9

समाकलन
(Integration)

9.01 प्रस्तावना (Introduction)

ऐतिहासिक क्रम में समाकलन गणित की खोज अवकलन गणित से पूर्व हुई थी। समाकलन गणित के अध्ययन की शुरूआत समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिऐ ऐसी अनन्त श्रेणी के योग करने में हुई जिसका प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर था। संकलन (Summation) प्रक्रिया के कारण ही इस विषय का नाम समाकलन गणित पड़ा।

समतलीय वक्रों के क्षेत्रफल, ठोसों के आयतन, गुरुत्व केन्द्र आदि ज्ञात करने हेतु व्यापक विधियों की आवश्यकता के फलस्वरूप समाकलन गणित का उद्विकास हुआ।

अवकलन गणित में हम दिये हुए फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करते है जबकि समाकलन गणित में हम वह फलन ज्ञात करते हैं जिसका अवकल गुणांक दिया होता है। स्पष्टतः समाकलन अवकलन की प्रतिलोम (Inverse) प्रक्रिया है तथा इसीलिये इसे प्रतिअवकलज (Antiderivative) या पूर्वग (Primitive) भी कहते है।

9.02 फलन का समाकलन (Integration of a function)

यदि दिया गया फलन $f(x)$ है और इसका समाकलन $F(x)$ है तो परिभाषानुसार

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \qquad (1)$$

तो $F(x)$ दिये गये फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन कहलाता है। जिसे संकेत रूप में निम्न प्रकार प्रकट करते हैं

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad (2)$$

जहाँ संकेत $\int$ का प्रयोग समाकलन हेतु व dx का तात्पर्य चर x के सापेक्ष समाकलन करना है। यहाँ फलन $f(x)$ जिसका समाकलन करना है को समाकल्य (Integrand) कहते हैं तथा $F(x)$ को समाकल (Integral) कहते हैं।

चूंकि समाकलन व अवकलन परस्पर प्रतिलोम प्रक्रम है अतः समीकरण (2) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

या $$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

अतः एक फलन $f(x)$ दिया है तो उसका समाकलन कर प्राप्त फलन का पुनः अवकलन करने पर दिया गया फलन $f(x)$ प्राप्त हो जाता है।

इसी प्रकार दिये गये फलन का अवकलन कर प्राप्त फलन का पुनः समाकलन करने पर भी दिया गया फलन प्राप्त हो जाता है।

उदाहरणार्थ: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ अतः $\int \cos x\, dx = \sin x$

$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ अतः $\int 2x dx = x^2$

टिप्पणी: अगर $\int f(x)dx = F(x)$ हो तो $f(x)$ को समाकल्य (Integrand), $\int f(x)dx$ को समाकल (Integral) तथा समाकल का मान ज्ञात करने की प्रक्रिया समाकलन (Integration) कहलाती है।

9.03 अनिश्चित समाकल तथा समाकल अचरांक (Indefinite integral and constant of integration)

हम जानते है कि किसी अचर का अवकल गुणांक शून्य होता है अर्थात $\frac{d}{dx}(c)=0,$ जहाँ c कोई अचर है।

माना $$\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$$

तो $$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=\frac{d}{dx}[F(x)]+\frac{d}{dx}(c)$$

$$=f(x)+0$$

अतः $$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=f(x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{F(x)+c\}\right]dx=\int f(x)dx$$

या $$\int f(x)dx=F(x)+c,$$ (परिभाषानुसार)

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) है जिसे समाकलन का अचरांक कहते हैं। यह चर t से स्वतंत्र होता है। किसी सतत फलन $f(x)$ का समाकल (प्रतिअवकलज) का मान अद्वितीय (unique) नहीं होता है बल्कि अनन्त होते हैं। यदि उनमें से एक समाकल $F(x)$ है तो अन्य $F(x)+c$ होंगे, जहाँ c के भिन्न–2 मान देने पर फलन के भिन्न–2 समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें केवल अचर पद का ही अन्तर होता है।

उदाहरणार्थ: $$\frac{d}{dx}(x^2+1)=2x\Rightarrow\int 2xdx=x^2+1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+4)=2x\Rightarrow\int 2xdx=x^2+4$$

किन्तु (x^2+1) व (x^2+4) समान नहीं है इनमें एक अचर पद का अंतर है।

टिप्पणी: अनिश्चित समाकलन की प्रत्येक समस्या में समाकलन का अचरांक, समाकलन की प्रक्रिया के पूर्ण होने पर जोड़ना चाहिये।

9.04 समाकलन के प्रमेय (Theorems on Integration)

प्रमेय 1: किसी अचर k हेतु, $$\int \kappa f(x)\,dx=\kappa\int f(x)dx$$

अर्थात् "एक अचर व एक चर फलन के गुणनफल का समाकलन उस अचर व चर फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है।"

प्रमाण: अवकलन के प्रमेय से हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right]=k\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=k\,f(x)$$ [परिभाषा से]

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right]dx=\int k\,f(x)dx$$

या $$\int k\,f(x)dx=k\int f(x)\,dx$$

प्रमेय 2: $$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)dx$$

अर्थात् "दो चर फलनों के योग या अन्तर का समाकल उनके समाकलों के योग या अन्तर के बराबर होता है।"

प्रमाण: माना $$\int f_1(x)dx=F_1(x) \quad \text{तथा} \quad \int f_2(x)dx=F_2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F_1(x)]=f_1(x) \quad \text{तथा} \quad \frac{d}{dx}[F_2(x)]=f_2(x)$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}[F_1(x)\pm F_2(x)]=\frac{d}{dx}[F_1(x)]\pm\frac{d}{dx}[F_2(x)]$$

$$=f_1(x)\pm f_2(x)$$

दोनो पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int\frac{d}{dx}[F_1(x)\pm F_2(x)]dx=\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx$$

या $$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=F_1(x)\pm F_2(x)$$

$$=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx$$

यह नियम दो से अधिक पदों के योग पर भी लागू हो सकता है परन्तु अनन्त पदों के योग पर लागू होना आवश्यक नहीं है।

व्यापकीकरण (Generalization)

$$\int[k_1f_1(x)\pm k_2f_2(x)]dx=\int k_1f_1(x)dx\pm\int k_2f_2(x)dx$$

$$=k_1\int f_1(x)dx\pm k_2\int f_2(x)dx$$

9.05 समाकलन के मानक सूत्र (Standard formula of integration)

हम बहुत से मानक फलनों के अवकलज जानते हैं जिनसे हम उनके संगत समाकल सूत्र लिख सकते है जो विभिन्न फलनों के समाकलन में मानक सूत्रों के रूप में प्रयोग किये जाते है।

उदाहरणार्थ: $$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}(n\neq o)$$

$\Rightarrow$ $$\int nx^{n-1}dx=x^n+c$$

n को $(n+1)$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c(n\neq-1)$$

इसी प्रकार निम्न सूत्र स्थापित किये जा सकते हैं

	अवकलन के सूत्र		**संगत समाकल सूत्र**
1.	$\frac{d}{dx}(c)=0$	$\Rightarrow$	$\int 0\cdot dx=c$
2.	$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1},\quad n\neq 0$	$\Rightarrow$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\quad n\neq-1$
3.	$\frac{d}{dx}(\log\|x\|)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0$	$\Rightarrow$	$\int\frac{1}{x}dx=\log\|x\|+c,\quad x\neq 0$

4. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c$

5. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$

6. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + c$

7. $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + c$

8. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \Rightarrow \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

9. $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x \Rightarrow \int \text{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$

10. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \Rightarrow \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

11. $\frac{d}{dx}(-\text{cosec} x) = \text{cosec} x \cot x \Rightarrow \int \text{cosec} x \cot x \, dx = -\text{cosec} x + c$

12. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x|<1) \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

13. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x|<1) \Rightarrow \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$

14. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

15. $\frac{d}{dx}(-\cot^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1} x + c$

16. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

17. $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{cosec}^{-1} x + c$

18. $\frac{d}{dx}|x| = \frac{|x|}{x}, (x \neq 0) \Rightarrow \int \frac{|x|}{x} dx = |x| + c, \quad x \neq 0$

विशेषतः $\frac{d}{dx}(x) = 1 \Rightarrow \int 1.dx = x + c$

टिप्पणीः (a) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ (b) $\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c$

अर्थात् किसी फलन के समाकल के अवकलज तथा अवकलज के समाकल में समाकल अचरांक का अन्तर होता है।

टिप्पणी:

(1) सूत्र 12 व 13 से यह निष्कर्ष नहीं निकालना चाहिये कि $\sin^{-1}x = -\cos^{-1}x$ बल्कि ये केवल अचर पद से भिन्न होते है क्योंकि हम जानते हैं कि $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$

(2) सामान्यतः समाकलन करते समय जिस अन्तराल में फलन परिभाषित है उस अन्तराल को नहीं लिखते है। विशेष प्रश्न के संदर्भ में हल करते समय अन्तराल का ध्यान रखा जाना चाहिये।

9.06 अवकलन व समाकलन की तुलना (Between differentiation and integration)

(1) दोनों संक्रियाएं फलनों पर होती है तथा प्रत्येक का परिणाम एक फलन होता है।

(2) दोनों संक्रियाएं रैखिक हैं।

(3) प्रत्येक फलन अवकलनीय या समाकलनीय होना आवश्यक नहीं है।

(4) प्रत्येक फलन का अवकलज (यदि इसका अस्तित्व हो) अद्वितीय होता है परन्तु किसी फलन का समाकल (यदि इसका अस्तित्व है) अद्वितीय नहीं होता है।

(5) किसी फलन के अवकलज का मान एक बिन्दु पर होता है जबकि फलन के समाकल का मान परिभाषित अन्तराल पर होता है।

(6) किसी फलन के अवकलज का ज्यामितीय अर्थ यह है कि यह वक्र के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता होती है जबकि किसी फलन के समाकलन का ज्यामितीय अर्थ यह है कि यह किसी क्षेत्र के क्षेत्रफल (area of some region) के बराबर होता है।

(7) अवकलज का उपयोग कण के वेग, त्वरण आदि भौतिक राशियों को ज्ञात करने में जबकि समाकल का उपयोग द्रव्यमान केन्द्र, संवेग जैसी भौतिक राशियाँ ज्ञात करने मे किया जाता है।

(8) अवकलज व समाकलन एक दूसरे की व्युत्क्रम प्रक्रियाएं है।

9.07 समाकलन की विधियाँ

समाकलन ज्ञात करने के लिए मुख्यतः निम्न विधियाँ प्रयोग में लायी जाती है।

(I) मानक सूत्रों के प्रयोग द्वारा

(II) प्रतिस्थापन द्वारा

(III) आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा

(IV) खण्डशः विधि द्वारा

I मानक सूत्रों के प्रयोग द्वारा समाकल (Integration by the use of standard formula): यहाँ उपर्युक्त दिये गये मानक सूत्रों का या फिर अन्य सूत्रों, त्रिकोणमितीय सूत्रों, इत्यादि का प्रयोग कर समाकल्य को मानक रूप में लाने के पश्चात् समाकलन किया जाता है जिन्हें निम्न उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) x^6 (ii) $\sqrt{x}$ (iii) $\frac{x^2+1}{x^4}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

हल: हम जानते हैं कि $\int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} + c, n \neq -1$

(i) माना $I = \int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c = \frac{x^7}{7} + c$

(ii) माना $I = \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{(1/2)+1} + c = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

(iii) माना $I = \int \frac{x^2+1}{x^4} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^4} dx$

$$= \int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + c$$

(iv) माना $$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \left[\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} \right] + c$$

$$= \frac{x^{1/2}}{(1/2)} + c = 2\sqrt{x} + c$$

उदाहरण-2. $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल: $$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x} dx = \int \left[\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} \right] dx$$

$$= \int \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) dx$$

$$= \int ax\, dx + \int b\, dx + \int \frac{c}{x} dx$$

$$= a \int x\, dx + b \int dx + c \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{ax^2}{2} + bx + c \log |x| + k$$

