સારાંશ

- સંકલન એ વિકલનની વ્યસ્તક્રિયા છે. વિકલ ગણિતમાં આપેલ વિધેયનું વિકલિત શોધવાનું હોય છે. જ્યારે સંકલ ગણિતમાં વિધેયનું વિકલિત આપેલ હોય અને તેના પરથી આપણે મૂળ વિધેય શોધવાનું હોય છે. આમ, સંકલન એ વિકલનની ક્રિયાની વ્યસ્ત ક્રિયા છે.

  જો $\frac{d}{dx}(\mathrm{F}(x)) = f(x)$ હોય, તો આપણે $\int f(x)\, dx = \mathrm{F}(x) + c$. લખીએ છીએ. આ સંકલિતને અનિયત સંકલિત કે વ્યાપક સંકલિત કહે છે. c એ સંકલનનો અચળ છે. આ બધા સંકલિતોમાં અચળનો તફાવત હોય છે.

- ભૌમિતિક દૃષ્ટિએ અનિયત સંકલિત એ વક્રોના પરિવારનો સમૂહ છે. આ સમુદાયના બધા સભ્યોને Y-અક્ષની સાપેક્ષ સમાંતર ઉપર કે નીચે સ્થાનાંતરિત કરી મેળવી શકાય છે.

- અનિયત સંકલનના કેટલાક ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

  (i) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

  (ii) કોઈ વાસ્તવિક અચળ k માટે, $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

  વ્યાપક રીતે, $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ વિધેયો હોય અને $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો

  $$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\, dx$$
  $$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\, dx$$

- સંકલિતનાં કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો

  (i) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$. વિશિષ્ટ વિકલ્પ $\int dx = x + c$

  (ii) $\int cos\ x\, dx = sin\ x + c$

  (iii) $\int sin\ x\, dx = -cos\ x + c$

  (iv) $\int sec^2 x\, dx = tan\ x + c$

  (v) $\int cosec^2 x\, dx = -cot\ x + c$

  (vi) $\int sec\ x\ tan\ x\, dx = sec\ x + c$

  (vii) $\int cosec\ x\ cot\ x\, dx = -cosec\ x + c$

  (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x + c$

  (ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -cos^{-1}x + c$

  (x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}x + c$

  (xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -cot^{-1}x + c$

  (xii) $\int e^x\, dx = e^x + c$

  (xiii) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

  (xiv) $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = sec^{-1}x + c$

  (xv) $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -cosec^{-1}x + c$

  (xvi) $\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x| + c$

◆ **આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત :**

આપણે યાદ કરીએ કે સંમેય વિધેય $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ એ બે બહુપદીઓનું ભાગફળ છે. $P(x)$ અને $Q(x)$ એ x માં બહુપદીઓ છે અને $Q(x) \neq 0$. જો $P(x)$ ની ઘાત $Q(x)$ ની ઘાત કરતા વધુ (કે એટલી જ) હોય, તો $P(x)$ ને $Q(x)$ વડે ભાગીશું કે જેથી $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

અહીં, $T(x)$ એ એક બહુપદી છે અને $P_1(x)$ ની ઘાત $Q(x)$ ની ઘાત કરતાં ઓછી છે. $T(x)$ બહુપદી હોવાથી તેનું સંકલન સરળતાથી કરી શકાય છે. આપણે $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ ને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે કે તેથી વધુ યોગ્ય પ્રકારનાં સંમેય વિધેયોના સરવાળાના સ્વરૂપમાં આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતે મૂકી તેનું સંકલન કરીશું :

(1) $$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \quad a \neq b$$

(2) $$\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

(3) $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \qquad (a,\ b,\ c \text{ ભિન્ન})$$

(4) $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}, \quad a \neq b$$

(5) જો $x^2 + bx + c$ ના આગળ સુરેખ અવયવો શક્ય ન હોય, તો

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

◆ **સંકલન માટે આદેશની રીત :**

સંકલનના ચલમાં પરિવર્તન કરતાં આપેલ સંકલિત પ્રમાણિત સંકલિતના રૂપમાં રૂપાંતરિત થઈ જાય છે. આમ એક ચલને બીજા ચલમાં પરિવર્તિત કરવાની આ રીતને આદેશની રીત કહે છે. જ્યાં સંકલ્ય ત્રિકોણમિતીય વિધેય ધરાવતું હોય ત્યારે આપણે સંકલન મેળવવા જાણીતા નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરી આપણે નીચે દર્શાવેલ કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો મેળવીએ છીએ :

(i) $\int tan\ x\ dx = \log |sec\ x| + c$

(ii) $\int cot\ x\ dx = \log |sin\ x| + c$

(iii) $\int sec\ x\ dx = \log |sec\ x + tan\ x| + c$

(iv) $\int cosec\ x\ dx = \log |cosec\ x - cot\ x| + c$

- **કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયોના સંકલિત :**

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ (ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c$ (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c,\ a > 0$ (vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

- **ખંડશ: સંકલન :**

આપેલ વિધેય f_1 અને f_2 માટે

$$\int f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \cdot \int f_2(x)\, dx\right] dx$$

બે વિધેયના ગુણાકારનો સંકલિત = પ્રથમ વિધેય × બીજા વિધેયનું સંકલિત

– {પ્રથમ વિધેયનું વિકલિત × બીજા વિધેયનો સંકલિત} નો સંકલિત

પ્રથમ વિધેય અને બીજા વિધેયની પસંદગી યોગ્ય રીતે થાય તે જરૂરી છે. અહીં, સ્પષ્ટ છે કે જેનું સંકલિત જ્ઞાત હોય તે બીજા વિધેય તરીકે લેવાય.

- $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + c$

- **કેટલાક વિશિષ્ટ પ્રકારના સંકલિત :**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + c, \quad a > 0$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ અથવા $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ પ્રકારનાં સંકલિતોને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રમાણિત સંકલિતમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\, dx$ અથવા $\int \frac{(px + q)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$ પ્રકારનાં સંકલિતોને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પ્રમાણિત સંકલિતમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય :

$$px + q = A \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B = A(2ax + b) + B$$

અહીં, બંને બાજુએ x ના સહગુણક અથવા અચળ પદ સરખાવી A અને Bની કિંમત મેળવવામાં આવે છે.

- આપણે $\int_a^b f(x)\, dx$ ને વક્ર $y = f(x)$, $a \le x \le b$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = a$ અને $x = b$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે. ધારો કે x એ $[a, b]$ માં આવેલ કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે, તો $\int_a^x f(x)\, dx$ ક્ષેત્રફળ વિધેય $A(x)$ દર્શાવે છે. આ ક્ષેત્રફળ વિધેયની સંકલ્પના આપણને નિયત સંકલનના મૂળભૂત પ્રમેય તરફ દોરી જાય છે.

