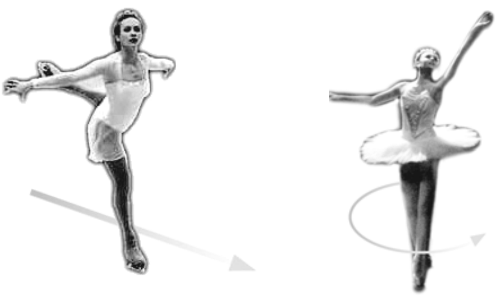
Chapter
7
घूर्णी गति

प्रस्तावना (Introduction)

जब कोई वस्तु एक सरल रेखा में गति करती है, तो उसकी गति स्थानांतरीय गति कहलाती है। जबकि किसी पहिए की अपने अक्ष के परितः गति, ग्रहों की सूर्य के परितः गति, जेट इंजन के रोटर की गति, हेलीकॉप्टर के ब्लेडों की गति व घड़ी की सुईयों की गति घूर्णन गति कहलाती है।

प्रथम चित्र में एक लड़की बर्फ पर नियत चाल से एक सरल रेखा में गतिशील है, अतः उसकी गति स्थानांतरीय गति है, परन्तु द्वितीय चित्र में वह ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः नियत दर से घूर्णन कर रही है, अतः उसकी गति घूर्णन गति है।



(A) (B)

Fig. 7.1

अभी तक हमनें किसी बिन्दु द्रव्यमान की स्थानांतरीय गति का अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम किसी नियत अक्ष के परितः एक दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति का अध्ययन करेंगे।

(1) **दृढ़ पिण्ड :** ऐसा पिण्ड जिसके सभी कण दृढ़तापूर्वक इस प्रकार बँधे हों कि बल लगाने पर उनमें आपेक्षिक विस्थापन न हो अर्थात् घूर्णन करते समय उसकी आकृति परिवर्तित न हो दृढ़ पिण्ड कहलाता है।

(2) **निकाय :** कणों का एक समूह जिसके सभी कण आपस में अन्योन्य क्रिया करते हों तथा जो किसी घटना के अध्ययन के समय विचाराधीन हों, निकाय कहलाता है।

(3) **आंतरिक बल :** किसी निकाय के समस्त कण एक दूसरे पर जो बल आरोपित करते हैं, आंतरिक बल कहलाते हैं। आतंरिक बलों के कारण ही कण सुपरिभाषित निकाय का निर्माण करते हैं। दो कणों के मध्य आंतरिक बल परस्पर बराबर व विपरीत होते हैं।

(4) **बाह्य बल :** किसी नियत आकार की वस्तु को गतिशील करने अथवा रोकने के लिए, वस्तु पर बाहर से बल आरोपित करना पड़ता है, निकाय पर आरोपित यही बल बाह्य बल कहलाता है।

द्रव्यमान केन्द्र (Centre of Mass)

किसी वस्तु अथवा निकाय का वह बिन्दु जहाँ वस्तु अथवा निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्रित माना जाता है व इस पर सभी बाह्य बल आरोपित माने जाते हैं, द्रव्यमान केन्द्र कहलाता है।

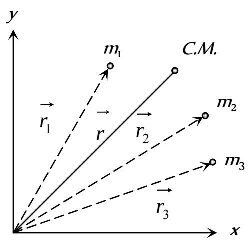


Fig. 7.2

(1) **n कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश :** यदि कोई निकाय n कणों से मिलकर बना हो, जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3 ...... m_n$ हों एवं इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3} .... \vec{r_n}$ हों तब निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + m_3 \vec{r_3} + ... m_n \vec{r_n}}{m_1 + m_2 + m_3 + ... m_n}$$

अतः किसी n कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र, समस्त कणों के स्थिति सदिशों का भारित माध्य होता है।

(2) **दो कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश :**

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

तथा द्रव्यमान केन्द्र दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होगा।

यदि कणों के द्रव्यमान समान हों अर्थात् $m_1 = m_2$, तब द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश, $\vec{r} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2}$

(3) **सतत् द्रव्यमान वितरण के लिये द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश :** एक समान वस्तुओं के लिये द्रव्यमान केन्द्र निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है $\vec{r}_{cm} = \frac{\int dm\ \vec{r}}{\int dm}$

(4) **द्रव्यमान केन्द्र से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण तथ्य**

(i) द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति चुने गये निर्देशांक निकाय पर निर्भर नहीं करती।

(ii) द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति वस्तु की आकृति व द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है।

उदाहरणार्थ : एक वृत्ताकार चकती का द्रव्यमान केन्द्र उसके पदार्थ के भीतर स्थित होता हैं, जबकि एक वृत्ताकार वलय का द्रव्यमान केन्द्र उसके पदार्थ के बाहर स्थित होता है।

(iii) सममित वस्तुओं में, यदि द्रव्यमान वितरण एकसमान हो, तो द्रव्यमान केन्द्र, वस्तु के ज्यामितीय केन्द्र के संपाती होता है।

Table 7.1 : कुछ वस्तुओं के द्रव्यमान केन्द्रों की स्थिति

क्रमांक	वस्तु	द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति
(i)	एकसमान खोखला गोला	गोले के केन्द्र पर
(ii)	एकसमान ठोस गोला	गोले के केन्द्र पर
(iii)	एकसमान वृत्ताकार वलय	वलय के केन्द्र पर
(iv)	एकसमान वृत्ताकार चकती	चकती के केन्द्र पर
(v)	एकसमान छड़	छड़ के केन्द्र पर
(vi)	समतल पटल (वर्गाकार, आयताकार अथवा समान्तर चतुर्भुजाकार)	विकर्णों के कटान बिन्दु पर
(vii)	त्रिभुजाकार समतल पटल	मध्यिकाओं के कटान बिन्दु पर
(viii)	घनाभ / घनाकार पिण्ड	विकर्णों के कटान बिन्दु पर
(ix)	खोखला बेलन	बेलन के अक्ष का मध्य बिन्दु
(x)	ठोस बेलन	बेलन के अक्ष का मध्य बिन्दु
(xi)	शंकु अथवा पिरामिड	शंकु के अक्ष पर शीर्ष से $\frac{3h}{4}$ दूरी पर स्थित बिन्दु पर, (जहाँ h शंकु की ऊँचाई है)

(iv) केवल स्थानांतरीय गति में वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति परिवर्तित होती है, जबकि वस्तु की घूर्णी गति (द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाने वाली अक्ष के परितः) का उसके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

(v) यदि द्रव्यमान केन्द्र मूलबिन्दु पर स्थित हो, तो, द्रव्यमान केन्द्र के परितः निकाय के समस्त कणों के द्रव्यमानों के आघूर्णों का योग शून्य होता है, अर्थात् $\Sigma m_i \vec{r_i} = 0$

(vi) यदि निकाय के कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ...$ हैं, क्रमशः $v_1, v_2, v_3, ...$ वेग से गतिमान हों, तो

द्रव्यमान केन्द्र का वेग $v_{cm} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$

(vii) यदि निकाय के कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ...$ हैं, क्रमशः $a_1, a_2, a_3, ...$ त्वरण से गतिमान हो, तो

द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण $\vec{a}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{a_i}}{\sum m_i}$

(viii) यदि निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश $\vec{r}$ हो, तो द्रव्यमान केन्द्र का वेग

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r}_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}\right)$$

(ix) इसी प्रकार द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}\right)$$

(x) दृढ़ पिण्ड पर लगने वाला बल $\vec{F} = M\vec{a}_{cm} = M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

(xi) किसी विलगित निकाय पर आरोपित बाह्य बल शून्य होता है।

$\vec{F} = M\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{cm}\right) = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} =$ नियतांक

अतः किसी विलगित निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एकसमान वेग से सरल रेखीय गति करता है।

कोणीय विस्थापन (Angular Displacement)

किसी अक्ष के परितः घूर्णन कर रहे कण का स्थिति सदिश $\vec{r}$, कण की दो क्रमागत स्थितियों के मध्य जो कोण बनाता है, कण का कोणीय विस्थापन कहलाता है।

कोणीय विस्थापन $(\theta) = \frac{\text{रैखिक विस्थापन}\ (s)}{\text{त्रिज्या}\ (r)}$

(1) **मात्रक** : रेडियन

(2) **विमीय सूत्र** : $[M^0L^0T^0]$

(3) **सदिश रूप** : $\vec{S} = \vec{\theta} \times \vec{r}$

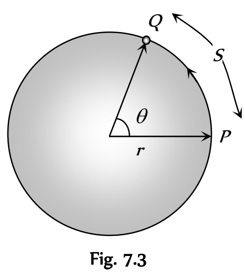


Fig. 7.3

अर्थात् कोणीय विस्थापन एक सदिश राशि है, जिसकी दिशा दायें हाथ के नियम से ज्ञात की जाती है। यह अक्षीय सदिश भी कहलाता है। वामावर्ती (Anticlockwiese) घूर्णन के लिए, कोणीय विस्थापन (θ) की दिशा तल के लम्बवत्, बाहर की ओर व अक्ष के अनुदिश होगी तथा इसका विलोम भी सत्य है।

(4) 2π रेडियन = $360°$ = 1 पूर्ण चक्र

(5) यदि कोई वस्तु किसी नियत अक्ष के परितः घूर्णन कर रही है, तो उसके समस्त कणों का कोणीय विस्थापन समान होगा जबकि कणों का रैखिक विस्थापन, घूर्णन अक्ष से उनकी दूरियों के अनुरूप भिन्न-भिन्न होगा।

कोणीय वेग (Angular Velocity)

एकांक समय में, किसी कण का कोणीय विस्थापन उसका कोणीय वेग कहलाता है।

यदि कण स्थिति P से Q तक जाने में Δt समय लेता है, तो कोणीय वेग $\omega = \frac{\text{कोणीय विस्थापन}}{\text{समयांतराल}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ जहाँ $\Delta\theta$ कोणीय विस्थापन है।

(1) **कण का तात्क्षणिक कोणीय वेग** $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\theta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$

(2) **औसत कोणीय वेग**

$$\omega_{av} = \frac{\text{कुल कोणीय विस्थापन}}{\text{कुल समय}}$$

$$= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

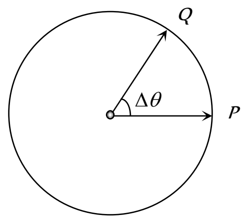


Fig. 7.4

(3) **मात्रक** : रेडियन/सैकण्ड

(4) **विमीय सूत्र** : $[M^0L^0T^{-1}]$ (जो कि आवृत्ति के विमीय सूत्र के समान है)

(5) सदिश रूप $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ [जहाँ $\vec{v}$ = रैखिक वेग, $\vec{r}$ = त्रिज्यीय सदिश]

$\vec{\omega}$ एक अक्षीय सदिश है जिसकी दिशा घूर्णन तल के लम्बवत् होती है एवं दाहिने हाथ के पेंच नियम से दी जाती है।

(6) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ [जहाँ T = आवर्तकाल, n = आवृत्ति]

(7) कोणीय वेग का परिमाण कोणीय चाल कहलाता है, जो कि ω से ही प्रदर्शित किया जाता है।

कोणीय त्वरण (Angular Acceleration)

कण के कोणीय वेग के परिवर्तन की दर को उसका कोणीय त्वरण कहते हैं।

यदि t_1 समय कण का कोणीय वेग ω_1 तथा t_2 समय पर कण का कोणीय वेग ω_2 हो तब,

कोणीय त्वरण $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}$

(1) **कण का तात्क्षणिक कोणीय त्वरण**

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

(2) **मात्रक** : रेडियन / सैकण्ड²

(3) **विमीय सूत्र** : $[M^0L^0T^{-2}]$

(4) यदि $\alpha = 0$ हो, तो वृत्तीय या घूर्णन गति एक समान होगी।

(5) औसत कोणीय त्वरण $\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$

(6) रैखिक त्वरण व कोणीय त्वरण में संबंध $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

(7) यह एक अक्षीय सदिश है जिसकी दिशा, कोणीय वेग के परिवर्तन की दिशा में होगी अर्थात् घूर्णन तल के लम्बवत्, घूर्णन अक्ष के अनुदिश बाहर अथवा अंदर की ओर, जो कि घूर्णन की दिशा पर निर्भर होगी।

Table 7.2 : रैखिक व घूर्णन गति के समीकरण

रैखिक गति	घूर्णन गति
यदि रैखिक त्वरण शून्य हो, u = नियतांक एवं $s = ut$	यदि कोणीय त्वरण शून्य हो, ω = नियतांक व $\theta = \omega t$
यदि रैखिक त्वरण नियत हो, a = नियतांक, तब	यदि कोणीय त्वरण नियत हो, α = नियतांक, तब
(i) $s = \frac{(u+v)}{2}t$	(i) $\theta = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t$
(ii) $a = \frac{v-u}{t}$	(ii) $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}$
(iii) $v = u + at$	(iii) $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$
(iv) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$	(iv) $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(v) $v^2 = u^2 + 2as$	(v) $\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta$
(vi) $s_{nth} = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$	(vi) $\theta_{nth} = \omega_1 + (2n-1)\frac{\alpha}{2}$
यदि रैखिक त्वरण नियत न हो, तो उपरोक्त समीकरण मान्य नहीं होंगे। इस स्थिति में, (i) $v = \frac{dx}{dt}$ (ii) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ (iii) $v\,dv = a\,dx$	यदि कोणीय त्वरण नियत न हो उपरोक्त समीकरण मान्य नहीं होंगे। इस स्थिति में, (i) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (ii) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (iii) $\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$

जडत्व आघूर्ण (Moment of Inertia)

रैखिक गति में जो भूमिका द्रव्यमान की है, घूर्णन गति में वही भूमिका जड़त्व आघूर्ण की है, अर्थात् जड़त्व आघूर्ण किसी वस्तु का वह अंतर्निहित गुण है जिसके कारण वस्तु अपनी विराम अथवा एकसमान घूर्णी गति में किसी भी परिवर्तन का विरोध करती है।

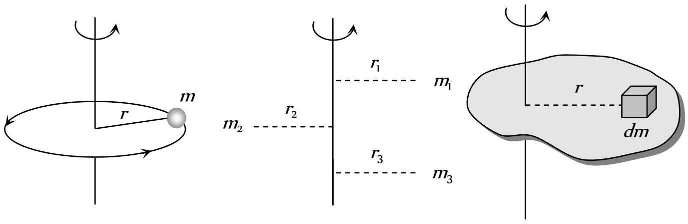
(1) किसी कण का जड़त्व आघूर्ण $I = mr^2$; जहाँ r कण की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी है।

(2) यदि कोई वस्तु (असमान द्रव्यमान वितरण) कई कणों से मिलकर बनी हो, तो उस वस्तु का जड़त्व आघूर्ण

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ...$$

(3) यदि किसी वस्तु में द्रव्यमान वितरण सतत् (Continuous) हो, तो घूर्णन अक्ष से r दूरी पर स्थित वस्तु के सूक्ष्म भाग dm को एक कण मानने पर उसका जड़त्व आघूर्ण,

$$dI = dm\, r^2 \text{ अर्थात् } I = \int r^2 dm$$



(A) (B) (C)

Fig. 7.5

(4) **विमीय सूत्र** : $[ML^2T^0]$

(5) SI मात्रक : *Kg-m*

(6) जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान, द्रव्यमान वितरण तथा घूर्णन अक्ष की स्थिति पर निर्भर करता है।

(7) जड़त्व आघूर्ण कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, बल आघूर्ण, कोणीय संवेग तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा पर निर्भर नहीं करता।

(8) यह एक सदिश राशि नहीं है, क्योंकि दक्षिणावर्ती या वामावर्ती घूर्णन के लिए इसका मान समान होता है परन्तु इसे अदिश भी नहीं कह सकते क्योंकि घूर्णन अक्ष की भिन्न-भिन्न दिशाओं में इसका मान भिन्न-भिन्न होता है। वास्तव में, यह एक प्रदिश (Tensor) राशि है।

(9) समान आकृति, द्रव्यमान व त्रिज्या के लिए, एक दिये गये अक्ष के परितः ठोस व खोखले पिण्डों में, खोखले पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा क्योंकि यह द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है।

घूर्णन त्रिज्या (Radius of Gyration)

किसी पिण्ड की, किसी दिये गये अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या, उस बिन्दु से अक्ष की लम्बवत् दूरी के तुल्य होगी, जिस पर पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्रित माना जाये तो पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उतना ही होगा जितना वास्तविक द्रव्यमान वितरण के लिए होता है।

यदि वस्तु के द्रव्यमान को, घूर्णन त्रिज्या के वर्ग से गुणा किया जाए तो दिये गये अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण प्राप्त होता है।

$I = Mk^2$ अथवा $k = \sqrt{\dfrac{I}{M}}$

जहाँ k घूर्णन त्रिज्या है।

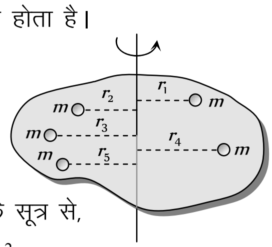


Fig. 7.6

असमान वितरण के लिए जड़त्व आघूर्ण के सूत्र से,

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + ... + mr_n^2$$

यदि $m_1 = m_2 = m_3 = ... = m$ तब

$$I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... r_n^2) \quad ...(i)$$

घूर्णन त्रिज्या की परिभाषा से,

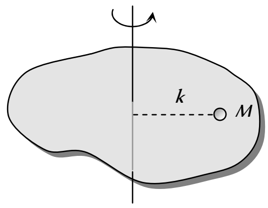


Fig. 7.7

$$I = Mk^2 \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) की तुलना करने पर

$$Mk^2 = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... + r_n^2)$$

$$nmk^2 = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... + r_n^2) \quad [\text{यहाँ } M = nm]$$

$$\therefore k = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... + r_n^2}{n}}$$

अर्थात् किसी पिण्ड की दिये गये अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या उसमें निहित विभिन्न कणों की अक्ष से लम्बवत् दूरियों के वर्ग माध्य मूल के तुल्य होती है।

(1) घूर्णन त्रिज्या (k) पिण्ड के आकार, आकृति, द्रव्यमान वितरण व अक्ष की स्थिति पर निर्भर करती है।

(2) घूर्णन त्रिज्या (k) वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।

(3) **विमीय सूत्र** : $[M^0L^1T^0]$

(4) **SI मात्रक** : मीटर

(5) **घूर्णन त्रिज्या का महत्व** : घूर्णन गति में किसी पिण्ड को (विशेष रूप में असमान आकृति के), घूर्णन त्रिज्या की अवधारणा से बिन्दु द्रव्यमान मानकर अध्ययन किया जाता है।

उदाहरणार्थ : माना एक चकती अपने तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः घूर्णन कर रही है। अतः

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{(1/2)MR^2}{M}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

अतः चकती के स्थान पर हम एक बिन्दु द्रव्यमान M, जो घूर्णन अक्ष से $(R/\sqrt{2})$ दूरी पर स्थित है, की कल्पना कर चकती की गति का अध्ययन कर सकते हैं।

Note : ❑ किसी दी गयी वस्तु के लिये जड़त्व निश्चित होता है जबकि जड़त्व आघूर्ण परिवर्ती होता है।

समान्तर अक्ष प्रमेय (Theorem of Parallel Axes)

किसी पिण्ड का किसी दिये गये अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I उस पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा दिये गये अक्ष के समान्तर किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_g व पिण्ड के द्रव्यमान M व दोनों अक्षों के मध्य लम्बवत् दूरी a के वर्ग के गुणनफल के योग के तुल्य होता है।

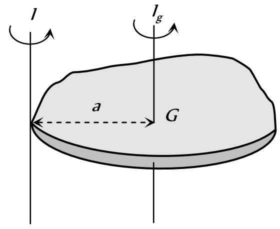


Fig. 7.8

$$I = I_g + Ma^2$$

उदाहरणार्थ : किसी चकती का

उसके तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{2}MR^2$ है, तो उसके तल के लम्बवत् किसी स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I = I_g + Ma^2$

$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$

$\therefore\ I = \frac{3}{2}MR^2$

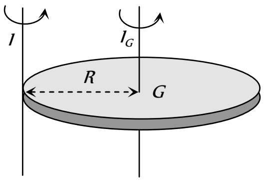


Fig. 7.9

लम्बवत् अक्ष प्रमेय (Theorem of perpendicular axes)

इस प्रमेय के अनुसार किसी समतल पटल का उसके तल के लम्बवत् किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, उसके तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत् अक्षों (जिनके कटान बिन्दु से प्रथम अक्ष गुजरता है) के परितः जड़त्व आघूर्णों के योग के तुल्य होता है।

$I_z = I_x + I_y$

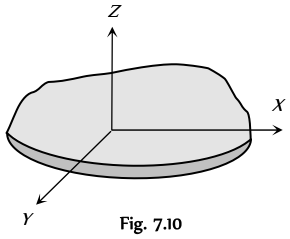


Fig. 7.10

उदाहरणार्थ : किसी चकती का उसके तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{2}MR^2$ है, यदि चकती x–y तल में स्थित हो, तो, लम्बवत् अक्ष की प्रमेय से

अर्थात् $I_z = I_x + I_y$

जहाँ $I_Z = \frac{MR^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}MR^2 = 2I_D$ [चूँकि चकती सममित है, अतः $I_x = I_y = I_D$]

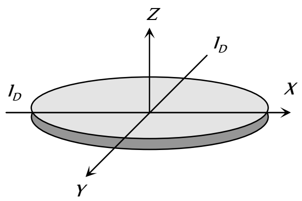


Fig. 7.11

चकती के किसी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_D = \frac{1}{4}MR^2$

Note : ❑ द्विविमीय सममित वस्तुओं की स्थिति में चूँकि वस्तु के तल में स्थित व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले सभी अक्षों के परितः जड़त्व आघूर्ण समान होता है। अतः अक्षों का लम्बवत् होना आवश्यक नहीं है।

दो बिन्दु द्रव्यमानों का उनके द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण (Moment of inertia of two point masses about their centre of mass)

माना m_1 व m_2 दो बिन्दु द्रव्यमान हैं जो एक दूसरे से r दूरी पर स्थित हैं। द्रव्यमान केन्द्र से उनकी दूरियाँ क्रमशः r_1 व r_2 हैं। तब

(1) $r_1 + r_2 = r$

(2) $m_1 r_1 = m_2 r_2$

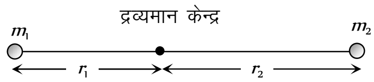


Fig. 7.12

(3) $r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$ तथा $r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$

(4) $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

यहाँ I = द्रव्यमानों को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् तथा निकाय के द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

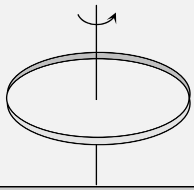
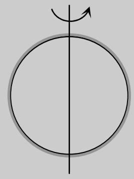
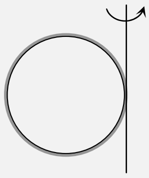
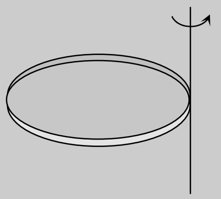
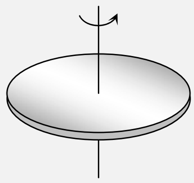
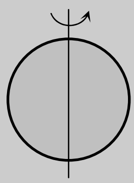
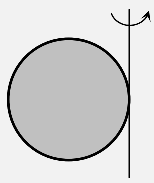
(5) $I = \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right] r^2 = \mu r^2$ [जहाँ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ निकाय का समानीत द्रव्यमान (Reduced mass) है व $\mu < m_1$ और $\mu < m_2$]

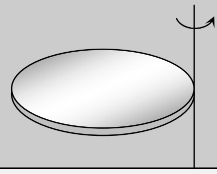
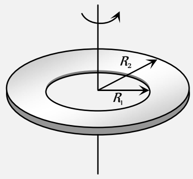
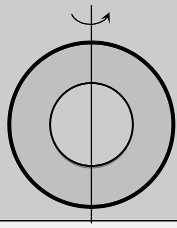
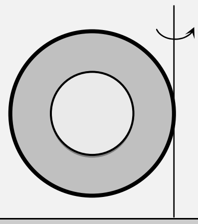
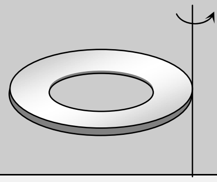
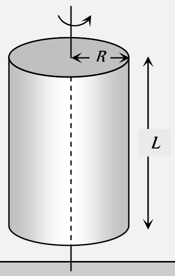
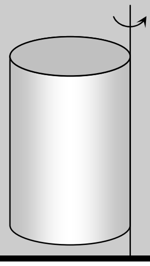
(6) द्वि-परमाण्विक अणुओं जैसे H_2, HCl आदि का उनके द्रव्यमान केन्द्रों के परितः जड़त्व आघूर्ण उपरोक्त सूत्र से ज्ञात किया जाता है।

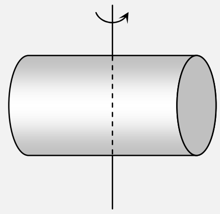
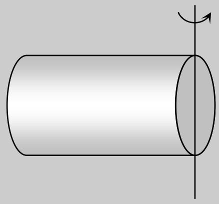
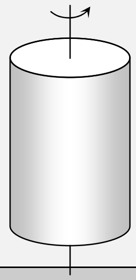
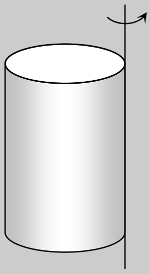
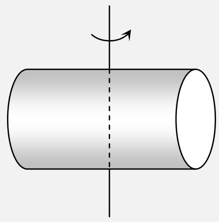
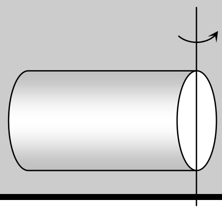
Table 7.3 : रैखिक गति तथा घूर्णी गति में अनुरुपता

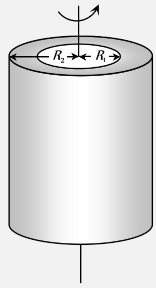
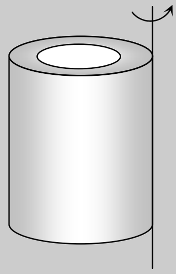
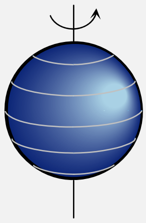
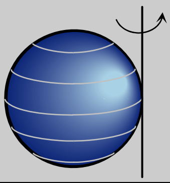
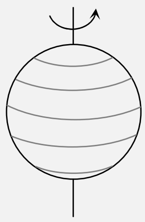
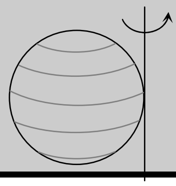
रैखिक गति		घूर्णी गति	
द्रव्यमान	(m)	जड़त्व आघूर्ण	(I)
रैखिक संवेग	$P = mv$ $P = \sqrt{2mE}$	कोणीय संवेग	$L = I\omega$ $L = \sqrt{2IE}$
बल	$F = ma$	बल आघूर्ण	$\tau = I\alpha$
गतिज ऊर्जा	$E = \frac{1}{2}mv^2$ $E = \frac{P^2}{2m}$	घूर्णन गतिज ऊर्जा	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$ $E = \frac{L^2}{2I}$

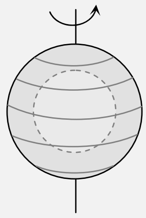
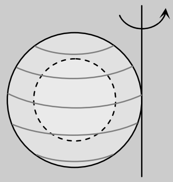
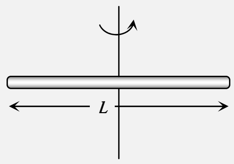
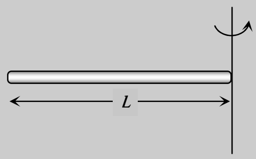
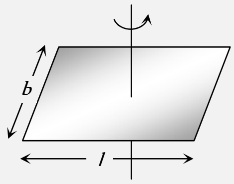
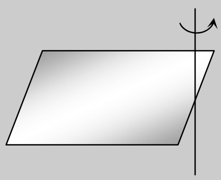
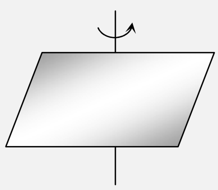
Table 7.4 : कुछ मानक पिण्डों के विभिन्न अक्षों के परितः जड़त्व आघूर्ण

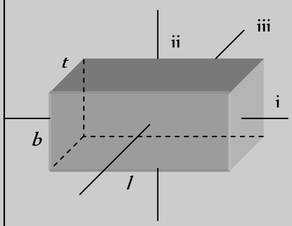
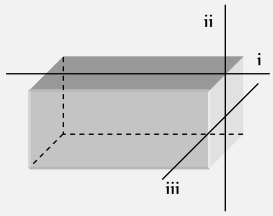
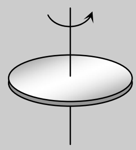
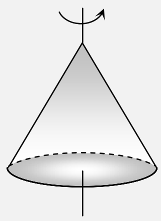
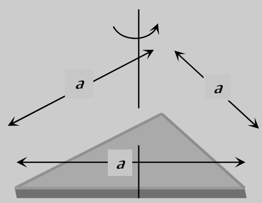
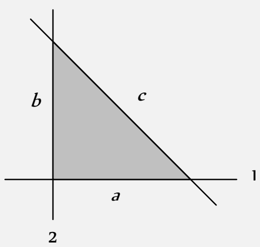
पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण	k	k^2/R^2
वलय	तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः		MR^2	R	1
वलय	किसी व्यास के परितः		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
वलय	वलय के तल में स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{3}{2}MR^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}}R$	$\frac{3}{2}$
वलय	तल के लम्बवत् स्पर्श रेखा के परितः		$2MR^2$	$\sqrt{2}R$	2
चकती	तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
चकती	किसी व्यास के परितः		$\frac{1}{4}MR^2$	$\frac{R}{2}$	$\frac{1}{4}$
चकती	तल में स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{5}{4}MR^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}R$	$\frac{5}{4}$

पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण	k	k^2/R^2
चकती	तल के लम्बवत् स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{3}{2}MR^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}}R$	$\frac{3}{2}$
वलयाकार चकती, आंतरिक त्रिज्या = R_1 तथा बाह्य त्रिज्या = R_2	केन्द्र से गुजरने वाले व तल के लम्बवत् अक्ष के परितः		$\frac{M}{2}[R_1^2 + R_2^2]$	–	–
वलयाकार चकती	व्यास के परितः		$\frac{M}{4}[R_1^2 + R_2^2]$	–	–
वलयाकार चकती	स्पर्श रेखीय व व्यास के समांतर		$\frac{M}{4}[5R_2^2 + R_1^2]$	–	–
वलयाकार चकती	स्पर्श रेखीय व तल के लम्बवत्		$\frac{M}{2}[3R_2^2 + R_1^2]$	–	–
ठोस बेलन	अपने अक्ष के परितः		$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
ठोस बेलन	स्पर्श रेखीय अक्ष (जनित्र अक्ष) के परितः		$\frac{3}{2}MR^2$	$\sqrt{\frac{3}{2}}R$	$\frac{3}{2}$

पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण	k	k^2/R^2
ठोस बेलन	बेलन के अक्ष के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$M\left[\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right]$	$\sqrt{\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4}}$	
ठोस बेलन	किसी एक वृत्तीय पृष्ठ के व्यास के परितः		$M\left[\frac{L^2}{3}+\frac{R^2}{4}\right]$	$\sqrt{\frac{L^2}{3}+\frac{R^2}{4}}$	
बेलनाकार कोश	स्वयं के अक्ष के परितः		MR^2	R	1
बेलनाकार कोश	स्पर्श रेखीय अक्ष (जनित्र अक्ष) के परितः		$2MR^2$	$\sqrt{2}R$	2
बेलनाकार कोश	अक्ष के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$M\left[\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{2}\right]$	$\sqrt{\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{2}}$	
बेलनाकार कोश	किसी एक वृत्तीय मुख के व्यास के परितः		$M\left[\frac{L^2}{3}+\frac{R^2}{2}\right]$	$\sqrt{\frac{L^2}{3}+\frac{R^2}{2}}$	

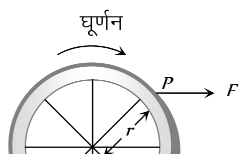
पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण	k	k^2/R^2
खोखला बेलन आतंरिक त्रिज्या = R_1 तथा बाह्य त्रिज्या = R_2	स्वयं के अक्ष के परितः		$\frac{M}{2}(R_1^2+R_2^2)$		
खोखला बेलन आतंरिक त्रिज्या = R_1 तथा बाह्य त्रिज्या = R_2	स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{M}{2}(R_1^2+3R_2^2)$		
ठोस गोला	व्यासीय अक्ष के परितः		$\frac{2}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}R$	$\frac{2}{5}$
ठोस गोला	स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{7}{5}MR^2$	$\sqrt{\frac{7}{5}}R$	$\frac{7}{5}$
गोलीय कोश	व्यासीय अक्ष के परितः		$\frac{2}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R$	$\frac{2}{3}$
गोलीय कोश	स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{5}{3}MR^2$	$\sqrt{\frac{5}{3}}R$	$\frac{5}{3}$

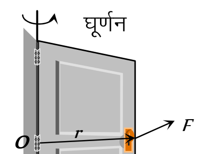
पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण	k	k^2/R^2
खोखला गोला आतंरिक त्रिज्या = R_1 तथा बाह्य त्रिज्या= R_2	व्यासीय अक्ष के परितः		$\frac{2}{5}M\left[\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right]$		
खोखला गोला	स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः		$\frac{2}{5}M\left[\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right] + MR_2^2$		
लम्बी पतली एक समान छड़	छड़ की लंबाई के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$\frac{ML^2}{12}$	$\frac{L}{\sqrt{12}}$	
लम्बी पतली एक समान छड़	छड़ की लम्बाई के लम्बवत् व एक सिरे से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$\frac{ML^2}{3}$	$\frac{L}{\sqrt{3}}$	
आयताकार पटल लम्बाई l व चौड़ाई b	तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$\frac{M}{12}[l^2 + b^2]$		
आयताकार पटल	स्पर्श रेखीय, तल के लम्बवत् व चौडाई के मध्य बिन्दु से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$\frac{M}{12}[4l^2 + b^2]$		
आयताकार पटल	स्पर्श रेखीय, तल के लम्बवत् व लंबाई के मध्य बिन्दु से गुजरने वाले अक्ष के परितः		$\frac{M}{12}[l^2 + 4b^2]$		

पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	जड़त्व आघूर्ण	k	k^2/R^2
आयताकार घनाभ (लंबाई l, चौडाई b, मोटाई t)	द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा निम्न के समांतर (i) लंबाई (x) (ii) चौडाई (z) (iii) मोटाई (y)		(i) $\frac{M[b^2+t^2]}{12}$ (ii) $\frac{M[l^2+t^2]}{12}$ (iii) $\frac{M[b^2+l^2]}{12}$		
आयताकार घनाभ (लम्बाई l, चौडाई b, मोटाई t)	स्पर्श रेखीय व निम्न के समांतर (i) लम्बाई (x) (ii) चौडाई (z) (iii) मोटाई (y)		(i) $\frac{M}{12}[4b^2+t^2]$ (ii) $\frac{M}{12}[4l^2+t^2]$ (iii) $\frac{M}{12}[4l^2+b^2]$		
दीर्घवृत्तीय चकती अर्द्ध दीर्घ अक्ष $= a$ तथा अर्द्ध लघु अक्ष $= b$	द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत्		$\frac{M}{4}[a^2+b^2]$		
ठोस शंकु (त्रिज्या R व ऊँचाई h)	आधार के केन्द्र व शीर्ष को मिलाने वाली अक्ष के परितः		$\frac{3}{10}MR^2$		
समबाहु त्रिभुजाकार पटल (भुजा a)	तल के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः		$\frac{Ma^2}{6}$		
समकोण त्रिभुजाकार पटल (भुजायें a, b, c)	भुजाओं के परितः		(1) $\frac{Mb^2}{6}$ (2) $\frac{Ma^2}{6}$ (3) $\frac{M}{6}\left[\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right]$		

बल आघूर्ण (Torque)

घूर्णन अक्ष के परितः किसी बल का घूर्णी प्रभाव बल आघूर्ण कहलाता है। जब किसी धुरी अथवा अक्ष से संलग्न पिण्ड पर एक बल लगाया जाता है तो पिण्ड अक्ष/धुरी के परितः घूर्णन करता है अथवा ऐसा करने का





प्रयास करता है, बल के इस प्रभाव को घूर्णी प्रभाव अथवा बल आघूर्ण कहते हैं।

यदि कोई कण बल $\vec{F}$ के प्रभाव में; xy तल में, मूलबिन्दु के परितः घूर्णन कर रहा है व किसी क्षण उसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तब,

बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\tau = r F \sin\phi$

[जहाँ ϕ, $\vec{r}$ व $\vec{F}$ की दिशाओं के मध्य कोण है]

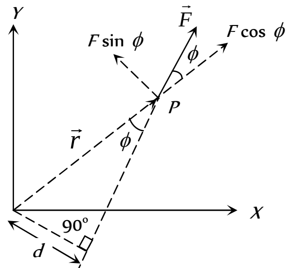


Fig. 7.14

(1) बल आघूर्ण एक अक्षीय सदिश है। इसकी दिशा सदैव $\vec{r}$ व $\vec{F}$ के लम्बवत् होती है, जिसका निर्धारण दायें हाथ के पेंच के नियम से करते हैं।

(2) **बल के समकोणिक घटक**

$|\vec{F}_r| = F\cos\phi =$ बल का त्रैज्यीय (Radial) घटक

$|\vec{F}_\phi| = F\sin\phi =$ बल का अनुप्रस्थ (Transverse) घटक

चूँकि $\tau = rF\sin\phi$

अथवा $\tau = rF_\phi$ = (स्थिति सदिश) × (बल का अनुप्रस्थ घटक)

अतः बल आघूर्ण का परिमाण, बल के अनुप्रस्थ घटक व उसकी घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी के गुणनफल के तुल्य होता है अर्थात् बल आघूर्ण बल के अनुप्रस्थ घटक के कारण ही होता है।

(3) **बल आघूर्ण** $\tau = rF\sin\phi$

अथवा $\tau = F(r\sin\phi) = Fd$ [$d = r\sin\phi$ चित्रानुसार]

अर्थात् बल आघूर्ण = बल × बल की क्रिया रेखा की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी

(4) **अधिकतम तथा न्यूनतम बल आघूर्ण** :

चूँकि $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ अथवा $\tau = rF\sin\phi$

(i) जब $|\sin\phi| =$ अधिकतम $= 1$ अर्थात्, $\phi = 90°$ तो $\vec{F}$ तथा $\vec{r}$ परस्पर लम्बवत् हैं, अतः $\tau_{\text{अधिकतम}} = rF$

(ii) जब $|\sin\phi| =$ न्यूनतम $= 0$ अर्थात्, $\phi = 0°$ या $180°$ तो $\vec{F}$ तथा $\vec{r}$ संरेखीय हैं, अतः $\tau_{\text{न्यूनतम}} = 0$

(5) दिये गये बल तथा कोण के लिए, बल आघूर्ण का परिमाण r पर निर्भर करता है। यदि r का मान अधिक हो, तो बल आघूर्ण अधिक होगा व पिण्ड को घुमाना आसान होगा।

उदाहरणार्थ : (i) दरवाजा खोलने के लिए हत्था (Handle), कब्जे (Hinge) से अधिकतम दूरी पर लगाया जाता है।

(ii) पेंचकस का हत्था मोटा बनाया जाता है।

(iii) अनाज पीसने की हस्तचलित चक्की में हत्था उसकी परिधि के नजदीक लगाया जाता है।

(iv) हैंड-पम्प का हत्था लम्बा रखा जाता है।

(v) नल अथवा पाइप की चूडियाँ खोलने के लिए प्रयुक्त रेंच (Wrench) का हत्था लम्बा बनाया जाता है।

(6) **इकाई** : न्यूटन-मीटर (MKS) व डाइन-सेमी (CGS)

(7) **विमीय सूत्र** : $[ML^2T^{-2}]$

(8) यदि किसी पिण्ड पर एक से अधिक बल कार्यरत् हों तो कुल बल आघूर्ण, प्रत्येक बल के आघूर्ण का सदिश योग होता है

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ...$

(9) यदि किसी पिण्ड पर कुल बल आघूर्ण शून्य हो, तो (अर्थात् $\Sigma\vec{\tau} = 0$) तो पिण्ड घूर्णी साम्यावस्था में कहलाता है।

(10) दण्ड तुला (Beam balance) अथवा सी-सॉ (see-saw) घूर्णी संतुलन में होंगे, यदि

$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = 0$ अथवा $F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0 \therefore F_1 l_1 = F_2 l_2$

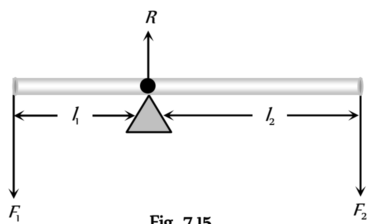


Fig. 7.15

यदि $\vec{\tau}_1 > \vec{\tau}_2$ है तब बायीं भुजा (L.H.S.) नीचे झुकेगी तथा यदि $\vec{\tau}_1 < \vec{\tau}_2$ है तब दायीं भुजा (R.H.S.) नीचे झुकेगी व निकाय घूर्णी संतुलन में नहीं होगा।

(11) किसी वस्तु को साम्यावस्था से कुछ विचलित करने पर यदि इसके भार की क्रिया रेखा आधार से होकर गुजरती है, तो बाह्य बल को हटाने पर वस्तु पुनः अपनी साम्यावस्था को प्राप्त कर लेती है। जबकि भार की क्रिया रेखा यदि आधार के बाहर से गुजरती है तो वस्तु बाह्यतम आघूर्ण के कारण एक ओर लुढ़क जाती है अतः वह अपनी पूर्वावस्था को प्राप्त नहीं कर पाती।