उदाहरण-3. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: $$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} dx$$

$$= \int (1 - \cos x) dx = \int 1.dx - \int \cos x\, dx$$

$$= x - \sin x + c$$

उदाहरण-4. $\int \frac{x^2}{x+1} dx$ ज्ञात कीजिए

हल: $$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \frac{(x^2 - 1) + 1}{(x+1)} dx$$

$$= \int \left[\frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \int \left[(x-1) + \frac{1}{(x+1)} \right] dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \log|x+1| + c, (x \neq -1)$$

उदाहरण-5. $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx = \int \sqrt{[(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x]}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c$$

उदाहरण-6. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx \qquad [\because \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1]$$

$$= \int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x - x + c$$

उदाहरण-7. $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right] dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

उदाहरण-8. एक वक्र की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{3}{x^2}$ द्वारा दी जाती है। यह वक्र बिन्दु (1, 1) से गुजरता है। वक्र की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{3}{x^2}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर–

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int \left(2x - 3x^{-2}\right)dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int dy = 2\int xdx - 3\int x^{-2}dx$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{2x^2}{2} - 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$\Rightarrow \qquad y = x^2 + \frac{3}{x} + c$$

$\because$ यह (1, 1) से गुजरता है अतः $\quad 1 = (1)^2 + \frac{3}{(1)} + c \Rightarrow c = -3$

$\therefore$ वक्र का अभीष्ट समीकरण $\quad y = x^2 + \frac{3}{x} - 3$

प्रश्नमाला 9.1

1. निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $3\sqrt{x^2}$ (ii) e^{3x} (iii) $(1/2)^x$ (iv) $a^{2\log_a x}$

निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

2. $\int \left(5\cos x - 3\sin x + \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

3. $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}dx$

4. $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

5. $\int (1+x)\sqrt{x}\, dx$

6. $\int a^x da$

7. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

8. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

9. $\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx$

10. $\int (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)\, dx$

11. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}dx$

12. $\int \tan^2 x\, dx$

13. $\int \cot^2 x\, dx$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}$

15. $\int (\tan^2 x - \cot^2 x)\, dx$

16. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

17. $\int \frac{1}{1-\cos x}dx$

18. $\int \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}} + 2^x\right]dx$

19. $\int \cot x(\tan x - \operatorname{cosec} x)dx$

20. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

21. $\int \log_x x\, dx$

22. $\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$

23. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$

24. $\int \frac{3\cos x + 4}{\sin^2 x}dx$

II प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by substitution)

(a) चरों के प्रतिस्थापन द्वारा: "दिये चर को उचित प्रतिस्थापन द्वारा स्वतंत्र चर में परिवर्तन कर समाकल्य को मानक रूप में बदल कर समाकलन करना, प्रतिस्थापन से समाकलन करना कहलाता है।"

प्रमेय: यदि $\int f(x)\,dx$ में चर x को नये चर t में $x=\phi(t)$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाये तो

$$\int f(x)\,dx=\int f\phi\{t\}\phi'(t)dt,\ \text{जहाँ}\ \phi'(t)=\frac{d\phi}{dt}$$

प्रमाण: माना $\int f(x)\,dx=F(x)$ तब $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}F(x)$ (अवकलन से) (1)

अब यदि $x=\phi(t)$ हो तो $\frac{dx}{dt}=\phi'(t)$ हो तो (2)

पुनः $\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\,.\,\frac{dx}{dt}$ (शृंखला नियम से)

$=f(x)\,.\,\phi'(t)$ [(1) व (2) से]

$=f\{\phi(t)\}\phi'(t)$

अतः समाकलन की परिभाषा से–

$$\int\frac{d}{dx}F(x)dt=\int f\{\phi(t)\}.\phi'(t)\,dt$$

या
$$F(x)=\int f\{\phi(t)\}.\phi'(t)\,dt$$

या
$$\int f(x)\,dx=\int f\{\phi(t)\}.\phi'(t)\,dt$$

प्रतिस्थापन योग्य कुछ समाकल्य (Some integrands for substitution)

(a) $$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+c$$ (माना $f(x)=t$ आदि)

(b) $$\int[f(x)]^n f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$$ (माना $f(x)=t$ आदि)

(c) रैखिक फलन $f(ax+b)$ हेतु

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{f(ax+b)}{a}+c$$ (जहाँ a व b अचर हैं)

जबकि
$$\int f(x)\,dx=F(x)+c$$

रैखिक फलनों हेतु स्मरणीय सूत्र

यदि $a\neq o$ तो

(i) $$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c,\quad n\neq-1$$

(ii) $$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\log|ax+b|+c,\ a>0$$

(iii) $$\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$$

(iv) $$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$$

(v) $$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$$

टिप्पणी: सामान्यतः प्रतिस्थापन करने का कोई व्यापक नियम नहीं है यह समाकल्य की प्रकृति पर निर्भर करता है। 'प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन' विधि की सफलता इस बात पर निर्भर है कि हम किसी प्रकार समाकल्य को दो ऐसे फलनों के गुणा के रूप में प्रकट कर सकें, जिनमें एक फलन व दूसरा उस फलन का अवकलज हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $\dfrac{\cos[\log(x)]}{x}$ (ii) $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{1}{\cos^2(5x+2)}$

हल: (i) माना $\log x = t$ तब $\frac{1}{x}dx = dt$

$\therefore$ $$I = \int \frac{\cos(\log x)}{x}dx = \int \cos t\,dt = \sin t + c = \sin(\log x) + c$$

(ii) माना $$I = \int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

माना $$\sin^{-1}x = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin^{-1}x} + c$$

(iii) $$I = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

माना $$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$$

$\therefore$ $$I = \int \sin t \times 2dt = 2\int \sin t\,dt$$

$$= 2\times(-\cos t) + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

(iv) $$I = \int \frac{1}{\cos^2(5x+2)}dx$$

$$= \int \sec^2(5x+2)\,dx$$

माना $$5x+2 = t \Rightarrow 5dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$$

$\therefore$ $$I = \int \sec^2 t \times \frac{1}{5}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec^2 t\,dt = \frac{1}{5}\tan t + c = \frac{1}{5}\tan(5x+2) + c$$

उदाहरण-10. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $\dfrac{\log[x+\sqrt{1+x^2}]}{\sqrt{1+x^2}}$ (ii) $\sec x \log(\sec x + \tan x)$ (iii) $\dfrac{1}{1+\tan x}$

हलः (i) $$I = \int \frac{\log[x+\sqrt{1+x^2}]}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

माना $$\log[x+\sqrt{1+x^2}] = t$$

$\therefore$ $$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left[1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right]dx = dt$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{[x+\sqrt{1+x^2}]} \times \frac{[\sqrt{1+x^2}+x]}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}[\log\{x+\sqrt{1+x^2}\}]^2 + c$$

(ii) $$I = \int \sec x \,.\, \log(\sec x + \tan x)dx$$

माना $$\log(\sec x + \tan x) = t$$

$\therefore$ $$\frac{1}{(\sec x + \tan x)} \times (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt$$

$$\sec x\, dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}[\log(\sec x + \tan x)]^2 + c$$

(iii) $$I = \int \frac{1}{1+\tan x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}dx = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x + \sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

द्वितीय समाकल में, माना $\cos x + \sin x = t$

$\therefore$ $(-\sin x + \cos x)dx = dt$

$\therefore$ $$I = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log|t| + c$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + c$$

(b) त्रिकोणमितीय फलनों $\tan x, \cot x, \sec x$ तथा $\operatorname{cosec} x$ के समाकलन

(i) माना $$I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

माना $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\, dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -dt$

$\therefore$ $$I = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c$$

$$= \log|\sec x| + c$$

$\therefore$ $$\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + c = -\log|\cos x| + c$$

(ii) माना $$I = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

माना $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$

$\therefore$ $$I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\sin x| + c$$

$\therefore$ $$\int \cot t\, dx = \log|\sin x| + c$$

(iii) माना $$I = \int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$

माना $\sec x + \tan x = t$

$\therefore$ $$(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt \Rightarrow \sec x(\sec x + \tan x)dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\sec x + \tan x| + c \quad \ldots (1)$$

$$= \log\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right| + c$$

$$= \log\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right| + c$$

$$= \log\left|\frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}\right| + c$$

$$= \log \left| \frac{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)} \right| + c$$

$$= \log \left| \frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2} \right| + c$$

$$= \log \tan \left| \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right| + c$$

$\therefore$ $$\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + c = \log \tan \left| \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right| + c$$

(iv) माना $$I = \int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \cot x)}{(\operatorname{cosec} x - \cot x)} dx$$

माना $$\operatorname{cosec} x - \cot x = t \Rightarrow (-\operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x) dx = dt$$

$\therefore$ $$\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \cot x) dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$= \log \left| \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right| + c = \log \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| + c$$

$$= \log \left| \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 (x/2)}{2 \sin (x/2) \cos (x/2)} \right| + c = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

$\therefore$ $$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + c = \log |\tan x/2| + c$$

$$(\because \operatorname{cosec} x - \cot x = \tan x/2)$$

उदाहरण-11. समाकलन कीजिए–

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$$

हल: माना $$I = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 2x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2 \cos^2 x}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sec x \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log |\sec x + \tan x| + c$$

उदाहरण-12. $\sqrt{\sec x+1}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः माना
$$I=\int\sqrt{\sec x+1}dx=\int\sqrt{\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)}dx$$

$$=\int\sqrt{\frac{1+\cos x}{\cos x}}dx=\int\sqrt{\frac{2\cos^2 x/2}{1-2\sin^2 x/2}}dx=\int\frac{\sqrt{2}\cos x/2}{\sqrt{1-\{\sqrt{2}\sin(x/2)\}^2}}dx$$

माना $\sqrt{2}\sin(x/2)=t\Rightarrow\sqrt{2}\cos(x/2)\times 1/2dx=dt$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}\cos(x/2)dx=2dt$

$\therefore$
$$I=\int\frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}}=2\sin^{-1}t+=2\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x/2)+c$$

(c) रूपान्तरण द्वारा त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं के उपयोग द्वारा समाकलन

कई बार समाकल्य में ऐसे त्रिकोणमितीय फलन विद्यमान होते है जिन्हें त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का उपयोग कर समाकलन योग्य बना लिया जाता है, फिर आवश्यकता अनुसार प्रतिस्थापन का प्रयोग कर समाकल ज्ञात किया जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. निम्न समाकलो को हल ज्ञात कीजिए–

(i) $I=\int\cos 3x\cos 4x\,dx$ (ii) $\int\sin^2 x\,dx$ (iii) $\int\cos^3 x\,dx$ (iv) $\int\sin^4 x\,dx$

हलः (i)
$$I=\int\cos 3x\cos 4x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos 4x\cos 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 7x}{7}+\sin x\right]+c$$

(ii)
$$I=\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}+c\right]$$

(iii)
$$I=\int\cos^3 x\,dx=\frac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)\,dx$$

$$\left(\because\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\Rightarrow\cos^3 x=1/4(\cos 3x+3\cos x)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right]+c$$

(iv)
$$I=\int\sin^4 x\,dx=\int(\sin^2 x)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\cos^2 2x-2\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1+\cos 4x}{2}-2\cos 2x\right]dx=\frac{1}{8}\int(3+\cos 4x-4\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[3x+\frac{\sin 4x}{4}-2\sin 2x\right]+c$$

प्रश्नमाला 9.2

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

1. (i) $x\sin x^2$ (ii) $x\sqrt{x^2+1}$

2. (i) $\dfrac{e^x-\sin x}{e^x+\cos x}$ (ii) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

3. (i) $\sqrt{e^x+1}$ (ii) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

4. (i) $\dfrac{1}{x(1+\log x)}$ (ii) $\dfrac{(1+\log x)^3}{x}$

5. (i) $\dfrac{e^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ (ii) $\dfrac{\sin^p x}{\cos^{p+2} x}$

6. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ (ii) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x\cos x}$