- **સંકલન ગણિતનો પહેલો મૂળભૂત પ્રમેય :**

  ધારો કે ક્ષેત્રફળ વિધેય $A(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ એ $x > a$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે, તો $A'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

- **સંકલન ગણિતનો બીજો મૂળભૂત પ્રમેય :**

  ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે અને F એક એવું વિધેય છે કે પ્રદેશના પ્રત્યેક x માટે,

  $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$, તો $\int_a^b f(x)\, dx = [F(x) + c]_a^b = F(b) - F(a)$.

  આને f નું $[a, b]$ પર નિયત સંકલન કહે છે. a અને b ને સંકલનની સીમાઓ કહે છે. a ને અધઃસીમા અને b ને ઊર્ધ્વસીમા કહે છે.

પ્રકરણ **8**

સંકલનનો ઉપયોગ

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

8.1 પ્રાસ્તાવિક

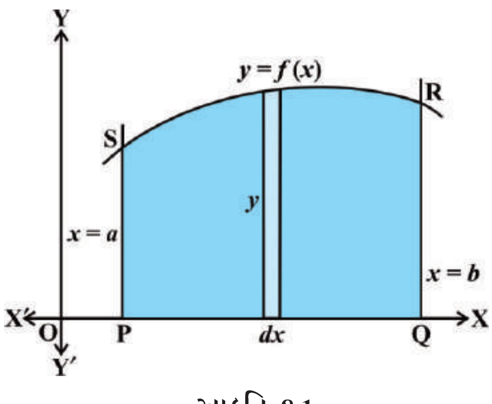
A.L. Cauchy
(C.E. 1789 - C.E. 1857)

ભૂમિતિમાં આપણે ત્રિકોણ, લંબચોરસ, સમલંબ ચતુષ્કોણ અને વર્તુળ જેવી ભૌમિતિક આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ શોધવાનાં સૂત્રો શીખી ગયાં છીએ. વાસ્તવિક જીવનની અનેક સમસ્યાઓના ઉકેલમાં આ સૂત્રોનો ઉપયોગ થતો હોય છે. ભૂમિતિનાં પ્રાથમિક સૂત્રોની મદદથી આપણે સાદી આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ શોધી શકીએ છીએ, પરંતુ આ સૂત્રો વ્યાપક રીતે વક્રથી આવૃત્ત થયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવા પર્યાપ્ત નથી. આ માટે આપણને સંકલન ગણિતની કેટલીક મૂળભૂત સંકલ્પનાની જરૂર પડશે.

આગળના પ્રકરણમાં આપણે વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ એ નિયત સંકલિત છે અને તેની કિંમત સરવાળાના લક્ષ તરીકે કેવી રીતે શોધી શકાય તે શીખી ગયાં. હવે આપણે આ પ્રકરણમાં રેખા અને સાદા વક્રથી આવૃત્ત પ્રદેશ, વર્તુળનું ચાપ, પરવલય કે ઉપવલયથી (પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં) ઘેરાયેલા પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે સંકલનનો કેવી રીતે ઉપયોગ થાય છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે અહીં ઉપર દર્શાવેલ વક્રો વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ શોધીશું.

8.2 સાદા વક્રથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

અગાઉના પ્રકરણમાં આપણે સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલિતનું મૂલ્ય કેવી રીતે લખી શકાય અને નિયત સંકલિતની કિંમત મેળવવાનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત પણ જોયો. હવે, આપણે વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$ અને $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની એક સરળ અને સર્જનાત્મક પદ્ધતિની વિશેષ ચર્ચા કરીશું. આકૃતિ 8.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વક્ર વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ઘણી ઊભી પાતળી પટ્ટીઓનું બનેલું છે તેવું માની લઈએ. હવે, તેમાંની ઊંચાઈ y અને જાડાઈ dx ધરાવતી કોઈ એક પટ્ટી માટે dA (એટલે ઘટક પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ) $= y\, dx$ જ્યાં $y = f(x)$.



આકૃતિ 8.1

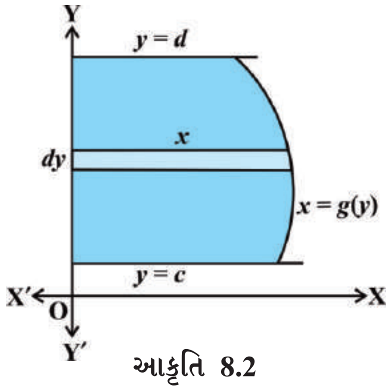
આ ક્ષેત્રફળને ***ઘટક ક્ષેત્રફળ*** કહીશું. આ ક્ષેત્રફળને a અને b ની વચ્ચે આવેલી x ની કોઈ ચોક્કસ કિંમત દ્વારા નિર્ણિત થતા પ્રદેશની અંદર યાદચ્છિક જગ્યાએ આવેલી પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ કહે છે. આપણે આ ઘેરાયેલા ભાગનું કુલ ક્ષેત્રફળ એટલે વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ અને તથા X-અક્ષ દ્વારા ઘેરાયેલા ભાગ PQRSPનું ક્ષેત્રફળ એ આવા ઘટક ક્ષેત્રફળોના સરવાળા તરીકે વિચારી શકાય.

સાંકેતિક રીતે, $A = \int_a^b dA = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

વક્ર $x = g(y)$, રેખાઓ $y = c$ અને $y = d$ તથા Y-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ A નીચે દર્શાવેલ સૂત્ર દ્વારા દર્શાવી શકાય :

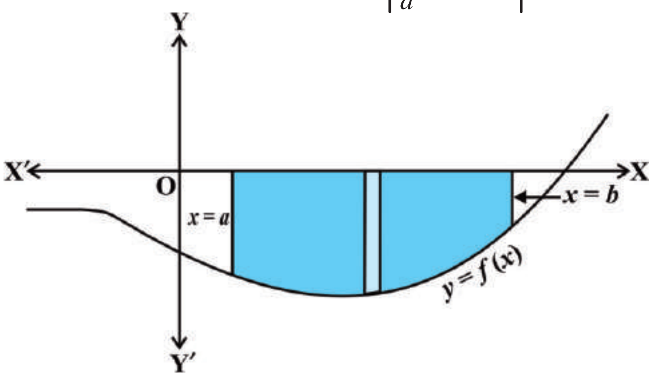
$$A = \int_c^d x\, dy = \int_c^d g(y)\, dy$$

અહીં આકૃતિ 8.2 માં દર્શાવેલ સમક્ષિતિજ પટ્ટીઓ ધ્યાનમાં લઈશું.