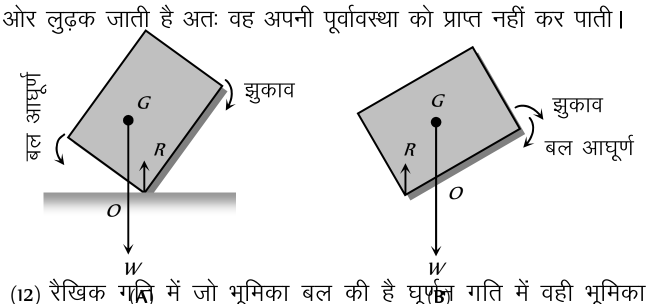


Fig. 7.16

(12) रैखिक गति में जो भूमिका बल की है घूर्णन गति में वही भूमिका बल आघूर्ण की है, जो घूर्णन गति का कारण है अर्थात् बल आघूर्ण बल का घूर्णी अनुरूप है। यह बात निम्न तालिका की सहायता से स्पष्ट रूप से समझी जा सकती है।

Table : 7.5 घूर्णी एवं रैखिक गति में तुलना

घूर्णी गति	रैखिक गति

बल आघूर्ण $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$	बल $\vec{F} = m\vec{a}$
कार्य $W = \int \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	कार्य $W = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$
शक्ति $P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	शक्ति $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	बल $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

बल युग्म (Couple)

बलों का एक विशेष संयोजन जो गति के लिए पूर्णतः मुक्त किसी वस्तु को घुमा दे, बल युग्म कहलाता है।

(1) बल युग्म उन दो बलों का संयोजन है जो परिमाण में समान व दिशा में विपरीत हो एवं उनकी क्रिया रेखा समान न हों। बल युग्म का प्रभाव बल युग्म आघूर्ण कहलाता है। $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

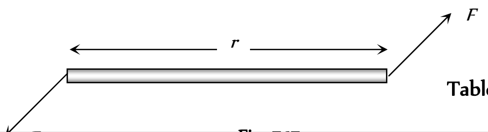


Fig. 7.17

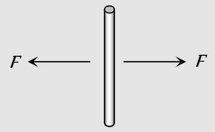
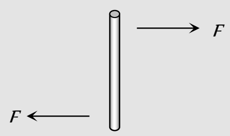
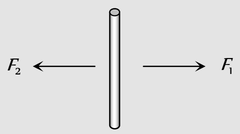
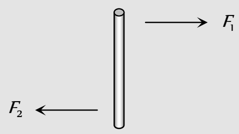
(2) सामान्यतः बलयुग्म व बल आघूर्ण समान अर्थों में प्रयुक्त होते हैं, परन्तु दोनों में मूलभूत अंतर यह है कि बलयुग्म बनाने वाले दोनों बल बाह्य होते हैं, जबकि बल आघूर्ण में एक बल बाह्य होता है व दूसरा उसके प्रतिक्रिया स्वरूप लगता है।

(3) बलयुग्म द्वारा किसी तार को ऐंठने में (Twist) किया गया कार्य $W = \frac{1}{2}C\theta^2$

जहाँ $\tau = C\theta$; C = ऐंठन गुणांक अथवा एकाँक ऐंठन उत्पन्न कराने में प्रयुक्त बलयुग्म।

जहाँ C = ऐंठन गुणांक अथवा एकाँक ऐंठन उत्पन्न कराने में प्रयुक्त बलयुग्म।

Table 7.6 : रैखिक व घूर्णी साम्यावस्था

समान बल एक ही क्रिया रेखा के अनुदिश कार्यरत् हों।		$\sum \vec{F} = 0$ तथा $\sum \vec{\tau} = 0$	यदि वस्तु प्रारंभ में विराम में है तो वह विराम में ही रहेगी
बल समान हों परन्तु क्रिया रेखा भिन्न-भिन्न हों।		$\sum \vec{F} = 0$ तथा $\sum \vec{\tau} \neq 0$	घूर्णन गति
असमान बल समान क्रिया रेखा के अनुदिश कार्यरत् हों।		$\sum \vec{F} \neq 0$ तथा $\sum \vec{\tau} = 0$	रैखिक गति
असमान बल भिन्न-भिन्न क्रिया रेखाओं के अनुदिश कार्यरत् हों।		$\sum \vec{F} \neq 0$ तथा $\sum \vec{\tau} \neq 0$	घूर्णी व रैखिक दोनों गतियाँ अर्थात् लोटनिक गति

कोणीय संवेग (Angular Momentum)

किसी कण का घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णी संवेग उसका कोणीय संवेग कहलाता है। अथवा किसी घूर्णन अक्ष के परितः किसी कण के रैखिक संवेग का आघूर्ण, कोणीय संवेग कहलाता है।

यदि कण का रैखिक संवेग $\vec{P}$ तथा उसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ हो, तो कोणीय संवेग

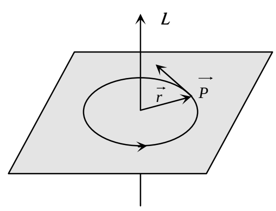


Fig. 7.18

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

$\vec{L} = r P \sin\phi \hat{n}$ ($\hat{n} = \vec{L}$ की दिशा में एकाँक सदिश)

यह एक अक्षीय सदिश है। इसकी दिशा सदैव घूर्णन तल के लम्बवत् तथा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है।

(1) **SI मात्रक** : *kg-m-s* अथवा *J-sec*

(2) **विमीय सूत्र** : $[ML^2T^{-1}]$ प्लांक नियतांक (h) के विमीय सूत्र के समान है

(3) कार्तीय निर्देशांक पद्धति में यदि

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$

तब $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$

$= (yP_z - zP_y)\hat{i} - (xP_z - zP_x)\hat{j} + (xP_y - yP_x)\hat{k}$

(4) चित्र से स्पष्ट है कि रेखीय संवेग का त्रिज्यीय घटक $|\vec{P}_r| = P\cos\phi$

रैखिक संवेग का अनुप्रस्थ घटक $|\vec{P}_\phi| = P\sin\phi$

अतः कोणीय संवेग का परिमाण $L = r P \sin\phi$

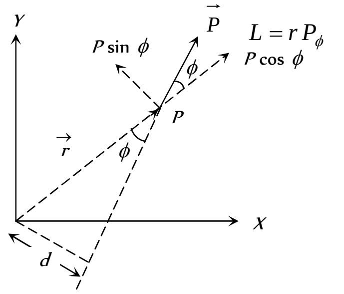


Fig. 7.19

अतः कोणीय संवेग = स्थिति सदिश × रैखिक संवेग का अनुप्रस्थ घटक

अर्थात् रैखिक संवेग के त्रैज्यीय घटक का कोणीय संवेग में कोई योगदान नहीं होता है।

(5) **कोणीय संवेग का परिमाण**

$L = P \; (r\sin\phi) = L = Pd$ [चित्रानुसार $d = r\sin\phi$]

अतः कोणीय संवेग = (रैखिक संवेग) × (रैखिक संवेग की क्रिया रेखा की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी)

(6) **अधिकतम व न्यूनतम कोणीय संवेग** :

हम जानते हैं कि $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

$\therefore \quad \vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{v}] = m v r \sin\phi = P r \sin\phi$ [चूँकि $\vec{P} = m\vec{v}$]

(i) जब $|\sin\phi| =$ अधिकतम=1अर्थात $\phi = 90°$ तो $\vec{v}$, $\vec{r}$ के लम्बवत् है, अतः $L_{अधिकतम} = mvr$

(ii) जब $|\sin\phi| = \min = 0$ अर्थात् $\phi = 0°$ अथवा 180° तो $\vec{v}$, $\vec{r}$ के समांतर अथवा प्रतिसमांतर है, अतः $L_{न्यूनतम} = 0$

(7) स्थानांतरीय गति करते हुये पिण्ड का किसी बिन्दु के परितः कोणीय संवेग अवश्य होगा जब तक कि यह बिन्दु गति की रेखा पर स्थित न हो क्योंकि $L = mvr\sin\phi$ तथा $L > 1$ यदि $\phi \neq 0^o$ अथवा 180^o

(8) कण की वृत्तीय गति की स्थिति में

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = mvr\sin\phi$

$\therefore \; L = mvr = mr^2\omega$ [चूँकि $\vec{r} \perp \vec{v}$ तथा $v = r\omega$]

अथवा $L = I\omega$ [चूँकि $mr = I$]

सदिश रूप में, $\vec{L} = I\vec{\omega}$

(9) सूत्र $\vec{L} = I\vec{\omega} \; \therefore \; \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$

[चूँकि $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$ तथा $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$]

अर्थात् कोणीय संवेग परिवर्तन की दर कण पर लगने वाले कुल बल आघूर्ण के तुल्य होती है। [घूर्णी गति में न्यूटन का गति विषयक द्वितीय नियम]

(10) यदि अधिक परिमाण का बल आघूर्ण, किसी कण पर अल्प अंतराल के लिए आरोपित हो, तो 'कोणीय आवेग' निम्न रूप में दिया जायेगा

$\vec{J} = \int \vec{\tau}\, dt = \vec{\tau}_{av} \int_{t_1}^{t_2} dt$

अथवा कोणीय आवेग $\vec{J} = \vec{\tau}_{av}\,\Delta t = \Delta\vec{L}$

$\therefore$ कोणीय आवेग = कोणीय संवेग में परिवर्तन

(11) n कणों वाले निकाय का कुल कोणीय संवेग, सभी कणों के कोणीय संवेग के सदिश योग के तुल्य होता है।

अर्थात $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ... + \vec{L}_n$

(12) बोहर (Bohr) के अनुसार, परमाणु की nवीं कक्षा में चक्कर लगाने वाले इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग,

$L = n\frac{h}{2\pi}$ [जहाँ n कक्षा की संख्या है]

कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त
(Law of Conservation of Angular Momentum)

घूर्णी गति में न्यूटन का गति विषयक द्वितीय नियम, $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

अतः यदि कण (अथवा निकाय) पर आरोपित कुल बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो, तो $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

अर्थात् $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ...$ = नियतांक

अर्थात् बाह्य बल आघूर्ण की अनुपस्थिति में निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

$L = I\omega$ यदि $\vec{\tau} = 0$ तब $I\omega$ = नियत अतः $I \propto \frac{1}{\omega}$

अर्थात् जड़त्व आघूर्ण I घटने पर, कोणीय वेग ω में वृद्धि होगी व जड़त्व आघूर्ण I बढ़ने पर, कोणीय वेग ω में कमी होगी।

कोणीय संवेग संरक्षण से सम्बन्धित कुछ उदारण

(1) सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्ताकार कक्षा में परिक्रमण के समय यदि ग्रह सूर्य के पास से गुजरता है तो उसके परिक्रमण का कोणीय वेग बढ़ जाता है क्योंकि इस स्थिति में जड़त्व आघूर्ण घट जाता है।

(2) सर्कस का कलाकार, कलाबाजी दिखाते समय अपनी भुजाओं व पैरों को सिकोड़ लेता है क्योंकि ऐसा करने से जड़त्व आघूर्ण घटता है व कोणीय वेग बढ़ जाता है।

(3) एक व्यक्ति अपने हाथों में भारी वस्तु लिए घूर्णन करते हुए मंच पर खड़ा है यदि वह अचानक अपनी भुजाओं को मोड़ता है तो उसका जड़त्व आघूर्ण घटता है व कोणीय वेग बढ़ जाता है।

Fig. 7.20

(4) एक गोताखोर (Diver) ऊँचे डाइविंग बोर्ड से कूदते समय पहले अपने शरीर को मोड़ लेता है व भुजाओं को समेट लेता है। ऐसा करने से उसका जड़त्व आघूर्ण घट जाता है व वह हवा में ज्यादा कलाबाजी (Rotation) लगा सकता है। परन्तु पानी पर गिरने से पहले वह अपना शरीर पुनः फैला लेता है, ताकि जड़त्व आघूर्ण बढ़े व वेग कम हो जाए।

(5) पृथ्वी की त्रिज्या परिवर्तन का उसके आवर्तकाल पर प्रभाव

पृथ्वी का कोणीय संवेग $L = I\omega =$ नियतांक

$$L = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} = \text{नियतांक}$$

$\therefore\ T \propto R^2$ [यदि M नियत हो]

यदि पृथ्वी की त्रिज्या आधी हो जाए [द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे] तो आवर्तकाल एक चौथाई हो जाएगा अर्थात् $\frac{24}{4} = 6 hrs$

घूर्णित वस्तु के लिये कार्य, शक्ति व ऊर्जा
(Work, Energy and Power for Rotating Body)

(1) **कार्य** : यदि किसी वस्तु का विराम से कोणीय विस्थापन $d\theta$ हो, तो बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य

$$W = \int \tau\, d\theta$$

जो कि रैखिक गति में कार्य $W = \int F\, dx$ के ही अनुरूप है।

(2) **गतिज ऊर्जा** : किसी वस्तु में उसकी घूर्णन गति के कारण जो ऊर्जा निहित होती है, वस्तु की घूर्णन गतिज ऊर्जा कहलाती है। किसी स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन करती वस्तु अपने स्थान पर ही बनी रहती है फिर भी उसमें गतिज ऊर्जा होती है क्योंकि उसके अवयवी कण गति में रहते हैं।

Table : 7.7 घूर्णन एवं रैखिक गतिज ऊर्जा में तुलना

घूर्णन गतिज ऊर्जा	स्थानांतरीय/रैखिक गतिज ऊर्जा
$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	$K_T = \frac{1}{2}mv^2$
$K_R = \frac{1}{2}L\omega$	$K_T = \frac{1}{2}Pv$
$K_R = \frac{L^2}{2I}$	$K_T = \frac{P^2}{2m}$

(3) **शक्ति** : गतिज ऊर्जा में परिवर्तन की दर को शक्ति कहा जाता है।

$$P = \frac{d}{dt}(K_R) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I\omega^2\right] = I\omega\frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha = I\alpha\omega = \tau\omega$$

सदिश रूप में शक्ति, $P = \vec{\tau}\cdot\vec{\omega}$

[रैखिक गति में शक्ति $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ के अनुरूप]

फिसलना, चक्रण करना एवं लुढ़कना
(Slipping, Spinning and Rolling)

(1) **फिसलते (Slipping) पिण्ड की गतिज ऊर्जा** : जब कोई पिण्ड किसी सतह पर बिना घूर्णन के v वेग से फिसलता है तो उसकी गति को हम फिसलना कहते हैं।

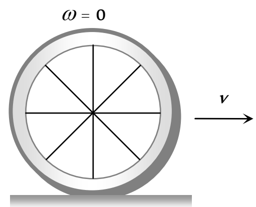


Fig. 7.21

इस स्थिति में पिण्ड व सतह के मध्य घर्षण शून्य होगा अर्थात् $F = 0$, तथा

पिण्ड में केवल स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा होती है $K_T = \frac{1}{2}mv^2$

उदाहरणार्थ : घर्षण रहित सतह पर एक गेंद की गति।

(2) **चक्रण (Spinning) करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा** : जब कोई पिण्ड इस प्रकार घूर्णन करे कि उसका घूर्णन अक्ष स्थिर रहे तो उसकी गति चक्रण गति कहलाती है।

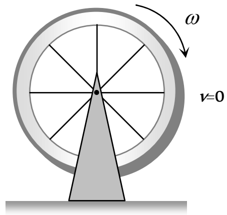


Fig. 7.22

इस स्थिति में वस्तु का घूर्णन अक्ष स्थिर रहता है।

उदाहरणार्थ : पंखे की पंखुडियों (blades) की गति।

इस स्थिति में पिण्ड की गतिज ऊर्जा

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

अथवा $K_R = \frac{1}{2}mK^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$

अर्थात् घूर्णन गतिज ऊर्जा = $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ रैखिक गतिज ऊर्जा

जहा $\frac{K^2}{R^2}$ नियतांक है जो वस्तु की आकृति पर निर्भर करेगा। जैसे $\frac{K^2}{R^2} = 1$ (वलय के लिए), $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$ (चकती के लिए) तथा $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$ (ठोस गोले के लिए)

(3) **लुढ़कते (Rolling) पिण्ड की गतिज ऊर्जा** : यदि पिण्ड के घूर्णन करते समय घूर्णन अक्ष भी गतिशील हो अर्थात् पिण्ड की गति रैखिक व घूर्णन गति का मिश्रण होती है।

उदाहरणार्थ : (i) सड़क पर गतिशील साईकिल के पहिये की गति।

(ii) समतल मैदान पर फुटबाल की गति।

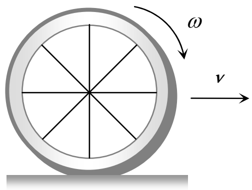


Fig. 7.23

इस स्थिति में पिण्ड व सतह के मध्य घर्षण शून्य नहीं होगा अर्थात् $F \neq 0$

वस्तु के भीतर रैखिक तथा घूर्णन दोनों गतिज ऊर्जायें निहित होती हैं।

कुल गतिज ऊर्जा = (रैखिक + घूर्णी) गतिज ऊर्जा

$$K_N = K_T + K_R = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\frac{K^2}{R^2}$$

$$\therefore \quad K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$$

बिना फिसले लुढ़कते पिण्ड की गति
(Rolling Without Slipping)

यदि कोई पिण्ड एक साथ इस प्रकार रैखिक व घूर्णन गति करे कि वस्तु व सतह के संपर्क बिन्दु पर सापेक्षिक वेग शून्य हो, तो वस्तु की लोटनिक (Rolling) गति को, संपर्क बिन्दु से गुजरने वाले अक्ष के परितः वस्तु की शुद्ध घूर्णन गति माना जा सकता है, जबकि कोणीय वेग पूर्ववत् ही रहता है।

इस प्रकार की गति के लिए घर्षण उत्तरदायी होता है परन्तु घर्षण के विरुद्ध कार्य व ऊर्जा ह्रास शून्य होता है, क्योंकि संपर्क बिन्दु पर पिण्ड व सतह के मध्य सापेक्षिक वेग शून्य होता है।

ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

$$K_N = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

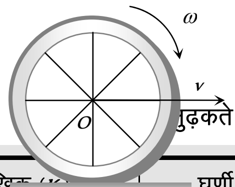


Fig. 7.24

[$\therefore$ चूँकि $v = R\omega$]

$$= \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

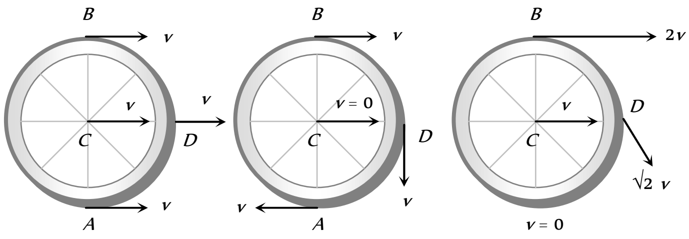
$$= \frac{1}{2}\omega^2[mR^2 + I]$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2[I + mR^2] = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \qquad [\text{चूँकि } I_P = I + mR^2]$$

समान्तर अक्ष प्रमेय से, जहाँ I = पिण्ड का केन्द्र 'O' के परितः जड़त्व आघूर्ण I_P = पिण्ड सम्पर्क बिन्दु 'P' के परितः जड़त्व आघूर्ण।

(1) **लुढ़कते पिण्ड के विभिन्न कणों के रैखिक वेग :** जब कोई पिण्ड किसी सतह पर लुढ़कता है उसके सभी कणों के कोणीय वेग समान होते हैं; परन्तु रैखिक वेग भिन्न-भिन्न होते हैं।

दृढ़ पिण्ड पर स्थित चार कणों A, B, C तथा D की विभिन्न स्थितियों में रैखिक वेग चित्र में प्रदर्शित हैं



रेखीय गति (A) | घूर्णन गति (B) | लोटनिक गति (C)

Fig. 7.25

लुढ़कते पिण्डों की ऊर्जा वितरण तालिका

पिण्ड	$\frac{K^2}{R^2}$	रैखिक (K_T) $\frac{1}{2}mv^2$	घूर्णी (K_R) $\frac{1}{2}mv^2\frac{K^2}{R^2}$	कुल (K_N) $\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$	$\frac{K_T}{K_N}$ (%)	$\frac{K_R}{K_N}$ (%)
वलय तथा बेलनाकार कोश	1	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}mv^2$	mv^2	$\frac{1}{2}$ (50%)	$\frac{1}{2}$ (50%)
चकती तथा ठोस बेलन	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{4}mv^2$	$\frac{3}{4}mv^2$	$\frac{2}{3}$ (66.6%)	$\frac{1}{3}$ (33.3%)
ठोस गोला	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{5}mv^2$	$\frac{7}{10}mv^2$	$\frac{5}{7}$ (71.5%)	$\frac{2}{7}$ (28.5%)
खोखला गोला	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{3}mv^2$	$\frac{5}{6}mv^2$	$\frac{3}{5}$ (60%)	$\frac{2}{5}$(40%)

नत समतल पर बिना फिसले लुढ़कते पिण्ड की गति
(Rolling on an Inclined Plane)

जब m द्रव्यमान व R त्रिज्या का एक पिण्ड, 'h' ऊँचाई व θ झुकाव वाले नत समतल से बिना फिसले लुढ़कता है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा में जो हानि होती है

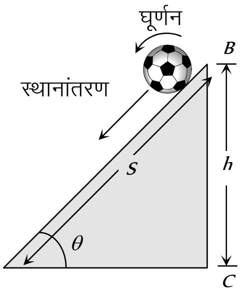


Fig. 7.26

वह उसको स्थानान्तरीय व घूर्णन गतिज ऊर्जा के रूप में प्राप्त होती है।

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त से, $mgh = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)$

(1) **निम्नतम बिन्दु पर वेग :** $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{k^2}{R^2}}}$

(2) **पिण्ड में उत्पन्न त्वरण :** सूत्र $v^2 = u^2 + 2aS$ से

$u = 0,\ S = \dfrac{h}{\sin\theta}$ तथा $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+\dfrac{k^2}{R^2}}}$ रखने पर

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{k^2}{R^2}}$$

(3) **पिण्ड को निम्नतम बिन्दु तक आने में लगा समय :** सूत्र $v = u + at$ से

$u = 0$ तथा v व a के मान ऊपर दिये गये व्यंजकों से रखने पर

$$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}\left[1+\frac{k^2}{R^2}\right]}$$

उपरोक्त सूत्रों से स्पष्ट है कि,

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k^2}{R^2}}};\ a \propto \frac{1}{1+\dfrac{k^2}{R^2}};\ t \propto \sqrt{1+\frac{k^2}{R^2}}$$

Note : ❑ यहाँ $\left(\dfrac{k^2}{R^2}\right)$ पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण की माप है। इसका मान पिण्ड की विशिष्ट आकृति के लिए नियत होता है तथा पिण्ड के द्रव्यमान अथवा त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता।

❑ दिये गये नत समतल पर पिण्ड का वेग, त्वरण व निम्न बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय, $\dfrac{k^2}{R^2}$ पर निर्भर करता है। यदि पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण कम हो, तो $\dfrac{k^2}{R^2}$ का मान भी कम होगा तब पिण्ड का वेग व त्वरण अधिक होगा परन्तु उसे निम्नतम बिन्दु तक पहुँचने में कम समय लगेगा।

❑ यदि एक ठोस व खोखला पिण्ड (समान आकृति के) नत समतल पर बिना फिसले लुढ़कते हैं, तो ठोस पिण्ड अधिक वेग से व कम समय में निम्नतम बिन्दु पर पहुँचेगा। क्योंकि $\left(\dfrac{k^2}{R^2}\right)_{\text{ठोस}} < \left(\dfrac{k^2}{R^2}\right)_{\text{खोखला}}$

❑ यदि एक वलय, बेलन, चकती व गोला किसी नत समतल पर एक साथ बिना फिसले लुढ़कते हैं तब चूँकि

$\left(\dfrac{k^2}{R^2}\right)_{\text{गोला}}$ = न्यूनतम, जबकि $\left(\dfrac{k^2}{R^2}\right)_{\text{वलय}}$ = अधिकतम

अतः गोला निम्नतम बिन्दु पर सबसे पहले व सबसे अधिक वेग से, व वलय सबसे बाद में तथा न्यूनतम वेग से निम्न बिन्दु पर पहुँचेगें।

❑ झुकाव कोण के मान का वेग पर कोई प्रभाव नहीं होता परन्तु त्वरण एवं निम्नतम बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय इस पर निर्भर होता है।

वेग $\propto \theta^{\circ}$, निम्न बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय $\propto \theta^{-1}$ तथा त्वरण $\propto \theta$

Table : 7.9 किसी पिण्ड का फिसलना, लुढ़कना व मुक्त रूप से गिरना

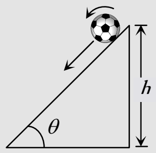
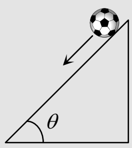
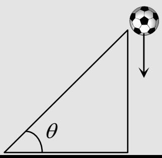
गति	चित्र	वेग	त्वरण	समय
लुढ़कना		$\sqrt{\dfrac{2gh}{1+k^2/R^2}}$	$\dfrac{g\sin\theta}{1+k^2/R^2}$	$\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}\left(1+\dfrac{k^2}{R^2}\right)}$
फिसलना		$\sqrt{2gh}$	$g\sin\theta$	$\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$
मुक्त रूप से गिरना		$\sqrt{2gh}$	g	$\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

Table : 7.10 नत समतल पर विभिन्न पिण्डों का वेग, त्वरण व अवनमन काल

पिण्ड	$\dfrac{k^2}{R^2}$	वेग $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+\dfrac{k^2}{R^2}}}$	त्वरण $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{k^2}{R^2}}$	निम्न बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय $t = \dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}\left(1+\dfrac{k^2}{R^2}\right)}$
वलय अथवा खोखला बेलन	1	$\sqrt{gh}$	$\dfrac{1}{2}g\sin\theta$	$\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{4h}{g}}$

चकती अथवा ठोस बेलन	$\frac{1}{2}$ अथवा 0.5	$\sqrt{\frac{4gh}{3}}$	$\frac{2}{3}g\sin\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}$
ठोस गोला	$\frac{2}{5}$ अथवा 0.4	$\sqrt{\frac{10}{7}gh}$	$\frac{5}{7}g\sin\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{14}{5}\frac{h}{g}}$
खोखला गोला	$\frac{2}{3}$ अथवा 0.66	$\sqrt{\frac{6}{5}gh}$	$\frac{3}{5}g\sin\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{10}{3}\frac{h}{g}}$

दृढ़ पिण्ड (बेलन, घिरनी अथवा चकती) पर लपेटे गये धागे से जुड़े पिण्ड की गति (Motion of Connected Mass)

किसी पिण्ड [बेलन, घिरनी अथवा चकती] पर चारों ओर लिपटे धागे के एक सिरे से संलग्न किसी बिन्दु द्रव्यमान को जब मुक्त रूप से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गिरने दिया जाता है तो पिण्ड घूर्णन करने लगता है।

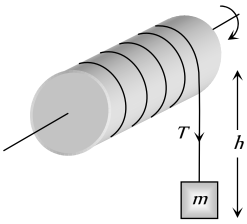


Fig. 7.27

यदि m = बिन्दु द्रव्यमान का द्रव्यमान, M = पिण्ड का द्रव्यमान

R = पिण्ड की त्रिज्या, I = घूर्णित वस्तु (पिण्ड) का जड़त्व आघूर्ण हो, तो

(1) **बिन्दु द्रव्यमान का त्वरण [नीचे की ओर]** $a = \frac{g}{1+\frac{I}{mR^2}}$

(2) **धागे में तनाव** $T = mg\left[\frac{I}{I+mR^2}\right]$

(3) **बिन्दु द्रव्यमान का वेग** $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}}$

(4) **दृढ़ पिण्ड का कोणीय वेग** $\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I+mR^2}}$

संयुक्त लोलक का आवर्तकाल

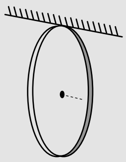
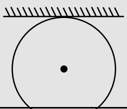
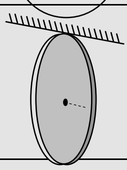
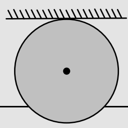
(Time Period of Compound Pendulum)

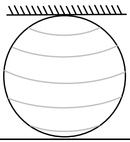
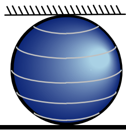
संयुक्त लोलक का आवर्तकाल, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ जहाँ $L = \frac{l^2+k^2}{l}$

जहाँ l = निलम्बन बिन्दु से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी

k = द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले समांतर अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या

सारणी 7.11 : विभिन्न संयुक्त लोलकों के आवर्तकाल

पिण्ड	घूर्णन अक्ष	चित्र	l	k	$L = \frac{l^2+k^2}{l}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
वलय	परिधि से होकर जाने वाली तथा तल के लम्बवत् स्पर्श रेखा		R	R^2	$2R$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$
	तल के समांतर स्पर्श रेखा		R	$\frac{R^2}{2}$	$\frac{3}{2}R$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$
चकती	तल के लम्बवत् स्पर्श रेखा		R	$\frac{R^2}{2}$	$\frac{3}{2}R$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$
	तल के समांतर स्पर्श रेखा		R	$\frac{R^2}{4}$	$\frac{5}{4}R$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{4g}}$

गोलीय खोल अथवा खोखला गोला	स्पर्श रेखा		R	$\frac{2}{3}R^2$	$\frac{5}{3}R$	$T=2\pi\sqrt{\frac{5R}{3g}}$
ठोस गोला	स्पर्श रेखा		R	$\frac{2}{5}R^2$	$\frac{7}{5}R$	$T=2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}}$

Tips & Tricks

✍ वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र इसके द्रव्यमान की (न कि भार की) औसत स्थिति होती है। वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र ठीक उसी स्थान पर होता है जहाँ वस्तु का गुरूत्व केन्द्र होता है, यदि स्वयं वस्तु के अंदर गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र परिवर्तित न हो।

✍ बाह्य बल की अनुपस्थिति में, निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एक समान वेग से गति करता है।

✍ किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र निकाय के भीतर स्थित हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है।

✍ द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति निर्देशांक पद्धति के चयन पर निर्भर नहीं करती है।

✍ घूर्णी गति में द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति परिवर्तित नहीं होती जबकि रैखिक गति में द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति परिवर्तित होती है।

✍ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के x, y तथा z निर्देशांक है

$$X=\frac{m_1x_1+m_2x_2+......+m_nx_n}{m_1+m_2+.......+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$$Y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+......+m_ny_n}{m_1+m_2+.......+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$$Z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+......+m_nz_n}{m_1+m_2+.......+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

✍ समान द्रव्यमानों के दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$$

यह दर्शाता है कि समान द्रव्यमानों के दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र, द्रव्यमानों को जोड़ने वाली रेखा के मध्य बिंदु पर स्थित होता है

✍ यदि द्रव्यमान केन्द्र किसी निर्देशांक पद्धति के मूल बिन्दु के साथ संपाती है तो द्रव्यमान केन्द्र के परितः द्रव्यमानों के आघूर्णों का योग शून्य होता है

अर्थात् यदि $\vec{r}_{c.m.}=0$ तब $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i=0$

✍ किसी निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का संवेग नियत रहता है यदि उस पर कोई बाहरी बल कार्यरत न हो।

✍ किसी अक्ष के परितः वस्तु का जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष की स्थिति तथा उस अक्ष के परितः द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।

✍ वस्तु का जड़त्व आघूर्ण घूर्णन अक्ष के सापेक्ष परिभाषित किया जाता है।

✍ जड़त्व आघूर्ण एक सदिश राशि नहीं है क्योंकि वामावर्त तथा दक्षिणावर्त दिशा इससे संबंधित नहीं होती।

✍ जड़त्व आघूर्ण एक अदिश राशि नहीं है क्योंकि एक ही वस्तु के लिये भिन्न–भिन्न अक्षों के परितः इसके मान भिन्न–भिन्न होते हैं।

✍ जडत्व आघूर्ण वस्तु का वह गुण है जो उसके कोणीय वेग में होने वाले परिवर्तन (कोणीय त्वरण) का विरोध करता है।

✍ घूर्णी गति में जड़त्व आघूर्ण की वही भूमिका होती है जो द्रव्यमान की रैखिक गति में।

✍ जड़त्व आघूर्ण वस्तु की आकृति पर तथा वस्तु के भीतर द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है।

✍ घूर्णन त्रिज्या वस्तु के घूर्णन अक्ष से वह दूरी होती है जिस पर वस्तु का पूरा द्रव्यमान केन्द्रित मान लिया जाये तो वस्तु के जड़त्व आघूर्ण में कोई परिवर्तन नहीं होता।

✍ घूर्णन त्रिज्या, घूर्णन अक्ष की स्थिति तथा घूर्णन की दिशा पर निर्भर करती है।

✍ घूर्णन त्रिज्या वस्तु के द्रव्यमान तथा जड़त्व आघूर्ण पर निर्भर करती है।

✍ लम्बवत् अक्ष की प्रमेय सिर्फ पतले पटल जैसे घातु की चादरें, चकती, वलय आदि के लिये ही प्रयोग होती है।

✍ लम्बवत् अक्ष की प्रमेय का प्रयोग हम किसी वलय अथवा चकती का उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिये करते हैं।

✍ समांतर अक्ष की प्रमेय सभी प्रकार की वस्तुओं के लिये प्रयुक्त होती है।

✍ समांतर अक्ष की प्रमेय का प्रयोग हम किसी वलय, चकती, गोले आदि का स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिये करते हैं।

✍ घूमते हुये दृढ़ पिण्डों के सभी कणों की कोणीय चाल समान रहती है परंतु इनकी रेखीय चाल भिन्न हो सकती है।

✍ कोणीय संवेग = रेखीय संवेग × लीवर भुजा

✍ कोणीय संवेग एक अक्षीय सदिश है तथा इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है।

✍ कोणीय संवेग का मात्रक $kgm^2 rad\, s^{-1}$ है। कभी–कभी इसे $kgm^2 s^{-1}$ भी लिखा जाता है जिसमें रेडियन को छोड़ दिया जाता है।

✍ कोणीय संवेग का विमीय सूत्र ML^2T^{-1} है।

✍ घूर्णी गति में कोणीय संवेग की भूमिका रैखिक गति में रेखीय संवेग के समान होती है।

✍ कोणीय संवेग, घूर्णन अक्ष के अनुदिश एक छद्म सदिश है। इसकी दिशा कोणीय वेग की भाँति दायें हाथ की मुटठी के नियम से ज्ञात की जा सकती है। m द्रव्यमान के एक कण के लिये जो कि नियत चाल v से r त्रिज्या के वृत्त में गति कर रहा है $L = mvr = mr^2\omega$

✍ बल आघूर्ण ($\vec{\tau}$) घूर्णन अक्ष के अनुदिश एक छद्म सदिश है। इसकी दिशा भी हम दायें हाथ की मुटठी के नियम से ज्ञात कर सकते हैं।

✍ बल आघूर्ण का मात्रक N-m है तथा इसका विमीय सूत्र ML^2T^{-2} है।

✍ कोणीय त्वरण तथा बल आघूर्ण निम्न प्रकार से संबंधित है : $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, जहाँ α = कोणीय त्वरण

✍ बल आघूर्ण $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$

✍ यदि m द्रव्यमान का कोई कण r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर असमान त्वरण a से गति कर रहा है तो कण पर बल आघूर्ण $\tau = mr^2\alpha$

✍ कोणीय आवेग = कोणीय संवेग में परिवर्तन

✍ कोणीय संवेग का मात्रक J-s है तथा विमायें : ML^2T^{-1}

✍ एक परिवर्ती बल आघूर्ण के लिये कुल कोणीय आवेग $= \int \tau dt$

✍ $\tau - t$ ग्राफ से घिरा क्षेत्रफल कुल कोणीय आवेग दर्शाता है जोकि कुल संवेग में परिवर्तन के बराबर होता है।

✍ कोई वस्तु जैसे वलय, चकती, बेलन, खोखला अथवा ठोस गोला जब घूर्णन के साथ रेखीय गति भी करता है तब उसे लुढ़कना कहते हैं।

✍ लुढ़कने का अर्थ है किसी वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र की रेखीय गति तथा द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाने वाली अक्ष के परितः घूर्णन गति का मिश्रण।

✍ इसे हम वस्तु के पृष्ठ तल के साथ स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली अक्ष के परितः घूर्णन भी कह सकते हैं। यह अक्ष घूर्णन का तात्क्षणिक अक्ष कहलाता है।

✍ वास्तव में कोणीय विस्थापन सदिश $(d\vec{\theta})$ अथवा कोणीय वेग $(\vec{\omega})$ की दिशा में कुछ नहीं घूमता है। सदिश $d\vec{\theta}$ (अथवा $\vec{\omega}$) की दिशा हमें सिर्फ यह बोध कराती है कि घूर्णी गति इसके लम्बवत् तल में हो रही है।

✍ जब किसी गोलाकार, वृत्ताकार अथवा बेलनाकार वस्तु को धकेला जाता है तो यह सिर्फ फिसलेगी यदि घर्षण न हो, तो। यदि घर्षण का मान पर्याप्त मान से कम है तो यह फिसलने के साथ ही घूर्णी गति करेगी परंतु यदि घर्षण का मान एक पर्याप्त मान के बराबर है तो यह बिना फिसले घूमने लगेगी।

✍ जब कोई वस्तु बिना फिसले लुढ़कती है तो घर्षण के विरुद्ध कोई कार्य नहीं किया जाता।

✍ लुढ़कती हुयी वस्तु का घूर्णन अक्ष उस तल के समांतर होता है जिस पर यह लुढ़क रही है।

✍ कोई वस्तु एक नत समतल पर बिना फिसले लुढ़कती है तो $\mu \geq \left[\frac{K^2}{K^2 + R^2}\right] \tan\theta$ जहाँ (μ) = सीमांत घर्षण गुणांक

✍ किसी नत समतल पर वस्तु घर्षण के बिना नहीं लुढ़क सकती।

μ के सापेक्ष मान, नत समतल पर बिना फिसले लुढ़कने के लिये निम्न रूप से हैं : $\mu_{\text{वलय}} > \mu_{\text{खोखला गोला}} > \mu_{\text{चकती}} > \mu_{\text{ठोस गोला}}$

✍ समान द्रव्यमान की वलय तथा ठोस गोले, जोकि समान चाल से गति कर रहे हैं, वलय की घूर्णन गतिज ऊर्जा अधिक होगी तथा ठोस गोले की कम होगी।

✍ इसी प्रकार समान द्रव्यमान तथा चाल के लिये कुल गतिज ऊर्जा वलय के अधिकतम तथा ठोस गोले के लिये न्यूनतम होगी।

Ordinary Thinking

Objective Questions

द्रव्यमान केन्द्र

1. 200 ग्राम एवं 500 ग्राम द्रव्यमान की दो वस्तुओं के वेग क्रमशः $10\hat{i}$ मी/सै और $3\hat{i}+5\hat{j}$ मी/सै है। इनके द्रव्यमान केन्द्र का वेग (मी/सै में) है [EAMCET 2003]

(a) $5\hat{i}-25\hat{j}$ (b) $\frac{5}{7}\hat{i}-25\hat{j}$

(c) $5\hat{i}+\frac{25}{7}\hat{j}$ (d) $25\hat{i}-\frac{5}{7}\hat{j}$

2. दो द्रव्यमानों m एवं M $(M>m)$ को संलयित करने पर, द्रव्यमान केन्द्र कहाँ होगा [RPET 2003]

(a) m की ओर (b) M की ओर

(c) m व M के बीच (d) कहीं भी

3. दो गोलाकार वस्तुओं के द्रव्यमान क्रमशः M व $5M$ तथा त्रिज्यायें R व $2R$ हैं। इनके केन्द्रों को $12\,R$ दूरी पर रखते हुए, इन्हें मुक्त आकाश में स्वतंत्र कर दिया जाता है। यदि ये एक-दूसरे को केवल गुरुत्वाकर्षण बल के द्वारा आकर्षित करें तो संघट्ट से पूर्व छोटी वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी है [AIEEE 2003]

(a) 1.5 R (b) 2.5 R

(c) 4.5 R (d) 7.5 R

4. HCl के एक अणु में दो परमाणुओं के बीच की दूरी लगभग $1.27\,Å$ $(1Å = 10^{-10}m)$ है। क्लोरीन परमाणु हाइड्रोजन परमाणु से 35.5 गुना भारी है। तब हाइड्रोजन परमाणु से द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति है (लगभग) [Kerala PET 2002]

(a) 1 Å (b) 2.5 Å

(c) 1.24 Å (d) 1.5 Å

5. 2 किग्रा और 3 किग्रा द्रव्यमान की दो वस्तुयें x-अक्ष के अनुदिश गतिमान हैं। एक निश्चित क्षण पर 2 किग्रा की वस्तु का वेग 3 मी/सै तथा 3 किग्रा की वस्तु का वेग 2 मीटर/सैकण्ड है। उस क्षण गुरुत्व केन्द्र का वेग है [AMU (Med.) 2002]

(a) $5\,ms^{-1}$ (b) $1\,ms^{-1}$

(c) 0 (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

6. कार्बन-मोनो ऑक्साइड के एक अणु में कार्बन तथा ऑक्सीजन परमाणुओं के बीच की दूरी $1.1Å$ है। दिया है, कार्बन परमाणु का द्रव्यमान $12\,a.m.u.$ एवं ऑक्सीजन परमाणु का द्रव्यमान $16\,a.m.u.$ है। कार्बन मोनोक्साइड के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति है [CBSE PMT 19997; Kerala (Engg.) 2001]