7. (i) $\sin 3x\sin 2x$ (ii) $\sqrt{1-\sin x}$

8. (i) $\cos^4 x$ (ii) $\sin^3 x$

9. (i) $\dfrac{1}{\sin x\cos^3 x}$ (ii) $\dfrac{(1+x)e^x}{\cos^2(xe^x)}$

10. (i) $\dfrac{1}{1-\tan x}$ (ii) $\dfrac{1}{1+\cot x}$

11. (i) $\dfrac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}$ (ii) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

12. (i) $\dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x-a)}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$

13. (i) $\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x\sin 3x}$ (ii) $\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

   [संकेत $=\sin 2x=\sin(5x-3x)$] [संकेत $=2x=(x-\pi/6)+(x+\pi/6)$]

14. (i) $\dfrac{1}{3\sin x+4\cos x}$ [संकेत $3=r\cos\theta, 4=r\sin\theta$] (ii) $\dfrac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

15. (i) $\dfrac{\sin x\cos x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$ (ii) $\dfrac{\sec x}{\sqrt{\sin(2x+\alpha)+\sin\alpha}}$

16. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{\cos^3 x\sin(x+a)}}$ (ii) $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$

(d) चरों का त्रिकोणमितीय फलनों द्वारा प्रतिस्थापन विधि से समाकलन

(i) $\frac{1}{a^2+x^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(i) माना, $I=\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

अगर, $x=a\tan\theta$ तो $dx=a\sec^2\theta d\theta$

तब $I=\int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}=\frac{1}{a}\int\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}(\theta)+c=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

(ii) माना $I=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

अगर $x=a\sin\theta$ हों, तो $dx=a\cos\theta d\theta$

$\therefore$ $I=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta}=\int d\theta=\theta+c=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

(iii) माना $I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

माना $x=a\tan\theta \Rightarrow dx=a\sec^2\theta d\theta$

$\therefore$ $I=\int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}=\int\frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta$

$$=\int\sec\theta d\theta=\log|\sec\theta+\tan\theta|+c_1$$

$$=\log\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}+\frac{x}{a}\right|+c_1$$

$$=\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right|+c_1=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c_1$$

$=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$, जहाँ $c=c_1-\log a$

$\therefore$ $$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

(iv) माना $$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

मानलो, $x=a\sec\theta \Rightarrow dx=a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad I=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}\times a\sec\theta\tan\theta\, d\theta=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}$$

$$=\int\sec\theta\, d\theta=\log|\sec\theta+\tan\theta|+c_1$$

$$=\log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|+c_1=\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c_1$$

$$=\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|-\log a+c_1=\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$$ (जहाँ $c=c_1-\log a$)

$$\therefore \quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$$

कुछ उचित त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापनः अनुभव के आधार पर कुछ उचित त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन निम्नानुसार सुझाये गये है :

	समाकल्य	**प्रतिस्थापन**
(i)	$\sqrt{x^2+a^2}$ या $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$x=a\tan\theta$
(ii)	$\sqrt{a^2-x^2}$ या $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$x=a\sin\theta$ या $x=a\cos\theta$
(iii)	$\sqrt{x^2-a^2}$ या $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$x=a\sec\theta$
(iv)	$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ या $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x=a\cos 2\theta$ या $x=a\cos\theta$
(v)	$\sqrt{x+a}$	$x=a\cos 2\theta$ या $x=a\cos\theta$
(vi)	$\sqrt{2ax-x^2}$	$x=2a\sin^2\theta$ या $x=a(1-\cos 2\theta)$
(vii)	$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$	$x^2=a^2\cos 2\theta$
(viii)	$\sqrt{\frac{x+a}{x}}$ या $\sqrt{\frac{x}{x+a}}$	$x=a\tan^2\theta$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-14. निम्नलिखित का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $\dfrac{x}{1+x^4}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$

हल: (i) माना $$I=\int \frac{x}{1+x^4}dx$$

माना $$x^2=t \Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$$

$\therefore$ $$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}(t)+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+c$$

(ii) माना $$I=\int\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{(3/5)^2-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3/5}\right)+c=\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3}+c$$

उदाहरण-15. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx$$

$$=\log|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}|+c$$

$$=\log|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}|+c$$

उदाहरण-16. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$ ज्ञात कीजिए–

हल: माना $$I=\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+(2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

उदाहरण-17. $\dfrac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $$I=\int\frac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{-6-(x^2-5x)}}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{(25/4-6)-(x^2-5x+25/4)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(1/2)^2-(x-5/2)^2}}dx$$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{x-5/2}{1/2}\right]+c=\sin^{-1}\left(\frac{2x-5}{1}\right)+c$$

उदाहरण-18. $\dfrac{(1+x)^2}{x+x^3}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः माना $$I=\int\frac{(1+x)^2}{x+x^3}dx=\int\frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)}dx$$

$$=\int\left[\frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\right]dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx$$

$$=\log|x|+2\tan^{-1}x+c$$

उदाहरण-19. $\dfrac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः माना $$I=\int\frac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}dx$$

माना $$\cos^2 2x=t\Rightarrow 2\cos 2x.(-\sin 2x)2.dx=dt$$

$\Rightarrow$ $$\sin 2x\cos 2x\,dx=-\frac{dt}{4}$$

$\therefore$ $$I=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=-\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{\cos^2 2x}{3}\right)+c$$

उदाहरण-20. यदि $\displaystyle\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=k\sin^{-1}2^x+c$ तो k का मान ज्ञात कीजिए–

हलः माना $$I=\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=\int\frac{2^x}{\sqrt{1-(2^x)^2}}dx$$

माना $$2^x=t\Rightarrow 2^x\log_e 2dx=dt\Rightarrow 2^x dx=\frac{dt}{\log_e 2}$$

$\therefore$ $$I=\frac{1}{\log_e 2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\log_e 2}\sin^{-1}(t)+c=\log_2 e.(\sin^{-1}2^x)+c$$

$\therefore$ $$\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=\log_2 e.(\sin^{-1}2^x)+c$$

परन्तु दिया है, $$\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=k(\sin^{-1}2^x)+c$$

$\therefore$ तुलना से, $$k=\log_2 e$$

प्रश्नमाला 9.3

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. (i) $\dfrac{1}{50+2x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{32-2x^2}}$

2. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$

3. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. (i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}$ (ii) $\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}$

5. (i) $\dfrac{1}{x^2+6x+8}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}}$

6. (i) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x\cos\propto+1}$ (ii) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+3}}$

7. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{4+8x-5x^2}}$

8. (i) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2ax+b^2}}$

9. (i) $\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

10. (i) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}$ (ii) $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

11. (i) $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ (ii) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

12. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

13. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ (ii) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

III आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा समाकलन (Integration by resolving into partial fractions)

(a) परिमेय बीजीय फलन (Rational algebraic function)

परिभाषा: यदि $f(x)$ व $g(x)$ दोनों x के बहुपद हो तो भिन्न $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ को x का परिमेय बीजीय फलन या परिमेय बीजीय भिन्न कहते है।

उदाहरणार्थ, $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+x^2-3x+4}$, $\dfrac{2x+1}{2x^2+x+1}$, $\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $\dfrac{2x^3}{(x-1)(x^2+1)}$, $\dfrac{x^4}{x^3+2x-4}$

उचित परिमेय भिन्न (Proper rational fraction): यदि किसी परिमेय बीजीय भिन्न में अंश की घात हर से कम हो तो ऐसी भिन्न उचित परिमेय भिन्न कहलाती है।

विषम परिमेय भिन्न (Improper rational fraction): यदि किसी परिमेय बीजीय भिन्न में अंश की घात हर से अधिक या बराबर हो तो ऐसी भिन्न को विषम परिमेय भिन्न कहते है।

उदाहरणार्थ, $\dfrac{2x+3}{3x^2+x+4}$, एक उचित परिमेय भिन्न है–

उदाहरणार्थ, $\dfrac{3x^3+x^2+5x-4}{x^2+x+2}$ व $\dfrac{3x^2+x+2}{(x+1)(x+3)}$ विषम परिमेय भिन्न है।

टिप्पणी: एक विषम परिमेय भिन्न को भाग द्वारा (जब तक शेष (remainder) की घात हर की घात से कम न हो जाये) बहुपद तथा उचित परिमेय भिन्न के योग के रूप में प्रकट किया जा सकता है, जैसे

$$\frac{3x^3+2x+7}{x^2+5x+9}=3(x-5)+\frac{50x+142}{x^2+5x+9}$$

उक्त प्रकार के परिमेय बीजीय फलनों $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का x के सापेक्ष समाकलन करने हेतु हम इसे आंशिक भिन्नों (Partial fraction) में वियोजित कर प्रत्येक भिन्न का समाकलन करते हैं।

आंशिक भिन्न (Partial fraction): दो या दो से अधिक परिमेय बीजीय भिन्नों के योग की विपरीत प्रक्रिया वियोजन (decomposition) द्वारा एक परिमेय बीजीय भिन्न को कई बीजीय भिन्नों के योग के रूप में व्यक्त करना, आंशिक भिन्नों में बाँटना (वियोजन) कहलाता है जैसे–

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

परिमेय भिन्न को आंशिक भिन्न में बाँटने (वियोजित करने) के नियम
(Rules of resolving a rational fraction into partial fraction)

[A]. सर्वप्रथम यदि भिन्न एक उचित परिमेय भिन्न नही है तो अंश में हर का भाग देकर उसे उचित परिमेय भिन्न में बदल लेना चाहिए। इस प्रकार दी गई विषम भिन्न एक बहुपद व उचित भिन्न में विघटित हो जायेगी। बहुपद को यथावत रहने दें व वास्तविक भिन्न को आंशिक भिन्नों में खंडित करना चाहिये।

[B]. यदि उचित भिन्न का हर गुणनखण्डों के रूप में नहीं है तो इसके गुणनखण्ड करें।

[C]. अब हर की घात के बराबर अचर राशियाँ A, B, C आदि मानते हैं। अलग–2 स्थितियों में वास्तविक भिन्न की संगत आंशिक भिन्नें निम्न रूप में होगी–

(a) यदि हर में बिना पुनरावर्ती के रैखिक गुणनखण्ड हो तो आशिंक भिन्नों का रूप निम्न उदाहरण के अनुरूप होगा–

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x-3)}$$

(b) यदि हर में पुनरावर्ती वाले रैखिक गुणनखण्ड हो तो आंशिक भिन्नों का रूप निम्न उदाहरण के अनुरूप होगा–

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+3)}$$

(c) अगर हर में द्विघात खण्ड हो तो आंशिक भिन्नों का रूप निम्न उदाहरण के अनुरूप होगा–

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+2)}$$

टिप्पणी: यदि किसी भिन्न के अंश व हर दोनों में x का पद केवल द्विघात है अर्थात् x^2 हो तो x^2 को एकघाती मानकर स्थिति (a) के अनुसार आंशिक भिन्नों के रूप में लिखते हैं, जैसे–

$$\frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+3}$$

[D]. अचर A, B, C आदि का गणना

(a) उपरोक्त पद [C] द्वारा दाहिनी पक्ष में मानी गई आंशिक भिन्नों के हर का लघुत्तम लेकर योग करते हैं।

(b) चुंकि दोनों पक्षों की भिन्नें समान हैं। तथा अब उनके हर भी समान है अतः दोनों पक्षों में अंश भी समान होने चाहिये। इस प्रकार दोनों पक्षों में x की सभी घातों के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना कर समीकरण ज्ञात करें। ऐसे समीकरणों की संख्या माने गये अचरों की संख्या के बराबर होनी चाहिये। समीकरणों से अचर पदों के मान ज्ञात कर अभीष्ट आंशिक भिन्न लिखिये। प्रक्रिया अग्र उदाहरण द्वारा स्पष्ट की गई है–

माना
$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

या
$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

या
$$2x+3 = A(x+1)+B(x+2) \qquad (1)$$

या
$$2x+3 = (A+B)x+(A+2B)$$

समान पदों के गुणांकों की तुलना से–

$$\left.\begin{array}{l} A+B \;\; = 2 \\ A+2B = 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{हल करने पर} \\ A=1, B=1 \end{array}$$

अतः
$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x+1)}$$

वैकल्पिक विधियाँ:

(i) लघु विधि (Short method): उपरोक्त उदाहरण में समीकरण (1) के दोनों पक्षों में गुणनखण्डों $(x+1)$ व $(x+2)$ के संगत x के मानों $x=-1$ व $x=-2$ रखकर अचरों A व B के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

(ii) विभाजन विधि (Division Method): हर के पुनरावृत्ति वाले खण्डों हेतु विभाजन विधि अधिक सुविधाजनक रहती है इसमें पुनरावृत्ति वाले खण्ड को y मानते है व इस खण्ड के अलावा हर में मौजूद अन्य खण्डों का अंश मे भाग लगाते हैं। अन्त में हमें समाकलन योग्य पद प्राप्त हो जाते हैं।

उदाहरणार्थ $\dfrac{x^2}{(x+1)^3(x+2)}$ में माना $(x+1)=y$ तब

$$\frac{x^2}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{(y-1)^2}{y^3(y+1)} = \frac{(1-2y+y^2)}{y^3(1+y)}$$

(भाजक व भाज्य को बढ़ती घातों में लिखा जाता है)

$$= \frac{1}{y^3}\left[1-3y+4y^2-\frac{4y^3}{1+y}\right]$$

$$= \frac{1}{y^3} - \frac{3}{y^2} + \frac{4}{y} - \frac{4}{1+y}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)} - \frac{4}{(x+2)}$$

जो समाकलन योग्य है।

(iii) निरीक्षण विधि (By inspection): अगर किसी वास्तविक भिन्न के अंश में 1 हो तथा खण्डों का अन्तर अचर राशि हो तो इस विधि का प्रयोग हो सकता है। इस हेतु खण्डों के अन्तर का भाग देकर कोष्ठक में छोटे खण्ड के व्युत्क्रम में से बड़े खण्ड का व्युत्क्रम घटा देते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right]$ यहाँ खण्डों का अन्तर $=(x+2)-(x-3)=5$

कुछ मानक समाकल (Some standard integrals)

(i) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c \qquad (x>a)$

(ii) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c \qquad (x<a)$

प्रमाण:

(i)
$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right] \qquad \text{(निरीक्षण विधि से)}$$

$\therefore$
$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx$$
$$=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}dx$$
$$=\frac{1}{2a}\log|x-a|-\frac{1}{2a}\log|x-a|+c$$
$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

इसी प्रकार,

(ii)
$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{(a+x)(a-x)}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right]$$

$\therefore$
$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right]dx$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\log|a+x|+\frac{\log|a-x|}{-1}\right]+c$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\log|a+x|-\log|a-x|\right]+c$$
$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

टिप्पणी: कई स्थितियों में प्रतिस्थापन द्वारा कार्य सरल हो जाता है। यह विशेषतः तब होता है, जब x की कोई घात, माना x^{n-1}, अंश का कोई खण्ड हो, तथा शेष भिन्न x^n का परिमेय फलन हो तो प्रतिस्थापन $x^n=t$ करते है और तब आंशिक भिन्न में वियोजित करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-21. निम्न फलनों का c के सापेक्ष समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{1}{16x^2-9}dx$ (ii) $\frac{1}{9-4x^2}dx$

हल: (i) माना $$I=\int\frac{1}{16x^2-9}dx=\int\frac{1}{(4x)^2-(3)^2}dx$$

माना $$4x=t \Rightarrow 4dx=dt \text{ या } dx=\frac{1}{4}dt$$

$\therefore$ $$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-3^2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2\times 3}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+c$$

$$=\frac{1}{24}\log\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right|+c$$

हल: (ii) माना $$I=\int\frac{1}{9-4x^2}dx=\int\frac{1}{(3)^2-(2x)^2}dx$$

माना $$2x=t \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$\therefore$ $$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{3^2-t^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times 3}\log\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+c$$

$$=\frac{1}{12}\log\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|+c$$

उदाहरण-22. $\frac{1}{x^2-x-2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: $$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]$$ (निरीक्षण विधि से)

$\therefore$ $$\int\frac{1}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\log|(x-2)|-\log|x+1|\right]+c$$

$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$$

उदाहरण-23. $\int\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: $$\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}=1+\frac{4x}{(x-1)(x-2)}$$ (भाग देने पर)

माना $$\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$$

या $$4x=A(x-2)+B(x-1) \qquad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों में,

x=2 रखने पर, $8=B(2-1)$ या $B=8$

x=1 रखने पर, $4=-A$ या $A=-4$

$$\therefore \quad \frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}=1+\left[\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right]$$

या $$\int\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}dx=\int\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right]dx$$

$$=x-4\log|x-1|+8\log|x-2|+c$$

$$=x+4\left[2\log|x-2|-\log|x-1|\right]+c$$

$$=x+4\log\frac{(x-2)^2}{|x-1|}+c$$

उदाहरण-24. $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \quad 1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1)+(Cx^3+2Cx^2+Dx^2+2Dx+Cx+D)$$

$$\Rightarrow \quad 1=x^3(A+C)+x^2(A+B+2C+D)+x(A+C+2D)+(A+B+D)$$

तुलना से,

$A+C=0$ (1) $\qquad$ $A+B+2C+D=0$ (2)

$A+C+2D=0$ (3) $\qquad$ $A+B+D=0$ (4)

(1) व (3) से, $2D=O\Rightarrow D=0$

(1) व (2) से, $B+C+D=0$ सरल करने पर, $2C=-1\Rightarrow C=-1/2 \therefore A=1/2$

(1) व (4) से, $B-C+D=1$

(4) से, $1/2+B+0=1\Rightarrow B=1/2$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx - \frac{1}{4}\int\frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + c$$

[यहाँ $x^2+1 = t \Rightarrow 2xdx = dt$]

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + c$$

उदाहरण-25. $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $\quad (x-1) = y \therefore \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3} = \frac{(y+1)^2+(y+1)+1}{y^3}$

$$= \frac{y^2+3y+3}{y^3} = \frac{1}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{3}{y^3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

$$\therefore \quad \int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}dx = \int\frac{1}{(x-1)}dx + \int\frac{3}{(x-1)^2}dx + \int\frac{3}{(x-1)^3}dx$$

$$= \log|x-1| - \frac{3}{(x-1)} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$$

उदाहरण-26. $\frac{1}{\sin x + \sin 2x}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $\quad I = \int\frac{1}{\sin x + \sin 2x}dx$

$$= \int\frac{1}{\sin x(1+2\cos x)}dx = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x(1+2\cos x)}dx$$

$$= \int\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)(1+2\cos x)}dx$$

$$= \int\frac{-dt}{(1-t^2)(1+2t)}$$

[जहाँ $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$]

$$= -\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)(1+2t)}$$

पुनः माना $$\frac{1}{(1-t)(1+t)(1+2t)}=\frac{A}{(1-t)}+\frac{B}{(1+t)}+\frac{C}{(1+2t)}$$

या $$1=A(1+t)(1+2t)+B(1-t)(1+2t)+C(1-t)(1+t)$$

दोनों पक्षों में,

$t=1$ रखने पर, $1=A(2)(3) \qquad \Rightarrow A=1/6$

$t=-1$ रखने पर, $1=B(1+1)(1-2) \qquad \Rightarrow B=-1/2$

$t=-1/2$ रखने पर, $1=C(1+1/2)(1-1/2)\Rightarrow C=4/3$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1-t)(1+t)(1+2t)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-t)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1+2t)}$$

$$\therefore \quad I=-\int\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-t)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1+2t)}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{\log|1-t|}{(-1)}+\frac{1}{2}\log|1+t|-\frac{4}{3}\frac{\log|1+2t|}{2}+c$$

$$=\frac{1}{6}\log|1-\cos x|+\frac{1}{2}\log|1+\cos x|-\frac{2}{3}\log|1+2\cos x|+c$$

उदाहरण-27. $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$ का x के सापेक्ष का समाकलन कीजिए–

हल: माना, $$I=\int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$$

$$=\int\frac{dt}{(t+1)(t+3)} \qquad [\text{जहाँ } x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt]$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log|t+1|-\log|t+3|\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t+3}\right|+c=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+c$$

उदाहरण-28. $\frac{1}{x(x^n-1)}dx$ का x के सापेक्ष का समाकलन कीजिए–

हल: माना $$I=\int\frac{1}{x(x^n-1)}dx$$

$$=\int\frac{x^{n-1}}{x^n(x^n-1)} \qquad (x^{n-1} \text{ का अशं व हर से गुणा करने पर})$$

पुनः माना $$x^n = t \Rightarrow nx^{n-1}dx = dt \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{dt}{n}$$

$$I = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{n}\int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right]dt = \frac{1}{n}[\log|t-1| - \log|t|] + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c = \frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n-1}{x^n}\right| + c$$

प्रश्नमाला 9.4

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(1) $\frac{1}{16-9x^2}$ (2) $\frac{1}{x^2-36}$ (3) $\frac{3x}{(x+1)(x-2)}$ (4) $\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}$

(5) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ (6) $\frac{x^2}{x^4-x^2-12}$ (7) $\frac{1}{x^3-x^2-x+1}$ (8) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$

(9) $\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ (10) $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}$ (11) $\frac{x^2+8x+4}{x^3-4x}$ (12) $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$

(13) $\frac{1-3x}{1+x+x^2+x^3}$ (14) $\frac{1+x^2}{x^5-x}$ (15) $\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$ (16) $\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}$

(17) $\frac{1}{(1+e^x)(1-e^{-x})}$ (18) $\frac{1}{(e^x-1)^2}$ (19) $\frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}$ (20) $\frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)(3+\tan x)}$

(21) $\frac{1}{x(x^5+1)}$ (22) $\frac{1}{x(a+bx^n)}$ (23) $\frac{8}{(x+2)(x^2+4)}$ (24) $\frac{(1-\cos x)}{\cos x(1+\cos x)}$

(b) विशेष रूप के परिमेय फलनों का समाकलन (Integration of special forms of rational functions)

(i) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (ii) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$

जहाँ a, b, c, p व q अचर हैं।

प्रमाण: (i) $$ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

स्थिति (1): जब $b^2-4ac > o$

तब, $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-\lambda^2}$$ (जहाँ $x+\frac{b}{2a} = t$ तथा $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \lambda$ आदि)

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\lambda}\log\left|\frac{t-\lambda}{t+\lambda}\right| + c$$

स्थिति (2): जब $b^2 - 4ac < o$

तब,
$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+\lambda^2}$$
$$= \frac{1}{a\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}\right)+c$$

t तथा λ का मान पुनः प्रतिस्थापित कर अभीष्ट समाकलन का मान प्राप्त कर लेते हैं।

(ii) माना अंश $px+q=\lambda$ (हर का अवकल गुणांक) $+\mu$

या
$$px+q=\lambda(2ax+b)+\mu$$

समान पदों के गुणांको की तुलना से–
$$2a\lambda = p \Rightarrow \lambda = \frac{p}{2a}$$
$$b\lambda+\mu = q \Rightarrow \mu = q-\frac{bp}{2a}$$

अतः दिया हुआ समाकल $\displaystyle\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$
$$= \frac{p}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

जहाँ द्वितीय समाकल का मान उपरोक्त (i) की विधि से ज्ञात कर लेते हैं।

(C) अपरिमेय बीजीय फलनों का समाकलन (Integration of irrational algebraic function)

अपरिमेय फलन (Irrational function): वह फलन जिसमें चर की घात भिन्नात्मक आती हो, एक अपरिमेय फलन कहलाता है।

उदारहणार्थः $f(x)=x^{3/2}+x+1,\ g(x)=2\sqrt{x}+3,\ h(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1-x^{1/3}}$ आदि

मानक अपरिमेय फलनों का समाकलन (Integration of standard irrational functions)

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

प्रथम विधि (i) पद $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ के समाकलन की दो स्थितियाँ है–

(a) जब a > o तो
$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}}$$

इसकी तीन अवस्थाएं है

(i) जब $b^2-4ac > o$ तो
$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\lambda^2}},\ \text{जहाँ}\ t = x+\frac{b}{2a}, \lambda = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|t+\sqrt{t^2-\lambda^2}\right|+c$$