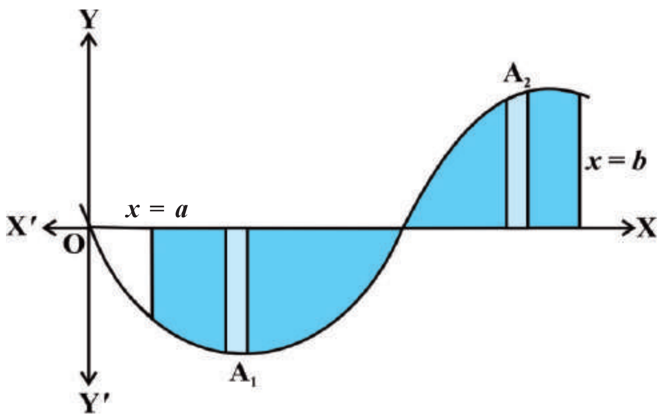
આકૃતિ 8.2

નોંધ : આકૃતિ 8.3 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિચારણામાં લીધેલ વક્ર અક્ષની નીચેના ભાગમાં હોય, તો $x = a$ થી $x = b$ માં $f(x) < 0$ થાય. તેથી વક્ર, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ દર્શાવતા સંકલિતનું મૂલ્ય ઋણ થશે. પરંતુ આપણે તેને ક્ષેત્રફળ દર્શાવતી એક સંખ્યા તરીકે લઈશું. તેથી જો તે સંકલિતનું મૂલ્ય ઋણ હોય, તો આપણે તે કિંમતનો માનાંક લઈશું, એટલે કે $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ ને ક્ષેત્રફળ તરીકે લઈશું.



આકૃતિ 8.3

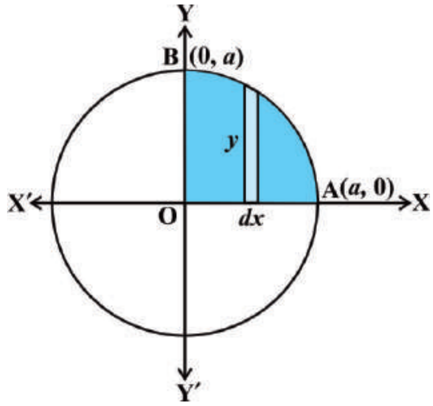
કોઈક વખત આકૃતિ 8.4માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એવું પણ થઈ શકે કે વક્રનો અમુક ભાગ X-અક્ષની ઉપરના ભાગમાં હોય અને અમુક ભાગ X-અક્ષની નીચેના ભાગમાં હોય. અહીં, $A_1 < 0$ અને $A_2 > 0$. આથી વક્ર $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |A_1| + A_2$.



આકૃતિ 8.4

ઉદાહરણ 1 : વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 4 × (આપેલ વક્ર, રેખા $x = 0$, $x = a$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ). (વર્તુળ એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.)



આકૃતિ 8.5

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^a y\,dx$ (શિરોલંબ પટ્ટીઓ લેતાં)

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

હવે $x^2 + y^2 = a^2$ પરથી $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ મળશે. અહીં પ્રદેશ AOBA પ્રથમ ચરણમાં આવેલો છે. તેથી $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ લઈશું. આપણને વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત સમગ્ર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલન કરતાં મળશે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2} \times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pi a^2$$

બીજી રીત : આકૃતિ 8.6 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમક્ષિતિજ પટ્ટીઓ લેતાં, આપેલ વર્તુળ દ્વારા આવૃત્ત સમગ્ર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$= 4\int_0^a x\,dy$$

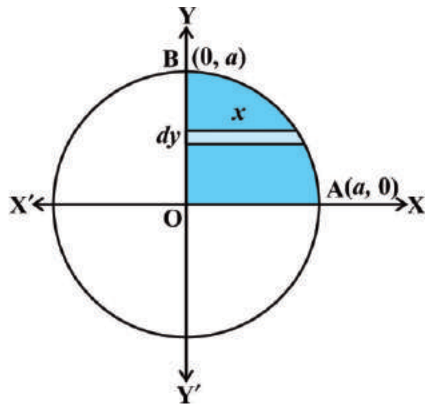
$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \quad \text{(કેમ ?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2} \times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - (0)\right]$$

$$= 4\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi a^2$$



આકૃતિ 8.6

ઉદાહરણ 2 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ થી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.7 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, ઉપવલય દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશ ABA'B'A નું ક્ષેત્રફળ

= 4 × (આપેલ વક્ર, રેખાઓ $x = 0$, $x = a$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ). (ઉપવલય એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.)

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^a y\,dx$ (શિરોલંબ પટ્ટીઓ લેતાં)

હવે, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. આથી, $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

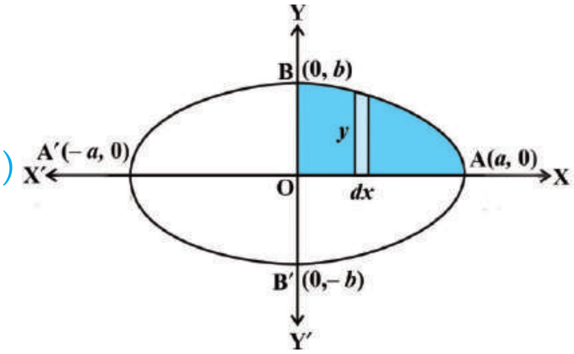
પરંતુ, પ્રદેશ AOBA પ્રથમ ચરણમાં આવેલો હોવાથી y ને ધન લઈશું. આથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(કેમ?)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2} = \pi ab$$



આકૃતિ 8.7

બીજી રીત : આકૃતિ 8.8 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમક્ષિતિજ પટ્ટીઓ લેતાં, ઉપવલયનું ક્ષેત્રફળ

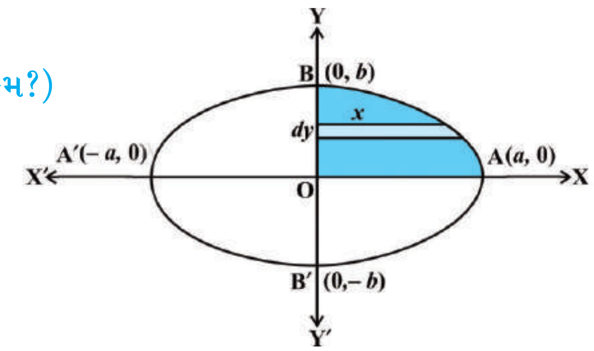
$$= 4\int_0^b x\,dy$$

$$= \frac{4a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2 - y^2}\,dy \quad \text{(કેમ?)}$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0 + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}(1)\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{4a}{b}\,\frac{b^2}{2}\,\frac{\pi}{2} = \pi ab$$



આકૃતિ 8.8

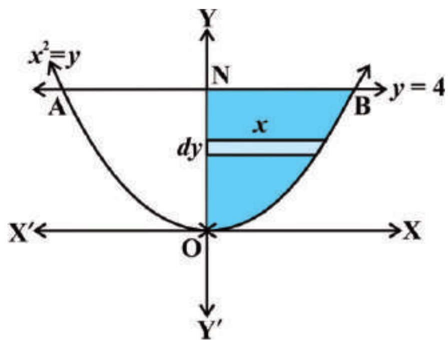
8.2.1 વક્ર અને રેખા વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

આ વિભાગમાં આપણે વર્તુળ અને રેખા, રેખા અને પરવલય, રેખા અને ઉપવલય દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ શોધીશું. અહીં ઉપર દર્શાવેલ વક્રોનાં સમીકરણો પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં જ લઈશું. આ વક્રોનાં સમીકરણોનાં બીજાં સ્વરૂપો પુસ્તકની મર્યાદાની બહાર છે.