(a) कार्बन परमाणु से 6.3 Å दूरी पर

(b) ऑक्सीजन परमाणु से 1 Å दूरी पर

(c) कार्बन परमाणु से 0.63 Å दूरी पर

(d) ऑक्सीजन परमाणु से 0.12 Å दूरी पर

7. $20\,gm, 30\,gm$ एवं $50\,gm$ द्रव्यमान वाले तीन कणों के वेग क्रमशः $10\hat{i}, 10\hat{j}$ एवं $10\hat{k}$ हैं। इन तीन कणों के द्रव्यमान-केन्द्र का वेग है [EAMCET 2001]

(a) $2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ (b) $10(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

(c) $20\hat{i}+30\hat{j}+5\hat{k}$ (d) $2\hat{i}+30\hat{j}+50\hat{k}$

8. किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र [CPMT 1975; MH CET 2001]

(a) सदैव पिण्ड के बाहर की ओर होता है

(b) पिण्ड की सतह के भीतर, बाहर अथवा सतह पर हो सकता है

(c) सदैव पिण्ड के अन्दर की ओर होता है

(d) सदैव पिण्ड की सतह पर होता है

9. 2 किग्रा और 4 किग्रा. द्रव्यमान की दो वस्तुऐं क्रमशः 2 मी/सै व 10 मी/सै के वेग से गति कर रही हैं। इनके द्रव्यमान केन्द्र का वेग होगा [MH CET 2000]

(a) 8.1 m/s (b) 7.3 m/s

(c) 6.4 m/s (d) 5.3 m/s

10. एक समान्तर चतुर्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है। m, 2 m, 3 m एवं 4 m द्रव्यमान के चार कण समान्तर चतुर्भुज के शीर्षों पर स्थित हैं। चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं के बीच कोण 60° है। यह चतुर्भुज x–y तल में स्थित है, एवं m मूल बिन्दु पर एवं 4 m x-अक्ष पर स्थित हैं। इस निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक है [AMU (Med.) 1999]

(a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0.95a\right)$ (b) $\left(0.95a, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$

(c) $\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right)$

11. 80 सेमी विकर्ण वाले एक वर्ग $ABCD$ के कोनों A, B, C, D पर क्रमशः 8, 2, 4, 2 किग्रा के द्रव्यमान रखे हैं। A से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी होगी [MP PMT 1999]

(a) 20 cm (b) 30 cm

(c) 40 cm (d) 60 cm

12. धातु की एकसमान तीन गेंदें जिनकी त्रिज्याएँ समान हैं, किसी क्षैतिज तल पर एक दूसरे को स्पर्श करती हुई इस प्रकार रखी हैं कि यदि इनके केन्द्रों को मिलाया जाये तो वे समबाहु त्रिभुज बनाते हैं। इस निकाय का द्रव्यमान केन्द्र स्थित होगा [CBSE PMT 1999]

(a) क्षैतिज तल पर

(b) किसी एक गेंद के केन्द्र पर

(c) किन्हीं दो गेंदों को मिलाने वाली रेखा पर

(d) मध्यिकाओं के कटान बिन्दु पर

13. 2 किग्रा तथा 4 किग्रा के दो द्रव्यमान क्रमशः 2 मी/सैकण्ड तथा 10 मी/सैकण्ड के वेग से परस्पर गुरूत्वाकर्षण के प्रभाव में एक दूसरे की ओर गतिशील हैं। इस निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग होगा

(a) $5\,m/s$ (b) $6\,m/s$

(c) $8\,m/s$ (d) शून्य

14. द्रव्यमान केन्द्र वह बिन्दु है [CPMT 1997]

(a) जो वस्तु का ज्यामितीय केन्द्र होता है

(b) जहाँ से कणों की दूरियाँ समान होती हैं

(c) जहाँ वस्तु के सम्पूर्ण द्रव्यमान को केन्द्रित मान सकते हैं

(d) जो कि निर्देश तंत्र का मूल बिन्दु होता है

15. क्रिकेट के खेल में प्रयुक्त एक बल्ले को इसके द्रव्यमान केन्द्र से काटा जाता है, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है, तब [Kerala PMT 2005]

(a) दोनों टुकड़ों का द्रव्यमान समान होगा

(b) निचला टुकड़ा अधिक द्रव्यमान का होगा

(c) हत्थे वाला टुकड़ा अधिक द्रव्यमान का होगा

(d) हत्थे वाले टुकड़े का द्रव्यमान निचले टुकड़े से दोगुना होगा

16. दो कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 व m_2 हैं, विराम अवस्था से एक दूसरे की ओर अपने पारस्परिक आकर्षण बल के प्रभाव के अन्तर्गत गति करते हैं। उनके द्रव्यमान केन्द्र की चाल उस समय t पर क्या होगी, जब उनके मध्य की दूरी r है [Haryana CEE 1996]

(a) शून्य (b) $\left(G\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{1}{m_1}\right)t$

(c) $\left(G\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{1}{m_2}\right)t$ (d) $\left(G\frac{m_1m_2}{r^2}\cdot\frac{1}{m_1+m_2}\right)t$

17. दो कणों से बने निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के सम्बन्ध में सही कथन होगा [AMU 1995]

(a) द्रव्यमान केन्द्र, दो कणों को मिलाने वाली रेखा के ठीक मध्य बिन्दु पर होगा

(b) द्रव्यमान केन्द्र कणों को मिलाने वाली रेखा पर होगा तथा उस बिन्दु पर होगा जिसकी प्रत्येक द्रव्यमान से दूरी उस कण के द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती होती है

(c) द्रव्यमान केन्द्र कणों को मिलाने वाली रेखा पर होगा तथा उस बिन्दु पर होगा जिसकी प्रत्येक द्रव्यमान से दूरी उस कण के द्रव्यमान के वर्ग के समानुपाती होती है

(d) द्रव्यमान केन्द्र कणों को मिलाने वाली रेखा पर होगा तथा उस बिन्दु पर होगा जिसकी प्रत्येक द्रव्यमान से दूरी उस कण के द्रव्यमान के समानुपाती होती है

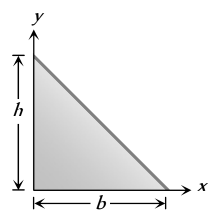
18. चित्र में प्रदर्शित त्रिभुज के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक होंगे [SCRA 1994]

(a) $x=\frac{h}{2}, y=\frac{b}{2}$

(b) $x=\frac{b}{2}, y=\frac{h}{2}$

(c) $x=\frac{b}{3}, y=\frac{h}{3}$

(d) $x=\frac{h}{3}, y=\frac{b}{3}$



19. दो द्रव्यमान 2*M* व *M* प्रारम्भ में *R* दूरी पर हैं। परस्पर आकर्षण बल के प्रभाव में वे एक दूसरे की ओर गति करते हैं। जब उनके बीच की दूरी *R*/2 होती है। उस समय इनके द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण होगा [CPMT 1993]

(a) $0\, m/s^2$ (b) $g\, m/s^2$

(c) $3g\, m/s^2$ (d) $12g\, m/s^2$

20. 20 *kg* द्रव्यमान की एक वस्तु 2*v* वेग से तथा 10 *kg* द्रव्यमान की एक अन्य वस्तु *v* वेग से समान दिशा में गतिशील है। उनके द्रव्यमान केन्द्र का वेग होगा [Pb. PET 2000]

(a) 5*v*/3 (b) 2*v*/3

(c) *v* (d) शून्य

21. दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र उनके बीच की दूरी को विभक्त करता है [MH CET 2004]

(a) कणों के द्रव्यमानों के वर्ग के व्युतक्रमानुपात में

(b) कणों के द्रव्यमानों के वर्ग के समानुपात में

(c) कणों के द्रव्यमानों के व्युतक्रमानुपात में

(d) कणों के द्रव्यमानों के समानुपात में

22. माना द्रव्यमानों m_1 तथा m_2 के दो कणों का एक निकाय है। यदि द्रव्यमान m_1 को निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की ओर d दूरी तक धकेला जाता है, तो द्रव्यमान m_2 को कितनी दूरी तक विस्थापित करना पड़ेगा, जिससे कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र पूर्ववत रहे [CBSE PMT 2004]

(a) $\frac{m_1}{m_1+m_2}d$ (b) $\frac{m_1}{m_2}d$

(c) d (d) $\frac{m_2}{m_1}d$

23. यदि 3*m* लम्बाई की छड़ का रेखीय घनत्व इस प्रकार परिवर्तित होता है कि $\lambda = 2 + x$, तब छड़ के गुरुत्व केन्द्र की स्थिति होगी [BCECE 2005]

(a) $\frac{7}{3}m$ (b) $\frac{12}{7}m$

(c) $\frac{10}{7}m$ (d) $\frac{9}{7}m$

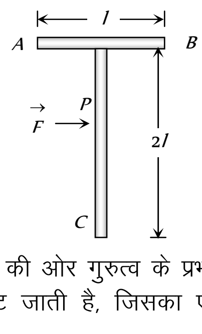
24. एक *T* आकार की वस्तु जिसकी विमाऐं चित्र में प्रदर्शित हैं, एक चिकने क्षैतिज फर्श पर रखी हैं। एक बल '$\vec{F}$' *AB* के समान्तर *P* बिन्दु पर इस प्रकार लगाया जाता है, जिससे कि वस्तु बिना घूर्णन के केवल रैखिक गति करती है। *C* के सापेक्ष *P* की स्थिति होगी [AIEEE 2005]

(a) $\frac{4}{3}l$

(b) *l*

(c) $\frac{2}{3}l$

(d) $\frac{3}{2}l$



25. एक *M* द्रव्यमान की वस्तु *A* ऊधर्वाधर नीचे की ओर गुरुत्व के प्रभाव में गिर रही है, तथा यह दो भागों में टूट जाती है, जिसका एक

भाग *B*, $\frac{1}{3}M$ द्रव्यमान का तथा दूसरा भाग *C*, $\frac{2}{3}M$ द्रव्यमान का है। वस्तुओं *B* तथा *C* का संयुक्त द्रव्यमान केन्द्र वस्तु *A* की तुलना में विस्थापित होगा **[AIEEE 2005]**

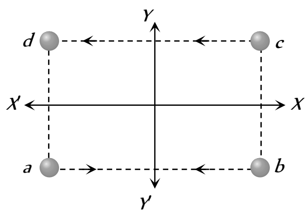
(a) *C* की ओर

(b) *B* की ओर

(c) टूटने की ऊँचाई पर निर्भर करेगा

(d) विस्थापित नहीं होगा

26. चित्र में प्रदर्शित समान द्रव्यमान की चार वस्तुऐं समान चाल से गति करना प्रारंभ करतीं हैं। निम्न में से किस संयोजन के लिये द्रव्यमान केन्द्र मूल बिंदु पर स्थिर रहेगा **[Orissa JEE 2005]**



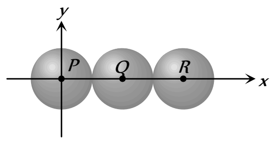
(a) *c* तथा *d*

(b) *a* तथा *b*

(c) *a* तथा *c*

(d) *b* तथा *d*

27. तीन समान गोले जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 1 *kg* है, चित्र में दर्शाये अनुसार परस्पर सम्पर्क में रखे हैं तथा उनके केन्द्र एक सीधी रेखा पर स्थित हैं। यदि उनके केन्द्रों को क्रमशः *P*, *Q*, *R* से प्रदर्शित किया जाये, तब निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की *P* से दूरी होगी **[Kerala PET 2005]**



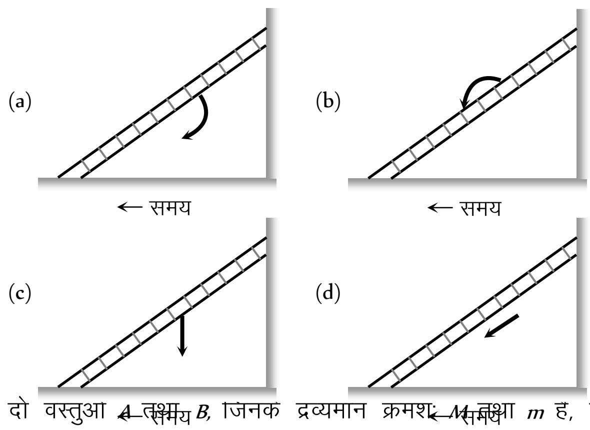
(a) $\frac{PQ + PR + QR}{3}$

(b) $\frac{PQ + PR}{3}$

(c) $\frac{PQ + QR}{3}$

(d) $\frac{PR + QR}{3}$

28. एक सीढ़ी एक चिकनी दीवार के सहारे लगी हुई है, तथा यह घर्षणहीन फर्श पर फिसलने के लिये स्वतंत्र है। निम्न में से कौन सा चित्र द्रव्यमान केन्द्र की गति का सही निरुपण है **[AIIMS 2005]**



29. दो वस्तुएं *A* तथा *B*, जिनके द्रव्यमान क्रमशः *M* तथा *m* हैं, यहाँ $M > m$ तथा उनके बीच की दूरी *d* है, पर समान बल इस प्रकार लगाया जाता है कि वे परस्पर एक दूसरे की ओर गति करती हैं। वह स्थिति, जहाँ दोनों वस्तुऐं टकराती हैं, होगी **[NTSE 1995]**

(a) *B* के समीप

(b) *A* के समीप

(c) *A* तथा *B* से समान दूरी पर

(d) निर्धारित नहीं किया जा सकता

30. दो कण *X* तथा *Y*, प्रारम्भ में विरामावस्था में हैं, परस्पर आकर्षण स्वरुप एक दूसरे की ओर गति करते हैं। यदि किसी क्षण *X* कण का वेग *V* तथा *Y* कण का वेग 2*V* है, तब उनके द्रव्यमान केन्द्र का वेग होगा **[RPET 2002]**

(a) 0 (b) V

(c) $2V$ (d) $V/2$

31. *m* द्रव्यमान का एक विलगित कण क्षैतिज समतल (*X*-*Y*) में तल से कुछ ऊँचाई पर *X*–अक्ष के अनुदिश गतिशील है। यह अचानक विस्फोटित होकर *m*/4 तथा 3*m*/4 द्रव्यमानों के दो टुकड़ों में टूट जाता है। कुछ समय पश्चात् छोटे टुकड़े की स्थिति $y = 15$ *cm* है, तब उस क्षण पर बड़े टुकड़े की स्थिति होगी **[IIT 1997 Cancelled]**

(a) $y = -5\ cm$ (b) $y = +20\ cm$

(c) $y = +5\ cm$ (d) $y = -20\ cm$

कोणीय विस्थापन, वेग तथा त्वरण

1. घड़ी की सैकण्ड वाली सुई का कोणीय वेग है **[CPMT 2003]**

(a) $\frac{\pi}{60} rad/\sec$ (b) $\frac{\pi}{30} rad/\sec$

(c) $60\pi\ rad/\sec$ (d) $30\pi\ rad/\sec$

2. एक साईकिल में पिछले पहिये की त्रिज्या अगले पहिये की त्रिज्या की दोगुनी है। यदि r_F और r_r त्रिज्यायें, तथा v_F एवं v_r क्रमशः अगले तथा पिछले पहिये के संगत पहिये के उच्चतम बिन्दुओं पर वेग हो, तो **[Orissa JEE 2003]**

(a) $v_r = 2\ v_F$ (b) $v_F = 2\ v_r$

(c) $v_F = v_r$ (d) $v_F > v_r$

3. एक कण $\frac{20}{\pi} m$ त्रिज्या के वृत्त के अनुदिश नियत स्पर्शरेखीय त्वरण से घूम रहा है। यदि गति प्रारम्भ होने के बाद दूसरे चक्कर के अन्त में कण का वेग 80 मी/सै हो तो स्पर्शरेखीय त्वरण का मान होगा **[CBSE PMT 2003]**

(a) $640\pi\ m/s^2$ (b) $160\pi\ m/s^2$

(c) $40\pi\ m/s^2$ (d) $40\ m/s^2$

4. एक दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति में पिण्ड के सभी कण **[MP PMT 2003]**

(a) समान रैखिक चाल तथा समान कोणीय चाल रखते हैं

(b) समान रैखिक चाल परंतु भिन्न-भिन्न कोणीय चाल रखते हैं

(c) भिन्न-भिन्न रैखिक चाल परंतु समान कोणीय चाल रखते हैं

(d) भिन्न-भिन्न रैखिक चाल तथा भिन्न-भिन्न कोणीय चाल रखते हैं

5. एक पिण्ड का किसी दिये गये अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $2.4\ kg\text{-}m^2$ है। 750 *J* घूर्णन गतिज ऊर्जा उत्पन्न करने के लिए $5\ rad/sec^2$ का कोणीय त्वरण इस अक्ष के परितः कितने समय के लिए आरोपित करना होगा **[BHU 2002]**

(a) 6 *sec* (b) 5 *sec*
(c) 4 *sec* (d) 3 *sec*

6. एक पहिया जमीन के अनुदिश 2 मी/सै के वेग से लुढ़क रहा है। पहिये के क्षैतिज व्यास के सिरों पर स्थित बिन्दुओं के वेग का परिमाण है [AMU (Med.) 2002]

(a) $2\sqrt{10}\,ms^{-1}$ (b) $2\sqrt{3}\,ms^{-1}$
(c) $2\sqrt{2}\,ms^{-1}$ (d) $2\,ms^{-1}$

7. 120 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूमने वाले गतिपालक चक्र का कोणीय वेग है [Pb. PMT 1999; CPMT 2002]

(a) π *rad/sec* (b) 2π *rad/sec*
(c) 4π *rad/sec* (d) 4π *rad/sec*

8. पहिये की परिधि पर स्थित एक बिन्दु P प्रारम्भ में पृथ्वी के सम्पर्क में है। यदि पहिए की त्रिज्या $5\,m$ हो तो पहिए के आगे की ओर आधा चक्कर घूमने पर P का विस्थापन होगा [Kerala (Engg.) 2001; CBSE PMT 2002]

(a) 5 *m* (b) 10 *m*
(c) 2.5 *m* (d) $5(\sqrt{(\pi^2+4)})m$

9. $1000\,N\text{-}m$ का एक नियत बल आघूर्ण $200\,kg\text{-}m^2$ जड़त्व आघूर्ण वाले चक्र को उसके केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः घूर्णन कराता है। $3\,sec$ बाद इसका कोणीय वेग होगा [CPMT 1999; CBSE PMT 2001]

(a) 1 *rad/sec* (b) 5 *rad/sec*
(c) 10 *rad/sec* (d) 15 *rad/sec*

10. एक गति पालक चक्र $6sec$ में $540\ r.p.m.$ की चाल प्राप्त कर लेता है। इसका कोणीय त्वरण होगा [KCET 2001]

(a) 3π *rad/sec* (b) 9π *rad/sec*
(c) 18π *rad/sec* (d) 54π *rad/sec*

11. एक गाड़ी (car) का पहिया 1200 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूम रहा है। गाड़ी के त्वरक (accelerator) को दबाने पर यह $10\,sec$ बाद 4500 चक्कर प्रति मिनट लगाने लगता है। पहिये का कोणीय त्वरण है [MP PET 2001]

(a) 30 *rad/s* (b) 1880 *deg/s*
(c) 40 *rad/s* (d) 1980 *deg/s*

12. $50\,N\text{-}m$ का एक बल-आघूर्ण एक पहिए को 5 सैकण्ड में स्थिर अवस्था से 200 रेडियन से घूर्णन करा देता है। उत्पन्न कोणीय त्वरण का मान है [Kerala (Engg.) 2001]

(a) 8 *rad sec* (b) 4 *rad sec*
(c) 16 *rad sec* (d) 12 *rad sec*

13. एक पहिया 1200 चक्कर/मिनट की चाल से गतिमान है, एवं इसे $4rad/sec^2$ की दर से धीमा किया जाता है। विरामावस्था में आने से पहले इसके द्वारा पूर्ण किये गये चक्करों की संख्या है [EAMCET (Engg.) 2000]

(a) 143 (b) 272
(c) 314 (d) 722

14. एक कार $72\,km/hr$ की चाल से गतिमान है। इसके पहियों का व्यास $0.25\,m$ है। यदि ब्रेक लगाने पर, 20 चक्कर पूर्ण करने के बाद पहिए रुक जायें तो ब्रेक द्वारा उत्पन्न कोणीय अवमन्दन है [CBSE PMT 2000]

(a) –25.5 *rad/s* (b) –29.5 *rad/s*
(c) –33.5 *rad/s* (d) –45.5 *rad/s*

15. एक चक्र अपने अक्ष के परितः 900 चक्रण प्रति मिनट की दर से घूम रहा है। उसे घुमाने वाला शक्ति-स्त्रोत काट दिये जाने पर वह 1 मिनट में विरामावस्था में आ जाता है। चक्र का कोणीय मंदन रेडियन/सैकण्ड^2 में है [MP PET 1999]

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$
(c) $\pi/6$ (d) $\pi/8$

16. किस स्थिति में कोणीय वेग उपयोगी है [AFMC 1997]

(a) जबकि वस्तु घूर्णन कर रही है
(b) जबकि वस्तु का वेग सरल रेखा में है
(c) जबकि वस्तु का त्वरण सरल रेखा में है
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

17. एक पहिया 2.0 रेडियन/सैकण्ड के एकसमान त्वरण से घूर्णन करता है। यदि पहिया विराम से घूर्णन प्रारम्भ करता है तो प्रथम 10 सैकण्ड में पूरे होने वाले चक्करों की संख्या होगी लगभग [MP PET 1994]

(a) 8 (b) 16
(c) 24 (d) 32

18. एक वस्तु एक वृताकार पथ पर कागज के तल में चक्कर लगा रही है। कोणीय त्वरण की दिशा होगी [CPMT 1983]

(a) त्रिज्या के लम्बवत् ऊपर की ओर
(b) त्रिज्या के अनुदिश
(c) स्पर्श रेखीय
(d) कोणीय वेग के लम्बवत्

19. यदि किसी वस्तु पर अचर आघूर्ण कार्य करता है, तो वस्तु [NCERT 1973]

(a) अपनी स्थायी अथवा सीधी रेखा के अनुदिश गतिशील अवस्था में बनी रहती है
(b) में रेखीय त्वरण उत्पन्न हो जाता है
(c) में कोणीय त्वरण उत्पन्न हो जाता है
(d) अचर चाल से घूर्णन करती है

20. एक मोटर की शाफ्ट 3000 चक्र प्रति मिनट के एक स्थिर कोणीय वेग से घूमती है। यह 1 सैकण्ड में किस कोण (रेडियन) से घूम जावेगी

(a) 1000π (b) 100π
(c) π (d) 10π

21. कोणीय वेग सदिश की दिशा निम्न में से किसके अनुदिश होती है [AIIMS 2004]

(a) वृत्तीय मार्ग की स्पर्शज्या के
(b) त्रिज्या के अनुदिश भीतर की ओर
(c) त्रिज्या के अनुदिश बाहर की ओर
(d) घूर्णन अक्ष के

22. किसी छत से लगे हुए पंखे को चलाने पर यह प्रथम 3 सैकण्डों में 10 चक्कर लगाता है। यदि पंखे का कोणीय त्वरण समान रहे, तो अगले 3 सैकण्डों में यह कितने चक्कर लगायेगा [Kerala PMT 2005]

(a) 10 (b) 20
(c) 30 (d) 40

जड़त्व आघूर्ण

1. 2 किग्रा द्रव्यमान के 5 कण 0.1 मीटर त्रिज्या एवं नगण्य द्रव्यमान की एक वृत्तीय चकती की परिधि से जुड़े हैं। इसके तल के लम्बवत् एवं केन्द्र से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण है [BHU 2003; CPMT 2004]

(a) 1 *kg-m* (b) 0.1 *kg-m*
(c) 2 *kg-m* (d) 0.2 *kg-m*

2. समान धातु से बनी एवं समान मोटाई की दो वलयों की त्रिज्यायें 0.2 मीटर एवं 0.6 मीटर हैं। इनके जड़त्व आर्घूणों का अनुपात होगा [MP PET 2003]

(a) 1 : 81 (b) 1 : 27
(c) 1 : 9 (d) 1 : 3

3. एक पतली छड़ की लम्बाई 1 मीटर एवं द्रव्यमान 0.6 किलोग्राम है। छड़ एक सिरे से 20 सेमी की दूरी पर स्थित तथा छड़ की लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः इसका जड़त्व-आघूर्ण $Kg-m^2$ में होगा (छड़ की चौड़ाई नगण्य है) [EAMCET 2003]

(a) 0.074 (b) 0.104
(c) 0.148 (d) 0.208

4. एक व्यास के अनुदिश वलय का जड़त्व आघूर्ण है [RPET 2003]

(a) $\frac{3}{2}MR^2$ (b) $\frac{1}{2}MR^2$
(c) MR^2 (d) $2MR^2$

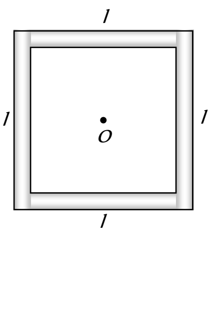
5. $10\,kg$ द्रव्यमान एवं $0.5\,m$ त्रिज्या वाले गोले का एक स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है [Kerala PET 2002]

(a) 5 *kg-m* (b) 2.7 *kg-m*
(c) 3.5 *kg-m* (d) 4.5 *kg-m*

6. एक अर्द्धवृत्तीय वलय का उसके केन्द्र से होकर जाने वाले तथा उसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [AIEEE 2002]

(a) MR (b) $\frac{MR^2}{2}$
(c) $\frac{MR^2}{4}$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

7. समान द्रव्यमान M एवं समान लम्बाई l की चार पतली छड़ें चित्रानुसार एक वर्ग बनाती हैं। इस निकाय का, केन्द्र O से गुजरने वाली एवं इसके तल के लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है [MP PMT 2002]



(a) $\frac{4}{3}Ml^2$
(b) $\frac{Ml^2}{3}$
(c) $\frac{Ml^2}{6}$
(d) $\frac{2}{3}Ml^2$

8. लोहे एवं एल्यूमीनियम का उपयोग करके एक वृत्तीय चकती इस प्रकार बनायी जाती है कि इसका जड़त्व आघूर्ण इसकी ज्यामितीय अक्ष के परितः अधिकतम हो, तो इसके लिए [CBSE PMT 2002]

(a) लोहे एवं एल्यूमिनियम की परतें एकान्तर क्रम में होनी चाहिये
(b) अन्तःभाग एल्यूमिनियम का एवं बाह्य भाग लोहे का होना चाहिये
(c) अन्तःभाग लोहे का एवं बाह्य भाग एल्यूमिनियम का होना चाहिये
(d) (a) अथवा (c)

9. किसी एकसमान वृत्तीय चकती का इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण I है। इसके तल के लम्बवत एवं इसकी परिधि के एक बिन्दु से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण होगा [UPSEAT 2002]

(a) $5I$ (b) $6I$
(c) $3I$ (d) $4I$

10. जड़त्व आघूर्ण निर्भर करता है [MH CET 2002]

(a) कणों के वितरण पर (b) द्रव्यमान पर
(c) घूर्णन अक्ष की त्रिज्या पर (d) उपरोक्त सभी पर

11. किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण किस पर निर्भर नहीं करता [DCE 2001; Orissa JEE 2002]

(a) वस्तु के कोणीय वेग पर
(b) वस्तु के द्रव्यमान पर
(c) वस्तु में द्रव्यमान के वितरण पर
(d) वस्तु के घूर्णन अक्ष पर

12. एक पतली छड़ जिसका द्रव्यमान M तथा लम्बाई l है। इस छड़ का किसी एक सिरे से लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [RPMT 1996; MP PMT 1996; MP PET 2002]

(a) $Ml^2/12$ (b) $Ml^2/3$
(c) $Ml^2/2$ (d) Ml^2

13. 10 किग्रा द्रव्यमान के एक पहिये का इसकी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण 160 किग्रा मी^{2} है। इसकी घूर्णन त्रिज्या होगी [Pb. PMT 2001]

(a) 10 *m* (b) 8 *m*
(c) 6 *m* (d) 4 *m*

14. घूर्णन गति में द्रव्यमान के तुल्य राशि है [DCE 2000, 01]

(a) जड़त्व आघूर्ण (b) कोणीय संवेग
(c) बल आघूर्ण (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

15. $31.4\ N-m$ का एक नियत बल आघूर्ण एक कीलकित पहिए पर आरोपित किया जाता है। यदि पहिए का कोणीय त्वरण $4\pi\ rad/sec^2$ हो, तो पहिए का जड़त्व आघूर्ण है [AIIMS 2001]

(a) 2.5 *kg–m* (b) 3.5 *kg–m*
(c) 4.5 *kg–m* (d) 5.5 *kg–m*

16. R त्रिज्या की एक चकती से r त्रिज्या का समकेन्द्रीय वृत्तीय भाग निकाल लेने पर एक वलयाकार चकती बच जाती है जिसका द्रव्यमान M है। बची हुई वलयाकार चकती का जड़त्व आघूर्ण उसके तल के लम्बवत एवं उसके गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः होगा [MP PET 2001]

(a) $\frac{1}{2}M(R^2+r^2)$ (b) $\frac{1}{2}M(R^2-r^2)$

(c) $\frac{1}{2}M(R^4+r^4)$ (d) $\frac{1}{2}M(R^4-r^4)$

17. एक समरूप तार में से दो वृतीय लूप बनाए जाते है (*i*) P, r त्रिज्या का एवं (*ii*) Q, nr त्रिज्या का। यदि Q का जड़त्व आघूर्ण, इसके तल के लम्बवत एंव केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः P के समान अक्ष के परितः, जड़त्व आघूर्ण से 8 गुना हो तो n का मान है, (r तथा nr की तुलना में तार का व्यास नगण्य है) [EAMCET 2001]

(a) 8 (b) 6

(c) 4 (d) 2

18. एक पतली वृत्ताकार चकती का द्रव्यमान $2\,kg$ एवं व्यास $0.2\,m$ है। चकती का जड़त्व आघूर्ण, इसके तल के लम्बवत् एवं किनारे से गुजरने वाली अक्ष के परितः होगा (kg - m^2 में) [Kerala (Engg.) 2001]

(a) 0.01 (b) 0.03

(c) 0.02 (d) 3

19. द्रव्यमान M तथा त्रिज्या r वाले एक एकसमान वलय का जड़त्व आघूर्ण उसके तल में स्थित एक स्पर्श रेखा के परितः होता है [MP PMT 1997; RPET 2001]

(a) $2Mr^2$ (b) $\frac{3}{2}Mr^2$

(c) Mr^2 (d) $\frac{1}{2}Mr^2$

20. M द्रव्यमान एवं R त्रिज्या वाले गोले का, इसके केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः, जड़त्व आघूर्ण $\frac{2}{5}MR^2$ है। उपरोक्त अक्ष के समान्तर एवं गोले को स्पर्श करने वाली अक्ष के परितः गोले की घूर्णन त्रिज्या है [EAMCET (Engg.) 2000]

(a) $\frac{7}{5}R$ (b) $\frac{3}{5}R$

(c) $\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)R$ (d) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)R$

21. चार कणों को, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान m है, एक l भुजा वाले वर्ग के शीर्षों पर रखा गया है। वर्ग के तल के लम्बवत एवं इसके केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः निकाय की घूर्णन त्रिज्या है [EAMCET (Med.) 2000]

(a) $\frac{l}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{l}{2}$

(c) l (d) $(\sqrt{2})l$

22. पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या निर्भर करती है [RPET 2000]

(a) पिण्ड के आकार एवं द्रव्यमान पर

(b) द्रव्यमान वितरण एवं घूर्णन अक्ष पर

(c) पिण्ड के आकार पर

(d) पिण्ड के द्रव्यमान पर

23. एक ठोस गोला एवं एक ठोस बेलन, जिनकी त्रिज्याएँ एवं घनत्व समान हैं, अपनी-अपनी अक्षों के परितः घूर्णन कर रहे हैं। जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा ($L = R$) [RPMT 2000]

(a) ठोस गोले का (b) ठोस बेलन का

(c) दोनों का (d) दोनों का समान

24. एक वृत्ताकार वलय एवं वृत्ताकार चकती दोनों के द्रव्यमान एवं त्रिज्यायें समान हैं। इनके तलों के लम्बवत् एवं केन्द्रों से गुजरने वाले अक्षों के परितः जड़त्व आघूर्णों का अनुपात है [DCE 2000, 03]

(a) 1 : 1 (b) 2 : 1

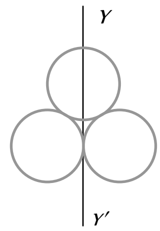
(c) 1 : 2 (d) 4 : 1

25. 50 ग्राम द्रव्यमान एवं $2.5\,cm$ त्रिज्या वाली चकती की, इसके तल के लम्बवत एवं गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या है [Pb. PMT 2000; KCET 2000]

(a) 0.52 *cm* (b) 1.76 *cm*

(c) 3.54 *cm* (d) 6.54 *cm*

26. M द्रव्यमान एवं R त्रिज्या के तीन वलयों को दर्शाये गये चित्रानुसार व्यवस्थित किया गया है। निकाय का जड़त्व आघूर्ण YY'-अक्ष के सापेक्ष होगा [MP PET 2000]



(a) 3 MR

(b) $\frac{3}{2}MR^2$

(c) 5 MR

(d) $\frac{7}{2}MR^2$

27. तल के लम्बवत् तथा गुरुत्व केन्द्र से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः 5 सेमी त्रिज्या और 100 ग्राम द्रव्यमान की चकती की घूर्णन त्रिज्या है [MH CET 2000]

(a) 3.54 *cm* (b) 1.54 *cm*

(c) 4.54 *cm* (d) 2.5 *cm*

28. एक चकती का इसकी अक्ष के पारितः जड़त्व आघूर्ण I है। इसके तल में स्थित स्पर्श रेखा के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण होगा [MP PMT 2002]

(a) $\frac{5}{2}I$ (b) 3 I

(c) $\frac{3}{2}I$ (d) 2 I

29. वलय का द्रव्यमान $m = 3$ ग्राम, त्रिज्या $r = 1$ सेमी है। मुख्य अक्ष के समान्तर तथा वलय की स्पर्श रेखा के परितः इस वलय का जड़त्व आघूर्ण होगा [CMEET Bihar 1995; JIPMER 2000]

(a) $10\ gm\text{-}cm^2$ (b) $100\ gm\text{-}cm^2$

(c) $6\ gm\text{-}cm^2$ (d) $1\ gm\text{-}cm^2$

30. 500 ग्राम द्रव्यमान तथा 10 सेमी त्रिज्या के बेलन का इसकी मुख्य अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [AFMC 1997; MH CET 2000; MP PMT 2001]

(a) $2.5\times10^{-3} kg\text{-}m^2$ (b) $2\times10^{-3} kg\text{-}m^2$

(c) $5\times10^{-3} kg\text{-}m^2$ (d) $3.5\times10^{-3} kg\text{-}m^2$

31. एक ठोस बेलन का द्रव्यमान M लम्बाई L तथा त्रिज्या R है। इस बेलन का जड़त्व-आघूर्ण उसके किसी जनित्र के परितः क्या है [MP PET 1999; MP PMT 2000]

(a) $M\left(\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right)$ (b) $\frac{ML^2}{4}$

(c) $\frac{1}{2}MR^2$ (d) $\frac{3}{2}MR^2$

32. एक चकती का द्रव्यमान M व त्रिज्या r है। चकती के किनारे को स्पर्श करती हुई तथा उसके तल में स्थित अक्ष के परितः अथवा व्यास के समान्तर अक्ष के परितः उसका जड़त्व आघूर्ण है [MP PET 1995; CBSE PMT 1999; BHU 2004]

(a) $\frac{5}{4}Mr^2$ (b) $\frac{Mr^2}{4}$

(c) $\frac{3}{2}Mr^2$ (d) $\frac{Mr^2}{2}$

33. पतली वृत्ताकार चकती का इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (M चकती का द्रव्यमान तथा R त्रिज्या है) [EAMCET (Med.) 1995; Pb. PMT 1999; MH CET 1999]

(a) $\frac{MR^2}{4}$ (b) $\frac{MR^2}{2}$

(c) MR^2 (d) $2MR^2$

34. एकसमान पतली L लम्बाई की छड़ की इसके द्रव्यमान केन्द्र से तथा लम्बाई के लम्बवत् गुजरने वाली अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या है [AMU (Med.) 1999]

(a) $\frac{L}{\sqrt{12}}$ (b) $\frac{L}{12}$

(c) $\sqrt{12}L$ (d) $12L$

35. दो वलयों के जड़त्व आघूर्णों का अनुपात 2 : 1 है तथा उनके व्यास का अनुपात 2 : 1 है। इन वलयों के द्रव्यमानों का अनुपात होगा [MP PMT/PET 1998]

(a) 2 : 1 (b) 1 : 2

(c) 1 : 4 (d) 1 : 1

36. खोखले गोले का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है। इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [RPMT 1997]

(a) $\frac{2}{5}MR^2$ (b) $\frac{2}{3}MR^2$

(c) $\frac{1}{2}MR^2$ (d) MR^2

37. आयताकार प्लेट का तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से जाने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [RPET 1997; CPMT 1996, 97]

(a) $\frac{M}{12}(l^2+b^2)$ (b) $\frac{M}{3}(l^2+b^2)$

(c) $\frac{2Ml}{12}$ (d) $\frac{M(l+b)}{12}$

38. एक पहिया किसी स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। जब इसकी कोणीय चाल 30 रेडियन/सैकण्ड है तब गतिज ऊर्जा 360 जूल है, तो पहिए का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है [CBSE PMT 1990]

(a) $0.6\ kg\times m^2$ (b) $0.15\ kg\times m^2$

(c) $0.8\ kg\times m^2$ (d) $0.75\ kg\times m^2$

39. ऊष्मा इंजन में गतिपालक चक्र एक महत्वपूर्ण भाग है, क्योंकि

(a) यह इंजन की चाल को त्वरित करता है

(b) यह इंजन को शक्ति प्रदान करता है

(c) यह सुरक्षा प्रदान करता है

(d) यह इंजन की चाल को नियत बनाये रखता है

40. समान द्रव्यमान की किसी वस्तु के तल के लम्वबत् तथा उसके गुरुत्व केन्द्र से होकर जाने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निम्न में से किस वस्तु के लिये सबसे अधिक होगा [CPMT 1981]

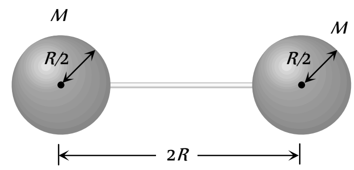
(a) a त्रिज्या की चकती

(b) a त्रिज्या की वलय

(c) $2a$ भुजा का वर्गाकार पटल

(d) $2a$ भुजा की चार छडों द्वारा बनाया गया वर्ग

41. दो गोले जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या $\frac{R}{2}$ है, एक दूसरे से द्रव्यमानहीन छड़ के द्वारा चित्रानुसार जोड़े गये हैं, छड़ की लम्बाई $2R$ है। किसी भी गोले के केन्द्र से जाने वाली तथा छड़ के लम्बवत् अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण होगा [RPMT 1996]



(a) $\frac{21}{5}MR^2$

(b) $\frac{2}{5}MR^2$

(c) $\frac{5}{2}MR^2$

(d) $\frac{5}{21}MR^2$

42. तल में स्थित स्पर्श रेखा के परितः चकती का जड़त्व आघूर्ण I है, तब तल के लम्बवत् स्थित स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [RPET 1996]

(a) $\frac{6}{5}I$ (b) $\frac{3}{4}I$

(c) $\frac{3}{2}I$ (d) $\frac{5}{4}I$

43. M द्रव्यमान और R त्रिज्या के एक ठोस बेलन का जड़त्व आघूर्ण उसकी अक्ष के समान्तर तथा सतह पर स्थित रेखा के परितः होगा [MP PET 1994, 96]

(a) $\frac{2}{5}MR^2$ (b) $\frac{3}{5}MR^2$

(c) $\frac{3}{2}MR^2$ (d) $\frac{5}{2}MR^2$

44. तीन बिन्दु द्रव्यमान m_1, m_2, m_3 को एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखा गया है जबकि त्रिभुज की भुजा a है। शीर्ष m_1 से जाने वाली अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण होगा [Haryana CEE 1996]

(a) $(m_2+m_3)\frac{a^2}{4}$ (b) $(m_1+m_2+m_3)a^2$

(c) $(m_1+m_2)\frac{a^2}{4}$ (d) $(m_2+m_3)a^2$

45. समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्षों पर m द्रव्यमान के तीन कण रखे गये हैं। त्रिभुज की भुजा की लम्बाई a है। इस निकाय का त्रिभुज की किसी भी भुजा के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [AIIMS 1995]

(a) ma^2 (b) $3\,ma^2$

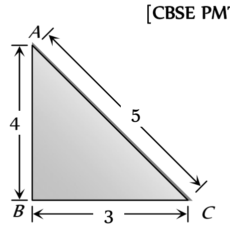
(c) $\frac{3}{4}ma^2$ (d) $\frac{2}{3}ma^2$

46. M द्रव्यमान तथा L लम्बाई की तीन छड़ें X, Y व Z अक्ष के अनुदिश इस प्रकार रखी जाती हैं कि उनका एक सिरा मूल बिन्दु पर रहे। इस निकाय का Z अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [AMU 1995]

(a) $\frac{2ML^2}{3}$ (b) $\frac{4ML^2}{3}$

(c) $\frac{5ML^2}{3}$ (d) $\frac{ML^2}{3}$

47. ABC एकसमान मोटाई की एक त्रिभुजाकार प्लेट है। इसकी भुजाएँ चित्रानुसार अनुपात में हैं। प्लेट की भुजा AB, BC तथा CA के परितः जड़त्व आघूर्ण क्रमानुसार I_{AB}, I_{BC} तथा I_{CA} हैं। इस व्यवस्था के लिए नीचे लिखे सम्बन्धों में से कौनसा सत्य होगा [CBSE PMT 1995]