(ii) जब $b^2-4ac<o$ तो

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\lambda^2}}, \text{ जहाँ } t=x+\frac{b}{2a},\ \lambda=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}.\log|t+\sqrt{t^2+\lambda^2}|+c$$

(iii) जब $b^2-4ac=o$

तब, $$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{x+\frac{b}{2a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|x+\frac{b}{2a}\right|+c$$

(b) जब $a<o$ माना $a=-\propto$

तब, $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-\propto x^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{\propto}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b^2+4c\propto}{4\alpha^2}\right)-\left(x-\frac{b}{2\propto}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\propto}}\int\frac{dt}{\sqrt{\lambda^2-t^2}}, \text{ जहाँ } t=x-\frac{b}{2\propto},\lambda^2=\frac{b^2+4c\propto}{4\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\propto}}\sin^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}\right)+c$$

द्वितीय विधिः $$I=\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

माना $$px+q=A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$$

या $$px+q=A(2ax+b)+B$$

तुलना कर हल करने पर $$A=\frac{p}{2a},B=q-\frac{bp}{2a}$$

तब, $$I=\frac{p}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

जहाँ प्रथम समाकल में $ax^2+bx+c=t$ मानकर व द्वितीय समाकल को पूर्व स्थिति (*I*) के द्वारा हल कर सकते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-29. $\dfrac{1}{x^2+4x+1}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः माना
$$I=\int\frac{1}{x^2+4x+1}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2-3}dx$$
$$=\int\frac{1}{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+c$$

उदाहरण-30. $\dfrac{1}{1-6x-9x^2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः यहाँ
$$1-6x-9x^2=9\left[\frac{1}{9}-\frac{6x}{9}-x^2\right]$$
$$=9\left[\frac{2}{9}-\left(x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$$
$$=9\left[2/9-(x+1/3)^2\right]$$

$\therefore$
$$I=\int\frac{1}{1-6x-9x^2}dx$$
$$=\frac{1}{9}\int\frac{1}{2/9-(x+1/3)^2}dx=\frac{1}{9}\int\frac{1}{(\sqrt{2}/3)^2-(x+1/3)^2}dx$$
$$=\frac{1}{9\times2\times\frac{\sqrt{2}}{3}}\log\left|\frac{\sqrt{2}/3+x+1/3}{\sqrt{2}/3-x-1/3}\right|+c$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+1+3x}{\sqrt{2}-1-3x}\right|+c$$

उदाहरण-31. $\dfrac{5x-2}{3x^2+2x+1}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः माना,
$$5x-2=A\frac{d}{dx}(3x^2+2x+1)+B$$

या
$$5x-2=A(6x+2)+B$$

तुलना से, $6A=5\ \therefore A=\dfrac{5}{6}$ तथा $B=-2-2A=-2-5/3=-11/3$

$\therefore$
$$5x-2=\frac{5}{6}(6x+2)-\frac{11}{3}$$

$\therefore$

$$I=\int \frac{5x-2}{3x^2+2x+1}dx$$

$$=\int \frac{5/6(6x+2)-11/3}{3x^2+2x+1}dx=\frac{5}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}dx-\frac{11}{3}\int \frac{1}{3x^2+2x+1}dx$$

$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{3\times 3}\int \frac{1}{x^2+2x/3+1/3}dx$$

$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{9}\int \frac{1}{(x+1/3)^2+(\sqrt{2}/3)^2}dx$$

$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{9}\times\frac{1}{\sqrt{2}/3}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/3}{\sqrt{2}/3}\right)+c$$

$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

उदाहरण-32. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: यहाँ,

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+15}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2-1}}dx$$

$$=\log|(x-4)+\sqrt{x^2-8x+15}|+c$$

उदाहरण-33. $\dfrac{1}{\sqrt{1+3x-4x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना,

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{1+3x-4x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1/4+3x/4-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{25/64-(x^2-3x/4+9/64)}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-3/8}{5/8}\right)+c=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-3}{5}\right)+c$$

उदाहरण-34. $\dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: यहाँ $$2x+5=(2x+3)+2$$

(अंश को सीधे निरीक्षण द्वारा (x^2+3x+1) के अवकल गुणांक में बदलने पर)

$\therefore$
$$=\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx=\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\int\frac{2}{\sqrt{(x+3/2)^2+(\sqrt{5}/2)^2}},\ \text{जहाँ}\ x^2+3x+1=t$$

$$=2\sqrt{t}+2\log\left|(x+3/2)+\sqrt{x^2+3x+1}\right|+c$$

$$=2\sqrt{x^2+3x+1}+2\log\left|(x+3/2)+\sqrt{x^2+3x+1}\right|+c$$

प्रश्नमाला 9.5

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(1) $\dfrac{1}{x^2+2x+10}$ (2) $\dfrac{1}{2x^2+x-1}$ (3) $\dfrac{1}{9x^2-12x+8}$ (4) $\dfrac{1}{3+2x-x^2}$

(5) $\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$ (6) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+4\sin x+5}$ (7) $\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}$ (8) $\dfrac{3x+1}{2x^2-2x+3}$

(9) $\dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ (10) $\dfrac{(3\sin x-2)\cos x}{5-\cos^2 x-4\sin x}$ (11) $\dfrac{1}{2e^{2x}+3e^x+1}$ (12) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-5x+1}}$

(13) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ (14) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}$ (15) $\dfrac{1}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$ (16) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

(17) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ (18) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (19) $\sqrt{\sec x-1}$ (20) $\sqrt{\dfrac{\sin(x-\propto)}{\sin(x+\propto)}}$

(21) $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ (22) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+6e^x+5}$

IV खण्डशः समाकलन (Integration of parts):

अब तक हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं, प्रतिस्थापन विधियों तथा बीजीय फलनों के समाकल ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन किया है। परन्तु कुछ फलनों का समाकल उपर्युक्त विधियों से ज्ञात करना या तो कठिन होता है या फिर संभव नहीं होता है ऐसे में हम दिये फलनों को खण्डों में व्यक्त कर कुछ साधारण नियमों के अनुसार इनका समाकल ज्ञात करते है।

इनमें अबीजीय फलन यथा चर घांताकी, लघुगणकीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का समाकल ज्ञात करना प्रमुख है।

खण्डशः समाकलन का नियम या फलनो के गुणनफल का समाकलन (Rule of integration by parts or integration of product of functions):

प्रमेय: यदि u तथा v, x के दो फलन हों तो

$$\int u.v\,dx=u\left(\int v\,dx\right)=\int\left[\frac{du}{dx}.\int v\,dx\right]dx$$

प्रमाणः किन्ही दो फलनों $f(x)$ व $g(x)$ हेतु

$$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर–

$$f(x).g(x) = \int\left[f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right]dx$$

या $$\int\left[f(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]dx = f(x)g(x) - \int\left[g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right]dx \qquad (1)$$

अब माना $$f(x) = u, \frac{d}{dx}[g(x)] = v \Rightarrow g(x) = \int v\,dx$$

उपरोक्त मान (1) में रखने पर

$\therefore$ $$\int u.v\,dx = u\int v\,dx - \int\left[\frac{du}{dx}\int v\,dx\right]dx$$

अब यदि u को प्रथम फलन व v को द्वितीय फलन कहे तो खण्डशः समाकलन नियम को शब्दो में निम्न प्रकार लिख सकते है

दो फलनों के गुणा का समाकलन =प्रथम फलन × ∫द्वितीय फलन – ∫{प्रथम फलन का अवकलन × ∫द्वितीय फलन}

टिप्पणीः खण्डशः समाकलन विधि की सफलता प्रथम व द्वितीय फलन के सही चयन पर निर्भर करती है। फलनों का चयन इस प्रकार करना चाहिये कि द्वितीय फलन का आसानी से समाकलन ज्ञात किया जा सके। यद्यपि फलनों के चयन का कोई व्यापक नियम नहीं है फिर भी निम्न बिन्दु ध्यान में रखने चाहिए।

(i) यदि समाकल्य चर x की घात तथा चरघातांकी या त्रिकोणमितीय फलनों का गुणनफल हो तो चरघातांकी या त्रिकोणमितीय फलन को द्वितीय फलन लेना चाहिये।

(ii) अकेले प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन या लघुगणकीय फलनों के समाकलन हेतु इकाई 1 को द्वितीय फलन लेकर समाकलन करना चाहिये।

(iii) खण्डशः समाकलन करते समय दायी ओर समाकल मूल रूप में लौट कर आ जाता है ऐसी स्थिति में पक्षान्तरण कर समाकलन करना चाहिये।

(iv) आवश्यकतानुसार खण्डशः समाकलन का सूत्र एक से अधिक बार प्रयोग में लिया जा सकता है।

विशेषः हम, शब्द 'ILATE' में पहले आने वाले फलन को प्रथम फलन व बाद में आने वाले फलन को द्वितीय फलन चुन सकते है

जहाँ, I – (Inverse trigonometric functions) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों जैसे– $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ आदि के लिये है।

L – (Logarithmic functions) लघुगणकीय फलनों $\log x, \log(x^2+a^2)$ आदि के लिए है।

A – (Algebraic functions) बीजीय फलनों $x, x+1, 2x, \sqrt{x}$ आदि के लिए है।

T – (Trigonometric functions) त्रिकोणमितीय फलनों $\sin x, \cos x, \tan x$ आदि के लिए है।

E – (Exponential function) चरघातांकी फलनों $a^x, e^x, 2^x, 3^{-x}$ आदि के लिए है।

खण्डशः समाकलन विधि का प्रयोगः

$\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ तथा $\int[x f'(x)+f(x)]dx$ प्रकार के समाकलनों में

(i) माना $$I = \int e^x[f(x)+f'(x)]dx, \text{ जहाँ } f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

$$= \int \underset{II}{e^x}\,\underset{I}{f(x)}dx + \int e^x f'(x)dx$$ (प्रथम समाकल में e^x को IIफलन लेने पर)

$$= f(x).e^x - \int f'(x)e^x dx + \int e^x f'(x)dx + c$$

(प्रथम समाकल का खण्डशः समाकलन से)

$$= e^x f(x) + c$$

इस प्रकार, $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+c$

(ii) माना $I = \int [x f'(x)+f(x)]dx$

$$= \int \underset{\text{I}}{x} \underset{\text{II}}{f'(x)} dx + \int f(x)\,dx$$

(प्रथम समाकल मे $f'(x)$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर)

$$= x f(x) - \int 1\times f(x)\,dx + \int f(x)dx$$

$$= x f(x) + c$$

$\therefore$ $\int [x f'(x)+f(x)]dx = x f(x) + c$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-35. फलन x^2e^x का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हलः माना, $I = \int \underset{\text{I}}{x^2} \underset{\text{II}}{e^x}\, dx$

e^x को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= x^2e^x - \int \underset{\text{I}}{2x} \underset{\text{II}}{e^x}\, dx$$

$$= x^2e^x - 2[xe^x - \int 1\times e^x dx]$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$= e^x(x^2-2x+2)+c$$

उदाहरण-36. $x\log x\, dx$ का का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

माना, $I = \int \underset{\text{II}}{x} \underset{\text{I}}{\log x}\, dx$

$\log x$ को प्रथम व x को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = (\log x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x) - \frac{1}{2}\int x dx + c$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$$

उदाहरण-37. $x^2 \sin 2x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

$$I = \int \underset{\text{I}}{x^2} \underset{\text{II}}{\sin 2x}\, dx$$

x^2 प्रथम व $\sin 2x$ को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I = x^2\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int 2x\times\frac{-\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \int \underset{\text{I}}{x}\cdot \underset{\text{II}}{\cos 2x}\, dx$$

x को प्रथम व $\cos 2x$ को द्वितीय फलन मानकर पुनः खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \int 1 \times \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