ઉદાહરણ 3 : વક્ર $y = x^2$ અને રેખા $y = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $y = x^2$ દ્વારા દર્શાવાતો વક્ર એ Y-અક્ષ પરત્વે સંમિત પરવલય છે. આમ આકૃતિ 8.9 માં દર્શાવેલ પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ

$= 2$ (આપેલ વક્ર, રેખાઓ $y = 0$, $y = 4$ અને Y-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશ BONBનું ક્ષેત્રફળ)



આકૃતિ 8.9

$$= 2\int_0^4 x\,dy$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}\,dy = 2 \times \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3} \times 8 = \frac{32}{3}$$ (કેમ ?)

અહીં, આકૃતિ 8.9 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમક્ષિતિજ પટ્ટીઓ લીધી છે.

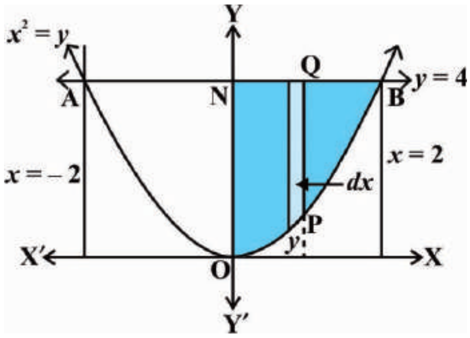
બીજી રીત : અહીં, આપણે પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ શોધવા આકૃતિ 8.10 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે PQ જેવી શિરોલંબ પટ્ટીઓ પણ લઈ શકીએ. આપેલ સમીકરણો $y = x^2$ અને $y = 4$ ઉકેલતાં આપણને $x = -2$ અને $x = 2$ મળશે.

આમ, માંગેલ પ્રદેશ AOBA એ વક્ર $y = x^2$, $y = 4$ તથા રેખાઓ $x = -2$ અને $x = 2$ વડે ઘેરાયેલ પ્રદેશ થશે. આથી માંગેલ પ્રદેશ AOBAનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_{-2}^{2} y\,dx \quad [y = (\text{Q નો } y\text{-યામ}) - (\text{P નો } y\text{-યામ}) = 4 - x^2]$$

$$= 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$ (કેમ ?)

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[4 \times 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}$$



આકૃતિ 8.10

નોંધ : ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી આપણે તારવી શકીએ કે કોઈ પણ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે આપણે સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ પટ્ટીઓ પૈકી કોઈ પણ પટ્ટીઓનો ઉપયોગ કરી શકીએ. હવેથી આગળ આપણે સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ પટ્ટીઓ પૈકી કોઈ પણ એકની ચર્ચા કરશું. શિરોલંબ પટ્ટીઓને આપણે પ્રાથમિકતા આપીશું.

ઉદાહરણ 4 : વર્તુળ $x^2 + y^2 = 32$, રેખા $y = x$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

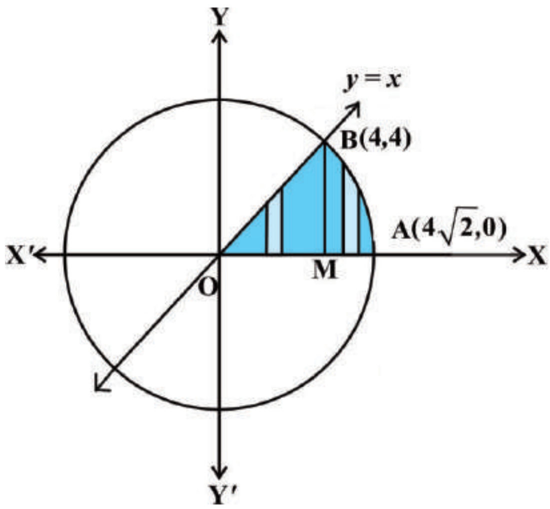
ઉકેલ : આપેલ વક્રો $y = x$ ...(1)

અને $x^2 + y^2 = 32$ ...(2)

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં, આપેલ રેખા અને વર્તુળનું પ્રથમ ચરણનું છેદબિંદુ B(4, 4) મળે. (આકૃતિ 8.11). X-અક્ષ પર લંબ BM દોરો.

∴ માંગેલ ક્ષેત્રફળ =

પ્રદેશ OBMOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BMABનું ક્ષેત્રફળ



આકૃતિ 8.11

હવે, પ્રદેશ OBMOનું ક્ષેત્રફળ $= \int_0^4 y\,dx$

$$= \int_0^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8 \quad ...(3)$$

હવે, પ્રદેશ BMABનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_{4}^{4\sqrt{2}} y\, dx$$

$$= \int_{4}^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1} \frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1} 1\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{32 - 16} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 8\pi - (8 + 4\pi) = 4\pi - 8 \qquad ...(4)$$

(3) અને (4)નો સરવાળો કરતા, માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\pi$

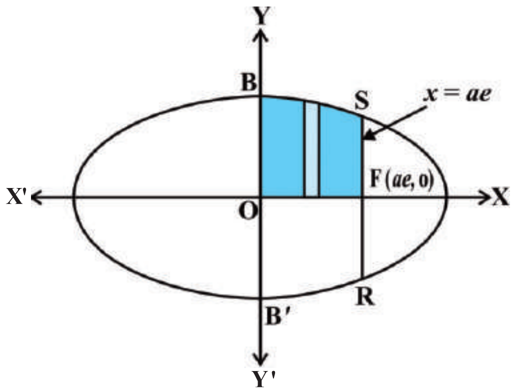
નોંધ : ખરેખર તો $\angle BOM = \frac{\pi}{4}$ માપના ખૂણાવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

$$= \frac{1}{2}(32)\frac{\pi}{4}$$

$$= 4\pi$$

ઉદાહરણ 5 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ અને રેખાઓ $x = 0$ અને $b^2 = a^2(1 - e^2)$ માટે $x = ae$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($e < 1$) ($x = ae$ નાભિલંબને સમાવતી રેખા છે.)

ઉકેલ : ઉપવલય અને રેખા $x = 0$ અને રેખા $x = ae$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું માંગેલ ક્ષેત્રફળ (આકૃતિ 8.12) BOB'RFSB છે.