(a) I_{CA} अधिकतम होगा

(b) $I_{AB} > I_{BC}$

(c) $I_{BC} > I_{AB}$

(d) $I_{AB} + I_{BC} = I_{CA}$

48. समान आकार, आकृति तथा भार के दो अण्डों में से एक कच्चा तथा एक अध उबला (Half boiled) है। केन्द्रीय अक्ष के परितः कच्चे अण्डे के जड़त्व आघूर्ण का अध उबले अण्डे के जड़त्व आघूर्ण से अनुपात होगा [Manipal MEE 1995]

(a) एक (b) एक से अधिक

(c) एक से कम (d) अतुलनीय

49. एकसमान पतली छड़ की लम्बाई L तथा संहति M है। इसका उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, जो कि इसके एक सिरे से $\frac{L}{3}$ दूरी पर स्थित बिन्दु से होकर लम्बवत् जाती है, का मान होगा [MP PMT 1995]

(a) $\frac{7ML^2}{48}$ (b) $\frac{ML^2}{9}$

(c) $\frac{ML^2}{12}$ (d) $\frac{ML^2}{3}$

50. एकसमान वृत्तीय रिंग जिसकी संहति M तथा त्रिज्या R है, का जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष के परितः जो कि रिंग के स्पर्शरेखीय है तथा इसके तल के लम्बवत् है, होगा [MP PMT 1995]

(a) $2MR^2$ (b) $\frac{3}{2}MR^2$

(c) $\frac{1}{2}MR^2$ (d) MR^2

51. R त्रिज्या तथा M द्रव्यमान वाले एक गोले का उस पर एक स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण होता है [EAMCET (Engg.) 95]

(a) MR^2 (b) $\frac{2}{5}MR^2$

(c) $\frac{12}{5}MR^2$ (d) $\frac{7}{5}MR^2$

52. एक छड़ की लम्बाई 1 मीटर तथा इसका द्रव्यमान 0.12 किग्रा है। इसके केन्द्र से जाने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [CMEET Bihar 1995]

(a) $0.01 kg\text{-}m^2$ (b) $0.001 kg\text{-}m^2$

(c) $1 kg\text{-}m^2$ (d) $10 kg\text{-}m^2$

53. दो समान त्रिज्या एवं द्रव्यमान वाले वलय इस प्रकार रखे हुए हैं कि उनके केन्द्र एक ही बिन्दु पर स्थित हैं तथा उनके तल परस्पर लम्बवत् हैं। एक वलय के तल के लम्बवत् और केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण होगा (वलय का द्रव्यमान = m, त्रिज्या = r) [MP PMT 1994]

(a) $\frac{1}{2}mr^2$ (b) mr^2

(c) $\frac{3}{2}mr^2$ (d) $2mr^2$

54. एकसमान आयताकार प्लेट का केन्द्र से गुजरने वाली तथा लम्बाई (l) के समान्तर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (b=आयताकार प्लेट की चौड़ाई) [EAMCET 1994]

(a) $\frac{Mb^2}{4}$ (b) $\frac{Mb^3}{6}$

(c) $\frac{Mb^3}{12}$ (d) $\frac{Mb^2}{12}$

55. लोहे की दो वृत्ताकार चकतियाँ समान मोटाई की हैं। A का व्यास B की तुलना में दो गुना है। A का जड़त्व आघूर्ण B की तुलना में होगा [BHU 1994]

(a) 2 गुना (b) 4 गुना

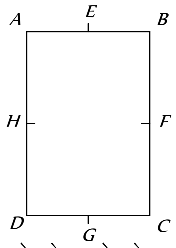
(c) 8 गुना (d) 16 गुना

56. दो वृत्ताकार वलयों के द्रव्यमानों का अनुपात 1:2 है तथा उनके व्यासों का अनुपात 2:1 है। इन वलयों के जड़त्व आघूर्णों का अनुपात है [MP PMT 1993]

(a) 1 : 4 (b) 2 : 1

(c) 4 : 1 (d) $\sqrt{2}:1$

57. आयत *ABCD* का जड़त्व आघूर्ण किस अक्ष के परितः न्यूनतम होगा $(BC = 2AB)$ [CBSE PMT 1993]



(a) *BC*
(b) *BD*
(c) *HF*
(d) *EG*

58. वृत्ताकार छल्ले के तल के लम्बवत् तथा इसके केन्द्र से होकर जाने वाली अक्ष के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण 200 *gm cm* है। इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [MP PMT 1987]

(a) 400 $gm \times cm$ (b) 300 $gm \times cm$
(c) 200 $gm \times cm$ (d) 100 $gm \times cm$

59. निम्न में से किसका जड़त्व आघूर्ण सबसे अधिक होगा [CPMT 1983]

(a) वृताकार वलय का इसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण
(b) चकती का इसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण
(c) ठोस गोले का
(d) दण्ड चुम्बक का

60. *M* द्रव्यमान तथा *R* त्रिज्या की एक वलय का उसके केन्द्र के परितः तथा उसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है [CPMT 1982]

(a) $\frac{1}{2}MR^2$ (b) MR^2
(c) $\frac{1}{4}MR^2$ (d) $\frac{3}{4}MR^2$

61. किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण प्रभावी होता है [AFMC 1979]

(a) वस्तु की वक्राकार पथ में गति के दौरान
(b) सरल रेखीय गति में
(c) घूर्णन गति में
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

62. एक फ्लाई-व्हील के व्यास में यदि 1% की वृद्धि की जाये तो उसके केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण में प्रतिशत वृद्धि होगी

(a) 2% (b) 2.5%
(c) 1.5% (d) 3%

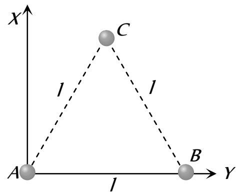
63. एक पतली वृत्ताकार प्लेट, जिसका द्रव्यमान 1*kg* तथा व्यास 0.2*m* है, का इसके किसी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा

(a) $5\times10^{-3}\ kg\text{-}m^2$ (b) $2.5\times10^{-3}\ kg\text{-}m^2$
(c) $4\times10^{-2}\ kg\text{-}m^2$ (d) $0.2\ kg\text{-}m^2$

64. एक *R* त्रिज्या की चकती के केन्द्र से लम्बवत् गुजरने वाली अक्ष के परितः चकती की घूर्णन त्रिज्या का मान है

(a) $R/\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}R$
(c) $R/2$ (d) $2R$

65. तीन कण, जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान *m* है, *l cm* भुजा के समबाहु त्रिभुज के शीर्षो पर स्थित हैं (जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है) रेखा *AX* के परितः जो कि *AB* के लम्बवत् है तथा *ABC* के तल में स्थित है, जड़त्व आघूर्ण का मान ग्राम-सेमी॰ में होगा [CBSE PMT 2004]



(a) $\frac{3}{4}ml^2$
(b) $2ml^2$
(c) $\frac{5}{4}ml^2$
(d) $\frac{3}{2}ml^2$

66. किसी वृत्तीय चकती के तल में स्थित स्पर्शी अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या तथा उसी त्रिज्या की वृत्तीय वलय की वलय के तल में स्थित स्पर्शी अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या का अनुपात होता है [CBSE PMT 2004]

(a) 2 : 3 (b) 2 : 1
(c) $\sqrt{5}:\sqrt{6}$ (d) $1:\sqrt{2}$

67. एक ठोस गोले *A* तथा एक अन्य खोखले गोले *B* के द्रव्यमान तथा बाह्य त्रिज्याएं समान हैं। उनके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण I_A तथा I_B इस प्रकार हैं कि [AIEEE 2004]

(a) $I_A = I_B$ (b) $I_A > I_B$
(c) $I_A < I_B$ (d) $I_A / I_B = d_A / d_B$

जहाँ d_A तथा d_B गोलों के घनत्व हैं

68. बिन्दु द्रव्यमान 1, 2, 3 तथा 4 *kg* क्रमशः बिंदुओं (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 3, 0) तथा (– 2, – 2, 0) पर स्थित हैं। *x* अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण होगा [J & K CET 2004]

(a) 43 $kg-m$ (b) 34 $kg-m$
(c) 27 $kg-m$ (d) 72 $kg-m$

69. *m* द्रव्यमान तथा *r* त्रिज्या की एक वलय को पिघलाकर एक गोला बनाया गया है। गोले का जड़त्व आघूर्ण होगा [J & K CET 2004]

(a) वलय से अधिक (b) वलय से कम
(c) वलय के समान (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

70. एक ही पदार्थ के तथा समान आकार के एक ठोस गोले तथा खोखले गोले का भार मापे बिना उनके बीच अंतर बताया जा सकता है [J & K CET 2004]

(a) समाक्षीय अक्षों के परितः उनके जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कर
(b) किसी नतसमतल पर एक साथ लुढ़काने पर
(c) किसी उभयनिष्ठ घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णन कराने पर
(d) उन पर समान बल आघूर्ण लगाकर

71. दो छड़ों को जिनमें प्रत्येक छड़ का द्रव्यमान m तथा लम्बाई l है, केन्द्र पर जोड़ कर क्रास का स्वरुप दिया जाता है। छड़ों के तल के लम्बवत् तथा उनके उभयनिष्ठ केन्द्र से होकर जाने वाली अक्ष के परितः क्रास का जड़त्व आघूर्ण होगा [UPSEAT 2004]

(a) $ml^2/12$ (b) $ml^2/6$

(c) $ml^2/3$ (d) $ml^2/2$

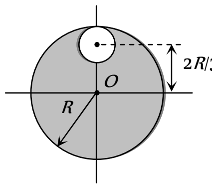
72. R त्रिज्या तथा $9M$ द्रव्यमान की एक वृत्तीय चकती से $R/3$ त्रिज्या की एक छोटी चकती काटी जाती है। चकती के तल के लम्बवत् तथा O से गुजरने वाली अक्ष के परितः शेष चकती का जड़त्व आघूर्ण होगा [IIT JEE 2005]

(a) $4MR^2$

(b) $\frac{40}{9}MR^2$

(c) $10MR^2$

(d) $\frac{37}{9}MR^2$



73. समान पदार्थ से बनी हुई क्रमशः R तथा nR त्रिज्या वाली दो वलयों के केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण का अनुपात 1 : 8 है, n का मान है [DCE 2005]

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$

(c) 4 (d) $\frac{1}{2}$

74. M द्रव्यमान तथा L लम्बाई की एक पतली छड़ का छड़ के लम्बवत् तथा छड़ के एक सिरे से $L/4$ दूरी से गुजरते अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण का मान है [Kerala PET 2005]

(a) $\frac{ML^2}{6}$ (b) $\frac{ML^2}{12}$

(c) $\frac{7ML^2}{24}$ (d) $\frac{7ML^2}{48}$

75. एक क्षैतिज प्लेटफॉर्म अपने केन्द्र से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः एकसमान कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा है। किसी समय इसके केन्द्र पर 'm' द्रव्यमान का एक श्यान द्रव गिराया जाता है, जो कि फैलने के लिये स्वतंत्र है तथा अन्त में नीचे गिर जाता है। इस समयान्तराल में कोणीय वेग का मान [AIIMS 2005]

(a) लगातार घटेगा

(b) प्रारम्भ में घटेगा तथा पुनः बढ़ेगा

(c) अपरिवर्तित रहेगा

(d) लगातार बढ़ेगा

76. 20 kg द्रव्यमान के एक ठोस बेलन की लम्बाई 1 m तथा त्रिज्या 0.2 m है। तब इसके ज्यामितीय अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (किग्रा-मीटर) [Kerala PMT 2005]

(a) 0.8 (b) 0.4

(c) 0.2 (d) 20.2

बल आघूर्ण तथा बलयुग्म

1. माना कि किसी कण, जिसका स्थित सदिश $\vec{r}$ है, पर लगने वाला बल $\vec{F}$ है, एवं मूल बिन्दु के परितः इस बल का बल आघूर्ण $\vec{T}$ है तो [AIEEE 2003]

(a) $\vec{r}.\vec{T}=0$ तथा $\vec{F}.\vec{T}=0$ (b) $\vec{r}.\vec{T}=0$ तथा $\vec{F}.\vec{T}\neq 0$

(c) $\vec{r}.\vec{T}\neq 0$ तथा $\vec{F}.\vec{T}=0$ (d) $\vec{r}.\vec{T}\neq 0$ तथा $\vec{F}.\vec{T}\neq 0$

2. नल को दो अँगुलियों की सहायता से आसानी से खोला अथवा बन्द किया जा सकता है क्योंकि [Manipal MEE 1995; BVP 2003]

(a) नल को खोलने अथवा बन्द करने के लिए उपलब्ध बल अधिक हो जाएगा

(b) यह कोणीय बल के प्रयोग में मदद करता है

(c) बनने वाले बलयुग्म के कारण घूर्णी प्रभाव होता है

(d) एक अँगुली घर्षण समाप्त करती है तथा दूसरी अँगुली बल प्रदान करती है

3. यदि निकाय पर कार्यरत बाह्य बल आघूर्ण $T=0$ है। तब [RPMT 2000]

(a) $\omega=0$ (b) $\alpha=0$

(c) $J=0$ (d) $F=0$

4. एक मोटर गाड़ी का इंजन $100\ KW$ शक्ति उत्पन्न करता है। यदि यह 1800 चक्कर प्रति मिनट की चाल से घूर्णन करता हो, तो इसके द्वारा प्रदाय बल आघूर्ण है [CBSE PMT 2000]

(a) 350 N-m (b) 440 N-m

(c) 531 N-m (d) 628 N-m

5. $0.2\,m$ व्यास वाले बेलन पर लिपटी एक रस्सी की सहायता से $10\,kg$ द्रव्यमान का एक पिण्ड स्थिर लटका हुआ है। बेलन के क्षैतिज अक्ष के परितः आरोपित बल आघूर्ण है [JIPMER 1999]

(a) 98 N-m (b) 19.6 N-m

(c) 196 N-m (d) 9.8 N-m

6. निम्न में से कौन सदिश राशि है [DCE 1999]

(a) कार्य (b) शक्ति

(c) बल आघूर्ण (d) गुरुत्वाकर्षण नियतांक

7. एक पहिये पर लगने वाला नियत बल आघूर्ण इसके कोणीय संवेग को 4 सैकण्ड में A_0 से $4A_0$ कर देता है, तो बल आघूर्ण का परिमाण होगा [MP PMT 1987; AIIMS 1997; BHU 1998; BHU 2005]

(a) $\frac{3A_0}{4}$ (b) A_0

(c) $4A_0$ (d) $12A_0$

8. बलयुग्म उत्पन्न करता है [CBSE PMT 1997; DCE 2004]

(a) केवल रेखीय गति (b) केवल घूर्णी गति

(c) रेखीय तथा घूर्णी गति (d) कोई गति नहीं

9. यदि किसी निकाय पर बाह्य बल आघूर्ण कार्य न करे तो निम्न में से कौन परिमाण तथा दिशा में नियत रहता है [CPMT 1979; RPMT 1997]

(a) बल (b) रेखीय संवेग

(c) कोणीय संवेग (d) रेखीय आवेग

10. पिण्ड की घूर्णी गति निम्न के कारण होती है [NTSE 1995]

(a) बलयुग्म (b) बल का आवेग

(c) बल (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

11. यदि I, α व τ क्रमशः किसी वस्तु के जड़त्व आघूर्ण, कोणीय त्वरण तथा बल आघूर्ण हों तथा वस्तु किसी अक्ष के परितः ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रही हो, तो [CPMT 1982]

(a) $\tau = I\alpha$ (b) $\tau = I\omega$
(c) $I = \tau\omega$ (d) $\alpha = \tau\omega$

12. रैखिक गति में बल, घूर्णन गति में किसके समरूप है

(a) बल आघूर्ण (b) जड़त्व आघूर्ण
(c) कोणीय संवेग (d) भार

13. 10 किग्रा का एक द्रव्यमान भारहीन छड़ के एक सिरे से बाँधकर 30 सेमी की त्रिज्या के वृत्त में 10 रेडियन/सैकण्ड के कोणीय वेग से घुमाया जा रहा है। यदि इस पिण्ड को ब्रेक लगाकर 10 सैकण्ड में विराम अवस्था में लाया जाये तो बल-आघूर्ण का मान क्या होगा

(a) 0.9 *N-m* (b) 1.2 *N-m*
(c) 2.3 *N-m* (d) 0.5 *N-m*

14. एक पहिया, जिसका जड़त्व आघूर्ण उर्ध्वाधर अक्ष के परितः $2\ kg-m^2$ है, 60 *rpm* की दर से घूर्णन कर रहा है। 1 मिनट में पहिऐ को रोकने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण है [CBSE PMT 2004]

(a) $\frac{2\pi}{15}$ *N-m* (b) $\frac{\pi}{12}$ *N-m*
(c) $\frac{\pi}{15}$ *N-m* (d) $\frac{\pi}{18}$ *N-m*

15. एक पहिया, जिसका जड़त्व आघूर्ण $5\times10^{-3}\ kg\,m^2$ है, तथा यह $20\ rev/s$ की दर से घूर्णन करता है। पहिये को 10 सैकण्ड में रोकने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण का मान .... $\times10^{-2}$ *N-m* है

(a) 2π (b) 2.5π
(c) 4π (d) 4.5π

16. बिन्दु $\vec{r} = 7\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ पर कार्यरत् बल $\vec{F} = -3\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$ का बल आघूर्ण होगा [DPMT 2004]

(a) $14\hat{i}-38\hat{j}+16\hat{k}$ (b) $4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$
(c) $-14\hat{i}+38\hat{j}-16\hat{k}$ (d) $-21\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$

17. एक बल $\vec{F} = 4\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k}$ एक बिन्दु $\vec{r}_1 = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ पर कार्यरत है। बिन्दु $\vec{r}_2 = 3\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ के परितः बल आघूर्ण का मान होगा [Pb. PET 2001]

(a) शून्य (b) $42\hat{i}-30\hat{j}+6\hat{k}$
(c) $42\hat{i}+30\hat{j}+6\hat{k}$ (d) $42\hat{i}+30\hat{j}-6\hat{k}$

18. एक पहिए के केंद्र से जाने वाली अक्ष के परितः उसका जड़त्व आघूर्ण $200\ kg\text{-}m^2$ है। पहिए को घुमाने हेतु 1000 *N-m* का नियत बल आघूर्ण लगाया जाता है। 3 सैकण्ड पश्चात् पहिए का कोणीय वेग होगा [Pb. PET 2001]

(a) 15 रेडियन/सै (b) 10 रेडियन/सै
(c) 5 रेडियन/सै (d) 1 रेडियन/सै

19. पृथ्वी के घूर्णन को एक दिन में रोकने के लिए विषुवत रेखा के स्पर्श रेखीय दिशा में कितना नियत बल लगाना पड़ेगा [Pb. PET 2002]

(a) $1.3\times10^{22}\ N$ (b) $8.26\times10^{28}\ N$
(c) $1.3\times10^{23}\ N$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

20. किसी पहिए का कोणीय संवेग 3 सैकण्ड में $2L$ से $5L$ तक परिवर्तित होता है। पहिए पर कार्यरत बल आघूर्ण का मान है [Pb. PET 2002]

(a) L (b) $L/2$
(c) $L/3$ (d) $L/5$

21. 30 *N-m* का बल आघूर्ण, $2\,kg-m^2$ जड़त्व आघूर्ण वाले एक 5 किलोग्राम के पहिए पर 10 सैकण्ड तक लगाया जाता है। 10 सैकण्ड में पहिए का कोणीय विस्थापन होगा [RPMT 2003]

(a) 750 रेडियन (b) 1500 रेडियन
(c) 3000 रेडियन (d) 6000 रेडियन

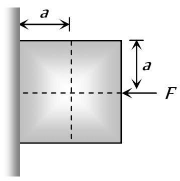
22. R त्रिज्या वाली एक पतली वलय को इसके केन्द्र के परितः घूर्णन कराते हैं, तब इसकी त्रिज्या [RPET 2000]

(a) बढेगी
(b) घटेगी
(c) में परिवर्तन पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

23. एक वलय जिसकी आंतरिक तथा बाह्य त्रिज्याऐं क्रमशः R तथा R हैं, एकसमान कोणीय वेग से बिना फिसले लुढ़क रही है। [Kerala PMT 2004] वलय के अंतः तथा बाह्य भागों पर स्थित दो कणों पर लगने वाले बलों का अनुपात, $\frac{F_1}{F_2}$ होगा [AIEEE 2005]

(a) 1 (b) $\frac{R_1}{R_2}$
(c) $\frac{R_2}{R_1}$ (d) $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$

24. चित्र में दर्शाए गुटके पर एक क्षैतिज बल F इस प्रकार लगाया गया है कि गुटका स्थिर अवस्था में ही रहता है तब निम्न में से कौन सा कथन सत्य है [IIT JEE 2005]



(a) $f = mg$ [जहाँ f घर्षण बल है]
(b) $F = N$ [जहाँ N अभिलंब प्रतिक्रिया है]
(c) F बल आघूर्ण उत्पन्न नहीं करेगा
(d) N बल आघूर्ण उत्पन्न नहीं करेगा

25. घूर्णन प्रभाव उत्पन्न होता है [J & K CET 2005]

(a) बल के स्पर्शी घटक द्वारा
(b) बल के त्रिज्यीय घटक द्वारा
(c) बल के अनुप्रस्थ घटक द्वारा

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

26. एक व्यक्ति तथा एक लड़का एक एकसमान छड़ को क्षैतिजतः इस प्रकार ले जाते हैं, कि लड़का छड़ के भार का 1/4भाग उठा रहा है। यदि लड़का छड़ के एक सिरे पर हो, तब दूसरे सिरे से व्यक्ति की दूरी होगी

(a) $L/3$ (b) $L/4$

(c) $2L/3$ (d) $3L/4$

कोणीय संवेग

1. सौर मण्डल में उपग्रहों की गति किसका उदाहरण है [AIIMS 2003; DCE 2003]

(a) द्रव्यमान संरक्षण का (b) रेखीय संवेग सरक्षण का

(c) कोणीय संवेग सरक्षण का (d) ऊर्जा संरक्षण का

2. यदि किसी कण पर लगाया गया बल आघूर्ण शून्य हो तो इसका कोणीय संवेग होगा [RPET 2003; UPSEAT 2004]

(a) दिशा में समान (b) परिमाण में समान

(c) (a) तथा (b) दोनों (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

3. M द्रव्यमान एवं r त्रिज्या की एक पतली वृत्ताकार वलय अपनी अक्ष के परितः नियत कोणीय वेग ω से घूम रही है। m द्रव्यमान के चार कण, वलय के दो लम्बवत् व्यासों के विपरीत बिन्दुओं पर धीरे से रख दिये जाते हैं, वलय का कोणीय वेग होगा [CBSE PMT 2003]

(a) $\frac{M\omega}{M+4m}$ (b) $\frac{(M+4m)\omega}{M}$

(c) $\frac{(M-4m)\omega}{M+4m}$ (d) $\frac{M\omega}{4m}$

4. कोणीय संवेग है [CBSE PMT 1993; DPMT 2000; CPMT 2002, 03]

(a) सदिश (अक्षीय) (b) सदिश (ध्रुवीय)

(c) अदिश (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

5. 2 किग्रा का एक द्रव्यमान 0.8 मीटर त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर 44 रेडियन/सैकण्ड के कोणीय वेग से घूम रहा है। यदि पथ की त्रिज्या 1 मीटर हो जाये तो कोणीय वेग का मान होगा [KCET 2000; Pb. PMT 2002]

(a) 28.16 रेडियन/सै (b) 35.16 रेडियन/सै

(c) 19.28 रेडियन/सै (d) 8.12 रेडियन/सै

6. कणों के एक निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है [DCE 2000; Pb. PMT 2000; AIIMS 2002; MP PET 2002]

(a) यदि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं करता है

(b) यदि निकाय पर कोई बाह्य बल आघूर्ण कार्य नहीं करता है

(c) यदि निकाय पर कोई बाह्य आवेग कार्य नहीं करता है

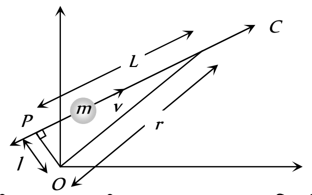
(d) यदि घूर्णन अक्ष समान रहता है

7. दो दृढ़ पिण्ड A तथा B क्रमशः E_A एवं E_B घूर्णन गतिज ऊर्जाओं के साथ घूर्णन करते है। घूर्णन अक्ष के परितः A व B के जडत्व आघूर्ण क्रमशः I_A एवं I_B हैं। यदि $I_A = \frac{I_B}{4}$ तथा $E_A = 100\,E_B$ हो तो A के कोणीय संवेग (L_A) एवं B के कोणीय संवेग (L_B) का अनुपात है [JIPMER 2001, 02]

(a) 25 (b) 5/4

(c) 5 (d) 1/4

8. m द्रव्यमान का एक कण PC रेखा के अनुदिश (चित्रानुसार) v वेग से गति करता है। बिन्दु O के परितः कण का कोणीय संवेग है [AIEEE 2002]



(a) mvL

(b) mvl

(c) mvr

(d) शून्य

9. M द्रव्यमान एवं R त्रिज्या वाली एक पतली वृत्ताकार वलय किसी क्षैतिज तल में इसके केन्द्र से गुजरने वाले एवं तल के लम्बवत् अक्ष के परितः कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रही है। यदि समान आकार परन्तु $\frac{M}{4}$ द्रव्यमान की एक अन्य वलय पहली वाली वलय पर समाक्षीय रख दी जाये तो निकाय का नया कोणीय वेग है [AIEEE 2002]

(a) $\frac{5}{4}\omega$ (b) $\frac{2}{3}\omega$

(c) $\frac{4}{5}\omega$ (d) $\frac{3}{2}\omega$

10. चिकने फर्श पर नृत्य कर रही एक नर्तकी अपने हाथों को सिकोड़े हुए $20\, rad/sec$ के कोणीय वेग से ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः घूर्णन कर रही है। जब वह अपने हाथों को फैला देती है तो घूर्णन चाल घटकर $10\, rad/sec$ हो जाती है। यदि नर्तकी का प्रारम्भिक जड़त्व आघूर्ण I हो तो नया जड़त्व आघूर्ण होगा [Kerala PMT 2002]

(a) $2I$ (b) $3I$

(c) $I/2$ (d) $I/3$

11. एक चकती कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रही है। एक बच्चा इस पर धीरे से बैठ जाता है, तो संरक्षित रहेगा [CBSE PMT 2002]

(a) गतिज ऊर्जा (b) स्थितिज ऊर्जा

(c) रेखीय संवेग (d) कोणीय संवेग

12. बल आघूर्ण आरोपित किये बिना एक पिण्ड का कोणीय वेग ω_1 से ω_2 हो जाता है, परन्तु यह परिवर्तन जड़त्व आघूर्ण में परिवर्तन होने के कारण होता है। दोनों स्थितियों में घूर्णन त्रिज्याओं का अनुपात होगा [BHU 2002]

(a) $\sqrt{\omega_2}:\sqrt{\omega_1}$ (b) $\sqrt{\omega_1}:\sqrt{\omega_2}$

(c) $\omega_1:\omega_2$ (d) $\omega_2:\omega_1$

13. यदि पृथ्वी की त्रिज्या क्षण भर में सिकुड़कर वर्तमान त्रिज्या की आधी हो जाये, तो एक दिन में घण्टे होंगे [RPMT 1999; AMU (Med.) 1999; Kerala 2002]

(a) 6 घन्टे (b) 12 घन्टे

(c) 18 घन्टे (d) 24 घन्टे

14. एकसमान भार की एक चकती, अपने तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः नियत कोणीय वेग ω से घूम रही है, माना कि इसका कोणीय संवेग L है। पिघली हुई प्लास्टिक की एक बूँद चकती पर गिरकर चिपक जाती है। तो क्या नियत रहेगा [AMU (Med.) 2001]

(a) ω (b) ω तथा L दोनों

(c) केवल L (d) न ω तथा न L

15. कणों के निकाय का कोणीय संवेग परिवर्तित होता है, यदि [DCE 2001]

(a) निकाय पर बल कार्य करता है

(b) निकाय पर बल आघूर्ण कार्य करता है

(c) वेग की दिशा परिवर्तित होती है

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

16. यदि एक पिण्ड पर बल, द्रव्यमान केन्द्र से दूर किसी बिन्दु पर कार्य करता है तब [DCE 2001]

(a) रेखीय त्वरण परिवर्तित होता है

(b) कोणीय त्वरण परिवर्तित होता है

(c) दोनों परिवर्तित होते हैं

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

17. एक वस्तु की घूर्णीय गतिज ऊर्जा E तथा जड़त्व आघूर्ण I है। वस्तु का कोणीय संवेग होगा [MP PMT 1993; Kerala (Engg.) 2001]

(a) EI (b) $2\sqrt{EI}$

(c) $\sqrt{2EI}$ (d) E/I

18. m द्रव्यमान का एक कण किसी तल में त्रिज्या r के वृत्तीय पथ पर घूम रहा है। इसका कोणीय संवेग L है। कण पर लगने वाले अभिकेन्द्रीय बल का मान होगा [MP PMT 2001]

(a) L^2/mr (b) L^2m/r

(c) L^2/m^2r^2 (d) L^2/mr^3

19. रेखीय संवेग के आघूर्ण को कहते हैं [CPMT 1974; RPET 2000; DCE 2000]

(a) बल युग्म (b) बल आघूर्ण

(c) आवेग (d) कोणीय संवेग

20. एक व्यक्ति घूमते हुये स्टूल पर भुजायें फैलाये बैठा है। यकायक वह भुजायें सिकोड़ लेता है [NCERT 1978; CPMT 1986; RPMT 2000]

(a) उसका कोणीय वेग घट जायेगा

(b) उसका जड़त्व आघूर्ण घट जायेगा

(c) कोणीय वेग नियत रहेगा

(d) कोणीय संवेग बढ़ जायेगा

21. दो चकतियाँ, जिनके जड़त्व आघूर्ण I_1 व I_2 एवं कोणीय चालें ω_1 व ω_2 हैं, अपने तलों के लम्बवत् द्रव्यमान केन्द्रों से गुजरने वाली संरेखीय अक्षों के परितः घूर्णन कर रही हैं। यदि दोनों को संयुक्त रूप से इसी अक्ष के परितः घूर्णन कराया जाये तो निकाय की घूर्णन गतिज ऊर्जा होगी [RPMT 2000]

(a) $\frac{I_1\omega_1+I_2\omega_2}{2(I_1+I_2)}$ (b) $\frac{(I_1+I_2)(\omega_1+\omega_2)^2}{2}$

(c) $\frac{(I_1\omega_1+I_2\omega_2)^2}{2(I_1+I_2)}$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

22. कोणीय संवेग सरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार कोणीय संवेग [BHU 2000]

(a) सदैव संरक्षित रहता है

(b) वेग एवं जड़त्व आर्घूण का गुणनफल है

(c) संरक्षित रहता है यदि कार्यरत बल आघूर्ण नियत है

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

23. एक कण की स्थिति $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ एवं संवेग $\vec{P}=(3\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})$ द्वारा प्रदर्शित होते हैं। कोणीय संवेग लम्बवत् है [CPMT 2000]

(a) x- अक्ष के

(b) y- अक्ष के

(c) z- अक्ष के

(d) उस रेखा के, जो सभी अक्षों से समान कोण बनाती है

24. एक कण कोणीय संवेग L से एकसमान वृत्तीय गति कर रहा है। यदि कण की गति की आवृत्ति दुगुनी एवं गतिज ऊर्जा आधी कर दी जाए तो कोणीय संवेग होगा [MNR 1991; AIEEE 2003; UPSEAT 1999, 2000]

(a) $2L$ (b) $4L$

(c) $L/2$ (d) $L/4$

25. घूर्णी टेबिल पर व्यक्ति अपने हाथों को नीचे किए हुए घूर्णन कर रहा है। अचानक वह अपने हाथों को फैला लेता है तब कोणीय संवेग [MNR 1998; DCE 1999]

(a) शून्य होगा (b) बढ़ेगा

(c) घटेगा (d) अपरिवर्तित रहेगा

26. यदि पृथ्वी की त्रिज्या सिकुड़कर आधी रह जाये तो दिन का समयांतराल कितने घंटे से कम हो जायेगा [AMU (Engg.) 1999]

(a) 18 घण्टे (b) 22 घण्टे

(c) 2.5 घण्टे (d) 12 घण्टे

27. किसी घूमती हुई चकती की त्रिज्या यकायक आधी कर दी जाए जबकि उसका द्रव्यमान वही रहे तो उसका कोणीय वेग हो जाएगा [MP PET 1997]

(a) चार गुना (b) दुगुना

(c) आधा (d) अपरिवर्तित

28. पृथ्वी की सूर्य के चारों ओर घूर्णन गति में नियत राशि है [RPMT 1996]

(a) कोणीय संवेग (b) रेखीय संवेग

(c) कोणीय गतिज ऊर्जा (d) रेखीय गतिज ऊर्जा

29. एक बर्फ के गुटके को वृत्तीय टेबल के केन्द्र पर रखा गया है। इस निकाय को टेबल की अक्ष के परितः ω कोणीय वेग से घुमाया

जाता है। यदि बर्फ बिना वाष्पन के पिघलने लगे, तो निकाय की घूर्णन गति [Haryana CEE 1996]

(a) शून्य हो जायेगी

(b) ω के उसी मान पर नियत रहेगी

(c) ω से अधिक हो जायेगी

(d) ω से कम हो जायेगी

30. कोई तैराक ऊपर से पानी में कूदने से पूर्व अपना शरीर सिकोड़ लेता है जिससे कि [MP PET 1994; BHU 1995]

(a) जड़त्व आघूर्ण बढ़ जाये

(b) जड़त्व आघूर्ण घट जाये

(c) कोणीय संवेग घट जाये

(d) कोणीय वेग घट जाये

31. एक लड़का दोनों हाथों में 2 – 2 किलोग्राम के द्रव्यमान लेकर जिन्हें कि उसने अपने शरीर से चिपका रखा है, एक क्षैतिज प्लेटफॉर्म के केन्द्र पर खड़ा है। प्लेटफॉर्म 2 चक्कर प्रति सैकण्ड की चाल से केन्द्र से होकर जाने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः घूम रहा है। इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण 1 किलोग्राम × मीटर² है। लड़का जब अपने हाथों को द्रव्यमानों सहित पूरा तान देता है तब जड़त्व आघूर्ण 2 किलोग्राम × मीटर² हो जाता है। दूसरी स्थिति में निकाय की गतिज ऊर्जा पहली स्थिति की तुलना में [MP PMT 1995]

(a) नहीं बदलेगी (b) कम हो जावेगी

(c) अधिक हो जावेगी (d) अनिश्चित रहेगी

32. घूर्णन टेबिल पर खड़ा हुआ व्यक्ति अपने दोनों हाथों को फैलाकर उनमें भार पकड़े हुये है तथा घूर्णी गति कर रहा है। वह अचानक अपने हाथों को सिकोड़कर शरीर से सटा लेता है। कौन सा कथन सत्य है [EAMCET 1994]

(a) रेखीय संवेग संरक्षित रहता है (b) गतिज ऊर्जा बढ़ती है

(c) कोणीय संवेग बढ़ता है (d) कोणीय वेग बढ़ता है

33. एक 2 किग्रा द्रव्यमान व 15 सेमी त्रिज्या की एकसमान चकती अपनी अक्ष के परितः 4 रेडियन/सैकण्ड के कोणीय वेग से घूम रही है तो चकती का रेखीय संवेग होगा [CPMT 1989]

(a) 1.2 *kg-m/s* (b) 1.0 *kg-m/s*

(c) 0.6 *kg-m/s* (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

34. जब एक द्रव्यमान एक निश्चित बिन्दु के परितः एक तल में गति करता है, तो इसके कोणीय संवेग की दिशा किसके अनुदिश होगी [NCERT 1982; MNR 1987; MP PMT 1986]

(a) त्रिज्या

(b) कक्षा पर स्पर्श रेखा

(c) घूर्णन तल से 45° के कोण पर झुकी रेखा

(d) घूर्णन अक्ष

35. बर्फ पर नृत्य कर रहा एक व्यक्ति जब अपनी भुजाओं को सिकोड़ लेता है तो तेज चक्कर लगाने लगता है। इसका कारण है [MP PMT 1986]

(a) ऊर्जा तथा कोणीय संवेग दोनों में वृद्धि

(b) स्केट पर घर्षण की कमी

(c) नियत कोणीय संवेग तथा गतिज ऊर्जा में वृद्धि

(d) ऊर्जा में वृद्धि तथा कोणीय संवेग में कमी

36. किसी पिण्ड का कोणीय संवेग किसका गुणनफल होता है [CPMT 1975; Kerala PMT 2004]

(a) द्रव्यमान तथा कोणीय वेग का

(b) अभिकेन्द्रीय बल तथा त्रिज्या का

(c) रेखीय वेग तथा कोणीय वेग का

(d) जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय वेग का

37. एक पंखे का जड़त्व आघूर्ण 0.6 किग्रा × मीटर² है तथा यह 0.5 चक्र/सैकण्ड की चाल शीघ्र ही प्राप्त कर लेता है। इस पंखे का कोणीय संवेग होगा [CPMT 1975]

(a) 0.6 π किग्रा × मी²/सैकण्ड

(b) 6 किग्रा × मी²/सैकण्ड

(c) 3 किग्रा × मी²/सैकण्ड

(d) π/6किग्रा × मी²/सैकण्ड

38. एक व्यक्ति घूर्णी टेबल पर ω कोणीय चाल से घूर्णन करता है। वह अपने फैले हुये हाथों में दो समान द्रव्यमान रखे है। बगैर हाथों को घुमाये वह केवल द्रव्यमान को नीचे गिरा देता है। उसका कोणीय वेग किस प्रकार परिवर्तित होगा

(a) यह ω से कम होगा

(b) यह ω से अधिक होगा

(c) यह ω के बराबर ही रहेगा

(d) ω से कम, अधिक अथवा बराबर होना द्रव्यमानों की मात्राओं पर निर्भर करता है

39. m द्रव्यमान की एक वस्तु पतली डोरी से बाँधकर डोरी को खोखली नली के भीतर से गुजारते हैं। नली को एक हाथ में तथा डोरी को दूसरे हाथ से पकड़ते हैं। अब वस्तु को R त्रिज्या के वृत्त में v वेग से घुमाते हैं। अब डोरी को नीचे की ओर खींचकर त्रिज्या को छोटा किया जाता है। इसमें क्या संरक्षित रहता है

(a) कोणीय संवेग (b) रेखीय संवेग

(c) गतिज ऊर्जा (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

40. एक तैराक ऊँचाई से कूदते समय हवा में आसानी से कलाबाजी कर सकता है यदि वह

(a) अपने हाथ-पैरों को भीतर की ओर मोड़ ले

(b) अपने हाथ-पैरों को फैला लें

(c) अपने आपको सीधा रखें

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

41. 10 किग्रा द्रव्यमान तथा 0.4 मीटर व्यास के एक छल्ले को उसके अक्ष के परितः घुमाया जाता है। यदि यह 2100 चक्र/मिनट लगाता है, तो कोणीय संवेग होगा

(a) $44\ kg \times m^2/s$ (b) $88\ kg \times m^2/s$

(c) $4.4\ kg \times m^2/s$ (d) $0.4\ kg \times m^2/s$

42. यदि घूर्णन कर रही किसी वस्तु का कोणीय संवेग 200% बढ़ा दिया जाए, तो इसकी गतिज ऊर्जा में वृद्धि होगी [MP PMT 2004]

(a) 400% (b) 800%

(c) 200% (d) 100%

43. कक्षीय गति में, कोणीय संवेग सदिश होगा [AIIMS 2004]

(a) त्रिज्यीय सदिश के अनुदिश

(b) रेखीय संवेग के समांतर

(c) कक्षीय तल में

(d) कक्षीय तल के लम्बवत्

44. किसी गोल चकती का इसके केन्द्र से जाने वाली तथा इसके तल के लंबवत् अक्ष के परितः, जड़त्व आघूर्ण I_2 है। इस चकती को, I_1 जड़त्व आघूर्ण वाली एक अन्य चकती, जो कि समान अक्ष के परितः ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रही है, पर रखा जाता है। चकतियों के संयोजन का अंतिम कोणीय वेग होगा [CBSE PMT 2004]

(a) $\frac{I_2\omega}{I_1+I_2}$ (b) ω

(c) $\frac{I_1\omega}{I_1+I_2}$ (d) $\frac{(I_1+I_2)\omega}{I_1}$

45. एक ठोस गोला किसी मुक्त स्थान में घूर्णन कर रहा है। यदि गोले के द्रव्यमान को नियत रखते हुए त्रिज्या को बढ़ाया जाए तो निम्न में से कौन सी राशि प्रभावित नहीं होगी [AIEEE 2004]

(a) जड़त्व आघूर्ण (b) कोणीय संवेग

(c) कोणीय वेग (d) घूर्णन गतिज ऊर्जा

46. यदि बल आघूर्ण का मान शून्य हो, तब [BCECE 2004]

(a) कोणीय संवेग संरक्षित रहता है

(b) रेखीय संवेग संरक्षित रहता है

(c) ऊर्जा संरक्षित रहती है

(d) कोणीय संवेग संरक्षित नही रहता है

47. किसी तरणताल में कूदने से पूर्व तैराक अपने माथे को मोड़ लेता है, क्योंकि इससे [Pb. PMT 2004]

(a) उसका जड़त्व आघूर्ण घट जाता है

(b) उसका कोणीय वेग घट जाता है

(c) उसका जड़त्व आघूर्ण बढ़ जाता है

(d) उसका रेखीय वेग बढ़ जाता है

48. कणों के निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित नहीं रहता [DPMT 2004]