उदाहरण-38. $\log x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

$$I = \int \underset{\text{II}}{1} \cdot \underset{\text{I}}{\log x}\, dx$$

हल: इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= (\log x)(x) - \int \frac{1}{x} \times x\, dx$$

$$= x\log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

$$= x[\log x - \log e] + c = x\log(x/e) + c$$

उदाहरण-39. $\tan^{-1} x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना,

$$I = \int \tan^{-1} x\, dx$$

$$I = \int \underset{\text{II}}{1} \cdot \underset{\text{I}}{\tan^{-1}} x\, dx$$

$\tan^{-1} x$ को प्रथम व इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \left(\tan^{-1} x\right)(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c \qquad \text{(जहाँ } 1+x^2 = t \text{ मानने पर)}$$

उदाहरण-40. $\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना,

$$I = \int \cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$$

माना

$$x = a\tan^2\theta \Rightarrow dx = 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$\therefore$

$$I = \int \cos^{-1}\sqrt{\left(\frac{a\tan^2\theta}{a + a\tan^2\theta}\right)} \times 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \cos^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{\sec\theta}\right) \times 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \cos^{-1}(\sin\theta).\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \cos^{-1}[\cos(\pi/2-\theta)].\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int (\pi/2-\theta).\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$(\pi/2-\theta)$ को प्रथम व $\tan\theta\sec^2\theta$ को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = 2a\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{\tan^2\theta}{2} - \int -1\times\frac{\tan^2\theta}{2}d\theta\right]$$

$$\left[\because \int \tan\theta\sec^2\theta\, d\theta = \frac{\tan^2\theta}{2}\right]$$

$$= a(\pi/2-\theta)\tan^2\theta + a\int(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$= a(\pi/2-\theta)\tan^2\theta + a[\tan\theta-\theta]+c$$

$$= a\left[\pi/2-\tan^{-1}\sqrt{x/a}\right](x/a) + a\left[\sqrt{x/a}-\tan^{-1}\sqrt{x/a}\right]+c$$

$$= x\cdot\frac{\pi}{2} - x\tan^{-1}\sqrt{x/a} + \sqrt{ax} - a\tan^{-1}\sqrt{x/a}+c$$

या
$$I = x\cdot\frac{\pi}{2} - (a+x)\tan^{-1}\sqrt{x/a} + \sqrt{ax}+c$$

उदाहरण-41. $\int \log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,]\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ
$$I = \int \underset{\text{II}}{1}\cdot\underset{\text{I}}{\log(x+\sqrt{x^2+a^2})}\,dx$$

इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = \log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,].x - \int \frac{1}{[x+\sqrt{x^2+a^2}\,]}\times\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right]x\,dx$$

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \int\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+a^2}\,)}\times\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{\sqrt{x^2+a^2}}\times x\,dx$$

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

(समाकलन में $x^2+a^2=t$ मानकर सरल करने पर)

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+a^2}+c$$

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \sqrt{x^2+a^2}+c$$

उदाहरण-42. $\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $$I=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$$

$$=\int\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$$ (अंश में $x^2=\dfrac{x}{\cos x}\times x\cos x$ लिखने पर)

$\dfrac{x}{\cos x}$ को प्रथम फलन व शेष को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I=\frac{x}{\cos x}\times\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx-\int\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x}\right)\times\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx\right]dx$$

माना $x\sin x+\cos x=t\Rightarrow x\cos x\,dx=dt$

$$=\frac{x}{\cos x}\times\left[\frac{-1}{x\sin x+\cos x}\right]+\int\frac{\left[\cos x+(\sin x)x\right]}{\cos^2 x}\times\frac{1}{(x\sin x+\cos x)}dx$$

$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\sec^2 x\,dx$$

$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+c$$

$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\frac{\sin x}{\cos x}+c$$

$$=\frac{-x+\sin x(x\sin x+\cos x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$

$$=\frac{-x+x\sin^2 x+\sin x\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$

$$=\frac{-x(1-\sin^2 x)+\sin x\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$

$$=\frac{-x\cos^2 x+\sin x\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$

$$=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}+c$$

उदाहरण-43. $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $$I=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+2\sin x/2\cos x/2}{2\cos^2 x/2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\underset{\text{I}}{x}\,\underset{\text{II}}{\sec^2}x/2\,dx+\int\tan x/2\,dx$$

प्रथम समाकल में x को प्रथम फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$=\frac{1}{2}\left[2x\tan x/2-\int 1\times 2\tan x/2\,dx\right]+\int \tan x/2\,dx$$

$$=x\tan x/2-\int \tan x/2\,dx+\int \tan x/2\,dx$$

$$=x\tan x/2+c$$

उदाहरण-44. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

माना $$I=\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=\int \frac{\left(\overline{x+1}-1\right)e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]e^x dx$$

$$=\int \frac{e^x}{(x+1)}dx-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

(प्रथम समाकल में $\frac{1}{x+1}$ को प्रथम फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर)

$$=\left[\frac{1}{(x+1)}\times e^x-\int -\frac{1}{(x+1)^2}e^x dx\right]-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{e^x}{x+1}+\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx=\frac{e^x}{x+1}+c$$

प्रश्नमाला 9.6

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. (i) $x\cos x$ (ii) $x\sec^2 x$
2. (i) x^3e^{-x} (ii) $x^3\sin x$
3. (i) $x^3(\log x)^2$ (ii) $x^3e^{x^2}$
4. (i) $e^{2x}e^{e^x}$ (ii) $(\log x)^2$
5. (i) $\cos^{-1}x$ (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{x+a}{x}}$
6. (i) $\sin^{-1}\left(3x-4x^3\right)$ (ii) $\frac{x}{1+\cos x}$
7. (i) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (संकेत : $x=\cos\theta$) (ii) $\cos\sqrt{x}$
8. (i) $\frac{x}{1+\sin x}$ (ii) $x^2\tan^{-1}x$
9. $\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\frac{x\tan^{-1}x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$
11. $e^x\left(\cot x+\log\sin x\right)$
12. $\frac{2x+\sin 2x}{1+\cos 2x}$
13. $e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)$
14. $e^x\left[\log x+\frac{1}{x^2}\right]$
15. $e^x[\log(\sec x+\tan x)+\sec x]$

16. $e^x(\sin x+\cos x)\sec^2 x$

17. $e^x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$

18. $e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2$ $\left(\text{संकेत} = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 = \frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$

19. $\cos 2\theta.\log\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$

20. $\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}$

21. $\cos^{-1}(1/x)$

22. $(\sin^{-1} x)^2$

9.08 कुछ विशिष्ट प्रकार के समाकल (Some special type of Integral)

कई बार दो फलनों के गुणनफल का खण्डशः समाकलन विधि से समाकलन करते समय समाकल का अन्त नहीं होता, चाहे किसी भी फलन को प्रथम या द्वितीय चुनें। ऐसा चरघातांकी व त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफल में होता है। फलतः फलन का समाकलन करने के दो चरणों के बाद पुनः मूल समाकल आ जाता है तब पक्षों का पक्षान्तरण कर समाकल का मान ज्ञात किया जाता है।

उदाहरणार्थः

$e^{ax}\sin bx$ तथा $e^{ax}\cos bx$ का समाकलनः

माना, $$I=\int \underset{\text{II}}{e^{ax}}\underset{\text{I}}{\sin bx}\,dx$$

$\sin bx$ को प्रथम व e^{ax} को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I=\sin bx\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)-\int b\cos bx\times\frac{e^{ax}}{a}dx$$

या $$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int \underset{\text{II}}{e^{ax}}\underset{\text{I}}{\cos bx}\,dx$$

$\cos bx$ को प्रथम e^{ax} को द्वितीय फलन मानकर पुनः खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left[\cos bx.\frac{e^{ax}}{a}-\int -b\sin bx\times\frac{e^{ax}}{a}dx\right]$$

या $$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

या $$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I$$

या $$I\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{e^{ax}}{a^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$ [अंतिम पद का पक्षान्तरण करने पर]

या $$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$$

या $$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx-b\cos bx]+c$$

इसी प्रकार, $$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$$

9.09 तीन महत्वपूर्ण समाकल (Three important integrals)

(i) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) माना $$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \underset{\text{I}}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \underset{\text{II}}{1}\,dx$$

यहाँ हम $\sqrt{a^2+x^2}$ को प्रथम व इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करेंगे–

$$I = \sqrt{x^2+a^2} \times x - \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} \times x\,dx$$

या $$I = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

या $$I = x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c_1$$

या $$2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c_1$$

या $$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + \frac{c_1}{2}$$

या $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$ (जहाँ $c_1/2 = c$)

इसी प्रकार

(ii) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-45. $e^{3x}\sin 4x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हलः माना $$I = \int \underset{\text{II}}{e^{3x}} \underset{\text{I}}{\sin 4x}\,dx$$

$\sin 4x$ को प्रथम व e^{3x} को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = \sin 4x.\frac{e^{3x}}{3} - \int 4\cos 4x \times \frac{e^{3x}}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int \underset{\text{II}}{e^{3x}} \underset{\text{I}}{\cos 4x}\,dx$$

$\cos 4x$ को प्रथम फलन मानकर पुनः खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\left[\cos 4x.\frac{e^{3x}}{3} - \int -4\sin 4x \times \frac{e^{3x}}{3}dx\right]$$

या $$I = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\, dx$$

या $$I = \frac{e^{3x}}{9}[3\sin 4x - 4\cos 4x] - \frac{16}{9}I + c_1$$

या $$\frac{25}{9}I = \frac{1}{9}e^{3x}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + c_1$$

या $$I = \frac{e^{3x}}{25}[3\sin 4x - 4\cos 4x] + c$$

उदाहरण-46. $\int \frac{\sin(\log x)}{x^3}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $$I = \int \frac{\sin(\log x)}{x^3}dx$$

माना $$\log x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$= \int \frac{(\sin t)e^t dt}{(e^t)^3} = \int e^{-2t}\sin t\, dt$$

$$= \frac{e^{-2t}}{(-2)^2 + (1)^2}[-2\sin t - \cos t] + c$$

$$\left[\because \int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]\right]$$

$$= \frac{x^{-2}}{5}\left[-2\sin(\log x) - \cos(\log x)\right] + c$$

$$I = -\frac{1}{5x^2}\left[2\sin(\log x) + \cos(\log x)\right] + c$$

उदाहरण-47. $\frac{xe^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

माना $$I = \int \frac{xe^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

माना $$\sin^{-1}x = t \Rightarrow x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$$

$$= \int \frac{\sin t.e^t}{\cos t} \times \cos t\, dt = \int e^t \sin t\, dt$$

$$= \frac{e^t}{2}[\sin t - \cos t] + c = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{2}\left[x - \sqrt{1-x^2}\right] + c$$

उदाहरण-48. $e^{3x}\cos(4x+5)dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना,
$$I=\int \underset{II}{e^{3x}}\underset{I}{\cos(4x+5)}dx$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$I=\cos(4x+5).\frac{e^{3x}}{3}-\int -4\sin(4x+5)\times\frac{e^{3x}}{3}dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos(4x+5)+\frac{4}{3}\int \underset{II}{e^{3x}}\underset{I}{\sin(4x+5)}dx$$

पुनः खण्डशः समाकलन करने पर

$$I=\frac{1}{3}e^{3x}\cos(4x+5)+\frac{4}{3}\left[\sin(4x+5)\times\frac{e^{3x}}{3}-\int 4\cos(4x+5)\times\frac{e^{3x}}{3}dx\right]$$

या
$$I=\frac{1}{3}e^{3x}\cos(4x+5)+\frac{4}{9}e^{3x}\sin(4x+5)-\frac{16}{9}\int e^{3x}\cos(4x+5)dx$$

या
$$I=\frac{1}{9}e^{3x}\left[3\cos(4x+5)+4\sin(4x+5)\right]-\frac{16}{9}I+c_1$$

या
$$\frac{25}{9}I=\frac{1}{9}e^{3x}\left[3\cos(4x+5)+4\sin(4x+5)\right]+c_1$$

या
$$I=\frac{e^{3x}}{25}\left[3\cos(4x+5)+4\sin(4x+5)\right]+c$$

उदाहरण-49. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $\sqrt{x^2+2x+5}$ (ii) $\sqrt{3-2x-x^2}$ (iii) $\sqrt{x^2+8x-6}$

हल: (i)
$$I=\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}dx$$

$$=\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}+\frac{(2)^2}{2}\log\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2^2}\right|+c$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\log\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$$