આકૃતિ 8.12

ક્ષેત્રફળ $= 2\int_{0}^{ae} y\, dx$

$$= \frac{2b}{a}\int_{0}^{ae} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2 - a^2e^2} + a^2 \sin^{-1} e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1 - e^2} + \sin^{-1} e\right]$$

સ્વાધ્યાય 8.1

1. વક્ર $y^2 = x$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 1$ અને $x = 4$ વડે પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. વક્ર $y^2 = 9x$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 2$ અને $x = 4$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. વક્ર $x^2 = 4y$, Y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = 2$ અને $y = 4$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. ઉપવલય $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ થી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. ઉપવલય $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ થી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$, રેખા $x = \sqrt{3}y$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. રેખા $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ દ્વારા વર્તુળાકાર પ્રદેશ $x^2 + y^2 = a^2$ માંથી કપાતા નાના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. રેખા $x = a$ એ $x = y^2$ અને $x = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળનું બે સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે તો a શોધો.

9. પરવલય $y = x^2$ અને $y = |x|$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. વક્ર $x^2 = 4y$ અને રેખા $x = 4y - 2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11. વક્ર $y^2 = 4x$ અને રેખા $x = 3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

પ્રશ્નો 12 તથા 13 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

12. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ અને રેખા $x = 0$ અને $x = 2$ વડે આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

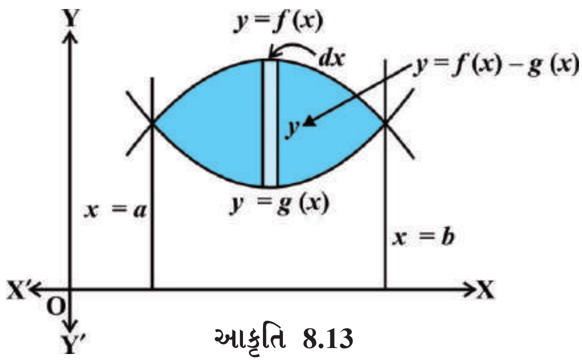
13. વક્ર $y^2 = 4x$, Y-અક્ષ અને રેખા $y = 3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

8.3 બે વક્ર વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

લીબનીટ્ઝની અંતઃસ્ફુરણા પ્રમાણે સંકલન કોઈ એક વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ ગણવાની પ્રક્રિયા છે. તેમાં આ વિસ્તારને ખૂબ નાની-નાની ઘટક પટ્ટીઓમાં વહેંચી આ પટ્ટીઓનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવામાં આવે છે.

ધારો કે $y = f(x)$ અને $y = g(x)$ દ્વારા રજૂ થતા બે વક્રો આપણને આપેલ છે અને આકૃતિ 8.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $[a, b]$ માં $f(x) \geq g(x)$ છે. આ બે વક્રો $x = a$ અને $x = b$ આગળ એકબીજાને છેદે છે. a અને b એ y ના સામાન્ય મૂલ્ય પરથી મેળવવામાં આવેલ છે. સંકલનનું સૂત્ર સ્થાપિત કરવા માટે આપણે ક્ષેત્રફળનું શિરોલંબ પટ્ટીઓમાં વિભાજન કરવું સુવિધાજનક છે. આકૃતિ 8.13માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઘટક પટ્ટીની ઊંચાઈ $f(x) - g(x)$ છે અને પહોળાઈ dx છે. જેથી ઘટક પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ



આકૃતિ 8.13

$dA = [f(x) - g(x)]\, dx$ અને કુલ ક્ષેત્રફળ A નીચે પ્રમાણે લઈ શકાય :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

બીજી રીત :

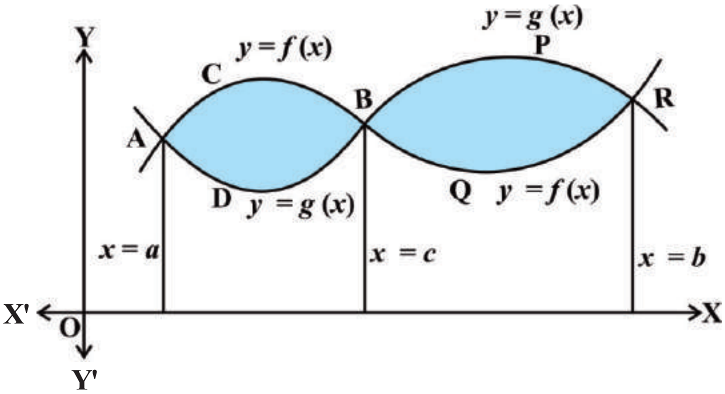
A = [વક્ર $y = f(x)$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = a$ અને $x = b$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ] – [વક્ર $y = g(x)$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = a$ અને $x = b$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ]

$$= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$ જ્યાં $[a, b]$ માં $f(x) \geq g(x)$,

જો $[a, c]$ માં $f(x) \geq g(x)$ અને $[c, b]$માં $f(x) \leq g(x)$ અને $a < c < b$, તો આકૃતિ 8.14 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, તે વક્ર દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

કુલ ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ ACBDA નું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BPRQB નું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_a^c (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\, dx$$



આકૃતિ 8.14

ઉદાહરણ 6 : બે પરવલયો $y = x^2$ અને $y^2 = x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.15 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે પરવલયો O(0, 0) અને A(1, 1) માં છેદશે.

અહીં $y^2 = x$ એટલે $y = \sqrt{x} = f(x)$ અને $y = x^2 = g(x)$. અહીં, $[0, 1]$ માં $f(x) \geq g(x)$ છે.

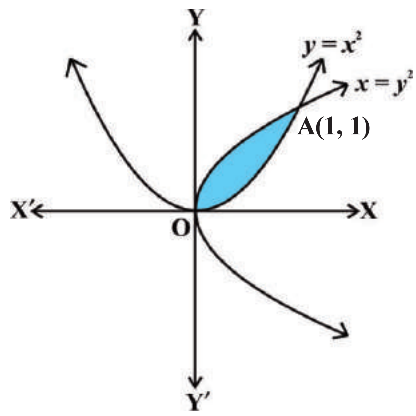
$\therefore$ માંગેલ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$



આકૃતિ 8.15

ઉદાહરણ 7 : X-અક્ષની ઉપરના અર્ધતલમાં આવેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 = 8x$, પરવલય $y^2 = 4x$ અને X-અક્ષથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : વર્તુળના સમીકરણ $x^2 + y^2 = 8x$ ને $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ તરીકે લખી શકાય. આ સમીકરણ $(4, 0)$ કેન્દ્રવાળું તથા 4 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. તેનું તથા પરવલય $y^2 = 4x$ નું છેદબિંદુ મેળવવા માટે,

$$x^2 + 4x = 8x$$

$$\therefore \quad x^2 - 4x = 0$$

$$\therefore \quad x(x - 4) = 0$$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = 4$

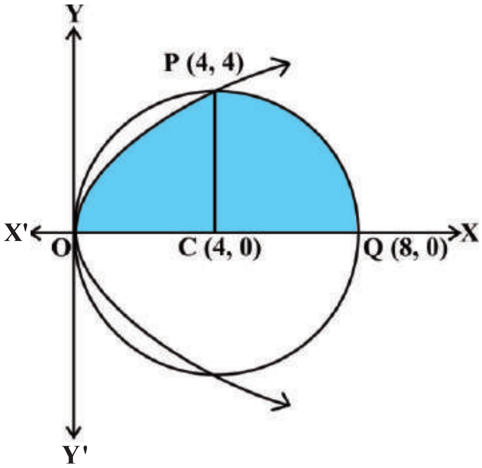
આમ, બંને વક્રો O(0, 0) અને X-અક્ષની ઉપર P(4, 4) બિંદુમાં છેદે છે.