(a) जब निकाय पर कुल बाह्य बल लगता है

(b) जब निकाय पर कुल बाह्य बल आघूर्ण कार्य करता है

(c) जब निकाय पर कुल बाह्य आवेग कार्य करता है

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

49. यदि किसी वस्तु की घूर्णन ऊर्जा 10 जूल है, तथा यदि इसका कोणीय संवेग सदिश घूर्णन अक्ष के साथ संपाती है व इस अक्ष के परितः उसका जड़त्व आघूर्ण $8\times10^{-7}\,kg\,m^2$ है, वस्तु का कोणीय संवेग होगा [Pb. PET 2002]

(a) $4\times10^{-3}\,kg\,m^2/s$ (b) $2\times10^{-3}\,kg\,m^2/s$

(c) $6\times10^{-3}\,kg\,m^2/s$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

50. यदि किसी वस्तु का द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण I तथा कोणीय वेग $\omega\,rad/\sec$ हो तब उसके कोणीय संवेग L का मान होगा [DPMT 2003]

(a) $\frac{I}{\omega}$ (b) $I\omega^2$

(c) $I\omega$ (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

51. यदि पृथ्वी को R त्रिज्या तथा M द्रव्यमान का एक गोला माना जाए, तो इसकी घूर्णन अक्ष के परितः समयांतराल T के पदों में कोणीय संवेग का मान होगा [Pb. PET 2004]

(a) $\frac{\pi MR^3}{T}$ (b) $\frac{MR^2\pi}{T}$

(c) $\frac{2\pi MR^2}{5T}$ (d) $\frac{4\pi MR^2}{5T}$

52. एक व्यक्ति किसी वृत्तीय प्लेट के सिरे पर खड़ा हुआ है, जो कि इसके केंद्र से जाने वाली लम्बवत् अक्ष के परितः नियत कोणीय चाल से घूर्णन कर रही है। यदि व्यक्ति त्रिज्या के अनुदिश अक्ष की ओर चलना प्रारंभ कर दे तो इसका कोणीय वेग [RPMT 2003]

(a) घटेगा (b) नियत रहेगा

(c) बढ़ेगा (d) दिया गया विवरण अपूर्ण है

53. यदि रेखीय वेग नियत रहे, तो कोणीय वेग किसके समानुपाती होगा [RPET 2002]

(a) $1/r$ (b) $1/r^2$

(c) $1/r^3$ (d) $1/r^5$

54. एक कण वृत्तीय मार्ग में गति कर रहा है। तब निम्न में से कौन सा कथन सत्य है [RPMT 2002]

(a) कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा, किंतु रैखिक संवेग संरक्षित नहीं रहता है।

(b) कोणीय संवेग संरक्षित नही रहेगा

(c) रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा

(d) दोनों संरक्षित नही रहेंगे

55. किसी कण का कोणीय संवेग [Orissa PMT 2004]

(a) घूर्णन तल के अभिलम्बवत् होता है

(b) घूर्णन तल में ही होता है

(c) घूर्णन तल से किसी कोण पर झुका हुआ होता है

(d) इसकी कोई निश्चित दिशा नहीं होती

56. यदि पृथ्वी को $6\times10^{24}\,kg$ का बिन्दु द्रव्यमान माना जाए, जो कि 1.5×10^8 किमी की दूरी पर स्थित सूर्य के चारों ओर $T=3.14\times10^7 s$ में एक पूर्ण चक्कर लगा रहा है, तो सूर्य के चारों ओर पृथ्वी का कोणीय संवेग होगा [BCECE 2005]

(a) $1.2\times10^{18}\,kg\,m^2/s$ (b) $1.8\times10^{29}\,kg\,m^2/s$

(c) $1.5\times10^{37}\,kg\,m^2/s$ (d) $2.7\times10^{40}\,kg\,m^2/s$

57. दो वस्तुओं के जड़त्व आघूर्ण उनकी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष क्रमशः I तथा $2I$ हैं। यदि उनकी घूर्णन गतिज ऊर्जाओं का मान समान हो, तो उनके कोणीय संवेगों का अनुपात होगा [CBSE PMT 2005]

(a) 1 : 2 (b) $\sqrt{2}:1$

(c) 2 : 1 (d) $1:\sqrt{2}$

58. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक पतली वृत्ताकार वलय नियत कोणीय वेग ω से अपनी अक्ष के परितः घूर्णन कर रही है। दो

वस्तुऐं जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान m है, वलय के व्यास के विपरीत सिरों पर धीमे से रख दी जाती हैं। अब वलय का कोणीय वेग होगा [IIT 1983; MP PMT 1994]

(a) $\frac{\omega M}{M+m}$ (b) $\frac{\omega(M-2m)}{M+2m}$

(c) $\frac{\omega M}{M+2m}$ (d) $\frac{\omega(M+2m)}{M}$

59. एक व्यक्ति घूर्णन कर रही मेज पर अपने हाथ फैलाकर बैठा हुआ है। यदि वह यकायक अपने हाथ भीतर की ओर खींच ले तब [CPMT 1986]

(a) कोणीय वेग घट जाएगा (b) कोणीय वेग नियत रहेगा

(c) जड़त्व आघूर्ण घट जाएगा (d) कोणीय संवेग बढ़ जाएगा

60. एक लड़का दौड़कर घूर्णन कर रहे प्लेटफार्म पर बैठ जाता है। निम्न में से क्या संरक्षित रहेगा [CPMT 1981; JIPMER 1997]

(a) रेखीय संवेग (b) गतिज ऊर्जा

(c) कोणीय संवेग (d) इनमें से कोई नही

61. केंद्रीय बल के क्षेत्र में निम्न में से क्या नियत रहता है [RPET 1996]

(a) स्थितिज ऊर्जा (b) गतिज ऊर्जा

(c) कोणीय संवेग (d) रेखीय संवेग

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

1. 10 किग्रा द्रव्यमान एवं 0.5 मीटर त्रिज्या की एक वस्तु बिना फिसले 2 मी/सै के वेग से लुढ़क रही है। इसकी कुल गतिज ऊर्जा 32.8 जूल है। वस्तु की घूर्णन त्रिज्या है [MP PET 2003]

(a) 0.25 m (b) 0.2 m

(c) 0.5 m (d) 0.4 m

2. 10 किग्रा द्रव्यमान एवं 0.5 मीटर त्रिज्या की एक वलय अपने व्यास के परितः 20 रेडियन/सै के वेग से घूर्णन कर रही है। इसकी गतिज ऊर्जा है [MP PET 2003]

(a) 10 J (b) 100 J

(c) 500 J (d) 250 J

3. एक गेंद बिना फिसले लुढ़क रही है। इसके द्रव्यमान केन्द्र से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः गेंद की घूर्णन त्रिज्या K है। यदि गेंद की त्रिज्या R हो तो कुल ऊर्जा का कौनसा भाग घूर्णन ऊर्जा है [CBSE PMT 2003]

(a) $\frac{K^2}{R^2}$ (b) $\frac{K^2}{K^2+R^2}$

(c) $\frac{R^2}{K^2+R^2}$ (d) $\frac{K^2+R^2}{R^2}$

4. 10 सेमी त्रिज्या तथा 500 ग्राम द्रव्यमान का एक ठोस गोला 20 $cm/\sec$ के वेग से बिना फिसले लुढ़क रहा है। गोले की कुल गतिज ऊर्जा है [Pb. PMT 2002]

(a) 0.014 J (b) 0.028 J

(c) 280 J (d) 140 J

5. 0.5 किग्रा द्रव्यमान एवं 1 मीटर व्यास का एक गोला बिना फिसले 5 मी/सै के नियत वेग से लुढ़क रहा है। घूर्णन गतिज ऊर्जा एवं कुल गतिज ऊर्जा का अनुपात है [MH CET 2002]

(a) $\frac{7}{10}$ (b) $\frac{5}{7}$

(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{1}{2}$

6. ठोस गेंद नतसमतल पर बिना फिसले लुढ़क रही है। इसकी घूर्णी गतिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा का अनुपात होगा [CBSE PMT 1993; BHU 1997; MP PET 2002;UPSEAT 2002]

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{7}$

(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{3}{7}$

7. दी गयी अक्ष के परितः किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण $1.2 kg \times m^2$ है तथा प्रारम्भ में पिण्ड स्थिर है। 1500 जूल की घूर्णी गतिज ऊर्जा उत्पन्न करने के लिए 25 रेडियन/सै॰ के त्वरण को पिण्ड पर निम्न समय के लिए आरोपित करना होगा [CBSE PMT 1990; CPMT 1996, 2002; RPET 1999; BHU 2001]

(a) 4 sec (b) 2 sec

(c) 8 sec (d) 10 sec

8. चकती के घूर्णन हेतु गतिज ऊर्जा तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा का अनुपात होगा [CPMT 1996; JIPMER 2001, 02]

(a) 1 : 1 (b) 2 : 7

(c) 1 : 2 (d) 3 : 1

9. स्वतन्त्र घूर्णन करते हुए दो पिण्डों A तथा B के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_A तथा I_B हैं। $I_A > I_B$ तथा उनके कोणीय संवेग बराबर हैं। यदि K_A तथा K_B उनकी गतिज ऊर्जायें हैं, तब [MP PET 1996; AIEEE 2002]

(a) $K_A = K_B$ (b) $K_A = K_B$

(c) $K_A < K_B$ (d) $K_A = 2K_B$

10. एक गोले की घूर्णन एवं स्थानान्तरण गतिज ऊर्जाओं का अनुपात है [KCET 2001; AFMC 2001]

(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{2}{7}$

(c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{7}{2}$

11. एक गोला जिसका अपने गुरुत्व केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण I है तथा द्रव्यमान m है, विराम स्थिति से झुके हुए तल की ओर बिना फिसले लुढ़क रहा है। निम्न में किसके द्वारा इसकी गतिज ऊर्जा व्यक्त की जायेगी [DPMT 1993; RPET 2001; DPMT 2004]

(a) $\frac{1}{2}I\omega^2$ (b) $\frac{1}{2}mv^2$

(c) $I\omega + mv$ (d) $\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$

12. दोनों सिरों पर खुला एक पतला खोखला बेलन

(i) बिना घूर्णन के फिसलता है

(ii) बिना फिसले लुढ़कता है

यदि दोनों स्थितियों में चाल समान हो, तो गतिज ऊर्जाओं का अनुपात है

[KCET 2000]

(a) 1 : 1 (b) 4 : 1

(c) 1 : 2 (d) 2 : 1

13. यदि किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण '*I*' तथा कोणीय वेग 'ω' हो तब इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा होगी

[KCET 1999; CPMT 2000; Pb. PET 2000]

(a) $\frac{1}{2}\times I\omega$ (b) $\frac{1}{2}\times I^2\omega$

(c) $\frac{1}{2}\times I\omega^2$ (d) $\frac{1}{2}\times I^2\omega^2$

14. एक वस्तु क्षैतिज तल पर बिना फिसले लुढ़क रही है। यदि इसकी घूर्णी गतिज ऊर्जा तथा स्थानांतरीय गतिज ऊर्जायें बराबर हैं, तो वस्तु होगी [RPMT 1996; DPMT 2000]

(a) चकती (b) गोला

(c) बेलन (d) वलय

15. एक लुढ़कते हुए ठोस गोले का रेखीय वेग *v* है। इसकी कुल गतिज ऊर्जा है [AMU (Med.) 1999]

(a) $\frac{7}{10}mv^2$ (b) $\frac{1}{2}mv^2$

(c) $\frac{2}{5}mv^2$ (d) $\frac{10}{7}mv^2$

16. एक वस्तु का जड़त्व आघूर्ण 3 किग्रा-मीटर^2 है। यह 2 रेडियन/सैकण्ड के कोणीय वेग से घूम रही है, तो 12 किग्रा द्रव्यमान को किस वेग से गति कराने पर दोनों की गतिज ऊर्जायें समान होंगी [MH CET (Med.) 1999]

(a) 8 *m/s* (b) 0.5 *m/s*

(c) 2 *m/s* (d) 1 *m/s*

17. एक गोल गेंद टेबिल पर बगैर फिसले लुढ़क रही है तो इसकी ऊर्जा का कितना भाग घूर्णन गति से सम्बन्धित है

[MP PMT 1987; BHU 1998; RPET 2002]

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{2}{7}$

(c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{3}{7}$

18. एक वस्तु नतसमतल पर लुढ़क रही है, यदि उसकी घूर्णी गतिज ऊर्जा, स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा की 40% है तब वस्तु होगी

[CPMT 1997]

(a) वलय (b) बेलन

(c) खोखला गोला (d) ठोस गेंद

19. एक गतिपालक चक्र ठोस वृत्तीय पहिये के रूप में है जिसका द्रव्यमान 72 किग्रा तथा उसकी त्रिज्या 0.5 मीटर है। यह प्रति मिनट 70 परिक्रमण करता है, तो इसकी परिक्रमण ऊर्जा है

[BHU 1995]

(a) 24 *J* (b) 240 *J*

(c) 2.4 *J* (d) 2400 *J*

20. 3 रेडियन/सैकण्ड के कोणीय वेग से घूमने वाली वस्तु का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण 3 किग्रा-मी^{2} है। इस वस्तु की घूर्णी गतिज ऊर्जा, एक अन्य 27 किग्रा द्रव्यमान की वस्तु की स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा के बराबर है। 27 किग्रा द्रव्यमान की वस्तु की चाल होगी [SCRA 1994]

(a) $1.0\,m/s$ (b) $0.5\,m/s$

(c) $1.5\,m/s$ (d) $2.0\,m/s$

21. एक *r* त्रिज्या व *m* द्रव्यमान की वलय किसी अक्ष, जो इसके केन्द्र से गुजरती है तथा इसके तल के लम्बवत् है, के परितः ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रही है। इसकी गतिज ऊर्जा होगी

[CPMT 1977; CBSE PMT 1992]

(a) $mr\omega^2$ (b) $mr\omega^2/2$

(c) $mr^2\omega^2$ (d) $\frac{mr^2\omega^2}{2}$

22. एक ठोस समांगी गोला, क्षैतिज घर्षण युक्त तल पर आंशिक रूप से फिसलता तथा आंशिक रूप से लुढ़कता है। गोले की इस प्रकार की गति हेतु [CBSE PMT 1992]

(a) कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहेगी

(b) गोले का तल के संपर्क बिन्दु के परितः कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा

(c) द्रव्यमान केन्द्र के परितः केवल घूर्णी गतिज ऊर्जा संरक्षित रहेगी

(d) द्रव्यमान केन्द्र के परितः कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा

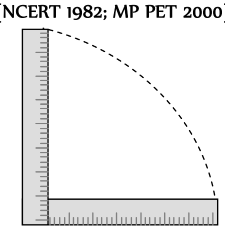
23. 1 किग्रा द्रव्यमान व 3 सेमी त्रिज्या की एक ठोस गोलीय गेंद, एक अक्ष जो इसके केन्द्र से जाती है, के परितः कोणीय वेग 50 रेडियन/सैकण्ड के वेग से घूम रही है। घूर्णन की गतिज ऊर्जा है

[CPMT 1989]

(a) 4500 *J* (b) 90 *J*

(c) 910 *J* (d) $\frac{9}{20}J$

24. एक मीटर लम्बी छड़ी को ऊर्ध्वाधर खड़ा करके उसे इस प्रकार गिरने दिया जाता है कि पृथ्वी से जुड़ा सिरा अपने ही स्थान पर स्थिर रहे। छड़ का दूसरा सिरा जब पृथ्वी से टकरायेगा तब उसका वेग होगा (g=9.8 मी/सै^{2}) [NCERT 1982; MP PET 2000]



(a) 3.2 *m/s*

(b) 5.4 *m/s*

(c) 7.6 *m/s*

(d) 9.2 *m/s*

25. 1 किग्रा द्रव्यमान का एक ठोस गोला घर्षणयुक्त टेबल पर 1 मी/सै की रेखीय चाल से लुढ़क रहा है। इसकी कुल गतिज ऊर्जा होगी

(a) 1 *J* (b) 0.5 *J*

(c) 0.7 *J* (d) 1.4 *J*

26. 2 kg द्रव्यमान तथा 0.2 m व्यास का एक खोखला गोला एक नत समतल पर $0.5\ m/s$ के वेग से लुढ़क रहा है। गोले की गतिज ऊर्जा होगी [CPMT 2004]

(a) 0.1 J (b) 0.3 J

(c) 0.5 J (d) 0.42 J

27. दो वस्तुऐं जिनके जड़त्व आघूर्ण I_1 तथा I_2 हैं ($I_1 > I_2$) तथा उनके कोणीय वेग समान हैं। यदि उनकी घूर्णन गतिज ऊर्जायें E_1 तथा E_2 हों, तब [Pb. PET 2000]

(a) $E_1 \geq E_2$ (b) $E_1 > E_2$

(c) $E_1 < E_2$ (d) $E_1 = E_2$

28. यदि किसी वस्तु की घूर्णन गतिज ऊर्जा रैखिक गतिज ऊर्जा का 50% है, तो वह वस्तु होगी [RPMT 2003]

(a) वलय (b) बेलन

(c) खोखला गोला (d) ठोस गोला

29. $\frac{9.8}{\pi^2} kg\ m^2$ जड़त्व आघूर्ण वाली एक चकती 600 rpm से घूर्णन कर रही है। यदि घूर्णन आवृत्ति 600 rpm से 300 rpm हो जाए, तब किया गया कार्य होगा [MH CET 2004]

(a) 1467 J (b) 1452 J

(c) 1567 J (d) 1632 J

30. 0.41 किग्रा द्रव्यमान तथा 10 मी त्रिज्या की एक वृत्तीय चकती 2 मी/सै के वेग से बिना फिसले लुढ़कती है। चकती की कुल गतिज ऊर्जा होगी [MH CET 2004]

(a) 0.41 J (b) 1.23 J

(c) 0.82 J (d) 2.4 J

31. एक सिरे पर कीलकित 400 ग्राम द्रव्यमान की एक मीटर लम्बी छड़ को 60^o कोण पर विस्थापित किया जाता है। इसकी स्थितिज ऊर्जा में हुई वृद्धि है [BVP 2003]

(a) 2 J (b) 3 J

(c) 0 J (d) 1 J

नत समतल पर घूर्णन

1. एक गोला θ नति वाले नत समतल पर नीचे की ओर लुढ़क रहा है। तली पर पहुँचने पर गोले का त्वरण होगा [Orissa JEE 2003]

(a) $\frac{5}{7} g \sin\theta$ (b) $\frac{3}{5} g \sin\theta$

(c) $\frac{2}{7} g \sin\theta$ (d) $\frac{2}{5} g \sin\theta$

2. M द्रव्यमान एवं R त्रिज्या का एक ठोस गोला L लम्बाई तथा h ऊँचाई के नत सतमल पर बिना फिसले नीचे की ओर लुढ़क रहा है। तली पर पहुंचने पर इसके द्रव्यमान केन्द्र का वेग होगा [CBSE PMT 2003]

(a) $\sqrt{\frac{3}{4} gh}$ (b) $\sqrt{\frac{4}{3} gh}$

(c) $\sqrt{4\,gh}$ (d) $\sqrt{2\,gh}$

3. समान आकार का एक ठोस गोला (द्रव्यमान $2M$) एवं एक पतला खोखला गोलीय कोश (द्रव्यमान M) एक नततल पर एक-साथ नीचे की ओर लुढ़कते हैं, तब [Kerala PET 2002]

(a) ठोस गोला तली पर पहले पहुँचेगा

(b) खोखला गोलीय कोश तली पर पहले पहुँचेगा

(c) दोनों एक साथ पहुँचेंगे

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

4. एक ठोस गोला, खोखला गोला तथा वलय, घर्षण विहीन नत समतल के उच्च बिन्दु से छोड़ दिए जाते है, जिससे वे तल पर नीचे की ओर फिसलते है। तल के अनुदिश नीचे की ओर त्वरण का मान किसके लिए अधिकतम है [AIEEE 2002]

(a) ठोस गोला (b) खोखला गोला

(c) वलय (d) सभी के लिए समान

5. एक नत तल क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है। इस पर एक ठोस गोला विरामावस्था से बिना फिसले लुढ़कना प्रारम्भ करता है, तो इसका रेखीय त्वरण होगा

[MP PMT 1987; Orissa JEE 2002]

(a) $\frac{g}{3}$ (b) $\frac{2g}{3}$

(c) $\frac{5g}{7}$ (d) $\frac{5g}{14}$

6. r त्रिज्या वाले एक पहिए की परिधि पर पतली रस्सी लपेटी हुई है। पहिए का अक्ष क्षैतिज है जिसके परितः इसका जड़त्व आघूर्ण I है। भार mg, रस्सी के सिरे पर बँधा हुआ है जो विरामावस्था से नीचे गिरता है। h दूरी से गिरने के पश्चात् पहिए का कोणीय वेग होगा

[MP PMT 1994; DPMT 2001]

(a) $\sqrt{\frac{2gh}{I+mr}}$ (b) $\left[\frac{2mgh}{I+mr^2}\right]^{1/2}$

(c) $\left[\frac{2mgh}{I+2mr^2}\right]^{1/2}$ (d) $\sqrt{2gh}$

7. धातु का समांगी ठोस गोला h ऊँचाई वाले नतसमतल से बिना फिसले लुढ़कता है। निम्नतम बिन्दु पर गोले का वेग होगा

[CBSE PMT 1992; MH CET 2000]

(a) $\sqrt{\frac{10}{7} gh}$ (b) $\sqrt{gh}$

(c) $\sqrt{\frac{6}{5} gh}$ (d) $\sqrt{\frac{4}{3} gh}$

8. 30 सेमी व्यास का ठोस बेलन 2 मीटर की ऊँचाई से एक नत तल पर लुढ़काया जाता है। यदि घर्षण के कारण ऊर्जा व्यय नहीं होती है, तो तल के आधार पर इसकी रेखीय चाल होगी [DPMT 1999]

(a) 5.29 मीटर/सैकण्ड (b) 4.1×10 मीटर/सैकण्ड

(c) 51 मीटर/सैकण्ड (d) 51 सेमी./सैकण्ड

9. उपरोक्त प्रश्न में तल के आधार पर कोणीय वेग होगा

(a) 68 रेडियन/सै (b) 8.5 रेडियन/सै

(c) 17 रेडियन/सै (d) 34 रेडियन/सै

10. एक वलय, ठोस गोला तथा चकती को नतसमतल पर समान ऊँचाई से नीचे की ओर लुढ़काया जाता है। सतह पर पहुँचने का क्रम है [RPMT 1999]

(a) वलय, चकती, गोला (b) गोला, चकती, वलय

(c) चकती, वलय, गोला (d) गोला, वलय, चकती

11. m द्रव्यमान की एक वस्तु नत तल पर नीचे की ओर फिसल रही है और v वेग से तल के निचले छोर पर पहुँचती है। यदि यही वस्तु छल्ले के रूप में होती और तल पर लुढ़कती हुई नीचे पहुँचती तो इसका वेग होता [NCERT 1984; AIIMS 1995]

(a) v (b) $\sqrt{2}\,v$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}v$ (d) $\sqrt{\frac{2}{5}}\,v$

12. एक ठोस गोला, चकती तथा ठोस बेलन, नतसमतल पर विराम से नीचे लुढ़कना प्रारम्भ करते हैं, तीनों वस्तुयें समान पदार्थ तथा समान द्रव्यमान की हैं। तब [CBSE PMT 1993; BCECE 2004]

(a) ठोस गोला सबसे पहले पृथ्वी तल पर पहुँचेगा

(b) ठोस गोला सबसे बाद में पृथ्वी तल पर पहुँचेगा

(c) चकती सबसे पहले पृथ्वी तल पर पहुँचेगी

(d) सभी वस्तुयें पृथ्वी तल पर एक साथ पहुँचेगी

13. एक ठोस गोला तथा एक चकती जिनकी त्रिज्यायें समान हैं, समान ऊँचाई से एक नत तल पर छोड़ी जाती हैं तथा वे असमान समय में तल के आधार पर पहुँचती हैं। इसका कारण है

(a) उनकी विभिन्न घूर्णन त्रिज्यायें

(b) विभिन्न आकार

(c) विभिन्न घर्षण

(d) विभिन्न जड़त्व आघूर्ण

14. एक वस्तु एक नतसतमल पर लुढ़क रही है। इसकी रैखिक तथा घूर्णी गतिज ऊर्जायें समान हैं। वस्तु है [UPSEAT 2004]

(a) ठोस गोला (b) खोखला गोला

(c) ठोस बेलन (d) खोखला बेलन

15. एक खोखला बेलन तथा एक ठोस बेलन नत तल पर लुढ़कना प्रारंभ करते हैं, तल के नीचे तक पहुँचने में किसे अधिक समय लगेगा [RPET 2002]

(a) खोखले बेलन को (b) ठोस बेलन को

(c) दोनों को समान (d) जिसका घनत्व अधिक होगा

16. एक पतली वृत्ताकार वलय 30° झुकाव के नत समतल पर बिना फिसले लुढ़क रही है। नत समतल के अनुदिश इसका रेखीय त्वरण होगा [CBSE PMT 1992; BHU 1998]

(a) $g/2$ (b) $g/3$

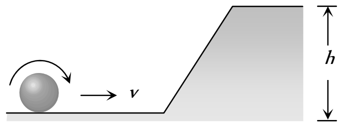
(c) $g/4$ (d) $2g/3$

17. बेलन 30 झुकाव वाले नततल पर लुढ़कना प्रारंभ करता हैं, बेलन का त्वरण होगा [DCE 2005]

(a) $\frac{g}{3}$ (b) g

(c) $\frac{g}{2}$ (d) $\frac{2g}{3}$

18. एक ठोस गोला एक घर्षणहीन सतह पर रैखिक वेग $v\,m/s$ से लुढ़क रहा हैं, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। यदि गोला h ऊँचाई तक ऊपर चढ़ जाता है, तो v का मान होगा [AIIMS 2005]



(a) $\geq \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ (b) $\geq \sqrt{2gh}$

(c) $2gh$ (d) $\frac{10}{7}gh$

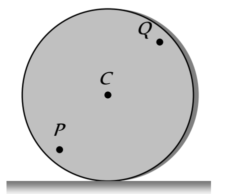
Critical Thinking
Objective Questions

1. प्रारम्भ में विराम स्थिति से दो कण A व B एक दूसरे की तरफ, परस्पर आकर्षण बल के कारण गति करते हैं। जब A की चाल v तथा B की चाल $2v$ है, उस क्षण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की चाल है [IIT 1982; AIEEE 2002]

(a) शून्य (b) v

(c) $1.5v$ (d) $3v$

2. एक चकती क्षैतिज सतह पर बिना फिसले लुढ़क रही है। C इसका केंद्र है तथा Q व P, C से समान दूरी पर स्थित बिन्दु हैं। यदि P, Q तथा C पर बिन्दुओं के वेग क्रमशः v_P, v_Q तथा v_C हों, तब [IIT-JEE Screening 2004]



(a) $v_Q > v_C > v_P$

(b) $v_Q < v_C < v_P$

(c) $v_Q = v_P, v_C = \frac{v_P}{2}$

(d) $v_Q < v_C > v_P$

3. R त्रिज्या एवं $\frac{R}{6}$ मोटाई की एक वृत्तीय चकती का इसके तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I है। इसे पिघलाकर एक ठोस गोला बनाया गया है। व्यास के परितः इस गोले का जड़त्व आघूर्ण होगा [EAMCET 2003]

(a) I (b) $\frac{2I}{8}$

(c) $\frac{I}{5}$ (d) $\frac{I}{10}$

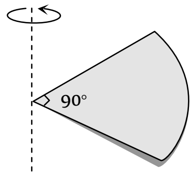
4. किसी एकसमान वृत्ताकार चकती में से, एक-चौथाई वृत्तखण्ड काटा गया है। इस वृत्त खण्ड का द्रव्यमान M है। इसको, इसके तल के लम्बवत् पूर्ण चकती के केन्द्र से गुजरने वाली रेखा के परितः घूर्णन कराते है। इसका घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है [IIT-JEE Screening 2001]

(a) $\frac{1}{2}MR^2$

(b) $\frac{1}{4}MR^2$

(c) $\frac{1}{8}MR^2$

(d) $\sqrt{2}\,MR^2$



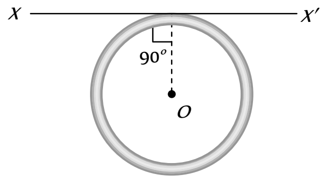
5. L लम्बाई एवं एकसमान रैखिक द्रव्यमान घनत्व ρ वाले एक पतले तार को एक वृत्ताकार लूप में (चित्रानुसार) मोड़ा जाता है, जिसका केन्द्र O है। XX' अक्ष के परितः लूप का जड़त्व आघूर्ण है [IIT-JEE Screening 2000]

(a) $\frac{\rho L^3}{8\pi^2}$

(b) $\frac{\rho L^3}{16\pi^2}$

(c) $\frac{5\rho L^3}{16\pi^2}$

(d) $\frac{3\rho L^3}{8\pi^2}$



6. दो चकतियाँ, जिनकी मोटाई समान है परन्तु त्रिज्यायें अलग-अलग हैं, दो विभिन्न पदार्थो से इस प्रकार बनी हुई हैं कि इनके द्रव्यमान समान है। पदार्थो के घनत्व $1:3$ के अनुपात में है। इनके केन्द्रों से गुजरने वाले एवं तलों के लम्बवत् अक्षों के परितः चकतियों के जड़त्व आघूर्णो का अनुपात है [Roorkee 2000]

(a) 1 : 3 (b) 3 : 1

(c) 1 : 9 (d) 9 : 1

7. एक समरूप वर्गाकार प्लेट का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I है। AB वह अक्ष है जो कि प्लेट के केन्द्र से जाती है तथा किन्हीं दो भुजाओं के समान्तर है। CD प्लेट के तल में वह रेखा है जो कि केन्द्र से होकर गुजरती है तथा AB से θ कोण बनाती है। CD अक्ष के परितः प्लेट का जड़त्व आघूर्ण होगा [IIT 1998; JIPMER 2000]

(a) I (b) $I\sin^2\theta$

(c) $I\cos^2\theta$ (d) $I\cos^2\frac{\theta}{2}$

8. 1.4 मी लम्बी एवं नगण्य द्रव्यमान की एक छड़ के सिरों पर 0.3 किग्रा व 0.7 किग्रा के द्रव्यमान स्थित हैं। छड़ की लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः इसे नियत कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है। छड़ पर वह बिन्दु, जिससे अक्ष को गुजरना चाहिए ताकि छड़ के घूमने के लिए आवश्यक कार्य न्यूनतम हो, होगा [IIT 1995]

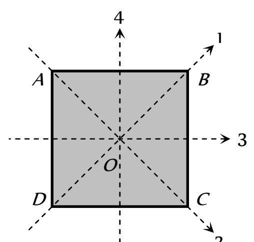
(a) 0.3 kg द्रव्यमान से 0.4 m दूरी पर

(b) 0.3 kg द्रव्यमान से 0.98 m दूरी पर

(c) 0.7 kg द्रव्यमान से 0.70 m दूरी पर

(d) 0.7 kg द्रव्यमान से 0.98 m दूरी पर

9. एकसमान मोटाई की पतली वर्गाकार प्लेट $ABCD$ का तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से जाने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा [IIT 1992]



(a) $I_1 + I_2$

(b) $I_3 + I_4$

(c) $I_1 + I_3$

(d) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

(यहाँ I_1, I_2, I_3, I_4 क्रमशः 1, 2, 3, 4 अक्षों के परितः वर्गाकार प्लेट के जड़त्व आघूर्ण हैं, तथा यह अक्ष प्लेट के तल में ही हैं)

10. W भार की एक भारी छड़ को दोनों सिरों से दो व्यक्ति क्षैतिज दिशा में रखे हुए हैं। यदि एक व्यक्ति अचानक छड़ को छोड़ दे, तो दूसरा व्यक्ति कितना बल महसूस करेगा

(a) W (b) $W/2$

(c) $3W/4$ (d) $W/4$

11. एक कण एकसमान वृत्तीय गति कर रहा है। वृत्तीय तल के किस बिन्दु के परितः कण का कोणीय संवेग सदैव संरक्षित रहेगा [IIT-JEE Screening 2003]

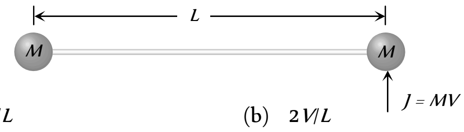
(a) वृत्त के केन्द्र के परितः

(b) वृत्त की परिधि पर स्थित बिन्दु के परितः

(c) वृत्त के अन्दर स्थित बिन्दु के परितः

(d) वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु के परितः

12. चित्र में दिखाये गये निकाय में समान द्रव्यमान की दो एकसमान गेदें एक हल्की एवं दृढ़ छड़ के द्वारा आपस में जुड़ी हैं। यदि आवेग $J = MV$ निकाय पर एक सिरे पर अरोपित किया जाये तो इसका कोणीय वेग क्या होगा [IIT-JEE Screening 2003]



(a) V/L (b) $2V/L$

(c) $V/3L$ (d) $V/4L$

13. M द्रव्यमान तथा r त्रिज्या की एक पतली वृत्ताकार वलय नियत कोणीय वेग ω से घूम रही है। वलय के व्यास के दोनों सिरों पर दो कण, प्रत्येक m द्रव्यमान का, जोड़ दिये जाते हैं। वलय का कोणीय वेग अब होगा [IIT 1983; MP PET 1998, 99; MP PMT 1994, 97, 98; CBSE PMT 1998; BHU 1998; Pb. PMT 2002; AIEEE 2002; MH CET 2003]

(a) $\frac{\omega(M-2m)}{M+2m}$ (b) $\frac{\omega M}{M+2m}$

(c) $\frac{\omega M}{M+m}$ (d) $\frac{\omega(M+2m)}{M}$

14. पिण्ड पर किसी बिन्दु के परितः कार्य करने वाला बल आघूर्ण $\vec{A}\times\vec{L}$ के तुल्य है, जहाँ A नियत सदिश तथा $\vec{L}$ उस बिन्दु के परितः कोणीय संवेग है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि [IIT 1998; JIPMER 2001, 02]

(a) $\frac{d\vec{L}}{dt}$ तथा $\vec{L}$ की दिशाएँ प्रत्येक क्षण पर लम्बवत् होंगी

(b) $\vec{L}$ का $\vec{A}$ की दिशा में घटक समय के साथ नहीं बदलता

(c) $\vec{L}$ का परिमाण समय के साथ नहीं बदलता

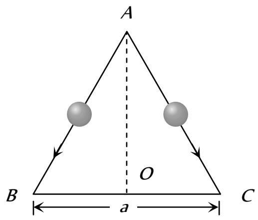
(d) $\vec{L}$ समय के साथ नहीं बदलता

15. द्रव्यमान m अचर वेग से X-अक्ष के समान्तर एक रेखा में गति कर रहा है। मूलबिन्दु अथवा Z-अक्ष के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग [IIT 1985, 97 (Cancelled); MP PET 1996; MP PMT 1997; RPET 2000]

(a) शून्य होगा (b) अचर रहेगा

(c) बढ़ जायेगा (d) घट जायेगा

16. समान तारों से निर्मित एक समबाहु त्रिभुज पर दो सूक्ष्म मोती प्रारंभ में A पर स्थित हैं। त्रिभुज को उर्ध्वाधर अक्ष AO के परितः घूर्णन कराने पर मोती एक साथ स्थिर अवस्था से छोड़े जाते हैं एवं एक मोती AB के अनुदिश तथा दूसरा AC के अनुदिश खिसकता (चित्रानुसार) है। मोती के नीचे की ओर खिसकने पर संरक्षित राशियाँ हैं। (घर्षण नगण्य है) [IIT-JEE (Screening) 2000]



(a) कोणीय वेग व कुल ऊर्जा (गतिज+स्थितिज)

(b) कुल कोणीय संवेग एवं कुल ऊर्जा

(c) कोणीय वेग एवं घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

(d) कुल कोणीय संवेग एवं घूर्णन अक्ष के परितः जडत्व आघूर्ण

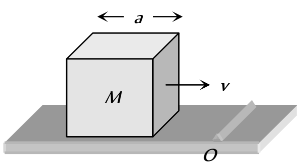
17. भुजा a का एक घन v वेग से चिकने क्षैतिज तल पर चल रहा है। चलते हुए यह क्षैतिज तल पर स्थित एक रेखीय उठे हुए अवरोध O से (चित्रानुसार) टकराता है। O से टकराने के बाद ब्लॉक की कोणीय चाल होगी [IIT-JEE 1999]

(a) $3v/4a$

(b) $3v/2a$

(c) $\frac{\sqrt{3}v}{\sqrt{2}a}$

(d) शून्य



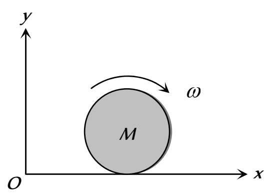
18. द्रव्यमान M व त्रिज्या R की एक चकती क्षैतिज तल पर कोणीय चाल ω से लुढ़क रही है। चकती के कोणीय संवेग का मान मूल बिन्दु O के परितः होगा [IIT-JEE 1999]

(a) $\frac{1}{2}MR^2\omega$

(b) $MR^2\omega$

(c) $\frac{3}{2}MR^2\omega$

(d) $2MR^2\omega$



19. एक लड़का, अपनी केंद्रीय अक्ष के परितः घूर्णन कर रहे प्लेटफार्म के केन्द्र पर हाथ बाँधकर खड़ा है। निकाय की गतिज ऊर्जा K है। बच्चा अब अपने हाथों को फैला देता है, जिससे निकाय का जड़त्व आघूर्ण दुगुना हो जाता है। निकाय की गतिज ऊर्जा हो जायेगी [IIT-JEE (Screening) 2004]

(a) $2K$ (b) $K/2$

(c) $K/4$ (d) $4K$

20. एक बेलन नततल पर लुढ़कता हुआ कुछ ऊँचाई तक पहुँचता है एवं फिर नीचे की ओर लुढ़कता है। (इन गतियों के दौरान बेलन बिना फिसले लुढ़कता है) बेलन पर कार्यरत् घर्षण बल की दिशायें हैं [IIT-JEE 2002]

(a) चढ़ते समय नतसमतल के अनुदिश ऊपर की ओर तथा उतरते समय नत तल के अनुदिश नीचे की ओर

(b) चढ़ते समय एवं उतरते समय दोनों स्थितियों में नत तल के अनुदिश ऊपर की ओर

(c) चढ़ते समय नत तल के अनुदिश नीचे की ओर एवं उतरते समय नत तल के अनुदिश ऊपर की ओर

(d) चढ़ते समय एवं उतरते समय दोनों स्थितियों में नत तल के अनुदिश नीचे की ओर

21. एक $2L$ लंबाई की एकसमान छड़ का एक सिरा क्षैतिज तल पर है। यह क्षैतिज तल से α कोण पर झुकी है। अब यह संपर्क बिन्दु के परितः घूमकर बिना फिसले गिर रही है। क्षैतिज तल में आने पर इसका कोणीय वेग हेगा [UPSEAT 2001]

(a) $\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{2L}}$ (b) $\omega = \sqrt{\frac{2L}{3g\sin\alpha}}$

(c) $\omega = \sqrt{\frac{6g\sin\alpha}{L}}$ (d) $\omega = \sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}$

22. एक चिकना गोला A घर्षण रहित क्षैतिज तल पर कोणीय गति ω व द्रव्यमान केन्द्र के वेग v से गति कर रहा है। यह एकसमान गोले B से, जो कि स्थिर है, प्रत्यास्थ व सम्मुख टक्कर करता है। यदि प्रत्येक घर्षण न हो, तो टक्कर के पश्चात् उनकी कोणीय चाल क्रमशः ω_A तथा ω_B हों, तब [IIT-JEE 1999]

(a) $\omega_A < \omega_B$ (b) $\omega_A = \omega_B$

(c) $\omega_A = \omega$ (d) $\omega = \omega_B$

GQ Graphical Questions

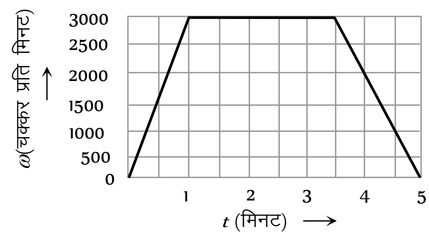
1. एक जेट इंजन के परीक्षण के दौरान, उसका संपीडक (Compressor) निम्न ग्राफ के अनुसार चक्रण करता है। परीक्षण के दौरान संपीडक द्वारा पूर्ण किये गये चक्करों की संख्या होगी

(a) 9000

(b) 16570

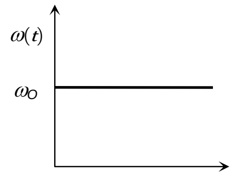
(c) 12750

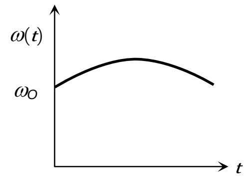
(d) 11250

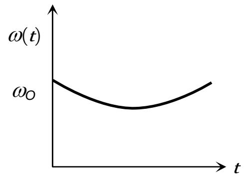


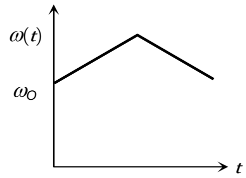
2. एक वृत्तीय मंच क्षैतिज तल में स्थित है व अपने केन्द्र से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः घूम सकता है। मंच के एक सिरे पर एक कछुआ बैठा है तथा मंच को नियत कोणीय वेग ω से घुमाया

जा रहा है। यदि कछुआ मंच (वृत्तीय) की किसी जीवा के अनुदिश एकसमान गति करने लगे तो मंच का कोणीय वेग, समय t के साथ निम्न प्रकार परिवर्तित होगा [IIT-JEE (Screening) 2002]

