv) 3249 (v) 5776

(vi) 10404 (vii) 19600

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के वर्गमूल में अंकों की संख्या बिना गणना के ज्ञात करें।

(i) 81 (ii) 121 (iii) 256 (iv) 4489 (v) 361

(vi) 27225 (vii) 390625

3. निम्नलिखित भिन्नों का वर्गमूल ज्ञात करें।

(i) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ (ii) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ (iii) $\sqrt{\frac{36}{121}}$ (iv) $\sqrt{\frac{196}{225}}$ (v) $\sqrt{\frac{54}{486}}$

(vi) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ (vii) $\sqrt{\frac{80}{405}}$

4. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करें।

(i) 2.25 (ii) 6.76 (iii) 156.25 (iv) 9.8596

(v) 31.36 (vi) 1.0816 (vii) 0.2916

5. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में सबसे छोटी से छोटी संख्या क्या घटाई जाए कि पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

(i) 90 (ii) 7581 (iii) 1989 (iv) 3250

(v) 402 (vi) 825 (vii) 4000 (viii) 2509

6. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में न्यूनतम संख्या क्या जोड़ा जाए कि वह एक पूर्ण संख्या बन जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

(i) 130 (ii) 8400 (iii) 6203 (iv) 6412

(v) 525 (vi) 1750 (vii) 252 (viii) 1825

7. छः अंकों की वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करें जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या है। संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करें।

8. चार अंकों की वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करिए जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या है। प्राप्त वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करिए।

9. छः अंकों की वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करें जो कि एक पूर्ण वर्ग संख्या हो। इस प्रकार से प्राप्त वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करिए।

10. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 60025 मी^{2} है। एक आदमी साइकिल से 5 मी. प्रति सेकेंड की चाल से मैदान के चारों ओर चलता है तो कितने समय में वह प्रारंभिक बिन्दु पर आ जाएगा।

हमने सीखा

1. किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर जो गुणनफल प्राप्त होता है, उस गुणनफल को वर्ग संख्या कहते हैं, अर्थात् माना कि n कोई संख्या है, इस संख्या को n संख्या से गुणा करने पर गुणनफल यदि m प्राप्त होता है तो m को वर्ग संख्या कहते हैं।

   यानि $n \times n = m$ अर्थात् $m = n^2$

2. किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडों को ऐसे समान गुणनखंडों के युगलों अथवा वर्गों में समूहित कर पहचान करते हैं कि दी गई संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है अथवा नहीं।

3. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।

4. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं।

   धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{\ }$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

   उदाहरणार्थ, $4^2 = 16$, $\sqrt{16} = 4$ है।