આકૃતિ 8.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે વક્રોની વચ્ચેનો અને X-અક્ષની ઉપરના પ્રદેશ OPQCOનું ક્ષેત્રફળ

= (પ્રદેશ OCPOનું ક્ષેત્રફળ) + (પ્રદેશ PCQPનું ક્ષેત્રફળ)

$$= \int_0^4 y_{\text{પરવલય}}\, dx + \int_4^8 y_{\text{વર્તુળ}}\, dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\, dx + \int_4^8 \sqrt{4^2 - (x-4)^2}\, dx$$ (કેમ ?)



આકૃતિ 8.16

$$= 2 \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 \sqrt{4^2 - t^2}\, dt,$$ જ્યાં, $x - 4 = t$ (કેમ ?)

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{t}{2}\sqrt{4^2 - t^2} + \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin^{-1}\frac{t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{4}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin^{-1}1\right]$$

$$= \frac{32}{3} + \left[0 + 8 \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{32}{3} + 4\pi$$

$$= \frac{4}{3}(8 + 3\pi)$$

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 8.17 માં દર્શાવેલ AOBA એ ઉપવલય $9x^2 + y^2 = 36$ નો પ્રથમ ચરણમાં આવેલો એક ભાગ છે. અહીં OA = 2 અને OB = 6 છે, તો ચાપ AB અને જીવા AB વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ ઉપવલયના સમીકરણ $9x^2 + y^2 = 36$ ને $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ અથવા $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ તરીકે લખી શકાય અને તેનો આકાર આકૃતિ 8.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે થશે.

હવે, જીવા $\overline{AB}$ નું સમીકરણ

$$y - 0 = \frac{6-0}{0-2}(x - 2)$$

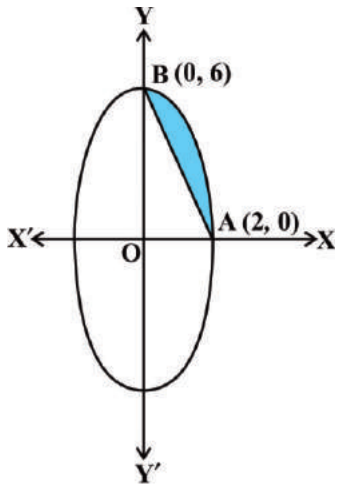
$$\therefore\ y = -3(x - 2)$$

$$\therefore\ y = -3x + 6$$

આકૃતિ 8.17 માં દર્શાવેલ રંગીન ભાગનું ક્ષેત્રફળ

$$= 3\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_0^2 (6 - 3x)\, dx$$ (કેમ ?)

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$



આકૃતિ 8.17

$$= 3\left[\frac{2}{2} \times 0 + 2\sin^{-1}1\right] - \left[12 - \frac{12}{2}\right]$$

$$= 3 \times 2 \times \frac{\pi}{2} - 6 = 3\pi - 6$$

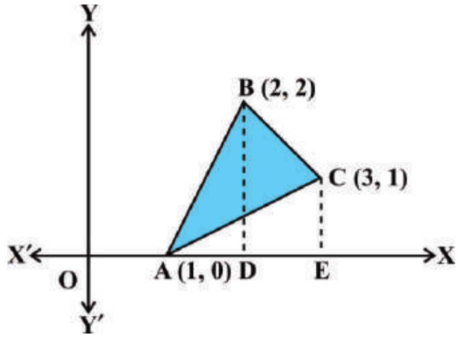
ઉદાહરણ 9 : જેનાં શિરોબિંદુઓ (1, 0), (2, 2) અને (3, 1) હોય તેવા ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનના ઉપયોગથી શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A(1, 0), B(2, 2) અને C(3, 1) એ ત્રિકોણ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.18.)

હવે, ΔABCનું ક્ષેત્રફળ = ΔABDનું ક્ષેત્રફળ + સમલંબ ચતુષ્કોણ BDECનું ક્ષેત્રફળ − ΔAECનું ક્ષેત્રફળ

હવે, બાજુઓ AB, BC અને CA નાં સમીકરણો અનુક્રમે

$y = 2(x - 1)$, $y = 4 - x$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$ થશે.



આકૃતિ 8.18

તેથી,

ΔABCનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_1^2 2(x-1)\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx - \int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3$$

$$= 2\left[\left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[\left(4 \times 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4 \times 2 - \frac{2^2}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

ઉદાહરણ 10 : બે વર્તુળો $x^2 + y^2 = 4$ અને $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ વડે આવૃત્ત સામાન્ય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપેલ બે વર્તુળનાં સમીકરણો $x^2 + y^2 = 4$ ....(1)

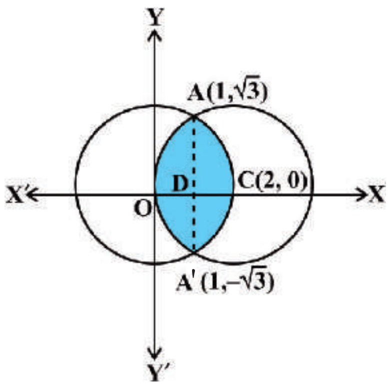
અને $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ છે. ...(2)

સમીકરણ (1) ઊગમબિંદુ O કેન્દ્રવાળું અને 2 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે અને સમીકરણ (2) C(2, 0) કેન્દ્ર અને 2 ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે. સમીકરણો (1) અને (2) ઉકેલતાં,

$$(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$$

$\therefore$ $x = 1$ મળે અને તે પરથી $y = \pm\sqrt{3}$



આકૃતિ 8.19

આમ, આકૃતિ 8.19 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બંને વર્તુળો A(1, $\sqrt{3}$) અને A'(1, $-\sqrt{3}$) બિંદુમાં છેદે છે.

બે વર્તુળો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ એ પ્રદેશ OACA'O નું ક્ષેત્રફળ થશે.

તેથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= 2 [પ્રદેશ ODCAOનું ક્ષેત્રફળ] (કેમ?)