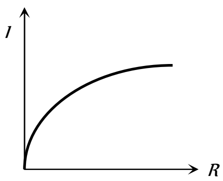
(a) 

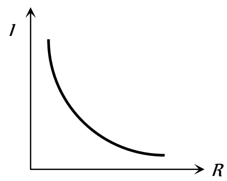
(b) 

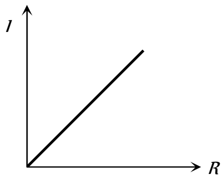
(c) 

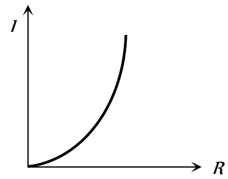
(d) 

3. द्रव्यमान M व त्रिज्या R के एक गोले का जड़त्व आघूर्ण I है। द्रव्यमान को नियत रखकर यदि I व R के मध्य ग्राफ बनाया जाए तो उसका रूप होगा

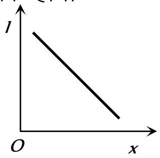
(a) 

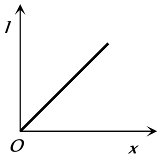
(b) 

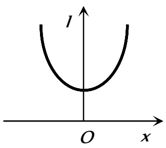
(c) 

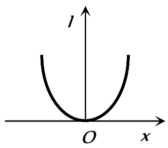
(d) 

4. समान्तर अक्षों की प्रमेय के अनुसार $I = I_{cm} + Mx^2$, I व x के मध्य ग्राफ होगा

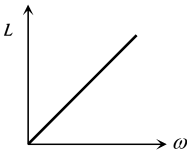
(a) 

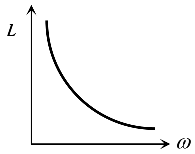
(b) 

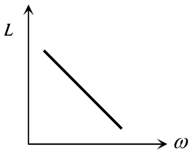
(c) 

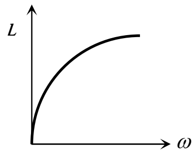
(d) 

5. कोणीय संवेग L तथा कोणीय वेग ω के बीच का ग्राफ होगा

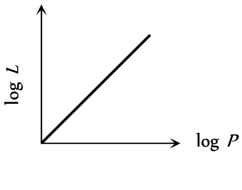
(a) 

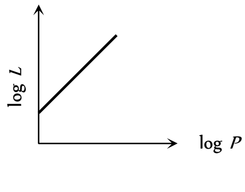
(b) 

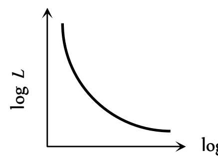
(c) 

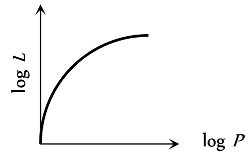
(d) 

6. $\log_e L$ तथा $\log_e P$ के बीच का ग्राफ होगा (जहाँ L कोणीय संवेग तथा P रेखीय संवेग है)

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Assertion & Reason

For AIIMS Aspirants

निम्नलिखित प्रश्नों में प्रक्कथन (Assertion) के वक्तव्य के पश्चात कारण (Reason) का वक्तव्य है।

(a) प्रक्कथन और कारण दोनों सही हैं और कारण प्रक्कथन का सही स्पष्टीकरण देता है
(b) प्रक्कथन और कारण दोनों सही हैं किन्तु कारण प्रक्कथन का सही स्पष्टीकरण नहीं देता है
(c) प्रक्कथन सही है किन्तु कारण गलत हैं
(d) प्रक्कथन और कारण दोनों गलत हैं
(e) प्रक्कथन गलत है किन्तु कारण सही है

1. प्रक्कथन : दो कणों के निकाय का द्रव्यमान–केंन्द्र दोनों कणों को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित होता है, तथा भारी कण के समीप होता है।
   कारण : किसी कण के द्रव्यमान तथा द्रव्यमान केंद्र से इसकी दूरी का गुणनफल दूसरे कण के द्रव्यमान तथा द्रव्यमान केंद्र की दूरी के गुणनफल के आंकिक मान के बराबर होता है।

2. प्रक्कथन : n कणों के निकाय का द्रव्यमान केंद्र निकाय को निर्मित करने वाले n कणों के स्थिति सदिशों का भारित माध्य होता है।
   कारण : निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति निर्देशांक पद्धति पर निर्भर नहीं करती।

3. प्रक्कथन : किसी विलगित निकाय के द्रव्यमान-केंद्र का एक नियत वेग होता है।
   कारण : यदि किसी विलगित निकाय का द्रव्यमान केंद्र विरामावस्था में है, तो यह विरामावस्था में ही बना रहता है।

4. प्रक्कथन : किसी वस्तु का द्रव्यमान केंद्र वहाँ स्थित हो सकता है, जहाँ वस्तु का कोई द्रव्यमान न हो।
   कारण : किसी वस्तु का द्रव्यमान केंद्र वह बिंदु होता है, जहाँ वस्तु का संपूर्ण द्रव्यमान केंद्रित माना जा सकता है।

5. प्रक्कथन : एक कण सीधी रेखा में एकसमान वेग से गतिशील है। इसका कोणीय संवेग हमेशा शून्य होगा।
   कारण : जब कण एकसमान वेग से गति करता है, तब इसका संवेग शून्य होता है।

6. प्रक्कथन : किसी प्रोटॉन तथा इलेक्ट्रॉन को उनकी स्थितियों से मुक्त करने पर उनका द्रव्यमान केंद्र विरामावस्था में ही रहता है।

कारण : यदि निकाय पर कोई बाह्य बल न लगे, तो उसका द्रव्यमान केंद्र विरामावस्था में ही रहता है।

7. प्रक्कथन : किसी वस्तु के द्रव्यमान केंद्र की स्थिति वस्तु की आकृति तथा आकार पर निर्भर नहीं करती।

कारण : किसी वस्तु का द्रव्यमान केंद्र हमेशा वस्तु के केंद्र पर स्थित होता है।

8. प्रक्कथन : एक गोला, जो विरमावस्था में है, विस्फोटित होता है। टुकड़ों के द्रव्यमान केंद्र की गति एक रेखा के अनुदिश होती है।

कारण : विस्फोट होने की प्रक्रिया में निकाय का रेखीय संवेग हमेशा संरक्षित रहता है।

9. प्रक्कथन : किसी द्रव्यमान केंद्र की स्थिति निर्देश फ्रेम से स्वतंत्र होती है।

कारण : सभी वस्तुओं का द्रव्यमान केंद्र समान होता है।

10. प्रक्कथन : इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन के निकाय को मुक्त करने पर निकाय का द्रव्यमान केन्द्र प्रोटॉन की ओर तेजी से गति करता है।

कारण : प्रोटॉन का भार इलेक्ट्रॉन से अधिक होता है।

11. प्रक्कथन : पृथ्वी के केंद्र पर किसी वस्तु का द्रव्यमान केंद्र होता है, किन्तु गुरुत्व केंद्र नहीं।

कारण : पृथ्वी के केन्द्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य होता है।

12. प्रक्कथन : किसी ऊँचाई से वस्तु को छोड़ने पर यह वायु में विस्फोटित हो जाती है। इसका द्रव्यमान केंद्र उर्ध्वाधर नीचे की ओर गति करता है।

कारण : विस्फोट केवल आन्तरिक बलों की प्रतिक्रिया स्वरूप होता है। बाह्य बल शून्य होता है।

13. प्रक्कथन : दरवाजे के कब्जे के समीप बल लगाकर दरवाजे को खोलना तथा बन्द करना अधिक कठिन होता है।

कारण : दरवाजे के कब्जे के समीप बल आघूर्ण का मान अधिक होता है।

14. प्रक्कथन : किसी कण का जड़त्व आघूर्ण समान रहता है, चाहे घूर्णन अक्ष कोई भी हो।

कारण : जड़त्व आघूर्ण कण के द्रव्यमान तथा दूरी पर निर्भर करता है।

15. प्रक्कथन : जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण समान राशियाँ हैं।

कारण : किसी वस्तु का जड़त्व, वस्तु की गति अथवा विरामावस्था में परिवर्तन करने पर, वस्तु द्वारा किए गए विरोध को प्रदर्शित करता है।

16. प्रक्कथन : यदि पृथ्वी का द्रव्यमान वही रहे तथा आकार वर्तमान आकार के आधे तक सिकुड़ जाए, तो दिन की लंबाई 6 घण्टे हो जायेगी।

कारण : जब पृथ्वी का आकार परिवर्तित होगा, इसका जड़त्व आघूर्ण भी परिवर्तित हो जायेगा।

17. प्रक्कथन : बल के द्वारा लगने वाले बल आघूर्ण का मान अधिकतम होता है जब $\vec{r}$ तथा $\vec{F}$ के बीच का कोण 90° होता है।

कारण : बल आघूर्ण का मात्रक न्यूटन–मीटर होता है।

18. प्रक्कथन : किसी वस्तु की घूर्णन त्रिज्या एक नियत राशि है।

कारण : किसी वस्तु की घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या, घूर्णन अक्ष से कणों की दूरी का वर्ग माध्य मूल होती है।

19. प्रक्कथन : किसी दी गई अक्ष के परितः वृत्तीय वलय का जड़त्व अघूर्ण, समान द्रव्यमान तथा समान आकार की वृत्तीय चकती के उसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण के मान से अधिक होता है।

कारण : वृत्तीय वलय खोखली होती है, अतः इसका जड़त्व आघूर्ण ठोस वृत्तीय चकती से अधिक होता है।

20. प्रक्कथन : बल आघूर्ण, कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

कारण : कोणीय संवेग वस्तु के जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय वेग पर निर्भर करता है।

21. प्रक्कथन : भिन्न पदार्थों से बनी समान द्रव्यमान तथा मोटाई की दो वृत्तीय चकतियों के, उनके घूर्णन की केंद्रीय अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण समान होंगे।

कारण : किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण वस्तु के द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।

22. प्रक्कथन : दी गई ऊँचाई के किसी नत तल की तली पर किसी फिसलने वाली वस्तु का वेग, उसी तल पर नीचे की ओर लुढ़कने वाली वस्तु की तुलना में अधिक होता है।

कारण : नीचे की ओर लुढ़कने की प्रक्रिया में वस्तु में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की गतिज ऊर्जायें होती हैं।

23. प्रक्कथन : लुढ़कने की प्रक्रिया में, किसी दृढ़ वस्तु के सभी बिन्दुओं का रैखिक वेग समान रहता है।

कारण : घूर्णी गति किसी दृढ़ वस्तु के रेखीय वेग को प्रभावित नहीं करती ।

24. प्रक्कथन : हेलीकॉप्टर में दो पंखे (propellers) आवश्यक रूप से लगाए जाते है।

कारण : रेखीय संवेग को संरक्षित बनाये रखने के लिये हेलीकॉप्टर में दो पंखे (propellers) प्रदान किये जाते है।

25. प्रक्कथन : किसी लुढ़कते हुए ठोस गोले की कुल गतिज ऊर्जा, रैखिक गतिज ऊर्जा तथा घूर्णी ऊर्जाओं के योग के तुल्य होती है।

कारण : सभी ठोस वस्तुओं की कुल गतिज ऊर्जा उनकी रैखिक गतिज ऊर्जा से दुगुनी होती है।

26. प्रक्कथन : एक पहिया, जो किसी घर्षणरहित नत तल पर नीचे की ओर गतिशील है, बिना लुढ़के फिसलने लगता है।

कारण : लुढ़कने की प्रक्रिया में, घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य शून्य होता है।

27. प्रक्कथन : किसी जंग लगे नट को खोलने के लिए हमें एक लंबी भुजा वाले रेंच (wrench) की आवश्यकता होती है।

कारण : लंबी भुजा के रेंच (wrench) से बल आघूर्ण का मान घट जाता है।

Answers

द्रव्यमान केन्द्र

1	c	2	b	3	d	4	c	5	d
6	c	7	a	8	b	9	b	10	b
11	b	12	d	13	d	14	c	15	b
16	a	17	b	18	c	19	a	20	a
21	c	22	b	23	b	24	a	25	d
26	c	27	b	28	a	29	b	30	a
31	a								

कोणीय विस्थापन, वेग तथा त्वरण

1	b	2	c	3	d	4	c	5	b
6	c	7	c	8	d	9	d	10	a
11	d	12	c	13	c	14	a	15	a
16	a	17	b	18	a	19	c	20	b
21	d	22	c						

जड़त्व आघूर्ण

1	b	2	a	3	b	4	b	5	c
6	a	7	a	8	b	9	b	10	d
11	a	12	b	13	d	14	a	15	a
16	a	17	d	18	b	19	b	20	c
21	a	22	b	23	a	24	b	25	b
26	d	27	a	28	a	29	c	30	a
31	d	32	a	33	a	34	a	35	b
36	b	37	a	38	c	39	d	40	d
41	a	42	a	43	c	44	a	45	c
46	a	47	c	48	b	49	b	50	a
51	d	52	a	53	c	54	d	55	d
56	b	57	d	58	d	59	a	60	b
61	c	62	a	63	b	64	a	65	c
66	c	67	c	68	a	69	b	70	b
71	b	72	a	73	a	74	d	75	b
76	b								

बल आघूर्ण तथा बल.युग्म

1	a	2	c	3	b	4	c	5	d
6	c	7	a	8	b	9	c	10	a
11	a	12	a	13	a	14	c	15	a
16	a	17	d	18	a	19	a	20	a
21	a	22	a	23	b	24	d	25	c
26	a								

कोणीय संवेग

y	c	2	c	3	a	4	a	5	a
6	b	7	c	8	b	9	c	10	a
11	d	12	a	13	a	14	c	15	b
16	c	17	c	18	d	19	d	20	b
21	c	22	d	23	a	24	d	25	d
26	a	27	a	28	a	29	d	30	b
31	b	32	d	33	d	34	d	35	c
36	d	37	a	38	b	39	a	40	a
41	b	42	b	43	d	44	c	45	b
46	a	47	a	48	b	49	a	50	c
51	d	52	c	53	a	54	a	55	a
56	d	57	d	58	c	59	c	60	c
61	c								

कार्य, ऊर्जा तथा शक्ति

1	d	2	d	3	b	4	a	5	c
6	b	7	b	8	d	9	c	10	c
11	d	12	c	13	c	14	d	15	a
16	d	17	b	18	d	19	b	20	a
21	d	22	b	23	d	24	b	25	c
26	d	27	b	28	b	29	a	30	b
31	d								

नत समतल पर घूर्णन

1	a	2	b	3	a	4	d	5	d

6	b	7	a	8	a	9	d	10	b
11	c	12	a	13	ad	14	d	15	a
16	c	17	a	18	b				

Critical Thinking Questions

1	a	2	a	3	c	4	a	5	d
6	b	7	a	8	b	9	abc	10	d
11	a	12	a	13	b	14	abc	15	b
16	b	17	a	18	c	19	b	20	b
21	a	22	c						

ग्राफीय प्रश्न

1	d	2	b	3	d	4	c	5	a
6	b								

प्रक्कथन एवं कारण

1	a	2	b	3	b	4	a	5	d
6	a	7	d	8	e	9	c	10	e
11	a	12	a	13	c	14	e	15	e
16	a	17	b	18	e	19	b	20	b
21	e	22	a	23	d	24	c	25	c
26	b	27	c						

Answers and Solutions

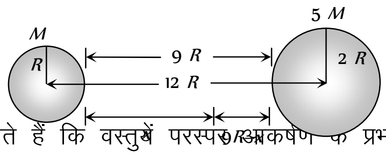
द्रव्यमान केन्द्र

1. (c) $\vec{v_{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{200 \times 10\hat{i} + 500 \times (3\hat{i} + 5\hat{j})}{200 + 500}$

$\vec{v_{cm}} = 5\hat{i} + \frac{25}{7}\hat{j}$

2. (b) द्रव्यमान केन्द्र हमेशा भारी (अधिक) द्रव्यमान की ओर होता है।

3. (d) चूँकि दोनों वस्तुओं का आकार भिन्न है अतः दोनों वस्तुओं द्वारा चली गयी दूरी $12R - 3R = 9R$, परंतु प्रत्येक वस्तु द्वारा चली गयी व्यक्तिगत दूरी उसके द्रव्यमान पर निर्भर करेगी



हम जानते हैं कि वस्तुयें परस्पर आकर्षण के प्रभाव में गति कर रही हैं इसलिये उनके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति परिवर्तित नहीं होगी।

माना कि छोटी वस्तु टक्कर होने से पहले x दूरी तय करेगी तब, $m_1 r_1 = m_2 r_2$ से

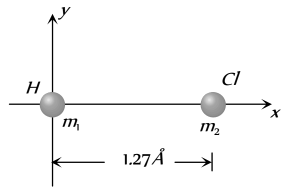
$\Rightarrow M\,x = 5\,M\,(9R - x) \Rightarrow x = 7.5R$

4. (c) $m_1 = 1$, $m_2 = 35.5$, $\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}_2 = 1.27\hat{i}$

$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{r} = \frac{35.5 \times 1.27}{1 + 35.5}\hat{i}$

$\vec{r} = \frac{35.5}{36.5} \times 1.27\hat{i} = 1.24\hat{i}$



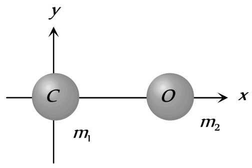
5. (d) $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 3 + 3 \times 2}{2 + 3} = \frac{12}{5} = 2.4 m/s$

6. (c) $m_1 = 12$, $m_2 = 16$

$\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 0\hat{j}$, $r_2 = 1.1\hat{i} + 0\hat{j}$

$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{r} = \frac{16 \times 1.1}{28}\hat{i} = 0.63\hat{i}$ अर्थात् कार्बन परमाणु से $0.63 Å$



7. (a) $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

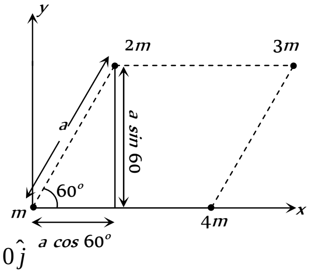
$= \frac{20 \times 10\hat{i} + 30 \times 10\hat{j} + 50 \times 10\hat{k}}{100}$

$\therefore v_{cm} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

8. (b) यह वस्तु के द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।

9. (b) $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 2 + 4 \times 10}{2+4} = 7.3 m/s$

10. (b) माना $m_1 = m,\ m_2 = 2m,\ m_3 = 3m,\ m_4 = 4m$



$\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 0\hat{j}$

$\vec{r}_2 = a\cos 60\hat{i} + a\sin 60\hat{j} = \frac{a}{2}i + \frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

$\vec{r}_3 = (a + a\cos 60)\hat{i} + a\sin 60\hat{j} = \frac{3}{2}a\hat{i} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

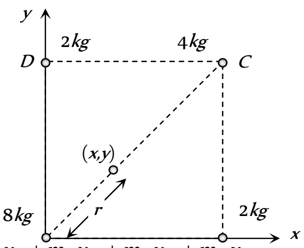
$\vec{r}_4 = a\hat{i} + 0\hat{j}$

ऊपर दर्शाये गये मान निम्न सूत्र में रखने पर

$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 0.95ai + \frac{\sqrt{3}}{4}a\hat{j}$

अतः द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति $\left[0.95a, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right]$

11. (b) चित्रानुसार, माना कि A मूलबिन्दु है तथा द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (x, y) हैं तब



$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$

$= \frac{0 + 2 \times \frac{80}{\sqrt{2}} + 4 \times \frac{80}{\sqrt{2}} + 0}{16} = \frac{30}{\sqrt{2}}$

इसी प्रकार से $y = \frac{30}{\sqrt{2}}$ इसलिये, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 30\ cm$

12. (d)

13. (d) $m_1 = 2kg, m_2 = 4kg, \vec{v}_1 = 2m/s, \vec{v}_2 = -10 m/s$

$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 20 - 4 \times 10}{2+4} = 0\ m/s$

14. (c)

15. (b) चूँकि द्रव्यमान केन्द्र अधिक द्रव्यमान वाले भाग की ओर होता है अतः बल्ले के निचले सिरे का द्रव्यमान अधिक होता है।

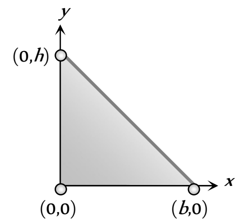
16. (a) चूँकि प्रारंभ में दोनों कण विराम में हैं अतः द्रव्यमान केन्द्र का वेग शून्य होगा तथा निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है इसलिये द्रव्यमान केन्द्र की चाल नियत होगी अर्थात् इसकी चाल शून्य ही रहेगी।

17. (b) हम जानते हैं कि $m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow m \times r =$ नियत $\Rightarrow r \propto \frac{1}{m}$

18. (c) हम मान सकते हैं कि तीन समान द्रव्यमान m के कण त्रिभुज के तीनों कोणों पर रखे हुये हैं

$\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 0\hat{j}, \vec{r}_2 = b\hat{i} + 0\hat{j}$

तथा $\vec{r}_3 = 0\hat{i} + h\hat{j}$



$\therefore\ \vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$= \frac{b}{3}\hat{i} + \frac{h}{3}\hat{j}$

अर्थात् द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक हैं $\left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$

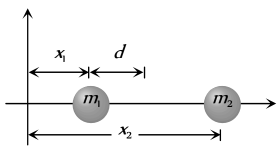
19. (a) निकाय का प्रारंभिक त्वरण शून्य है। इसलिये जब तक इस पर बाह्य बल नहीं लगाया जायेगा यह शून्य ही रहेगा।

20. (a) द्रव्यमान केन्द्र का वेग

$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{20 \times 2v + 10 \times v}{30} = \frac{5}{3}v$

21. (c) $m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow r \propto \frac{1}{m}$

22. (b) द्रव्यमान केन्द्र की प्रारंभिक स्थिति $r_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ ..(i)



यदि m_1 द्रव्यमान के कण को द्रव्यमान केन्द्र की ओर d दूरी से विस्थापित किया जाता है तो द्रव्यमान केन्द्र को उसी स्थिति पर बनाये रखने के लिये माना कि दूसरे द्रव्यमान को d' दूरी से द्रव्यमान केन्द्र से दूर खिसकाया जाता है

तब $r_{cm} = \frac{m_1(x_1 + d) + m_2(x_2 + d')}{m_1 + m_2}$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) को समान करने पर

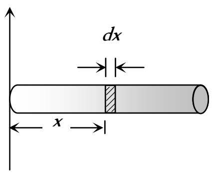
$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(x_1 + d) + m_2(x_2 + d')}{m_1 + m_2}$

हल करने पर $d' = -\frac{m_1}{m_2}d$

ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि m कण को द्रव्यमान केन्द्र की ओर विस्थापित किया जाना चाहिये।

23. (b) छड़ का रैखिक घनत्व दूरी के साथ बदलता है

$\frac{dm}{dx} = \lambda$ (दिया है) $\Rightarrow\ dm = \lambda\, dx$



द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

$$x_{cm} = \frac{\int dm \times x}{\int dm}$$

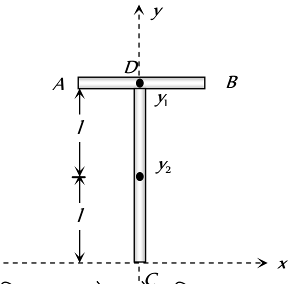
$$= \frac{\int_0^3 (\lambda\, dx) \times x}{\int_0^3 \lambda\, dx} = \frac{\int_0^3 (2+x) \times x dx}{\int_2^3 (2+x)\, dx} = \frac{\left[x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^3}{\left[2x + \frac{x^3}{2}\right]_0^3}$$

$$= \frac{9+9}{6+\frac{9}{2}} = \frac{36}{21} = \frac{12}{7} m$$

24. (a) स्थानांतरीय गति के लिये बल द्रव्यमान केन्द्र पर आरोपित करना चाहिये अतः हमें 'T' आकार की वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात करना है।

माना कि AB छड़ का द्रव्यमान m तथा CD छड़ का द्रव्यमान $2m$ है

माना कि AB छड़ का द्रव्यमान केन्द्र y_1 तथा CD छड़ का द्रव्यमान केन्द्र y_2 है। हम यह मान सकते हैं कि छड़ों का पूरा द्रव्यमान उनेक संबंधित द्रव्यमान केन्द्र पर स्थित हैं अर्थात् m द्रव्यमान y_1 तथा $2m$ द्रव्यमान y_2 पर स्थित है।



'C' को मूल बिन्दु मानते हुये, बिन्दु y_1 तथा y_2 के स्थिति सदिश $\vec{r_1} = 2l\hat{j}$, $\vec{r_2} = l\hat{j}$, तथा $m_1 = m$ एवं $m_2 = 2m$

निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m\, 2l\hat{j} + 2m\, l\hat{j}}{m + 2m} = \frac{4ml\hat{j}}{3m} = \frac{4}{3} l\hat{j}$$

अतः C से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी $= \frac{4}{3} l$

25. (d) चूँकि द्रव्यमान में आंतरिक बलों के कारण दो भागों विभाजित हो रहे हैं अतः द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

26. (c) द्रव्यमान केन्द्र हमेशा दो पिण्डों को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित होता है।

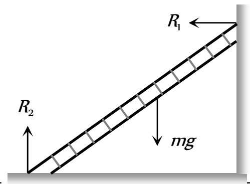
cd तथा *ab* को जोड़ते समय यह रेखा मूल बिंदु से होकर नहीं गुजरेगी।

bd को जोड़ते समय, प्रारंभ में यह मूल बिंदु से होकर गुजरेगी परंतु बाद में ऋणात्मक *x*-अक्ष की तरफ विस्थापित जायेगी।

सिर्फ *'ac'* को जोड़ते समय यह रेखा सदैव मूल बिन्दु से होकर गुजरेगी अतः हम कह सकते हैं कि *'cd'* के लिये द्रव्यमान केन्द्र हमेशा मूल बिन्दु पर स्थित होगा

27. (b) $x_{cm} = \frac{1\times 0 + 1\times PQ + 1 \times PR}{1+1+1} = \frac{PQ+PR}{3}$ तथा $y_{cm} = 0$

28. (a)



परिणामी बल नीचे की दिशा में बाँयी ओर लगने के कारण द्रव्यमान केन्द्र चित्र में दिखाये गये पथ में चलेगा।

29. (b) चूँकि निकाय पर परिणामी बल शून्य है अतः उनके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति में परिवर्तन नहीं होगा अर्थात् वे द्रव्यमान केन्द्र पर एक दूसरे से टकरायेंगे।

निकाय का द्रव्यमान केन्द्र A के समीप स्थित होगा क्योंकि $m_A > m_B$

30. (a) चूँकि प्रारंभ में दोनों कण विराम में हैं अतः $v_{cm} = 0$। चूँकि निकाय पर आरोपित बाह्य बल शून्य है, अतः द्रव्यमान केन्द्र का वेग अपरिवर्तित रहेगा।

31. (a) $m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} = 0 \Rightarrow \frac{m}{4} 15\hat{j} + \frac{3m}{4} \vec{r_2} = 0 \Rightarrow \vec{r_2} = -5\hat{j}$

अर्थात् बड़ा हिस्सा $y = -5\ cm$ पर है।

कोणीय विस्थापन, वेग तथा त्वरण

1. (b) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} rad/s$

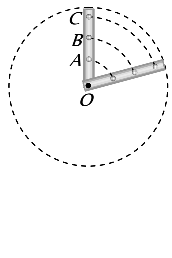
2. (c) पहिये के उच्चतम बिन्दु का वेग, द्रव्यमान केन्द्र के वेग का दो गुना है तथा द्रव्यमान केन्द्र की चाल दोनों पहियों के लिये समान है (कोणीय चाल भिन्न है)

3. (d) $\omega = \frac{v}{r} = \frac{80}{20/\pi} = 4\pi,\ \omega_0 = 0,\ \theta = 2\pi(n) = 4\pi$ (चूँकि $n = 2$)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{16\pi^2}{2\times 4\pi} = 2\pi$$

स्पर्श रेखीय त्वरण $a_t = r\alpha = \frac{20}{\pi} \times 2\pi = 40 m/s^2$

4. (c) चूँकि वस्तु ठोस है अतः सभी कणों का कोणीय वेग समान होगा अर्थात् $\omega =$ नियत



$v = r\omega$, से $v \propto r$ (यदि $\omega =$ नियत)

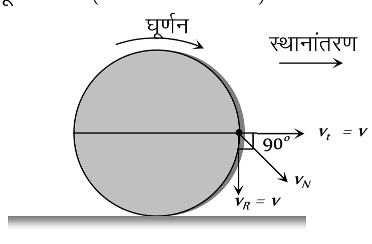
इसका अर्थ यह है कि केन्द्र से जिस कण की दूरी अधिक होगी, उसी कण का रैखिक वेग अधिक होगा अर्थात् $v_A < v_B < v_C$ परन्तु $\omega_A = \omega_B = \omega_C$

5. (b) $\frac{1}{2} I\omega^2 = 750\ J \Rightarrow \omega^2 = \frac{750 \times 2}{2.4} = 625 \Rightarrow \omega = 25\ rad/s$

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \Rightarrow 5 = \frac{25 - 0}{t} \Rightarrow t = 5\,s$$

6. (c) v_t = स्थानांतरीय गति (Translatory motion) के कारण वेग

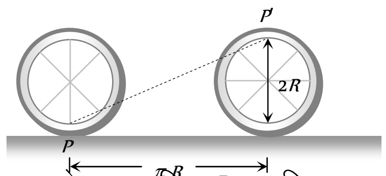
v_r = घूर्णी गति (Rotational motion) के कारण वेग



$v_N = \sqrt{v_t^2 + v_R^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2}v = 2\sqrt{2} m/s$

7. (c) $\omega = 2\pi n = 2\pi \times \frac{120}{60} = 4\pi \, rad/s$

8. (d)



आधे चक्कर के पश्चात् बिन्दु P का विस्थापन

$PP' = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = R\sqrt{\pi^2 + 4} = 5\sqrt{\pi^2 + 4}$

9. (d) $\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega = 0 + \left(\frac{\tau}{I}\right)t$ [चूँकि $\tau = I\alpha$]

$\omega = 0 + \frac{1000}{200} \times 3 = 15 \, rad/s$

10. (a) $\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\pi\left(\frac{540}{60}\right)}{6} = 3\pi \, rad/s^2$

11. (d) $\alpha = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = \frac{2\pi\left(\frac{4500 - 1200}{60}\right)}{10} rad/s^2$

$= \frac{2\pi \frac{3300}{60}}{10} \times \frac{360}{2\pi} \frac{\text{डिग्री}}{\text{सै}^2} \quad \alpha = 1980 \frac{\text{डिग्री}}{\text{सै}^2}$

12. (c) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow 200 = \frac{1}{2}\alpha(5)^2 \Rightarrow \alpha = 16 \, rad/s^2$

13. (c) $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\theta \Rightarrow 0 = 4\pi^2 n^2 - 2\alpha\theta$

$\theta = \frac{4\pi^2\left(\frac{1200}{60}\right)^2}{2 \times 4} = 200\pi^2 \, rad$

$\therefore 2\pi n = 200\pi^2 \Rightarrow n = 100\pi = 314$ चक्कर

14. (a) $\omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{72 \times 5/18}{0.25} = 80 \, rad/s$

$\omega = 0, \ \theta = 2\pi n = 2\pi \times 20 = 40\pi \, rad$

दिये गये मान निम्न समीकरण में रखने पर

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\omega_0^2}{2 \times \theta} = -\frac{80 \times 80}{2 \times 40\pi} = -25.5 \, rad/s^2$

15. (a) $\omega_i = \frac{900}{60} \times 2\pi = 30\pi \, rad/s \quad \omega_f = 0, \ t = 60 \sec$

$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{0 - 30\pi}{60} = -\frac{\pi}{2} rad/s^2$

16. (a) कोणीय वेग, घूर्णी गति के साथ संबंधित है।

17. (b) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \theta = 100 \, rad$

$\therefore$ चक्करों की संख्या $= \frac{100}{2\pi} = 16$ (लगभग)

18. (a) कोणीय त्वरण एक अक्षीय सदिश है।

19. (c) $\tau = I\alpha$

20. (b) $\omega = \frac{3000}{60} =$ चक्कर प्रति सैकण्ड = 50 चक्कर प्रति सैकण्ड

$= 50 \times 2\pi \, rad/s = 100\pi \, rad/s$

$\therefore \ \theta = \omega t = 100\pi \, rad$

21. (d) कोणीय वेग एक अक्षीय सदिश है।

22. (c) तीन सैकण्ड में घूमा गया कोण, $\theta_{3s} = 2\pi \times 10 = 20\pi \, rad$

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ से $\Rightarrow 20\pi = 0 + \frac{1}{2}\alpha \times (3)^2$

$\Rightarrow \alpha = \frac{40\pi}{9} rad/s^2$

अब प्रारंभ से 6 सैकण्ड में घूमा गया कोण

$\theta_{6s} = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{40\pi}{9}\right) \times (6)^2 = 80\pi \ rad$

$\therefore \ t = 3s$ से $t = 6s$ के बीच घूमा गया कोण

$\theta_{\text{अंतिम } 3 s} = \theta_{6s} - \theta_{3s} = 80\pi - 20\pi = 60\pi$

चक्करों की संख्या $= \frac{60\pi}{2\pi} = 30$

जड़त्व आघूर्ण

1. (b) चूँकि चकती का द्रव्यमान नगण्य है अतः सिर्फ पाँच कणों का जड़त्व आघूर्ण गणना में लिया जायेगा

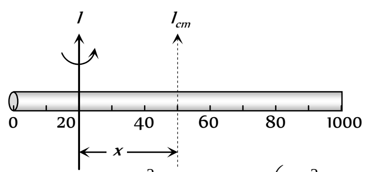
$I = \sum mr^2 = 5 \, mr^2 = 5 \times 2 \times (0.1)^2 = 0.1 \, kg\text{-}m^2$

2. (a) $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \times (\pi R^2 t \times \rho) \times R^2$

$\Rightarrow I \propto R^4$ (चूँकि t तथा ρ समान है)

$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 = \left(\frac{0.2}{0.6}\right)^4 = \frac{1}{81}$

3. (b)



$I = I_{cm} + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + mx^2 = m\left(\frac{(1)^2}{12} + (0.3)^2\right)$

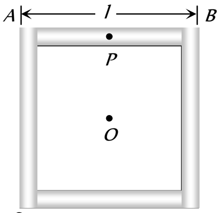
$= 0.6\left(\frac{1}{12} + 0.09\right) = 0.104 \ kg\text{-}m^2$

4. (b)

5. (c) $I = \frac{7}{5}MR^2 = \frac{7}{5} \times 10 \times (0.5)^2 = 3.5 kg\text{-}m^2$

6. (a)

7. (a) छड़ AB का बिन्दु P के परितः तथा तल के लम्बवत् जड़त्व आघूर्ण $= \frac{Ml^2}{12}$



बिन्दु 'O' के परितः छड़ AB का जड़त्व आघूर्ण

$= \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$

(समांतर अक्ष प्रमेय के अनुसार)

परंतु निकाय चार समान छडों से मिलकर बना है अतः सममिति से $I_{\text{निकाय}} = 4\left(\frac{Ml^2}{3}\right)$

8. (b) ऐसा करने से द्रव्यमान वितरण घूर्णन अक्ष से दूर किया जा सकता है।

9. (b) $\frac{1}{4}MR^2 = I$(दिया हुआ है) $\Rightarrow MR^2 = 4I$

आवश्यक जड़त्व आघूर्ण $= \frac{3}{2}MR^2 = \frac{3}{2}(4I) = 6I$

10. (d)

11. (a)

12. (b)

13. (d) $I = MK^2 = 160 \Rightarrow K^2 = \frac{160}{M} = \frac{160}{10} = 16 \Rightarrow K = 4$ मीटर

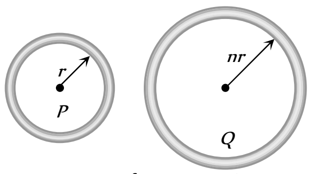
14. (a)

15. (a) $I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{31.4}{4\pi} = 2.5 kg\, m^2$

16. (a)

17. (d) माना कि लूप (loop) P का द्रव्यमान (त्रिज्या $= r$) $= m$

इसलिये लूप Q का द्रव्यमान (त्रिज्या $= nr$) $= nm$



लूप P का जड़त्व आघूर्ण $I_P = mr^2$

लूप Q का जड़त्व आघूर्ण $I_Q = nm(nr)^2 = n^3mr^2$

$\therefore \frac{I_Q}{I_P} = n^3 = 8 \Rightarrow n = 2$

18. (b) $\frac{3}{2}MR^2 = \frac{3}{2} \times 2 \times (0.1)^2 = 0.03 kg\text{-}m^2$

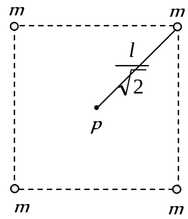
19. (b)

20. (c) गोले का स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= \frac{7}{5}MR^2 = MK^2 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{7}{5}}R$

21. (a) बिन्दु P के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$= 4m\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2ml^2$



तथा $4mK^2 = 2ml^2$

$\therefore K = \frac{l}{\sqrt{2}}$

22. (b)

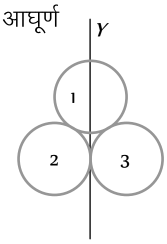
23. (a) $\frac{I_{\text{गोला}}}{I_{\text{बेलन}}} = \frac{\frac{2}{5}M_1R^2}{\frac{1}{2}M_2R^2} = \frac{\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)R^2}{\frac{1}{2}\left(\pi R^2 L\rho\right)R^2} = \frac{16}{15}$

$\Rightarrow I_{\text{गोला}} > I_{\text{बेलन}}$

24. (b) $\frac{I_{\text{वलय}}}{I_{\text{चकती}}} = \frac{MR^2}{1/2MR^2} = 2:1$

25. (b) $\frac{1}{2}MR^2 = MK^2 \Rightarrow K = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{2.5}{\sqrt{2}} = 1.76 cm$

26. (d) निकाय का YY' अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण



$I = I_1 + I_2 + I_3$

$= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{3}{2}MR^2 + \frac{3}{2}MR^2$

$= \frac{7}{2}MR^2$

27. (a) $K = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54 cm$

28. (a) $\frac{1}{2}MR^2 = I \Rightarrow MR^2 = 2I$

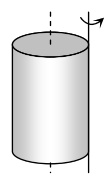
चकती का उसके तल में स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= \frac{5}{4}MR^2 = \frac{5}{4}(2I) = \frac{5}{2}I$

29. (c) $I = 2MR^2 = 2 \times 3 \times (1)^2 = 6\ gm\text{-}cm^2$

30. (a) $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times (0.1)^2 = 2.5 \times 10^{-3} kg\text{-}m^2$

31. (d) बेलन की अक्ष के समांतर उसकी सतह पर स्थित अक्ष को जनित्र अक्ष कहा जाता है



अतः समांतर अक्ष प्रमेय के अनुसार

$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

32. (a)

33. (a)

34. (a) $\frac{ML^2}{12} = MK^2 \Rightarrow K = \frac{L}{\sqrt{12}}$

35. (b) $I = mR^2 = m\left(\frac{D^2}{4}\right) \Rightarrow I \propto mD^2$ अथवा $m \propto \frac{I}{D^2}$

$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{I_1}{I_2} \times \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

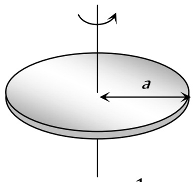
36. (b)

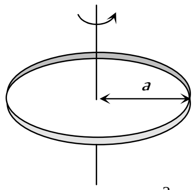
37. (a)

38. (c) $\frac{1}{2} I\omega^2 = 360 \Rightarrow I = \frac{2 \times 360}{(30)^2} = \frac{2 \times 360}{30 \times 30} = 0.8 kg \times m^2$

39. (d)

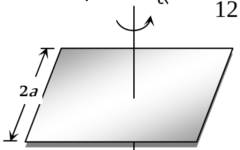
40. (d)





$I_{\text{चकती}} = \frac{1}{2} ma^2$ $\quad I_{\text{वलय}} = ma^2$

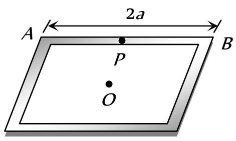
आयताकार पटल का जड़त्व आघूर्ण $= \frac{m}{12}\left[l^2 + b^2\right]$



$I_{\text{वर्गाकार प्लेट}} = \frac{m}{12}\left[(2a)^2 + (2a)^2\right] = \frac{m}{12}\left[8a^2\right] = \frac{2}{3} ma^2$

छड़ AB का बिन्दु P के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_{\text{छड़}} = \frac{ml^2}{12} = \frac{m(2a)^2}{12} = \frac{ma^2}{3}$



छड़ AB का बिन्दु O के परितः जड़त्व आघूर्ण

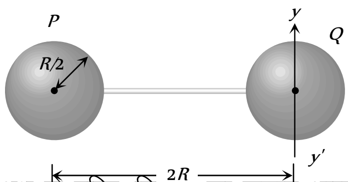
$= \frac{ma^2}{3} + mx^2 = \frac{ma^2}{3} + m(a)^2 = \frac{4ma^2}{3}$

निकाय चार छड़ों से मिलकर बना है

$\therefore I_{\text{निकाय}} = 4 \times \frac{4ma^2}{3} = \frac{16ma^2}{3}$

यह स्पष्ट है कि अंतिम विकल्प के लिये जड़त्व आघूर्ण अधिकतम है।

41. (a)



yy' अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$I_{yy'}$ = गोले P का yy' के परितः जड़त्व आघूर्ण

+ गोले Q का yy' के परितः जड़त्व आघूर्ण

गोले P का yy' के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= \frac{2}{5} M\left(\frac{R}{2}\right)^2 + M(x)^2$ [समांतर अक्ष प्रमेय]