(ii)
$$I=\int\sqrt{3-2x-x^2}dx=\int\sqrt{4-\left(x^2+2x+1\right)}dx$$

$$=\int\sqrt{(2)^2-(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(2)^2-(x+1)^2}+\frac{(2)^2}{2}\sin^{-1}\frac{(x+1)}{2}+c$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

(iii) माना, $I = \int \sqrt{x^2 + 8x - 6}\, dx$

$$= \int \sqrt{(x+4)^2 - 22}\, dx$$

$$= \frac{x+4}{2}\sqrt{(x+4)^2 - 22} - \frac{22}{2}\log\left|(x+4) + \sqrt{(x+4)^2 - 22}\right| + c$$

$$= \frac{(x+4)}{2}\sqrt{x^2 + 8x - 6} - 11\log\left|(x+4) + \sqrt{x^2 + 8x - 6}\right| + c$$

उदाहरण-50. $\sec^3 x\, dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $I = \int \sec x . \sec^2 x\, dx$

$$= \int \sqrt{1 + \tan^2 x} . \sec^2 x dx$$

माना $\tan x = t \qquad \therefore \sec^2 x\, dx = dt$

$$I = \int \sqrt{1 + t^2} . dt$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\log\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right| + c$$

$$= \frac{\tan x}{2}\sqrt{1 + \tan^2 x} + \frac{1}{2}\log\left|\tan x + \sqrt{1 + \tan^2 x}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\log\left|\tan x + \sec x\right| + c$$

उदाहरण-51. $e^{\sin x}\cos x\sqrt{4 - e^{2\sin x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $I = \int e^{\sin x}\cos x\sqrt{4 - e^{2\sin x}}dx$

माना $e^{\sin x} = t \Rightarrow \cos x . e^{\sin x}dx = dt$

$\therefore$ $I = \int \sqrt{4 - t^2}dt$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{4 - t^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{t}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{\sin x}\sqrt{4 - e^{2\sin x}} + 2\sin^{-1}\left(\frac{e^{\sin x}}{2}\right) + c$$

प्रश्नमाला 9.7

निम्नफलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. $e^{2x}\cos x$	2. $\sin(\log x)$	3. $\dfrac{e^{a\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}$	4. $e^{x/\sqrt{2}}\cos(x+\propto)$
5. $e^x\sin^2 x$	6. $e^{a\sin^{-1}x}$	7. $\cos(b\log x/a)$	8. $e^{4x}\cos 4x\cos 2x$
9. $\sqrt{2x - x^2}$	10. $\sqrt{x^2 + 4x + 6}$	11. $\sqrt{x^2 + 6x - 4}$	12. $\sqrt{2x^2 + 3x + 4}$
13. $x^2\sqrt{a^6 - x^6}$	14. $(x+1)\sqrt{x^2 + 1}$	15. $\sqrt{1 - 4x - x^2}$	16. $\sqrt{4 - 3x - 2x^2}$

विविध उदाहरण

उदाहरण-52. $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना,
$$I = \int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$$

$\cos^2 x$ का अंश व हल में भाग देने पर

$$I = \int \frac{\sec^2 x dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$$

माना $\tan x = t$ तब $\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dt}{t^2 + (a/b)^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} \times \frac{1}{(a/b)}\tan^{-1}\left(\frac{t}{a/b}\right) + c$$

$$= \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bt}{a}\right) + c$$

$$= \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + c$$

उदाहरण-53. $\dfrac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: यहाँ
$$I = \int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}dx$$

माना $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\, dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2}dt$$

$$= \int \frac{6t^3}{t+1}dt = 6\int \left[t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log|t+1|\right] + c$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{x^{1/3}}{2} + x^{1/6} - \log(x^{1/6} + 1)\right] + c$$

उदाहरण-54. $\cos\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: $$I=\int \cos\sqrt{x}\,dx$$

माना $$\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \Rightarrow dx=2t\,dt$$

$\therefore$ $$I=\int \cos t\times 2t\,dt$$

$$=2\int \underset{\text{I}}{t}\,\underset{\text{II}}{\cos t}\,dt$$

$$=2\left[t\sin t-\int 1\times \sin t\,dt\right]$$

$$=2\left[t\sin t+\cos t\right]+c$$

$$=2\left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right]+c$$

उदाहरण-55. $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $$I=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\tan x\cos^2 x}dx$$

हर में $\cos x$ का गुणा व भाग करने पर

$$=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx \qquad \text{माना } \tan x=t \qquad \therefore \sec^2 x dx=dt$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+c=2\sqrt{\tan x}+c$$

उदाहरण-56. $\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $$I=\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=\int\left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right]dx$$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(1-2\sin x\cos x)}}dx=\sqrt{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}dx$$

माना $$\sin x-\cos x=t\Rightarrow(\cos x+\sin x)dx=dt$$

$\therefore$ $$I=\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\sin^{-1}t+c$$

$$=\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+c$$

उदाहरण-57. $\frac{[x^5-x]^{1/5}}{x^6}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल:
$$I=\int\frac{[x^5-x]^{1/5}}{x^6}dx=\int\frac{x(1-1/x^4)^{1/5}}{x^6}dx$$
$$=\int\frac{(1-1/x^4)^{1/5}}{x^5}dx$$

माना $\left(1-\frac{1}{x^4}\right)=t\Rightarrow\frac{4}{x^5}dx=dt\Rightarrow\frac{1}{x^5}dx=\frac{dt}{4}$

$\therefore$
$$I=\frac{1}{4}\int t^{1/5}dt=\frac{1}{4}\frac{t^{1/5+1}}{(1/5+1)}+c$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}t^{6/5}+c=\frac{5}{24}\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^{6/5}+c$$

विविध प्रश्नमाला—9

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. $1+2\tan x(\tan x+\sec x)$
2. $e^x\sin^3 x\,dx$
3. $x^2\log(1-x^2)dx$
4. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{(x+a)}}$ संकेत $x=a\tan^2\theta$
5. $\frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$
6. $\frac{x}{1+\sin x}$
7. $\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $\frac{2x-1}{(1+x)^2}$
9. $\frac{1}{\cos 2x+\cos 2\propto}$
10. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
11. $\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$
12. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ [संकेत: $\cos^4 x$ का भाग दे]
13. $\frac{1+x}{(2+x)^2}$
14. $\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$
15. $\frac{\tan^{-1}x}{x^2}$
16. $\frac{1}{\sin^2 x+\sin 2x}$
17. $\frac{1}{4x^2-4x+3}$
18. $\frac{1}{x[6(\log x)^2+7(\log x)+2]}$
19. $\frac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{4-\sin^4 2x}}$
20. $\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}$
21. $\frac{3x-1}{(x-2)^2}$
22. $\int\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$ बराबर है–

    (क) $\tan x+x+c$ (ख) $\cot x+x+c$ (ग) $\tan x-x+c$ (घ) $\cot x-x+c$
23. $\int\frac{1}{\sqrt{32-2x^2}}dx$ बराबर है–

    (क) $\sin^{-1}(x/4)+c$ (ख) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(x/4)+c$ (ग) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{4}\right)+c$ (घ) $\cos^{-1}(x/4)+c$

24. $\int \log x \, dx$ बराबर है–

(क) $x\log(xe)+c$ (ख) $x\log x+c$ (ग) $x\log(x/e)+c$ (घ) $\log x/e$

25. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$ बराबर है–

(क) $\log\left(\frac{x}{x+1}\right)+c$ (ख) $\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+c$ (ग) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{x+1}\right)+c$ (घ) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+c$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि दिया गया फलन $f(x)$ तथा उसका समाकलन $F(x)$ है तो समाकलन की परिभाषा से, $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$.
2. समाकलन को प्रतिअवकलज या पूर्वग भी कहते है यह अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है।
3. किसी अचर k हेतु $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)\,dx$
4. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$
5. समाकलन के कुछ मानक सूत्र–

(i) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$

(ii) $\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+c$

(iii) $\int e^x dx = e^x + c$

(iv) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c$

(v) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(vi) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(vii) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(viii) $\int \mathrm{cos}ec^2 x\, dx = -\cot x + c$

(ix) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(x) $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + c$

(xi) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c=-\cos^{-1}x+c$

(xii) $\int \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c = -\cot^{-1}x + c$

(xiii) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + c = -\mathrm{cosec}^{-1}x + c$

(xiv) $\int \frac{|x|}{x}dx = |x| + c, \quad x \neq o$

(xv) $\int dx = x + c$

(xvi) $\int o\, dx = c$

6. प्रतिस्थापन योग्य समाकल्य

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$

(ii) $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$

(iii) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c$

(iv) $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\log|ax+b|+c$

(v) $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$

(vi) $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a}+c$

(vii) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}+c$

7. मानक सूत्रों में प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग–

(i) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}x/a+c$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

8. मानक समाकल

(i) $\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

(ii) $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

(iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

(iv) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c$

(v) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

(vi) $\int \tan x dx = \log|\sec x|+c$

(vii) $\int \cot x dx = \log|\sin x|+c$

(viii) $\int \sec x\, dx = \log|\sec x+\tan x|+\text{c} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

(ix) $\int \cos ec x dx = \log|\cos ec\ x-\cot x|+c = \log|\tan x/2|+c$

9. खण्डशः समाकलन

(i) दो फलनों के गुणनफल का समाकलन

=(प्रथम फलन)× ∫ द्वितीय फलन का समाकलन– ∫ प्रथम फलन का अवकलन× ∫ द्वितीय फलन का समाकलन)का समाकलन

अर्थात, $\int \underset{\text{I}}{u}\,\underset{\text{II}}{v}\,dx = u\int v dx - \int\left[\frac{du}{dx}\times\int v dx\right]dx$

(ii) $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\sin[bx-\tan^{-1}b/a]+c$

(iii) $\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cos\left[bx-\tan^{-1}b/a\right]+c$

(iv) $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+c$

(v) $\int [x f'(x)+f(x)]dx = x f(x)+c$

(vi) $\int [f(\log x)+f'(\log x)]dx = xf(\log x)+c$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 9.1

1. (i) $\frac{3}{5}\cdot x^{5/3}+c$ (ii) $\frac{e^{3x}}{3}+c$ (iii) $\frac{(1/2)^x}{(\log 1/2)}+c$ (iv) $\frac{x^3}{3}+c$

2. $5\sin x+3\cos x+2\tan x+c$

3. $x^2/2+1/x+c$

4. $\tan x-\cot x+c$

5. $2/3\cdot x^{3/2}+2/5\cdot x^{5/2}+c$

6. $\frac{a^{x+1}}{x+1}+c$

7. $x-\tan^{-1}x+c$

8. $x+\cos x+c$

9. $\tan x+\sec x+c$

10. $(\pi/2)x+c$

11. $x-2\tan^{-1}x+c$

12. $\tan x-x+c$

13. $-\cot x-x+c$

14. $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+c$

15. $\tan x+\cot x+c$

16. $x-\tan x+\sec x+c$

17. $-\cot x-\cot x\,\mathrm{cosec}\,x+c$

18. $x+\tan^{-1}x+3sec^{-1}x+\frac{2^x}{\log 2}+c$

19. $x+\mathrm{cosec}\,x+c$

20. $x^2/2+\log|x|+2x+c$

21. $x+c$

22. $\sqrt{2}\sin x+c$

23. $-\cot x-\tan x+c$

24. $-3\,\mathrm{cosec}\,x-4\cot x+c$

प्रश्नमाला 9.2

1. (i) $(-1/2)\cos x^2+c$ (ii) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+c$

2. (i) $\log|e^x+\cos x|+c$ (ii) $2\sqrt{1+e^x}+c$

3. (i) $2\sqrt{e^x+1}+\log\left|\frac{e^x}{e^x+2}\right|+c$ (ii) $2\sin(e^{\sqrt{x}})+c$

4. (i) $\log|1+\log x|+c$ (ii) $\frac{1}{4}(1+\log x)^4+c$

5. (i) $\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{m}+c$ (ii) $\frac{(\tan x)^{p+1}}{p+1}+c$

6. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\sec x+\tan x|+c$; (ii) $\log|\mathrm{cosec}2x-\cot 2x|+\log|\mathrm{cosec}x-\cot x|+c$

7. (i) $\frac{1}{2}\left[\sin x-\frac{1}{5}\sin 5x\right]+c$ (ii) $\pm 2(\sin x/2+\cos x/2)+c$

8. (i) $\frac{1}{8}\left[3x+2\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x\right]+c$; (ii) $\frac{-3}{4}\cos x-\frac{1}{12}\cos 3x+c$

9. (i) $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+c$; (ii) $\tan(xe^x)+c$

10. (i) $\frac{1}{2}[x+\log|\sin x-\cos x|]+c$; (ii) $\frac{1}{2}[x+\log|\sin x+\cos x|]+c$

11. (i) $2\sqrt{\tan x}+\frac{2}{3}\tan^{5/2}x+c$ (ii) $\log|\sin x+\cos x|+c$

12. (i) $x\cos 2a+\sin 2a.\log|\sin(x-a)|+c$; (ii) $x\cos a+\sin a.\log|\sin(x-a)|+c$

13. (i) $\frac{1}{3}\log|\sin 3x| - \frac{1}{5}\log|\sin 5x| + c$; (ii) $\log|\sin(x+\pi/6)\sin(x-\pi/6)| + c$

14. (i) $\frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x+\tan^{-1}(4/3)}{2}\right)\right| + c$; (ii) $\operatorname{cosec}(a-b)\log\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + c$

15. (i) $\frac{1}{2(b-a)}\log(a\cos^2 x + b\sin^2 x) + c$; (ii) $\sqrt{2}\sec\alpha\sqrt{\tan x\cos\alpha + \sin\alpha} + c$

16. (i) $\frac{2}{\cos a}\sqrt{\tan x\cos a + \sin a} + c$; (ii) $2[\sin x + x\cos\alpha] + c$

प्रश्नमाला 9.3

1. (i) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{x}{5} + c$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{4} + c$

2. (i) $\log|1-\sqrt{1-e^{2x}}| + c$; (ii) $\frac{1}{2}\log\left[2x + \sqrt{4x^2+1}\right] + c$

3. (i) $\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right) + c$; (ii) $-\log|(2-x)+\sqrt{x^2-4x+5}| + c$

4. (i) $\frac{1}{3}\log|x^3+\sqrt{x^6+4}| + c$; (ii) $\frac{1}{5}\sin^{-1}(x^5) + c$

5. (i) $\tan^{-1}(x+3) + c$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|(x-1/4)+\sqrt{x^2-1/2x+1}\right| + c$

6. (i) $\frac{1}{\sin\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{e^x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + c$; (ii) $\log|\tan x + \sqrt{\tan^2 x + 3}| + c$

7. (i) $\sin^{-1}(2x-3) + c$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\left(\frac{5x-4}{6}\right) + c$

8. (i) $\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$; (ii) $\log|(x+a)+\sqrt{x^2+2xa+b^2}| + c$

9. (i) $a\sin^{-1}\sqrt{x/a} + \sqrt{x}\sqrt{a-x} + c$; (ii) $-a\cos^{-1}x/a - \sqrt{a^2-x^2} + c$

10. (i) $\frac{2}{3}\sin^{-1}(x/a)^{3/2} + c$; (ii) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$

11. (i) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$; (ii) $\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1}) + c$

12. (i) $2\sin^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{\beta-x}\right) + c$; (ii) $\sin^{-1}(x-1) + c$

13. (i) $\log\left|(x-3/2)+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + c$; (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$

प्रश्नमाला 9.4

1. $\frac{1}{24}\log\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + c$

2. $\frac{1}{12}\log\left|\frac{x-6}{x+6}\right| + c$

3. $\log|x+1| + 2\log|x-2| + c$

4. $\frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2}\log\left|\frac{1}{x+1}\right| + c$

5. $-\frac{1}{6}\log|x+1| + \frac{4}{5}\log|x-2| + \frac{9}{10}\log|x+3| + c$

6. $\frac{1}{7}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{\sqrt{3}}{7}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

7. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+c$

8. $x+\frac{1}{3}\log\frac{(x-2)^4}{|x+1|}+c$

9. $\frac{1}{a^2-b^2}[a\tan^{-1}x/a-b\tan^{-1}x/b]+c$

10. $-\frac{1}{6}\log|x|+\frac{3}{10}\log|x-2|-\frac{2}{15}\log|x+3|+c$

11. $-\log|x|+3\log|x-2|-\log|x+2|+c$

12. $\frac{1}{9}\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+c$

13. $\log\frac{(1+x)^2}{1+x^2}-\tan^{-1}x+c$

14. $\log|x|-\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

15. $x+3\log|x+2|-\log|x+1|+c$

16. $\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}+c$

17. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c$

18. $\log\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|-\frac{1}{e^x-1}+c$

19. $\log\left|\frac{2+e^x}{3+e^x}\right|+c$

20. $\log\left|\left(\frac{2+\tan x}{3+\tan x}\right)\right|+c$

21. $\log|x|-\frac{1}{5}\log|x^5+1|+c$

22. $\frac{1}{a^n}\log\left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)+c$

23. $\log|x+2|-\frac{1}{2}\log(x^2+4)+\tan^{-1}(x/2)+c$

24. $\log|\sec x+\tan x|-2\tan(x/2)+c$

प्रश्नमाला 9.5

1. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)+c$

2. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{2x+2}\right|+c$

3. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x-2}{2}\right)+c$

4. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{3-x}\right|+c$

5. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

6. $\tan^{-1}[\sin(x+2)]+c$

7. $\frac{1}{2}\log|x^2+2x-4|-\frac{2}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{x+1-\sqrt{5}}{x+1+\sqrt{5}}\right|+c$

8. $\frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

9. $\frac{1}{2}\log|x^2+4x+5|-\tan^{-1}(x+2)+c$

10. $3\log|2-\sin x|+\frac{4}{2-\sin x}+c$

11. $-\frac{1}{2}|e^{-2x}+3e^{-x}+2|+\frac{3}{2}\log\left|\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}+2}\right|+c$

12. $\frac{1}{2}\log\left|(x-5/8)+\sqrt{x^2-5x/4+1/4}\right|+c$

13. $\sin^{-1}(2x-5)+c$

14. $\sin^{-1}\left|\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right|+c$

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{41}}\right)+c$

16. $\sqrt{x^2-2x+4}+3\log|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+4}|+c$

17. $\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\log|(x-1/2)+\sqrt{x^2-x+1}|+c$

18. $\sqrt{x^2+2x+2}+2\log|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}|+c$

19. $-\log|(\cos x+1/2)+\sqrt{\cos^2 x+\cos x}|+c$

20. $-\cos\propto\sin^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{\cos\propto}\right)-\sin\propto.\log|\sin x+\sqrt{\sin^2 x-\sin^2\propto}|+c$

21. $\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

22. $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{e^x+1}{e^x+5}\right|+c$

प्रश्नमाला 9.6

1. (i) $x\sin x+\cos x+c$; (ii) $x\tan x-\log\sec x+c$

2. (i) $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+c$; (ii) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

3. (i) $\dfrac{x^4}{4}\left[(\log x)^2-\dfrac{1}{2}\log x+\dfrac{1}{8}\right]+c$; (ii) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+c$

4. (i) $(e^x-1)e^{e^x}+c$; (ii) $x(\log x)^2-2x\log x+2x+c$

5. (i) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$; (ii) $(x+a)\tan^{-1}\sqrt{x/a}-\sqrt{ax}+c$

6. (i) $3x\sin^{-1}x+3\sqrt{1-x^2}+c$; (ii) $x\tan x/2-2\log|\sec x/2|+c$

7. (i) $\dfrac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+c$; (ii) $2\left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right]+c$

8. (i) $\dfrac{-x(1-\sin x)}{\cos x}+\log(1+\sin x)+c$; (ii) $\dfrac{x^3}{3}\tan^{-1}x-\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{1}{6}\log(1+x^2)+c$

9. (i) $-\sin^{-1}x.\cos(\sin^{-1}x)+x+c$

10. $\dfrac{-\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$

11. $e^x\log\sin x+c$

12. $x\tan x+c$

13. $-e^x\cot x/2+c$

14. $e^x(\log x-1/x)+c$

15. $e^x\log|\sec x+\tan x|+c$

16. $e^x\sec x+c$

17. $\dfrac{e^x}{x^2}+c$

18. $\dfrac{e^x}{1+x^2}+c$

19. $\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\log\left|\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|+\dfrac{1}{2}\log(\cos 2\theta)+c$

20. $\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}+c$

21. $x\sec^{-1}x-\log[x+\sqrt{x^2-1}]+c$

22. $x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)-2x+c$

प्रश्नमाला 9.7

1. $\dfrac{e^{2x}}{5}[2\cos x+\sin x]+c$

2. $\dfrac{1}{2}x[\sin(\log x)-\cos(\log x)]+c$

3. $\dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{1+a^2}\left[\dfrac{a+x}{\sqrt{1+x^2}}\right]+c$

4. $\dfrac{2}{3}e^{x/\sqrt{2}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(x+\propto)+\sin(x+\propto)\right]+c$

5. $\dfrac{e^x}{2}-\dfrac{e^x}{10}[\cos 2x+2\sin 2x]+c$

6. $\dfrac{e^{a\sin^{-1}x}}{1+a^2}[x+a\sqrt{1-x^2}]+c$

7. $\dfrac{x}{1+b^2}[\cos(b\log x/a)+b\sin(b\log x/a)]+c$

8. $\frac{e^{4x}}{8}\left[\frac{1}{13}(4\cos 6x+6\sin 6x)+\frac{1}{5}(4\cos 2x+2\sin 2x)\right]+c$

9. $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)+c$

10. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+6}+\log|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+6}|+c$

11. $\frac{(x+3)\sqrt{x^2+6x-4}}{2}+\frac{13}{2}\log|(x-2)+\sqrt{x^2+6x-4}|+c$

12. $\frac{4x+3}{8}\sqrt{2x^2+3x+4}+\frac{23}{16\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)+c$

13. $\frac{1}{3}x^3\sqrt{a^2-x^6}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^3}{a}\right)+c$

14. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2+1}|+c$

15. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+c$

16. $\frac{(4x+3)}{8}\sqrt{4-3x-2x^2}+\frac{41\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right)+c$

विविध प्रश्नमाला—9

1. $2(\tan x+\sec x)-x+c$

2. $\frac{e^x}{30}[\sin 3x-3\cos 3x+20\sin x-20\cos x]+c$

3. $\frac{x^3}{3}\log|1-x^2|-\frac{2}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{3}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$

4. $\sqrt{x^2+ax}-2\sqrt{ax+a^2}+a\log\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{x}\right)+c$

5. $\frac{-\sin 2x}{2}+c$

6. $x(\tan x-\sec x)-\log|\sec x|+\log|\sec x+\tan x|+c$

7. $\sin^{-1}(x/a)+\log|x+\sqrt{a^2-x^2}|+c$

8. $2\log|(1+x)|+\frac{2}{1+x}+c$

9. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}2\propto\cdot\log\left|\frac{x-\propto}{x+\propto}\right|+c$

10. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)+c$

11. $-\log|(\sin x+\cos x)+\sqrt{\sin 2x}|+c$

12. $\tan^{-1}(\tan^2 x)+c$

13. $\log|x+2|+\frac{2}{2+x}+c$

14. $\tan x-\cot x-3x+c$

15. $\frac{-\tan^{-1}x}{x}-\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+\log\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c$

16. $\log\left|\frac{\tan x}{\tan x+2}\right|+c$

17. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)+c$

18. $\log\left|\frac{2\log x+1}{3\log x+2}\right|+c$

19. $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{\sin^2 2x}{2}\right]+c$

20. $\frac{1}{40}\log\left|\frac{5+4(\sin x-\cos x)}{5-4(\sin x-\cos x)}\right|+c$

21. $3\log|x-2|-\frac{5}{x-2}+c$

22 (ग)

23. (ख)

24. (ग)

25. (क)