= 2[પ્રદેશ ODAOનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ DCADનું ક્ષેત્રફળ]

$$= 2\left[\int_0^1 y_{\text{વર્તુળ}_1}\, dx + \int_1^2 y_{\text{વર્તુળ}_2}\, dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\, dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\, dx\right] \quad \text{(કેમ ?)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} + 4\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - 4\sin^{-1}(-1)\right] + \left[4\sin^{-1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right) + \left(4\times\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[4\times\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

સ્વાધ્યાય 8.2

1. પરવલય $x^2 = 4y$ અને વર્તુળ $4x^2 + 4y^2 = 9$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. વક્રો $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ અને $x^2 + y^2 = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. વક્રો $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ અને $x = 3$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. શિરોબિંદુઓ $(-1, 0)$, $(1, 3)$ અને $(3, 2)$ થી રચાતા ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. જો ત્રિકોણની બાજુઓનાં સમીકરણો $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ અને $x = 4$ હોય, તો તેના દ્વારા રચાતા ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનના ઉપયોગથી શોધો.

પ્રશ્નો 6 તથા 7 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

6. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ અને રેખા $x + y = 2$ થી આવૃત્ત નાના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

   (A) $2(\pi - 2)$ (B) $\pi - 2$ (C) $2\pi - 1$ (D) $2(\pi + 2)$

7. વક્રો $y^2 = 4x$ અને $y = 2x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 11 : પરવલય $y^2 = 4ax$ અને તેના નાભિલંબથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.20 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરવલય $y^2 = 4ax$ નું શીર્ષ ઊગમબિંદુ (0, 0) છે. નાભિલંબ LSL' નું સમીકરણ $x = a$ છે. વળી, પરવલય X-અક્ષ પરત્વે સંમિત છે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ એ પ્રદેશ OLL'O નું ક્ષેત્રફળ

= 2(પ્રદેશ OSLO નું ક્ષેત્રફળ)

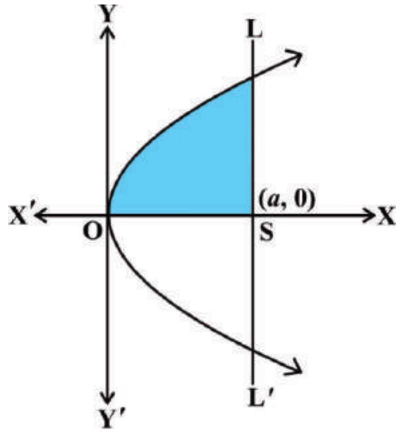
$$= 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2 \times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{a}\left(a^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{3}a^2$$



આકૃતિ 8.20

ઉદાહરણ 12 : રેખા $y = 3x + 2$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = -1$ અને $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.21માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખા $y = 3x + 2$, X-અક્ષને $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$માં છેદે છે અને આ આલેખ $x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ માટે X-અક્ષની નીચે છે અને આલેખ $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ માટે X-અક્ષની ઉપર છે.

માંગેલ ક્ષેત્રફળ

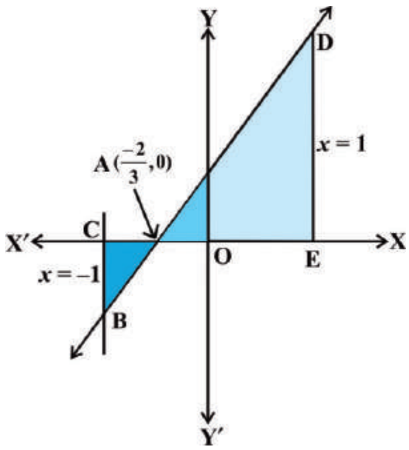
= પ્રદેશ ACBAનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ ADEAનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left|\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} (3x+2)\,dx\right| + \int_{-\frac{2}{3}}^{1} (3x+2)\,dx$$

$$= \left|\left[\frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{-\frac{2}{3}}\right| + \left[\frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{25}{6}$$

$$= \frac{13}{3}$$



આકૃતિ 8.21

ઉદાહરણ 13 : વક્ર $y = \cos x$ ના $x = 0$ અને $x = 2\pi$ વચ્ચે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

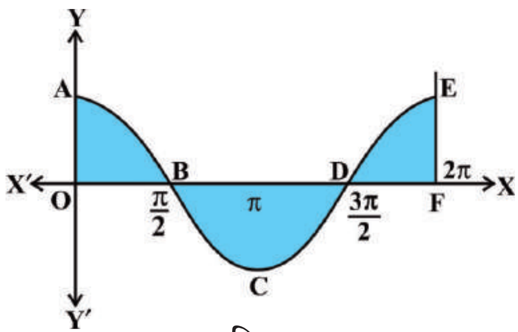
ઉકેલ : આકૃતિ 8.22 પરથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= પ્રદેશ OABO નું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ BCDB નું ક્ષેત્રફળ

+ પ્રદેશ DEFD નું ક્ષેત્રફળ

∴ માંગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx$$



આકૃતિ 8.22

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + \left[\sin x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 1 + 2 + 1$$

$$= 4$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ એ રેખાઓ $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ અને $y = 0$ થી રચાતા ચોરસનું ત્રણ સમક્ષેત્ર ભાગમાં વિભાજન કરે છે.

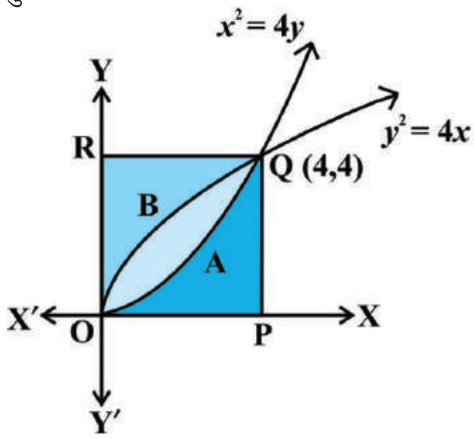
ઉકેલ : આકૃતિ 8.23 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરવલયો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ નાં છેદબિંદુઓ (0, 0) અને (4, 4) છે.

હવે, વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશ OAQBO નું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \left[2 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \qquad ...(1)$$



આકૃતિ 8.23

ફરી, વક્ર $x^2 = 4y$, X-અક્ષ, રેખાઓ $x = 0$ અને $x = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશ OPQAO નું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad ...(2)$$

એ જ રીતે, વક્ર $y^2 = 4x$, Y-અક્ષ, રેખાઓ $y = 0$ અને $y = 4$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશ OBQROનું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^4 x\, dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad ...(3)$$

પરિણામ (1), (2) અને (3) પરથી સાબિત થાય છે કે,

પ્રદેશ OAQBO નું ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ OPQAO નું ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ OBQRO નું ક્ષેત્રફળ

આથી, વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ એ રેખાઓ $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ અને $y = 0$ થી રચાતા ચોરસનું ત્રણ સમક્ષેત્ર ભાગમાં વિભાજન કરે છે.