$= \frac{2}{5} M\left(\frac{R}{2}\right)^2 + M(2R)^2 = \frac{MR^2}{10} + 4MR^2$

गोले Q का yy' के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \frac{2}{5} M\left(\frac{R}{2}\right)^2$

अब $I_{yy'} = \frac{MR^2}{10} + 4MR^2 + \frac{2}{5} M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{21}{5} MR^2$

42. (a) चकती का उसके तल में स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \frac{5}{4} mR^2 = I$

$\therefore mR^2 = \frac{4}{5} I$ .....(i)

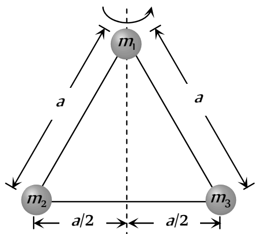
चकती का उसके तल के लम्बवत् स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण $I' = \frac{3}{2} mR^2$

mR^2 का मान समीकरण (i) से रखने पर हमें ज्ञात होता है

$I' = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{5} I\right) = \frac{6}{5} I$

43. (c)

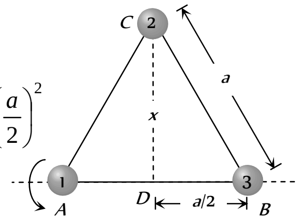
44. (a) निकाय का m_1 से होकर गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण



$I_{\text{निकाय}} = m_1(0)^2 + m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_3\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$I_{\text{निकाय}} = (m_2 + m_3)\frac{a^2}{4}$

45. (c) त्रिभुज BCD से



$CD^2 = BC^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

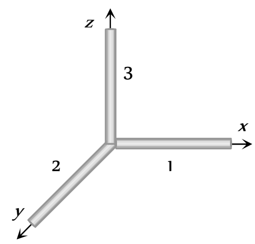
$x^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}\, a}{2}$

AB भुजा के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$I_{\text{निकाय}} = I_1 + I_2 + I_3 = m \times (0)^2 + m \times (x)^2 + m \times (0)^2$

$= mx^2 = m\left(\frac{\sqrt{3}\, a}{2}\right)^2 = \frac{3ma^2}{4}$

46. (a) छड़ (1) का Z-अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_1 = \frac{Ml^2}{3}$



छड़ (2) का Z-अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_2 = \frac{Ml^2}{3}$

छड़ (3) का Z-अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $I_3 = 0$

क्योंकि यह छड़ Z-अक्ष पर स्थित है

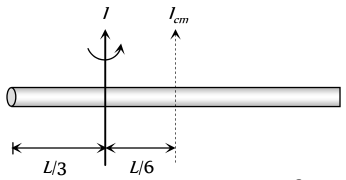
$\therefore\ I_{\text{निकाय}} = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{2Ml^2}{3}$

47. (c) BC अक्ष के परितः द्रव्यमान वितरण AB अक्ष के परितः द्रव्यमान वितरण की अपेक्षा अधिक है अतः BC अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या AB अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या से अधिक होगी

अर्थात् $K_{BC} > K_{AB} \Rightarrow\ I_{BC} > I_{AB} > I_{CA}$

48. (b) $I_{\text{कच्चा अण्डा}} > I_{\text{अध उबला अण्डा}}$, क्योंकि जब दोनों को उनके अक्ष के परितः घुमाया जायेगा तब आधे उबले हुये अण्डे में द्रव्यमान वितरण एकसमान होगा जबकि कच्चे अण्डे में द्रव्यमान अपकेन्द्रीय बल के कारण अक्ष से दूर चला जायेगा।

49. (b) $I_{cm} = \dfrac{ML^2}{12}$ (मध्य बिंदु के परितः)



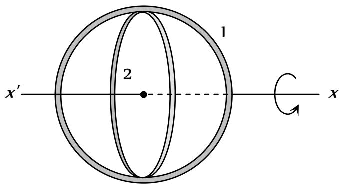
$\therefore I = I_{cm} + Mx^2 = \dfrac{ML^2}{12} + M\left(\dfrac{L}{6}\right)^2 = \dfrac{ML^2}{9}$

50. (a)

51. (d)

52. (a) $I = \dfrac{Ml^2}{12} = \dfrac{0.12\times1^2}{12} = 0.01\,kg\text{-}m^2$

53. (c)



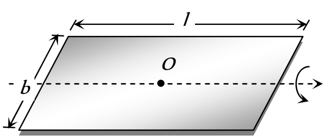
I_1 = वलय का व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \dfrac{1}{2}mR^2$

I_2 = वलय के लम्बवत् तथा केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= mR^2$

दो वलय चित्र में दर्शाये अनुसार रखे जाते हैं, तो

$I_{xx'} = I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \dfrac{3}{2}mR^2$

54. (d)



लम्बाई के समांतर तथा O के परितः प्लेट का जड़त्व आघूर्ण $= \dfrac{Mb^2}{12}$

55. (d) चकती का जड़त्व आघूर्ण

$= \dfrac{1}{2}mR^2 = \dfrac{1}{2}(\pi R^2 t)\rho R^2 = \dfrac{1}{2}\pi R^4 t\rho$

[ρ = घनत्व , t = मोटाई]

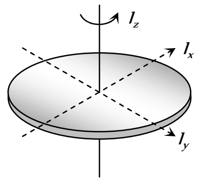
यदि चकतियाँ समान पदार्थ से बनी हैं तथा उनकी मोटाई समान है तो $I \propto R^4 \propto$ (व्यास)^4

$\therefore\ \dfrac{I_A}{I_B} = \left(\dfrac{D_A}{D_B}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{1}\right)^4 = \dfrac{16}{1}$

56. (b) $\dfrac{I_1}{I_2} = \left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{1}\right)^2 = 2$

57. (d) क्योंकि EG, के परितः अक्ष से अधिकतम दूरी कम है अर्थात् द्रव्यमान वितरण न्यूनतम होगा।

58. (d) $I_z = I_x + I_y$



$200 = I_D + I_D = 2I_D$

$\therefore I_D = 100\ gm \times cm^2$

59. (a) वलय का जड़त्व आघूर्ण $= mR^2$

चकती का जड़त्व आघूर्ण $= \dfrac{1}{2}mR^2$

ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण $= \dfrac{2}{5}mR^2$

दण्ड चुम्बक का जड़त्व आघूर्ण $= m\left(\dfrac{a^2+b^2}{12}\right)$

अर्थात् वलय में द्रव्यमान घूर्णन अक्ष से अधिक दूरी पर वितरित होता है।

60. (b)

61. (c) यह घूर्णी गति का विरोध करने के लिये वस्तु का विशेष गुण होता है।

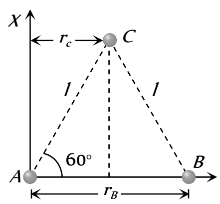
62. (a) $I = \dfrac{1}{2}MR^2 \Rightarrow\ I \propto R^2$ अर्थात् यदि R का मान 1% बढ़ा दिया जाये तो जड़त्व आघूर्ण के मान में 2% की वृद्धि होगी।

63. (b) $I = \dfrac{mr^2}{4} = \dfrac{1\times1\times10^{-2}}{4} = 2.5\times10^{-3}kg\text{-}m^2$

64. (a)

65. (c) AX अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$= I_A + I_B + I_C$



$= m_A(r_A)^2 + m_B(r_B)^2 + m_C(r_C)^2$

$= m(0)^2 + m(l)^2 + m(l\cos 60)^2$

$= ml^2 + \dfrac{ml^2}{4} = \dfrac{5ml^2}{4}$

66. (c) चकती के तल में स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \dfrac{5}{4}mr^2$

$mK_d^2 = \frac{5}{4}mr^2 \Rightarrow K_d\sqrt{\frac{5}{4}}r$

वलय के तल में स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण = $\frac{3}{2}mr^2$

$mK_r^2 = \frac{3}{2}mr^2 \Rightarrow K_r = \sqrt{\frac{3}{2}}r$

$\therefore$ घूर्णन त्रिज्या का अनुपात $\frac{K_d}{K_r} = \frac{\sqrt{5/4r}}{\sqrt{3/2r}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

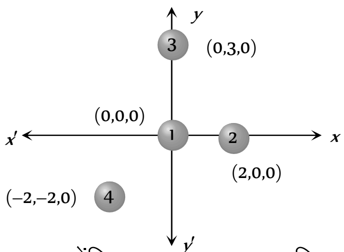
67. (c) यदि त्रिज्या तथा द्रव्यमान समान हैं तो खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण ठोस गोले की अपेक्षा अधिक होगा

$I_A = I_{ठोस} = \frac{2}{5}MR^2 = 0.4\ MR^2$

$I_B = I_{खोखला} = \frac{2}{3}MR^2 = 0.66\ MR^2$

$\therefore\ I_A < I_B$

68. (a)



$I_1 = I_2 = 0$, क्योंकि यह कण x-अक्ष पर स्थित हैं

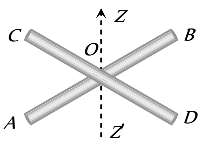
x-अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण $= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$= 0 + 0 + 3\times(3)^2 + 4\times(-2)^2 = 27 + 16 = 43\ kg-m^2$

69. (b) क्योंकि गोले की त्रिज्या वलय की त्रिज्या की अपेक्षा बहुत कम होगी। (यद्यपि द्रव्यमान समान है)

70. (b) नीचे आने का समय ठोस गोले के लिये कम होगा अर्थात् ठोस गोला सबसे पहले नीचे पहुँचेगा

71. (b)

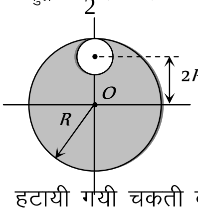


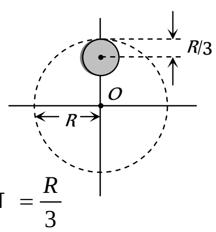
Z-अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$= I_{AB} + I_{CD} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{12} = \frac{ml^2}{6}$

72. (a) बिन्दु 'O' के परितः पूरी चकती का जड़त्व आघूर्ण

$I_{कुल} = \frac{1}{2}(9\ M)\ R^2$ ...(i)





हटायी गयी चकती की त्रिज्या $= \frac{R}{3}$

$\therefore$ हटायी गयी चकती का द्रव्यमान $= \frac{9M}{9} = M$

[चूँकि $M = \pi R^2 t \therefore M \propto R^2$]

चकती का स्वयं की अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= \frac{1}{2}M\left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{MR^2}{18}$

'O के परितः हटायी गयी चकती का जड़त्व आघूर्ण

$I_{हटायी\ गयी\ चकती} = I_{cm} + mx^2 = \frac{MR^2}{18} + M\left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{MR^2}{2}$

कुल चकती का जड़त्व आघूर्ण

$I_{कुल} = I_{हटायी\ गयी\ चकती} + I_{शेष\ चकती}$

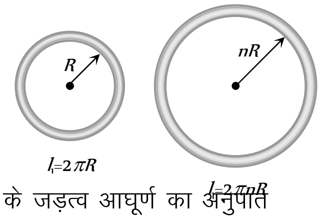
$I_{कुल} = \frac{MR^2}{2} + I_{शेष\ चकती}$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$\frac{MR^2}{2} + I_{शेष\ चकती} = \frac{9\ MR^2}{2}$

$\therefore\ I_{शेष\ चकती} = \frac{9\ MR^2}{2} - \frac{MR^2}{2} = \frac{8\ MR^2}{2} = 4MR^2$

73. (a)



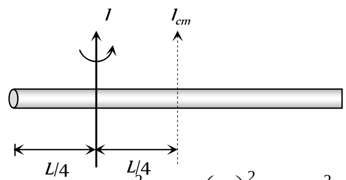
वलयों के जड़त्व आघूर्ण का अनुपात

$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda\, l_1}{\lambda\, l_2}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{2\pi R}{2\pi nR}\right)\left(\frac{R}{nR}\right)^2$

[λ = तार का रैखिक घनत्व = नियत]

$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{8}$ (दिया है) $\Rightarrow n^3 = 8 \Rightarrow n = 2$

74. (d)



$I = I_{cm} + Mx^2 = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{16} = \frac{7ML^2}{48}$

75. (b) संवेग संरक्षण सिद्धांत के अनुसार

$I\omega$ = नियत

जब m द्रव्यमान का श्यान द्रव प्लेटफॉर्म पर गिराया जाता है और यह फैलना शुरू करता है तो इसका जड़त्व आघूर्ण बढ़ता है तथा कोणीय वेग घटता है। परंतु जब यह द्रव प्लेटफॉर्म से नीचे गिर जाता है तो जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है अतः कोणीय वेग पुनः बढ़ जाता है

76. (b) ज्यामितीय अक्ष के परितः बेलन का जड़त्व आघूर्ण $= \frac{1}{2}MR^2$

$= \frac{20\times(0.2)^2}{2} = 0.4\ kg\text{-}m^2$

बल युग्म तथा बल आघूर्ण

1. (a) $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{T}$, $\vec{r}$ तथा $\vec{F}$ दोनों के लम्बवत् है अतः $\vec{r}.\vec{T} = 0$ एवं $\vec{F}.\vec{T} = 0$

2. (c)

3. (b) $\tau = I\alpha$, यदि $\tau = 0$ तो $\alpha = 0$ क्योंकि किसी भी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण शून्य नहीं हो सकता।

4. (c) $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi \times 1800}{60} = 60\pi \ rad/s$

$P = \tau \times \omega \Rightarrow \tau = \frac{P}{\omega} = \frac{100 \times 10^3}{60\pi} = 531 \ N\text{-}m$

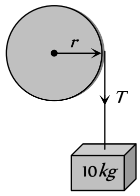
5. (d) $\tau = r \times F$

$= r \times T$

$= r \times m \times g$

$= 0.1 \times 10 \times 9.8$

$= 9.8 \ N\text{-}m$



6. (c)

7. (a) $\vec{\tau} = \frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \frac{L_2 - L_1}{\Delta t} = \frac{4A_0 - A_0}{4} = \frac{3A_0}{4}$

8. (b) बल युग्म दो समान तथा विपरीत बलों से मिलकर बना होता है जिसके कारण सिर्फ घूर्णी गति होती है

9. (c) $\tau = \frac{dL}{dt}$, यदि $\tau = 0$ तो $L =$ नियत

10. (a) बल युग्म तथा बल आघूर्ण घूर्णी गति करते हैं।

11. (a)

12. (a)

13. (a) $\omega_1 = 10 \ rad/s$, $\omega_2 = 0$, $t = 10 s$

$\therefore \ \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\tau} = \frac{0 - 10}{10} = -1 rad/s^2$

ऋणात्मक चिन्ह मंदन को दर्शाता है।

अब $I = mr^2 = 10 \times (0.3)^2 = 0.9 \ kg\text{-}m^2$

$\therefore$ बल आघूर्ण $\tau = I\alpha = 0.9 \times (1) = 0.9 \ N\text{-}m$

14. (c) $\alpha = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = \frac{2\pi\left(0 - \frac{60}{60}\right)}{60} = \frac{-2\pi}{60} = \frac{-\pi}{30} rad/\sec^2$

$\therefore \ \tau = I\alpha = \frac{2 \times \pi}{30} = \frac{\pi}{15} N - m$

15. (a) $\alpha = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = \frac{2\pi(0 - 20)}{10} = -4\pi \ rad/\sec^2$

$\tau = I\alpha = 5 \times 10^{-3} \times 4\pi = 20\pi \times 10^{-3} = 2\pi \times 10^{-2} N - m$

16. (a) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (7\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) \times (-3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k})$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(15 - 1) - \hat{j}(35 + 3) + \hat{k}(7 + 9)$$

$= 14\hat{i} - 38\hat{j} + 16\hat{k}$

17. (d) जिस बिन्दु पर बल आरोपित है उसका स्थिति सदिश

$\vec{r_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

परंतु हमें दूसरे बिन्दु के परितः बल आघूर्ण ज्ञात करना है अतः उस दूसरे बिन्दु के परितः इसका स्थिति सदिश

$\vec{r'_1} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (3\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$= -2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

अब $\vec{\tau} = \vec{r'_1} \times \vec{F} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \times (4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 4 & 6 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(12 + 30) - \hat{j}(-6 - 24) + \hat{k}(10 - 16)$$

$= (42\hat{i} + 30\hat{j} - 6\hat{k}) N\text{–}m$

18. (a) $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{1000}{200} = 5 \ Rad/\sec^2$

$\omega = \omega_o + \alpha t = 0 + 5 \times 3 = 15 \ rad/s$

19. (a) $\omega_1 = 2\pi$ रेडियन/दिन, $\omega_2 = 0$ तथा $t = 1$ दिन

$\therefore \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{0 - 2\pi}{1} = 2\pi \frac{\text{रेडियन}}{\text{दिन}^2} = \frac{2\pi}{(86400)^2} \frac{\text{रेडियन}}{\text{सैकण्ड}^2}$

पृथ्वी की गति को रोकने के लिये आवश्यक बल आघूर्ण

$\tau = I\alpha = FR$

$\Rightarrow F = \frac{I\alpha}{R} = \frac{\frac{2}{5}MR^2 \times \alpha}{R} = \frac{2}{5}MR \times \alpha$

$= \frac{2}{5} \times 6 \times 10^{24} \times 6400 \times 10^3 \times \frac{2\pi}{(86400)^2} = 1.3 \times 10^{22} N$

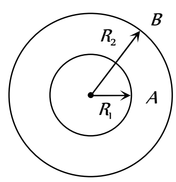
20. (a) $\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{L_2 - L_1}{\Delta t} = \frac{5L - 2L}{3} = \frac{3L}{3} = L$

21. (a) $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{30}{2} = 15 \ \frac{\text{रेडियन}}{\text{सैकण्ड}^2}$

$\Rightarrow \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2} \times (15) \times (10)^2 = 750 \ rad$

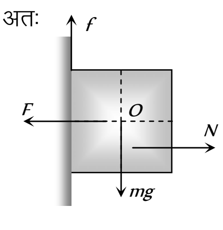
22. (a) अपकेन्द्रीय बल के कारण।

23. (b) माना कि कण A वलय के अंदर की ओर तथा कण B वलय के बाहरी ओर स्थित है। चूँकि वलय एकसमान कोणीय चाल से गति कर रही है अतः दोनों कणों पर अपकेन्द्रीय बल आरोपित होगा



$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_A}{F_B} = \frac{m\omega^2 R_1}{m\omega^2 R_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{R_1}{R_2}$

24. (d) चूँकि ब्लॉक विराम अवस्था में रहता है अतः



स्थानांतरीय संतुलन के लिये

$\Sigma F = 0 \therefore F = N$

तथा $\Sigma F = 0 \therefore f = mg$

घूर्णीय संतुलन के लिये $\Sigma \tau = 0$

सभी बलों के बल आघूर्ण बिन्दु 0 के परितः

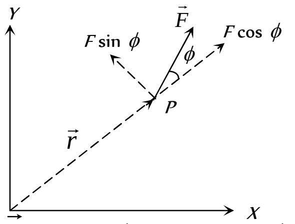
$\vec{\tau}_F + \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{mg} = 0$

चूँकि F तथा mg बिन्दु O से होकर जाते हैं,

$\Rightarrow \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_N = 0$

चूँकि $\vec{\tau}_f \neq 0$, अतः $\vec{\tau}_N \neq 0$ तथा घर्षण एवं अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा उत्पन्न बल आघूर्ण विपरीत दिशाओं में होंगे।

25. (c)

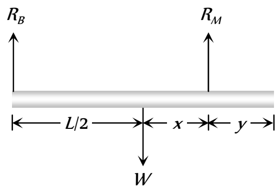


$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\,F\sin\phi \Rightarrow \tau = r\,F\sin\phi$

$F\sin\phi =$ बल का अनुप्रस्थ घटक (Transverse component)

$F\cos\phi =$ बल का त्रिज्य घटक (Radial component)

26. (a)



छड़ का भार = W, लड़के की प्रतिक्रिया $R_B = \frac{W}{4}$,

व्यक्ति की प्रतिक्रिया $R_M = \frac{3W}{4}$

चूँकि छड़ घूर्णीय संतुलन में है $\therefore \Sigma \vec{\tau} = 0$

$R_B \times \frac{L}{2} - R_M \times x = 0 \Rightarrow \frac{W}{4} \times \frac{L}{2} - \frac{3W}{4} \times x = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{6}$

$\therefore$ दूसरे छोर से दूरी, $y = \frac{L}{2} - x$

$\Rightarrow y = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{2L}{6} = \frac{L}{3}$

कोणीय संवेग

1. (c) कैप्लर के द्वित्तीय नियम के अनुसार $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

जहाँ $L =$ कोणीय संवेग, $m =$ ग्रह का द्रव्यमान

$\frac{dA}{dt}$ =सूर्य और ग्रह को मिलाने वाली रेखा की क्षेत्रीय चाल है जो कि नियत है अर्थात् कोणीय संवेग भी नियत होगा।

2. (c) $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, यदि $\tau = 0$ तो $\vec{L} =$ नियत अर्थात् L दिशा तथा परिमाण दोनों में नियत रहेगा

3. (a) वलय का प्रारंभिक कोणीय संवेग, $L = I\omega = Mr^2\omega$

चारों कणों तथा वलय के निकाय का अंतिम कोणीय संवेग

$L = (Mr^2 + 4mr^2)\omega'$

चूँकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है अतः कोणीय संवेग नियत होगा

$Mr^2\omega = (Mr^2 + 4mr^2)\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{M\omega}{M + 4m}$

4. (a) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$, यह हमेशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होता है।

5. (a) कोणीय संवेग, $L = mr^2\omega =$ नियत

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{0.8}{1}\right)^2 = 0.64 \Rightarrow \omega_2 = 44 \times 0.64$

$= 28.16 \frac{rad}{s}$

6. (b)

7. (c) घूर्णन गतिज ऊर्जा $E = \frac{L^2}{2I} \Rightarrow L = \sqrt{2EI}$

$\Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \sqrt{\frac{E_A}{E_B} \times \frac{I_A}{I_B}} = \sqrt{100 \times \frac{1}{4}} = 5$

8. (b) कोणीय संवेग = रेखीय संवेग × रेखीय संवेग की क्रिया रेखा की घूर्णन अक्ष से लंबवत् दूरी $= mv \times l$

9. (c) कोणीय संवेग संरक्षण नियम के अनुसार

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{4}\right)R^2\right)\omega_2$

$\therefore \omega_2 = \frac{4}{5}\omega$

10. (a) निकाय का कोणीय संवेग नियत रहता है

$I \propto \frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{20}{10} \Rightarrow I_2 = 2I_1 = 2I$

11. (d)

12. (a) $L = I\omega = MK^2\omega =$ नियत $\Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$

13. (a) $T \propto R^2$, यदि त्रिज्या का मान आधा कर दें तो आवर्त काल का मान $\frac{1}{4}$ हो जायेगा अर्थात् $\frac{24}{4} = 6$ घंटे

14. (c) कोणीय संवेग $L = I\omega$ नियत

$\therefore I$ का मान बढ़ेगा तो ω का मान घटेगा।

15. (b)

16. (c) चूँकि बल द्रव्यमान केन्द्र पर आरोपित नहीं हो रहा है, तो यह बल आघूर्ण उत्पन्न करेगा अतः रैखिक तथा कोणीय त्वरण दोनों में परिवर्तन होगा।

17. (c) $E = \frac{L^2}{2I} \Rightarrow L = \sqrt{2EI}$

18. (d) अभिकेन्द्रीय बल $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r}\frac{L^2}{m^2r^2} = \frac{L^2}{mr^3}$

[चूँकि $L = mvr \Rightarrow v = \frac{L}{mr}$]

19. (d)

20. (b) चूँकि घूर्णन त्रिज्या का मान घटेगा अतः कोणीय वेग का मान बढ़ेगा।

21. (c) कोणीय संवेग के संरक्षण सिद्धांत के अनुसार $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$

निकाय का कोणीय वेग $\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$

$\therefore$ घूर्णन गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2$

$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\right)^2 = \frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$

22. (d) जब तक इस पर कार्यरत् बल आघूर्ण शून्य है तब तक कोणीय संवेग नियत रहेगा।

23. (a) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

तथा $X-$अक्ष के लिये $\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

इन दोनों सदिशों का अदिश गुणन शून्य है अर्थात् कोणीय संवेग $X-$अक्ष के लम्बवत् होगा।

24. (d) गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2}L\omega = \frac{1}{2}L \times 2\pi\, n \Rightarrow E \propto L \times n$

$\Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{E_2}{E_1} \times \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1}$

$= \left[\frac{E_1/2}{E_1}\right] \times \left[\frac{n_1}{2n_1}\right] \Rightarrow L_2 = \frac{L_1}{4} = \frac{L}{4}$

25. (d) जब हाथों को बाहर की ओर फैलाया जाता है तो जड़त्व आघूर्ण का मान बढ़ जाता है तथा कोणीय वेग का मान घट जाता है इस प्रकार कोणीय संवेग नियत/अपरिवर्तित रहता है

26. (a) $T \propto R^2$, यदि त्रिज्या को आधा कर दिया जाये तो नये आवर्त काल का मान वर्तमान का $1/4$ गुना होगा, अर्थात् 6 घंटे।

अर्थात् दिन 18 घंटे से कम हो जायेगा।

27. (a) $L = \frac{1}{2}MR^2\omega =$ नियत $\Rightarrow \omega \propto \frac{1}{R^2}$ [यदि $m =$ नियत]

यदि त्रिज्या का मान आधा कर दें तो कोणीय वेग का मान चार गुना हो जायेगा।

28. (a)

29. (d) बर्फ के पिघलने से जो पानी उत्पन्न होगा वह घूर्णन अक्ष से अधिक दूरी तक फैलेगा जिसके कारण निकाय का जड़त्व आघूर्ण बढ़ जायेगा तथा कोणीय वेग का मान कम होगा।

30. (b) ऐसा करने पर जड़त्व आघूर्ण का मान घट जाता है अतः कोणीय वेग का मान बढ़ जायेगा।

31. (b) $E = \frac{L^2}{2I}$, यदि लड़का अपने हाथ फैलाता है तो जड़त्व आघूर्ण बढ़ जायेगा और इस तरह निकाय की गतिज ऊर्जा कम होगी क्योंकि $L =$ नियत एवं $E \propto \frac{1}{I}$

32. (d) जड़त्व आघूर्ण का मान कम होगा तथा कोणीय वेग का मान बढ़ेगा।

33. (d) चूँकि $v_{\text{द्रव्यमान केन्द्र}} = 0$ अतः इसका रेखीय संवेग $= 0$

34. (d)

35. (c)

36. (d) $L = I\omega$

37. (a) $L = I\omega = 0.6 \times 2\pi \times \frac{1}{2} = 0.6\pi\, kg - m^2/s$

38. (b) इस क्रिया में I का मान कम होता है तथा ω का मान बढ़ता है।

39. (a) बाह्य बल आघूर्ण की अनुपस्थिति में कोणीय संवेग नियत रहता है।

40. (a) ऐसा करने से वह अपना जड़त्व आघूर्ण कम करता है अतः अपना कोणीय वेग बढ़ा लेता है।

41. (b) $I = mr^2 = 10 \times (0.2)^2 = 0.4\ kg\text{-}m^2$

$\omega = 2\pi\, n = 2\pi \times \frac{2100}{60} rad/s$

$\therefore\ L = I\omega = \frac{0.4 \times 2\pi \times 210}{6} = 88\ kg\text{-}m^2/s$

42. (b) $E = \frac{L^2}{2I}\ \therefore\ E \propto L^2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2$

$\frac{E_2}{E_1} = \left[\frac{L_1 + 200\%\ of\ L_1}{L_1}\right] = \left[\frac{L_1 + 2L_1}{L_1}\right]^2 = (3)^2$

$\Rightarrow E_2 = 9E_1$

गतिज ऊर्जा में वृद्धि $\Delta E = E_2 - E_1 = 9E_1 - E_1$

$\Delta E = 8E_1 \therefore \frac{\Delta E}{E_1} = 8$ अथवा प्रतिशत वृद्धि =800%

43. (d) घूर्णन अक्ष के अनुदिश तथा कक्षीय तल के लम्बवत्

44. (c) कोणीय संवेग संरक्षण के नियम के अनुसार

$\because I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow I_1\omega = (I_1 + I_2)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega}{I_1 + I_2}$

45. (b) चूँकि गोले पर कोई बाह्य बल आघूर्ण कार्य नहीं कर रहा है अतः इसका कुल कोणीय संवेग नियत रहेगा।

46. (a) $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ यदि $\vec{\tau} = 0$ तो $\vec{L} =$ नियत

47. (a)

48. (b) चूँकि कोणीय संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बाह्य बल के बराबर होती है।

49. (a) $L = \sqrt{2EI} = \sqrt{2 \times 10 \times 8 \times 10^{-7}} = 4 \times 10^{-3}\ kg\ ^2/s$

50. (c) $L = I\omega$

51. (d) घूर्णन अक्ष के परितः पृथ्वी का कोणीय संवेग

$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi MR^2}{5T}$$

52. (c) चूँकि मनुष्य घूर्णन अक्ष की ओर चल रहा है अतः निकाय का जड़त्व आघूर्ण कम होगा इसलिये कोणीय वेग का मान बढ़ जायेगा।

53. (a) $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega \propto \frac{1}{r}$

54. (a) अभिकेन्द्रीय बल के कारण कण का रेखीय संवेग निरंतर परिवर्तित होगा परंतु कण पर बल आघूर्ण शून्य होगा अतः कोणीय संवेग नियत रहेगा।

55. (a)

56. (d) कोणीय संवेग, $L = mvr = m\omega r^2 = m \times \frac{2\pi}{T} \times r^2$

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 6 \times 10^{24} \times (1.5 \times 10^{11})^2}{3.14 \times 10^7} = 2.7 \times 10^{40}\ kg\text{-}m^2/s$$

57. (d) $L = \sqrt{2IE}$, यदि E बराबर हैं तो $\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{I}{2I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

58. (c) बाह्य बल की अनुपस्थिति में कोणीय संवेग नियत रहता है

$L = I\omega = I'\omega'$

अथवा $MR^2\omega = (M + 2m)R^2\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{\omega M}{M + 2m}$

59. (c) जब व्यक्ति अपने हाथ सिकोड़ता है तो द्रव्यमान घूर्णन अक्ष के समीप केन्द्रित हो जाता है, जिसके कारण घूर्णन त्रिज्या का मान कम हो जाता है। अतः व्यक्ति का जड़त्व आघूर्ण कम हो जायेगा।

60. (c)

61. (c) केन्द्रीय बल के क्षेत्र में, बल आघूर्ण = 0 अतः कोणीय संवेग नियत रहता है।

कार्य, शक्ति तथा ऊर्जा

1. (d) कुल गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) = 32.8\ J$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times (2)^2\left(1 + \frac{K^2}{(0.5)^2}\right) = 32.8 \Rightarrow K = 0.4\ m$$

2. (d) घूर्णन गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right) \times \omega^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 10 \times (0.5)^2\right) \times (20)^2 = 250\ J$$

3. (b) $\frac{\text{घूर्णन गतिज ऊर्जा}}{\text{कुल गतिज ऊर्जा}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right)}{\frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)} = \frac{K^2}{K^2 + R^2}$

4. (a) $\frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}(0.5)(0.2)^2\left(1 + \frac{2}{5}\right) = 0.014\ J$

5. (c) $\frac{K_R}{K_N} = \frac{K^2/R^2}{1 + K^2/R^2} = \frac{2/5}{1 + 2/5} = 2/7$

6. (b)

7. (b) घूर्णन गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}I\omega^2 = 1500$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 1.2 \times \omega^2 = 1500 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3000}{1.2} \Rightarrow \omega = 50\ rad/s$$

प्रारंभ में वस्तु विराम में है तथा t सैकण्ड पश्चात् इसका कोणीय वेग 50 रेडियन/सैकण्ड हो जाता है

$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow 50 = 0 + 25 \times t \Rightarrow t = 2s$

8. (d) $\frac{\text{कुल गतिज ऊर्जा}}{\text{घूर्णन गतिज ऊर्जा}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}{\frac{1}{2}mv^2\frac{K^2}{R^2}} = \frac{1 + \frac{K^2}{R^2}}{\frac{K^2}{R^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

9. (c) गतिज ऊर्जा $E = \frac{L^2}{2I}$

यदि कोणीय संवेग बराबर है तो $E \propto \frac{1}{I}$

गतिज ऊर्जा $E = K$ (दिया है)

यदि $I_A > I_B$ तो $K_A < K_B$

10. (c) $\frac{\text{घूर्णन गतिज ऊर्जा}}{\text{स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2\frac{K^2}{R^2}}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

11. (d) गोले में घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा रैखिक गतिज ऊर्जा दोनों होती हैं।

12. (c) जब खोखला बेलन बिना घूर्णन किये हुये फिसलता है तब इसमें सिर्फ रैखिक गतिज ऊर्जा होती है, $K_T = \frac{1}{2}mv^2$

जब यह बिना फिसले हुये घूर्णन करता है, तब इसमें दोनों गतिज ऊर्जा होती हैं, $K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$

$$\therefore \frac{K_T}{K_N} = \frac{1}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)} = \frac{1}{2} \quad \left[\text{खोखले बेलन के लिये } \frac{K^2}{R^2} = 1\right]$$

13. (c)

14. (d) $K_R = K_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K^2}{R^2} = 1$

अर्थात् वस्तु एक वलय है।

15. (a) $K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{2}{5}\right) = \frac{7}{10}mv^2$

16. (d) $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 3\times(2)^2 = \frac{1}{2}\times 12\times v^2 \Rightarrow v = 1m/s$

17. (b) $\frac{\text{घूर्णन गतिज ऊर्जा}}{\text{कुल गतिज ऊर्जा}} = \frac{K_R}{K_N} = \frac{\frac{K^2}{R^2}}{1+\frac{K^2}{R^2}} = \frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{2}{7}$

18. (d) $\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right) = 40\%\ \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K^2}{R^2} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

अर्थात् वस्तु एक ठोस गोला है।

19. (b) $K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(2\pi n)^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 72\times(0.5)^2\right)\times 4\pi^2\times\left(\frac{70}{60}\right)^2 = 240\ J$

20. (a) घूर्णन करती हुयी वस्तु की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}I\omega^2$

$= \frac{1}{2}\times 3\times(3)^2 = 13.5\ J$

रैखिक गति करती हुयी वस्तु की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

चूँकि प्रश्नानुसार दोनों समान हैं, अतः

$\frac{1}{2}mv^2 = 13.5 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 27\times v^2 = 13.5 \Rightarrow \therefore v = 1m/s$

21. (d) $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

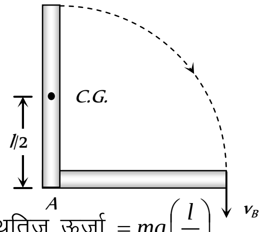
22. (b) चूँकि जमीन के साथ स्पर्श बिन्दु पर घर्षण बल कार्य कर रहा है अतः गतिज ऊर्जा नियत नहीं रहेगी। परंतु स्पर्श बिन्दु के परितः इस बल का बल आघूर्ण शून्य होगा। अतः गोले का स्पर्श बिन्दु के परितः कोणीय संवेग नियत रहेगा।

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, यदि $\vec{\tau} = 0$ तो $\vec{L} =$ नियत

23. (d) $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\times(50)^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times 1\times(0.03)^2\times(50)^2 = \frac{9}{20}\ J$

24. (b) इस प्रक्रिया में छड़ी की स्थितिज ऊर्जा, घूर्णन गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होगी



छड़ी की स्थितिज ऊर्जा $= mg\left(\frac{l}{2}\right)$

क्योंकि छड़ का गुरुत्व केन्द्र मध्य बिन्दु पर स्थित होगा।

घूर्णन गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2}I\omega^2$

$I =$ छड़ी का बिन्दु A के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \frac{ml^2}{3}$

$\omega =$ जमीन से टकराते समय छड़ का कोणीय वेग

$v_B =$ जमीन से टकराते समय छड़ी के B सिरे का वेग

ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत के अनुसार,

$mg\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\left(\frac{v_B}{l}\right)^2$

हल करने पर, $v_B = \sqrt{3gl} = \sqrt{3\times 10\times 1} = 5.4\ m/s$

25. (c) $K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times(1)^2\times\left(1+\frac{2}{5}\right) = 0.7\ J$

26. (d) $K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}+1\right) = \frac{1}{2}\times 2\times(0.5)^2\times\left(\frac{2}{3}+1\right) = 0.42\ J$

27. (b) $E = K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

यदि कोणीय वेग समान हों तो $E \propto I$

चूँकि $I_1 > I_2$ अतः $E_1 > E_2$

28. (b) $K_R = 50\%\ K_T$

$\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{50}{100}\times\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \therefore \frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$

अर्थात् वस्तु एक ठोस बेलन होगी।

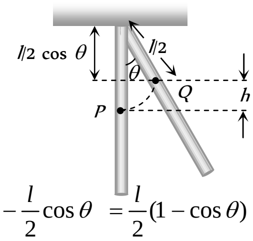
29. (a) किया गया कार्य = घूर्णन गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$= \frac{1}{2}I\times(\omega_1^2 - \omega_2^2) = \frac{1}{2}I\times 4\pi^2(n_1^2 - n_2^2)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{9.8}{\pi^2}\times 4\pi^2(10^2 - 5^2) = 9.8\times 2\times 75 = 1470\ J$

30. (b) $K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\times 0.41\times(2)^2\times\left(\frac{3}{2}\right) = 1.23\ J$

31. (d) छड़ी का द्रव्यमान केन्द्र उसके मध्य बिन्दु पर स्थित है। जब छड़ी को 60° के कोण से विस्थापित करते हैं तो यह प्रारंभिक स्थिति से 'h' ऊँचाई तक उठता है



चित्र से $h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta = \frac{l}{2}(1-\cos\theta)$

अतः छड़ी की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि = mgh

$= mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$

$= 0.4\times 10\times\frac{1}{2}(1-\cos 60^o) = 1\ J$

नत समतल पर घूर्णन

1. (a) $a=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}}=\frac{5}{7}g\sin\theta$

2. (b) $v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{K^2}{R^2}}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$

3. (a) नीचे आने में लगा समय $t=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$

ठोस गोले के लिये $\frac{K^2}{R^2}=\frac{2}{5}$

खोखले गोले के लिये $\frac{K^2}{R^2}=\frac{2}{3}$

चूँकि $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)_{\text{खोखला}}>\left(\frac{K^2}{R^2}\right)_{\text{ठोस}}$ अर्थात् नीचे पहुँचने के लिये ठोस गोला कम समय लेगा।

4. (d) चूँकि नत समतल घर्षण हीन है अतः सभी पिण्ड समान त्वरण $g\sin\theta$ से नीचे की तरफ फिसलेंगे।

5. (d) $a=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}}=\frac{g/2}{7/5}=\frac{5g}{14}$

चूँकि $\theta=30^\circ$ तथा $\frac{K^2}{R^2}=\frac{2}{5}$

6. (b) हम जानते हैं कि $v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{k^2}{r^2}}}\Rightarrow\omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{2gh}{r^2+k^2}}$

$\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{2mgh}{mr^2+mk^2}}=\sqrt{\frac{2mgh}{mr^2+I}}=\sqrt{\frac{2mgh}{I+mr^2}}$

7. (a) $v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{K^2}{R^2}}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2}{5}}}=\sqrt{\frac{10}{7}gh}$

8. (a) $v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{K^2}{R^2}}}=\sqrt{\frac{2\times10\times2}{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{26.66}=5.29\ m/s$

9. (d) कोणीय चाल $\omega=\frac{v}{R}=\frac{5.29}{0.15}=34\ rad/\sec$

10. (b) नीचे आने में लगा समय $\propto\frac{K^2}{R^2}$

$\frac{K^2}{R^2}$ के मान का क्रम, गोला (0.4) < चकती (0.5) < वलय (1.0)

अर्थात् जमीन पर सबसे पहले गोला तथा सबसे अंत में वलय पहुँचेगी।

11. (c) जब m द्रव्यमान की वस्तु नत समतल से नीचे फिसलती है तो $v=\sqrt{2gh}$

जब यह वलय के रूप में हो तो

$v_{\text{वलय}}=\sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+1}}=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2}}=\frac{v}{\sqrt{2}}$

12. (a) क्योंकि इसके जड़त्व आघूर्ण का मान (अथवा $\frac{K^2}{R^2}$ का मान) गोले के लिये न्यूनतम होता है।

13. (a,d) नीचे आने का समय घूर्णन त्रिज्या के मान पर अथवा जड़त्व आघूर्ण पर निर्भर करता है। वास्तव में घूर्णन त्रिज्या किसी वस्तु के जड़त्व आघूर्ण की ही माप होती है।

14. (d) $K_T=K_R\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{K^2}{R^2}\right)\Rightarrow\ \frac{K^2}{R^2}=1$

K^2/R^2 का यह मान खोखले बेलन से मेल खाता है।

15. (a) खोखले बेलन का जड़त्व आघूर्ण अधिक होता है अतः यह नीचे आने में सबसे अधिक समय लेगा।

16. (c) $a=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}=\frac{g\sin30^\circ}{1+1}=\frac{g}{4}$

17. (a) $a=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}=\frac{g\sin30^\circ}{1+\frac{1}{2}}=\frac{g/2}{3/2}=\frac{g}{3}$

18. (b) चूँकि वस्तु चिकने (घर्षणहीन) तल पर गति कर रही है अतः इसकी यांत्रिक ऊर्जा नियत रहेगी। जब वस्तु नत समतल पर ऊपर जायेगी तब भी यह समान कोणीय चाल से गति करेगी क्योंकि मंदक बल आघूर्ण प्रदान करने के लिये कोई घर्षण बल उपस्थित नहीं है अतः

$\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv^2\geq\frac{1}{2}I\omega^2+mgh\Rightarrow v\geq\sqrt{2gh}$

Critical Thinking Questions

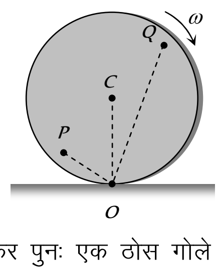
1. (a) प्रारंभ में दोनों कण विराम में हैं इसलिये द्रव्यमान केन्द्र का वेग शून्य होगा तथा निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है अतः इसके द्रव्यमान केन्द्र का वेग नियत रहेगा अर्थात् शून्य होगा।

2. (a) चूँकि चकती बिना फिसले घूर्णन गति कर रही है (बिन्दु O के परितः) अतः

$OQ>OC>OP$

$\because v=r\omega$

$\therefore\ v_Q>v_C>v_P$



3. (c) प्रश्नानुसार चकती को पिघलाकर पुनः एक ठोस गोले के रूप में बनाया जाता है इसलिये उनका द्रव्यमान समान होगा

$V_{\text{चकती}}=V_{\text{गोला}}\Rightarrow\pi R^2_{\text{चकती}}t=\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{गोला}}$

$\Rightarrow\pi R^2_{\text{चकती}}\left(\frac{R_{\text{चकती}}}{6}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{गोला}}$ $\left[t=\frac{R_{\text{चकती}}}{6}, \text{दिया है}\right]$

$\Rightarrow R^3_{चकती} = 8\,R^3_{गोला} \Rightarrow R_{गोला} = \frac{R_{चकती}}{2}$

चकती का जड़त्व आघूर्ण $I_{चकती} = \frac{1}{2}MR^2_{चकती} = I$ (दिया है)

$\therefore\; M(R_{चकती})^2 = 2I$

गोले का जड़त्व आघूर्ण $I_{गोला} = \frac{2}{5}MR^2_{गोला}$

$= \frac{2}{5}M\left(\frac{R_{चकती}}{2}\right)^2 = \frac{M}{10}(R_{चकती})^2 = \frac{2I}{10} = \frac{I}{5}$

4. (a) चकती का कुल द्रव्यमान होगा $4\,M$ तथा दिये गये अक्ष के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण होगा $\frac{1}{2}(4M)R^2$

दिये गये भाग के लिये समान अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण इस मान का $\frac{1}{4}$ गुना होगा अर्थात् $\frac{1}{2}MR^2$

5. (d) तार का प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान (रैखिक घनत्व) $= \rho$

L लंबाई का द्रव्यमान, $M = \rho L$

चूँकि L लंबाई का तार वृत्ताकार लूप के रूप में जोड़ा जाता है अतः $2\pi R = L \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi}$

दिये गये अक्ष के परितः लूप का जड़त्व आघूर्ण $= \frac{3}{2}MR^2$

$= \frac{3}{2}\rho L\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{3\rho L^3}{8\pi^2}$

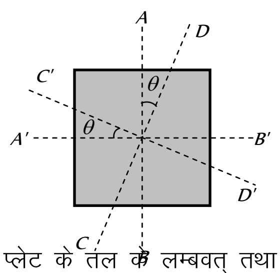
6. (b) चकती का जड़त्व आघूर्ण $= \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{M}{\pi t\rho}\right) = \frac{1}{2}\frac{M^2}{\pi t\rho}$

(चूँकि $\rho = \frac{M}{\pi R^2 t}$ अतः $R^2 = \frac{M}{\pi\, t\rho}$)

यदि द्रव्यमान तथा ऊँचाई समान है तो, $I \propto \frac{1}{\rho}$

$\therefore\; \frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{3}{1}.$

7. (a)



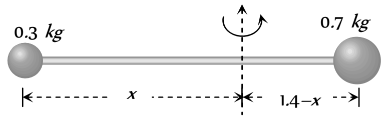
माना कि प्लेट के तल के लम्बवत् तथा इसके केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के परितः वर्गाकार प्लेट का जड़त्व आघूर्ण I_Z है। अतः लम्बवत् अक्ष प्रमेय के अनुसार $I_Z = I_{AB} + I_{A'B'}$ तथा

$I_Z = I_{CD} + I_{C'D'}$ चूँकि अक्ष सममित हैं अतः $I_{AB} = I_{A'B'} = \frac{I_Z}{2}$

तथा $I_{CD} = I_{C'D'} = \frac{I_Z}{2}$

अतः हम कह सकते हैं $I_{AB} = I_{A'B'} = I_{CD} = I_{C'D'} = I$

8. (b) $I = 0.3x^2 + 0.7(1.4 - x)^2$



न्यूनतम कार्य के लिये निकाय का जड़त्व आघूर्ण न्यूनतम होना चाहिये अर्थात् $\frac{dI}{dx} = 0$

$\frac{dI}{dx} = 0.3 \times 2x - 0.7 \times 2\,(1.4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0.98\,m$

9. (a,b,c) लंबवत् अक्ष की प्रमेय का उपयोग करने पर,

$I = I_1 + I_2 = I_3 + I_4$

सममिति के कारण, $I_1 = I_2$ तथा $I_3 = I_4$

अतः $I = 2I_1 = 2I_2 = 2I_3 = 2I_4$ अथवा $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$

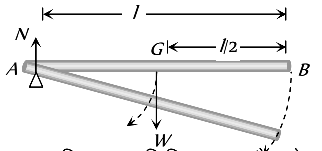
अर्थात् वर्गाकार प्लेट के तल में स्थित (केन्द्र से होकर जाने वाली) दो अक्षों के परितः जड़त्व आघूर्णों का योग उस तीसरी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण के तुल्य होता है जो कि प्लेट के तल के लम्बवत् है तथा तल के केन्द्र से होकर जाती है।

10. (d) सर्वप्रथम हम गुरुत्व केन्द्र के रेखीय त्वरण पर विचार करते हैं। जब व्यक्ति, B से अपना सपोर्ट (Support) हटाता है, तो दण्ड बिन्दु A के परितः कोणीय त्वरण α से घूमती है जोकि $I\alpha = W\frac{l}{2}$ से दिया जाता है।

चूँकि $I = \frac{ml^2}{3}$ तथा $W = mg$, अतः $\alpha = \frac{3g}{2l}$

अतः गुरुत्व केन्द्र का रेखीय त्वरण

$a = \frac{l}{2}\alpha = \frac{l}{2}.\frac{3g}{2l} = \frac{3g}{4}$



अब यदि A पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया N है, तो

$W - N = ma \Rightarrow mg - N = m.\frac{3g}{4} \Rightarrow N = \frac{mg}{4} = \frac{W}{4}$

11. (a) आरोपित बल कोई भी बल आघूर्ण उत्पन्न नहीं करेगा क्योंकि यह केन्द्र से होकर (घूर्णन बिन्दु) गुजरता है और हम जानते हैं कि यदि $\tau = 0$ हो तो $L =$ नियत

12. (a) दिया गया है कि दो कणों का निकाय अपने द्रव्यमान केन्द्र के परितः घूर्णन करता है

प्रारंभिक कोणीय संवेग $= MV\left(\frac{L}{2}\right)$

अंतिम कोणीय संवेग $= 2I\omega = 2M\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega$

कोणीय संवेग संरक्षण के अनुसार

$MV\left(\frac{L}{2}\right) = 2M\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{L}$

13. (b) वलय का प्रारंभिक कोणीय संवेग $L = I\omega = MR^2\omega$

निकाय (वलय + दोनों कण) का अंतिम कोणीय संवेग

$= (MR^2 + 2mR^2)\omega'$

चूँकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत् नहीं है अतः

$MR^2\omega = (MR^2 + 2mR^2)\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{M\omega}{(M+2m)}$

14. (a,b,c) $\vec{\tau} = \vec{A}\times\vec{L}$ अर्थात् $\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \vec{A}\times\vec{L}$

इसका अर्थ है कि $\frac{\overrightarrow{dL}}{dt}$, $\vec{A}$ तथा $\vec{L}$ दोनों के लम्बवत् है अतः विकल्प (a) सही है।

अब $\vec{L}.\vec{L} = L^2$

समय के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\vec{L}.\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dL}}{dt}.\vec{L} = 2L\frac{dL}{dt} \Rightarrow 2\vec{L}.\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = 2L\frac{dL}{dt}$ .....(i)

परंतु $\vec{L}\perp\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} \Rightarrow \vec{L}.\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = 0$

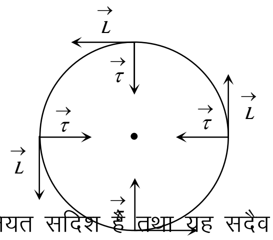
अतः समीकरण (i) से $\frac{dL}{dt} = 0$

अर्थात् $\vec{L}$ का परिमाण अर्थात् L समय के साथ परिवर्तित नहीं हो रहा है अतः विकल्प (c) सही है।
यहाँ तक हम दो बिन्दुओं के बारे में निश्चित रूप से कह सकते हैं।

प्रथम : $\vec{\tau}$ अथवा $\frac{\overrightarrow{dL}}{dt}\perp\vec{L}$

द्वितीयः $|\vec{L}|$ अथवा L समय के साथ परिवर्तित नहीं हो रहा है

अतः इस स्थिति में, जब $\vec{L}$ की दिशा में परिवर्तन हो रहा है परंतु इसका परिमाण नियत है, $\vec{\tau}$ सभी बिन्दुओं पर $\vec{L}$ के लम्बवत् होगा।



अब $\vec{A}$ एक नियत सदिश है तथा यह सदैव $\vec{\tau}$ के लम्बवत् है अतः $\vec{A}$ को लिखा जा सकता है

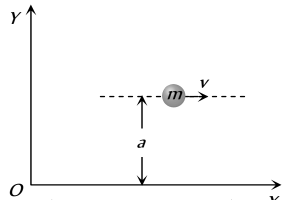
$\vec{A} = A\hat{k}$ [तल के लम्बवत्]

हम देख सकते हैं कि $\vec{L}.\vec{A} = 0$ अर्थात् $\vec{L}\perp\vec{A}$

अतः हम कह सकते हैं कि $\vec{L}$ का $\vec{A}$ के अनुदिश घटक शून्य है अथवा $\vec{L}$ का $\vec{A}$ के अनुदिश घटक सदैव नियत है।

अंत में हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\vec{\tau}, \vec{A}$ तथा $\vec{L}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

15. (b)



मूल बिन्दु के परितः कण का कोणीय संवेग

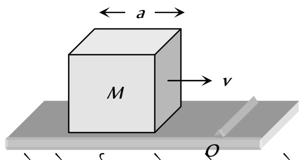
= रेखीय संवेग × रेखीय संवेग की क्रिया रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी

$= mv\times a = mva =$ नियत

16. (b) जब मोती (beads) नीचे फिसलते हैं तो निकाय का जड़त्व आघूर्ण बढ़ जाता है तथा कोणीय वेग घट जाता है। परंतु निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है क्योंकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है।

निकाय की कुल ऊर्जा भी संरक्षित रहेगी, क्योंकि निकाय पर कोई ऐसा बल कार्यरत् नहीं है जिससे ऊर्जा में ह्रास हो।

17. (a)



O से टकराने से पूर्व O के सापेक्ष गुटके का कोणीय संवेग $O = Mv\frac{a}{2}$

टकराने पर गुटका O से होकर जाने वाली भुजा के परितः घूमेगा, तब इसका कोणीय संवेग $= I\omega$

कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से,

$Mv\frac{a}{2} = I\omega \Rightarrow Mv\frac{a}{2} = \left(\frac{Ma^2}{6} + \frac{Ma^2}{2}\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{3v}{4a}$

जहाँ I, O से जाने वाले तल के लम्बवत् अक्ष के परितः गुटके का जड़त्व आघूर्ण है

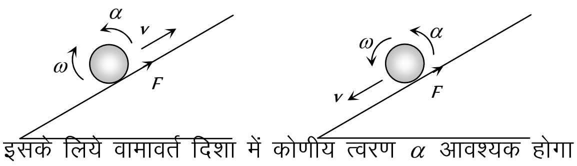
18. (c) मूल बिन्दु के परितः कोणीय संवेग $= L_{रैखिक} + L_{घूर्णन}$

$= MvR + I_c\omega = M(R\omega)R + \frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{3}{2}MR^2\omega$

19. (b) $E = \frac{L^2}{2I} = K$ (दिया गया है) $\therefore K \propto \frac{1}{I}$ (यदि L=नियत)

जब बच्चा हाथों को फैलाता है तो निकाय का जड़त्व आघूर्ण दो गुना हो जाता है अतः गतिज ऊर्जा का मान आधा हो जायेगा अर्थात् $K/2$

20. (b) जब बेलन नत समतल पर ऊपर की ओर घूर्णन करते हुये चढ़ता है तो इसका कोणीय वेग ω दक्षिणावर्त है तथा कम हो रहा है।

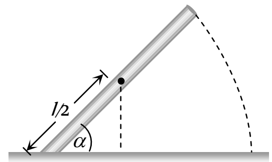


इसके लिये वामावर्त दिशा में कोणीय त्वरण α आवश्यक होगा जो तल के अनुदिश ऊपर की ओर कार्यरत घर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है।

जब बेलन तल के अनुदिश नीचे की ओर घूर्णन करते हुए उतरता है तब इसका कोणीय वेग वामावर्त है तथा बढ़ रहा है, इसके लिये वामावर्त दिशा में कोणीय त्वरण α आवश्यक होगा जो तल के अनुदिश ऊपर की ओर कार्यरत घर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है।

21. (a) ऊर्जा सरंक्षण के नियम से

छड़ की स्थितिज ऊर्जा = घूर्णन गतिज ऊर्जा



$$mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{l}}$, परंतु प्रश्न में छड़ की लंबाई $2L$ दी गयी है अतः $\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{2L}}$

22. (c) चूँकि यहाँ दो समान गेंदों के बीच सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर होगी अतः उनके वेग परस्पर परिवर्तित हो जायेंगे अर्थात् A विराम में आ जाता है तथा B रेखीय वेग v से गति करेगा।

चूँकि सतह घर्षणहीन है, अतः गेंदों पर उनके द्रव्यमान केन्द्र के परितः बल आघूर्ण शून्य होगा तथा उनके कोणीय वेग अपरिवर्तित रहेंगे। अतः $\omega_A = \omega$ तथा $\omega_B = 0$

संघट्ट के पूर्व संघट्ट के पश्चात्

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि टक्कर (संघटट्) के बाद में A गोला घूर्णी गति (बिना रेखीय गति के) करेगा तथा B गोला सिर्फ रेखीय गति (बिना घूर्णन के) करेगा।

ग्राफीय प्रश्न

1. (d) चक्करों की संख्या = समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\times(2.5+5)\times 3000 = 11250 \text{ चक्कर}$$

2. (b) चूँकि यहाँ कोई बाह्य बल आघूर्ण नहीं है अतः कोणीय संवेग नियत रहेगा। जब कछुआ A से C तक चलेगा तब जड़त्व आघूर्ण घटेगा तथा जब यह C से D तक चलेगा तो जड़त्व आघूर्ण बढ़ेगा, अतः जड़त्व आघूर्ण प्रारंभ में घटता है फिर बढ़ता है।

माना कि वृत्ताकार मंच की त्रिज्या R, कछुये का द्रव्यमान m तथा मंच का द्रव्यमान M है।

जब कछुआ बिन्दु A पर है तब जड़त्व आघूर्ण $I_1 = mR^2 + \frac{MR^2}{2}$

जब कछुआ बिन्दु B पर है तब जड़त्व आघूर्ण $I_2 = mr^2 + \frac{MR^2}{2}$

यहाँ $r^2 = a^2 + \left[\sqrt{R^2 - a^2} - vt\right]^2$

कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से $\omega_0 I_1 = \omega_{(t)} I_2$

ऊपर दिखाये गये सूत्र में मान रखने पर हम ज्ञात कर सकते हैं कि कोणीय वेग का परिवर्तन रेखीय रूप से नहीं है।

3. (d) $I = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow I \propto R^2$

इस संबंध से स्पष्ट है कि I तथा R के बीच ग्राफ I- अक्ष के सममित एक परवलय होगा।

4. (c) ग्राफ I-अक्ष के सममित एक परवलय होगा परंतु यह मूल बिन्दु से होकर नहीं गुजरेगा क्योंकि यहाँ $x = 0$ के लिये एक नियत मान I_{cm} है।

5. (a) $L = I\omega \Rightarrow L \propto \omega$ (यदि I = नियत)

अतः L तथा ω के बीच ग्राफ नियत ढाल की एक सरल रेखा होगा।

6. (b) $L = r\,P \Rightarrow \log_e L = \log_e P + \log_e r$

$\log_e L$ तथा $\log_e P$ के बीच ग्राफ एक सरल रेखा होगा जो मूल बिन्दु से होकर नहीं गुजरेगी।

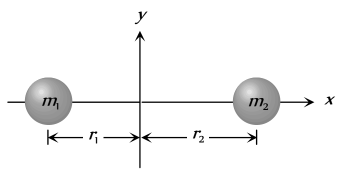
प्रक्कथन एवं कारण

1. (a) यदि निकाय का द्रव्यमान केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित है तो $\vec{r}_{cm} = 0$

$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$

$\therefore\ m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} = 0$

अथवा $m_1 r_1 = m_2 r_2$



यह स्पष्ट है कि यदि $m_1 > m_2$ हो तो $r_1 < r_2$

2. (b)

3. (b) निकाय पर बाह्य बल $F_{\text{बाह्य}} = M\frac{d}{dt}(\vec{v}_{cm})$

यदि निकाय विलगित है अर्थात् $F_{\text{बाह्य}} = 0$ तो $\vec{v}_{cm}$ = नियत

अतः यदि द्रव्यमान केन्द्र का प्रारंभिक वेग शून्य है तो यह शून्य ही रहेगा।

4. (a) चूँकि द्रव्यमान केन्द्र केवल एक सैद्धांतिक संकल्पना (Theoretical concept) है, अतः वास्तव में द्रव्यमान केन्द्र पर कोई द्रव्यमान स्थित नहीं होता है। उदाहरण के लिए एकसमान वृत्ताकार वलय का द्रव्यमान केन्द्र उसके केन्द्र पर होता है जहाँ पर कोई द्रव्यमान नहीं होता।

5. (d) जब कण नियत वेग $\vec{v}$ से गति कर रहा है तब इसके रेखीय संवेग का एक निश्चित् मान होगा। $(\vec{P} = m\vec{v})$

कोणीय संवेग (L) = रेखीय संवेग(P) × रेखीय संवेग की क्रिया रेखा की घूर्णन बिन्दु से लम्बवत् दूरी (d)

अतः यदि $d \neq 0$ तो $L \neq 0$, परंतु यदि $d = 0$ तो L शून्य हो सकता है अतः हम कह सकते हैं कि नियत वेग से गति करते हुये पिण्ड का कोणीय संवेग सदैव शून्य नहीं होता।

6. (a) प्रारंभ में इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन विराम में हैं अतः उनका द्रव्यमान केन्द्र भी विराम में ही होगा। जब वे पारस्परिक आकर्षण के प्रभाव में एक-दूसरे की तरफ गति करते हैं तो उनके द्रव्यमान केन्द्र का वेग शून्य (अपरिवर्तित) ही रहेगा क्योंकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है।

7. (d) वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति उसकी आकृति तथा आकार एवं द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है। द्रव्यमान केन्द्र वस्तु के केन्द्र पर ही स्थित हो, यह आवश्यक नहीं है।

8. (e) गोला प्रारंभ में विराम में है तथा विस्फोट के पश्चात् भी, रेखीय संवेग संरक्षण सिद्धांत के अनुसार, द्रव्यमान केन्द्र विराम में ही रहेगा। जबकि विस्फोट के पश्चात् गोले के भाग भिन्न दिशाओं में इस तरह गति करेंगे कि उनका परिणामी संवेग शून्य होगा।

9. (c) किसी कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र सिर्फ कणों के द्रव्यमान पर तथा कणों की एक दूसरे के सापेक्ष स्थिति पर निर्भर करता है। निर्देश फ्रेम की स्थिति का द्रव्यमान केन्द्र पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

10. (e) इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन के द्रव्यमान केन्द्र में कोई परिवर्तन नहीं होगा क्योंकि उनकी गति स्थिरवैद्युत आकर्षण बल के कारण है जो कि आंतरिक बल है। दोनों कणों पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है अतः द्रव्यमान केन्द्र विराम अवस्था में ही रहेगा।

11. (a) पृथ्वी के केन्द्र पर $g = 0$, अतः पृथ्वी के केन्द्र पर वस्तु का कोई भार नहीं होगा तथा कोई गुरुत्व केन्द्र भी नहीं होगा (वस्तु का गुरुत्व केन्द्र वह बिन्दु होता हैं जहाँ परिणामी आकर्षण बल अथवा वस्तु का भार आरोपित होता है)। परंतु वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र, वस्तु के द्रव्यमान तथा इसके कणों की स्थिति पर निर्भर करता है। द्रव्यमान केन्द्र भार पर निर्भर नहीं करता है।

12. (a) विस्फोट आंतरिक बल के कारण हो रहा है। चूँकि निकाय पर कोई भी बाह्य बल कार्यरत नहीं है अतः द्रव्यमान केन्द्र की ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में गति पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

13. (c) बल आघूर्ण = बल × बल की क्रिया रेखा की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी (d)

अतः किसी आरोपित बल के लिये बल आघूर्ण अथवा घूर्णन की वास्तविक प्रवृत्ति d के अधिक मान के लिये सबसे अधिक होगी। यदि d का मान कम है तो समान बल आघूर्ण उत्पन्न करने के लिये अधिक बल की आवश्यकता होगी। इसलिये कब्जे (Hinge) के समीप बल लगाकर दरवाजे को खोलना अथवा बंद करना कठिन होता है।

14. (e) किसी घूर्णन अक्ष के परितः वस्तु का जड़त्व आघूर्ण, वस्तु के द्रव्यमान तथा पिण्ड से घूर्णन अक्ष की लम्बवत् दूरी के वर्ग के गुणनफल से दिया जाता है। भिन्न-भिन्न अक्षों के लिये कण की दूरी भिन्न होती है। अतः घूर्णन अक्ष के साथ ही वस्तु का जड़त्व आघूर्ण भी परिवर्तित हो जाता है।

15. (e) किसी पिण्ड के जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में अंतर होता है। पिण्ड का जड़त्व सिर्फ उसके द्रव्यमान पर निर्भर करता है परंतु पिण्ड का किसी घूर्णन अक्षः के परितः जड़त्व आघूर्ण सिर्फ द्रव्यमान पर ही नहीं अपितु घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर भी निर्भर करता है।

16. (a) जब पृथ्वी सिकुड़ेगी तो इसका कोणीय संवेग नियत रहेगा अर्थात् $L = I\omega = \frac{2}{5}mR^2 \times \frac{2\pi}{T} =$ नियत

$\therefore\ T \propto I \propto R^2$, इसका अर्थ है कि यदि पृथ्वी का आकार परिवर्तित होता है तो इसका जड़त्व आघूर्ण भी परिवर्तित होगा।

इस प्रश्न में पृथ्वी की त्रिज्या का मान आधा हो जाता है अतः आवर्तकाल (दिन की लंबाई) वर्तमान मान का $\frac{1}{4}$ गुना हो जायेगा अर्थात् $\frac{24}{4} = 6$ घंटे

17. (b) $\tau = r\,F\sin\theta$, यदि $\theta = 90°$ तो $\tau_{max} = rF$

बल आघूर्ण की इकाई न्यूटन-मीटर होती है।

18. (e) वस्तु की घूर्णन त्रिज्या नियत राशि नहीं है। इसका मान घूर्णन अक्ष की स्थिति के साथ परिवर्तित हो जाता है। वस्तु की दी गयी घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या का मान निम्न रूप से दिया जाता है : $K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + ... + r_n^2}{n}}$

19. (b) वृत्ताकार वलय के लिये, द्रव्यमान वलय की परिधि पर केन्द्रित होता है। (घूर्णन अक्ष से अधिकतम दूरी पर होता है) अतः चकती की अपेक्षा वलय का जड़त्व आघूर्ण अधिक हो जाता है।

20. (b) $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ तथा $L = I\omega$

21. (e) वस्तु का जड़त्व आघूर्ण सिर्फ वस्तु के द्रव्यमान पर ही नहीं बल्किघूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर भी निर्भर करता है। कम घनत्व के पदार्थ से बनी चकती का जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा क्योंकि कण घूर्णन अक्ष से अधिक दूरी पर होंगे।

22. (a) नीचे फिसलते समय वस्तु की कुल स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। जबकि घूर्णन करते समय स्थितिज ऊर्जा का कुछ भाग घूर्णन गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाता है अतः वस्तु द्वारा प्राप्त रेखीय वेग कम होता है।

23. (d) घूर्णन में ठोस पिण्ड के सभी बिन्दुओं की कोणीय चाल समान होती है परंतु उनकी रेखीय चाल भिन्न होती है।

24. (c) यदि हैलीकॉप्टर में सिर्फ एक प्रोपलर (Propeller) होगा तो हैलीकॉप्टर स्वयं कोणीय संवेग संरक्षण के कारण प्रोपलर की दिशा के विपरीत दिशा में पलट जायेगा। अतः हैलीकॉप्टर को स्थिर गति प्रदान करने के लिये इसमें दो प्रोपलर होते हैं।

25. (c) $K_N = K_R + K_T$

यह समीकरण बिना फिसले घूर्णन गति करती हुयी वस्तु के लिये सत्य है। वलय तथा खोखले बेलन के लिये,

$K_R = K_T$ अर्थात् $K_N = 2K_T$

26. (b) किसी तल पर घूर्णीय गति घर्षण के कारण होती है जो कि स्पर्श रेखीय बल होता है तथा वस्तु को बल आघूर्ण प्रदान करता है। जब नत समतल घर्षणहीन (चिकना) होगा तो वस्तु उस तल पर अपने भार के कारण बिना कोई घूर्णन किये फिसलेगी।

27. (c) $\tau_{\text{अधिकतम}} = rF$ [जब $\vec{r}$ तथा $\vec{F}$ के मध्य कोण 90° है]

अतः यदि हम लम्बी भुजा का प्रयोग करें तो समान बल से अधिक बल आघूर्ण उत्पन्न किया जा सकता है। इसलिये जंग लगे हुये पेंच (Nut) को खोलना आसान होता है।

घूर्णी गति

SET Self Evaluation Test - 7

1. $5\times10^{-3} kgm^2$ जड़त्व आघूर्ण का एक पहिया 20 चक्कर/सैकण्ड की दर से घूर्णन गति कर रहा है। इसे 20 सैकण्ड में विरामावस्था में लाने के लिये आवश्यक कोणीय मंदन का मान होगा

(a) π रेडियन/सैकण्ड^2 (b) 2π रेडियन/सैकण्ड^2

(c) 4π रेडियन/सैकण्ड^2 (d) 8π रेडियन/सैकण्ड^2

2. एक चकती स्थिर अवस्था से, 10 सैकण्ड में 240 चक्कर/मिनट का कोणीय वेग प्राप्त कर लेती है। इसका कोणीय त्वरण होगा (माना कि यह अचर है)

(a) 1.52 रेडियन/सैकण्ड^2 (b) 2.51 रेडियन/सैकण्ड^2

(c) 3.11 रेडियन/सैकण्ड^2 (d) 3.76 रेडियन/सैकण्ड^2

3. एक गतिपालक चक्र (Flywheel) इस प्रकार बनाया जाता है कि इसका सम्पूर्ण द्रव्यमान परिधि पर केन्द्रित रहता है, क्योंकि

(a) यह चक्र की शाक्ति को बढ़ा देता है

(b) यह चक्र की चाल को बढ़ा देता है

(c) यह चक्र का जड़त्व आघूर्ण बढ़ा देता है

(d) यह चक्र को टूटने से बचाता है

4. 6 किग्रा द्रव्यमान एवं 40 सेमी त्रिज्या का एक पहिया (रिम) 300 चक्कर प्रति मिनट की दर से घूम रहा है। उसका जड़त्व आघूर्ण होगा

(a) 0.092 किग्रा-मी^{2} (b) 0.96 किग्रा-मी^{2}

(c) 2.4 किग्रा-मी^{2} (d) 2.98 किग्रा-मी^{2}

5. उपरोक्त प्रश्न में पहिये के घूर्णन की गतिज ऊर्जा होगी

(a) $48\pi^2$ जूल (b) 48 जूल

(c) 48π जूल (d) $\frac{48}{\pi}$ जूल

6. M द्रव्यमान व $2a$ व्यास के चार गोलों के केन्द्र, b भुजा के वर्ग के चारों कोनों पर रख दिये गये हैं। इस निकाय का, वर्ग की किसी भुजा के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा

(a) $\frac{4}{5}Ma^2+2Mb^2$ (b) $\frac{8}{5}Ma^2+2Mb^2$

(c) $\frac{8}{5}Ma^2$ (d) $\frac{4}{5}Ma^2+4Mb^2$

7. द्रव्यमान केन्द्र G से 'a' दूरी पर m द्रव्यमान का एक दृढ़ पिण्ड कोणीय वेग ω से घूम रहा है। G से गुजरने वाली अक्ष के परितः घूर्णन त्रिज्या K है। इस पिण्ड की नयी समान्तर अक्ष के परितः घूर्णी गतिज ऊर्जा होगी

(a) $\frac{1}{2}mK^2\omega^2$ (b) $\frac{1}{2}ma^2\omega^2$

(c) $\frac{1}{2}m(a^2+K^2)\omega^2$ (d) $\frac{1}{2}m(a+K^2)\omega^2$

8. दो वृत्तीय चकतियों के द्रव्यमान व उनकी मोटाई समान है। परन्तु वे ρ_1 व ρ_2 घनत्व वाले पदार्थों से बनी हैं। इनके केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः इनके जड़त्व आघूर्णों का अनुपात होगा

(a) $\rho_1:\rho_2$ (b) $\rho_1\rho_2:1$

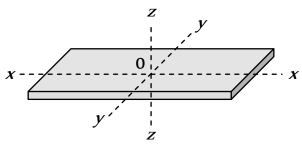
(c) $1:\rho_1\rho_2$ (d) $\rho_2:\rho_1$

9. एक बेलन की त्रिज्या R तथा लम्बाई L है। यदि इसके केन्द्र से होकर जाने वाली तथा इसकी वृत्ताकार सतह के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, उसके केन्द्र से होकर जाने वाली व लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण बराबर हों तब

(a) $L=R$ (b) $L=\sqrt{3}R$

(c) $L=\frac{R}{\sqrt{3}}$ (d) $L=\sqrt{\frac{3}{2}}R$

10. चित्र में दर्शाए गये आयताकार गुटके को बारी-बारी से उसके द्रव्यमान केन्द्र O से जाने वाली $x-x$, $y-y$ तथा $z-z$ अक्षों के परितः घूर्णन कराया जाता है। उसका जड़त्व आघूर्ण



(a) तीनों अक्षों के परितः समान हैं

(b) $z-z$ अक्ष के परितः अधिकतम है

(c) $x-x$ तथा $y-y$ अक्षों के परितः समान है

(d) $y-y$ अक्ष के परितः अधिकतम है

11. हमारे पास दो गोले हैं एक ठोस तथा दूसरा खोखला है। इनके द्रव्यमान तथा व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण समान हैं। इनकी त्रिज्याओं का अनुपात होगा

(a) 5 : 7 (b) 3 : 5

(c) $\sqrt{3}:\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{3}:7$

12. $5\times10^{-3} kg\text{-}m^2$ जड़त्व आघूर्ण का पहिया 20 चक्र/सैकण्ड की दर से घूर्णन गति कर रहा है। इसे 10 सैकण्ड में विरामावस्था में लाने के लिये आवश्यक बल आघूर्ण होगा

(a) $2\pi\times10^{-2}\ N\text{-}m$ (b) $2\pi\times10^{2}\ N\text{-}m$

(c) $4\pi\times10^{-2}\ N\text{-}m$ (d) $4\pi\times10^{2}\ N\text{-}m$

13. यदि पृथ्वी की त्रिज्या अचानक घट जाये तो

(a) पृथ्वी का कोणीय संवेग, सूर्य की अपेक्षा अधिक हो जायेगा

(b) पृथ्वी की कोणीय चाल बढ़ जायेगी

(c) पृथ्वी का आवर्तकाल बढ़ जायेगा

(d) पृथ्वी की ऊर्जा, व कोणीय संवेग स्थिर रहेंगे

14. $m = 5$ इकाई द्रव्यमान का एक कण XOY तल में $Y = X + 4$ रेखा की दिशा में एकसमान चाल $v = 3\sqrt{2}$ इकाई से गति कर रहा है, तो मूल बिन्दु के परितः कोणीय संवेग का परिमाण होगा

(a) शून्य (b) 60 इकाई

(c) 75 इकाई (d) $40\sqrt{2}$ इकाई

15. m द्रव्यमान एवं l लम्बाई की एक छड़ क्षैतिज फर्श पर एक सिरे से कब्जे (Hinge) द्वारा जोड़ दी गई है और यह ऊर्ध्वाधर खड़ी है। इसे अब गिरने दिया जाता है, तो इसका ऊपरी सिरा जिस वेग से फर्श पर टकराता है वह होगा

(a) $\sqrt{2gl}$ (b) $\sqrt{3gl}$

(c) $\sqrt{5gl}$ (d) $\sqrt{mgl}$

16. 50 gm द्रव्यमान एवं 20 सेमी व्यास का एक गोला 5 cm/sec के वेग से बगैर फिसले लुढ़क रहा है। इसकी कुल गतिज ऊर्जा होगी

(a) 625 अर्ग (b) 250 अर्ग

(c) 875 अर्ग (d) 875 जूल

17. एक नत समतल पर समान ऊँचाई से समान त्रिज्या का एक गोला, एक चकती, एक वलय तथा एक खोखला गोला एक साथ लुढ़काया जाता है। नीचे फर्श पर इन वस्तुओं के पहुँचने का क्रम होगा

(a) वलय, खोखला गोला, चकती, गोला

(b) खोखला गोला, गोला, चकती, वलय

(c) गोला, चकती, खोखला गोला, वलय

(d) वलय, गोला, चकती, खोखला गोला

18. एक ठोस गोला व एक चकती, जिनका द्रव्यमान व त्रिज्या समान है, एक चिकने नत सममतल पर समान दूरी तक स्थिर अवस्था से लुढ़कते हैं। इनके द्वारा लिये गये समयों का अनुपात होगा

(a) 15 : 14 (b) $15^2 : 14^2$

(c) $\sqrt{14} : \sqrt{15}$ (d) 14 : 15

19. एक द्रव्यमान रहित धागे की रील गुरुत्व के अधीन गिरती हुई खुलती जाती है। उस (रील) का त्वरण होगा

(a) g (b) $g/2$

(c) $2g/3$ (d) $4g/3$

Answers and Solutions

(SET -7)

1. (b) $n_1 = 20\ rev/s$, $n_2 = 0$, $t = 20\,s$

$$\alpha = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = -\frac{2\pi \times 20}{20} = -2\pi\ rad/sec^2$$

2. (b) $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = \frac{2\pi \times \left[\frac{240}{60} - 0\right]}{10}$

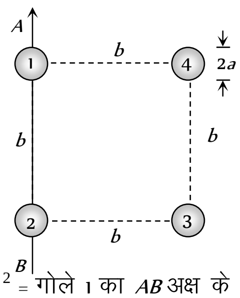
$\therefore \alpha = 2.51\ rad/sec^2$

3. (c)

4. (b) $I = mr^2 = 6 \times (0.4)^2 = 0.96\,kg \times m^2$

5. (a) $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.96) \times \left(2\pi \times \frac{300}{60}\right) = 48\pi^2 J$

6. (b)



$I_1 = \frac{2}{5}Ma^2$ = गोले 1 का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_2 = \frac{2}{5}Ma^2$ = गोले 2 का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_3 = \frac{2}{5}Ma^2 + Mb^2$ = गोले 3 का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_4 = \frac{2}{5}Ma^2 + Mb^2$ = गोले 4 का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

निकाय का AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_{\text{निकाय}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$= 2\left(\frac{2}{5}Ma^2\right) + 2\left(\frac{2}{5}Ma^2 + Mb^2\right) = \frac{8}{5}Ma^2 + 2Mb^2$

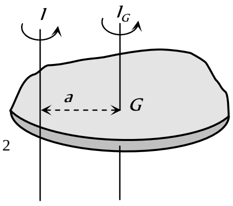
7. (c) वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= I_{cm} = mK^2$

वस्तु का नई समान्तर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I_{\text{नई अक्ष}} = I_{cm} + ma^2 = mK^2 + ma^2$

$I_{\text{नई अक्ष}} = m(K^2 + a^2)$



$K_R = \frac{1}{2}I_{\text{नई अक्ष}}\omega^2 = \frac{1}{2}m(K^2 + a^2)\omega^2$

8. (d) चकती का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{M}{\pi\rho t}\right) = \frac{1}{2}\frac{M^2}{\pi\rho t}$$

$\left(\text{चूँकि } \rho = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{M}{\pi R^2 t} \text{ अतः } R^2 = \frac{M}{\pi\rho t}\right)$

$\therefore I \propto \frac{1}{\rho}$ [यदि M तथा t नियत हैं] $\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

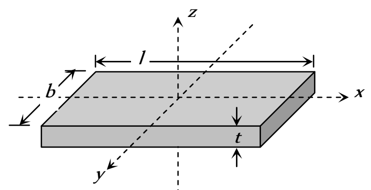
9. (b) केन्द्र से होकर जाने वाली तथा लम्बाई के समांतर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= \frac{MR^2}{2}$

केन्द्र से होकर जाने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right)$

प्रश्नानुसार, $\frac{ML^2}{12} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$

हल करने पर हमें ज्ञात होता है $L = \sqrt{3}R$

10. (b)



x अक्ष के परितः गुटके का जड़त्व आघूर्ण, $I_x = \frac{m}{12}(b^2 + t^2)$

y अक्ष के परितः गुटके का जड़त्व आघूर्ण, $I_y = \frac{m}{12}(l^2 + t^2)$

z अक्ष के परितः गुटके का जड़त्व आघूर्ण, $I_z = \frac{m}{12}(l^2 + b^2)$

चूँकि $l > b > t \Rightarrow I_z > I_y > I_x$

11. (c) $I_{\text{खोखला गोला}} = I_{\text{ठोस गोला}} \Rightarrow \frac{2}{3}M(R_H)^2 = \frac{2}{5}M(R_S)^2$

$\therefore \left(\frac{R_H}{R_S}\right)^2 = \frac{3}{5}$ अथवा $\frac{R_H}{R_S} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

12. (a) $\alpha = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t} = \frac{2\pi(0 - 20)}{10} = -4\pi\ rad/s^2$

ऋणात्मक चिन्ह का अर्थ यहाँ मंदन से है।

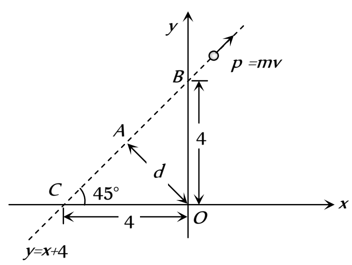
अब $\tau = I\alpha = 5 \times 10^{-3} \times 4\pi = 2\pi \times 10^{-2}\ N\text{-}m$

13. (b) यदि पृथ्वी की त्रिज्या घट जाये तो इसका जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है

चूँकि $L = I\omega \Rightarrow \omega \propto \frac{1}{I}$ [L =नियत]

अर्थात पृथ्वी का कोणीय वेग बढ़ जायेगा।

14. (b)

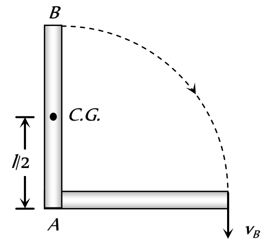


त्रिभुज OAC से, $d = OC\sin 45° = 4\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

कोणीय संवेग = रेखीय संवेग × रेखीय संवेग की क्रिया रेखा की घूर्णन बिन्दु से लम्बवत् दूरी

$L = p\times d = mvd = 5\times 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2} = 60$ इकाई

15. (b) प्रारम्भ में जब छड़ ऊर्ध्वाधर खड़ी है तब स्थितिज ऊर्जा $= mg\,\frac{l}{2}$



जब यह फर्श से टकराती है, तो इसकी स्थितिज ऊर्जा घूर्णन ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है

$mg\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}I\omega^2$ [यहाँ, $I = \frac{ml^2}{3} =$ बिन्दु A के परितः छड़ का जड़त्व आघूर्ण]

$\therefore\ mg\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\left(\frac{v_B}{l}\right)^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{3gl}$

16. (c) $K_N = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\times 50\times(5)^2\times\left(1+\frac{2}{5}\right) = 875$ अर्ग

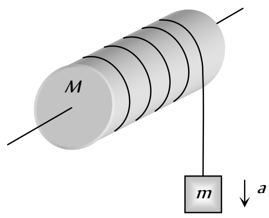
17. (c) $I_{\text{गोला}} < I_{\text{चकती}} < I_{\text{खोखला गोला}} < I_{\text{वलय}}$

हम जानते हैं कि जिस वस्तु का जड़त्व आघूर्ण न्यूनतम होगा वह सबसे पहले जमीन पर पहुँचेगी तथा अधिकतम जड़त्व आघूर्ण वाली वस्तु सबसे अन्त में जमीन पर पहुँचेगी।

18. (c) $t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{t_S}{t_D} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{K^2}{R^2}\right)_S}{1+\left(\frac{K^2}{R^2}\right)_D}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{14}{15}}$

19. (c)



$a = \frac{g}{1+\frac{K^2}{R^2}}$ [ठोस बेलन के लिये $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$]

$\therefore\ a = \frac{g}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g$

***