ઉદાહરણ 15 : $\{(x, y) \mid 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$ થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : પ્રથમ આપણે જે પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવું છે તે પ્રદેશનું આલેખન કરીએ. આ પ્રદેશ નીચે દર્શાવેલ પ્રદેશોથી બનતો મધ્યવર્તી પ્રદેશ છે :

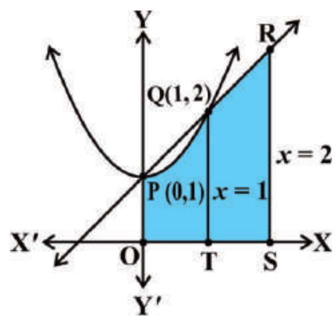
$A_1 = \{(x, y) \mid 0 \le y \le x^2 + 1\}$

$A_2 = \{(x, y) \mid 0 \le y \le x + 1\}$

$A_3 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2\}$

વક્રો $y = x^2 + 1$ અને $y = x + 1$ નાં છેદબિંદુઓ P(0, 1) અને Q(1, 2) છે.

આકૃતિ 8.24 માં દર્શાવેલ રંગીન પ્રદેશ OPQRSTO માંગેલ પ્રદેશ થશે.



આકૃતિ 8.24

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = પ્રદેશ OTQPO નું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ TSRQT નું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x + 1)\, dx \qquad \text{(કેમ ?)}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} + 1\right) - (0)\right] + \left[(2 + 2) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right]$$

$$= \frac{23}{6}$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 8

1. આપેલ વક્ર અને રેખા વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) $y = x^2$; $x = 1$, $x = 2$ અને X-અક્ષ

(ii) $y = x^4$; $x = 1$, $x = 5$ અને X-અક્ષ

2. વક્રો $y = x$ અને $y = x^2$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ અને $y = 4$ વડે પ્રથમ ચરણમાં આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

4. $y = |x + 3|$ નું આલેખન કરો અને $\int_{-6}^{0} |x + 3|\, dx$ ની કિંમત શોધો.

5. વક્ર $y = \sin x$, $x = 0$ અને $x = 2\pi$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. વક્રો $y^2 = 4ax$ અને $y = mx$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. પરવલય $4y = 3x^2$ અને રેખા $2y = 3x + 12$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. ઉપવલય $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ અને રેખા $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ વડે આવૃત્ત નાના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ અને રેખા $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ વડે આવૃત્ત નાના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. પરવલય $x^2 = y$, રેખા $y = x + 2$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11. સંકલનના ઉપયોગથી $|x| + |y| = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (**સૂચન :** માંગેલ પ્રદેશ રેખાઓ $x + y = 1$, $x - y = 1$, $-x + y = 1$ અને $-x - y = 1$ વડે આવૃત્ત છે.)

12. $\{(x, y) \mid y \geq x^2$ અને $y = |x|\}$ થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

13. સંકલનની મદદથી શિરોબિંદુઓ A(2, 0), B(4, 5) અને C(6, 3) થી રચાતા ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

14. સંકલનના ઉપયોગથી રેખાઓ $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ અને $x - 3y + 5 = 0$ થી રચાતા ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

15. $\{(x, y) \mid y^2 \leq 4x, 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$ થી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. વક્ર $y = x^3$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = -2$ તથા $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ....

(A) -9 (B) $-\frac{15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

17. વક્ર $y = x\,|\,x\,|$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = -1$ તથા $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ....

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[**સૂચન :** જો $x > 0$ તો, $y = x^2$

જો $x < 0$ તો, $y = -x^2$]

18. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 16$ અને પરવલય $y^2 = 6x$ ના બહારના ભાગથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ....

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

નોંધ : ખરેખર તો પરવલય બંધ વક્ર નથી. તેને બહારનો ભાગ હોય નહિ. અહીં કહેવાનો અર્થ એ છે કે, વર્તુળની અંદરના અને પરવલયના અંતર્ગોળ પ્રદેશમાં સમાવિષ્ટ ન હોય તેવા પ્રદેશથી બનતા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનો છે.

19. વક્રો $y = \sin x$, $y = \cos x$ અને Y-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... જ્યાં, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

સારાંશ

- વક્ર $y = f(x)$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = a$ તથા $x = b$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું

  સૂત્ર : ક્ષેત્રફળ $= \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

- વક્ર $x = g(y)$, Y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = c$ તથા $y = d$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું

  સૂત્ર : ક્ષેત્રફળ $= \int_c^d x\, dy = \int_c^d g(y)\, dy$

- બે વક્રો $y = f(x)$ અને $y = g(x)$ તથા રેખાઓ $x = a$, $x = b$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર :

  જો $[a, b]$ માં $f(x) \ge g(x)$, તો ક્ષેત્રફળ $= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

- જો $[a, c]$ માં $f(x) \ge g(x)$ અને $[c, b]$ માં $f(x) \le g(x)$, $a < c < b$ તો ક્ષેત્રફળ

  $= \int_a^c (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\, dx$

Historical Note

The origin of the Integral Calculus goes back to the early period of development of Mathematics and it is related to the method of exhaustion developed by the mathematicians of ancient Greece. This method arose in the solution of problems on calculating areas of plane figures, surface areas and volumes of solid bodies etc. In this sense, the method of exhaustion can be regarded as an early method of integration. The greatest development of method of exhaustion in the early period was obtained in the works of ***Eudoxus*** (C.E. 440) and ***Archimedes*** (C.E. 300)

Systematic approach to the theory of Calculus began in the 17th century. In C.E. 1665, ***Newton*** began his work on the Calculus described by him as the theory of fluxions and used his theory in finding the tangent and radius of curvature at any point on a curve. ***Newton*** introduced the basic notion of inverse function called the anti derivative (indefinite integral) or the inverse method of tangents.

During C.E. 1684-86, ***Leibnitz*** published an article in the ***Acta Eruditorum*** which he called ***Calculus summatorius***, since it was connected with the summation of a number of infinitely small areas, whose sum, he indicated by the symbol '$\int$'. In C.E. 1696, he followed a suggestion made by ***J. Bernoulli*** and changed this article to ***Calculus integrali***. This corresponded to ***Newton's*** inverse method of tangents.

Both ***Newton*** and ***Leibnitz*** adopted quite independent lines of approach which was radically different. However, respective theories accomplished results that were practically identical. Leibnitz used the notion of definite integral and what is quite certain is that he first clearly appreciated tie up between the antiderivative and the definite integral.

Conclusively, the fundamental concepts and theory of Integral Calculus and primarily its relationships with Differential Calculus were developed in the work of ***P. de Fermat***, ***I. Newton*** and ***G. Leibnitz*** at the end of 17th century. However, this justification by the concept of limit was only developed in the works of ***A. L. Cauchy*** in the early 19th century. Lastly, it is worth mentioning the following quotation by ***Lie Sophie's*** :

"It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to ***Archimedes*** were introduced in Science by the investigations of ***Kepler***, ***Descartes***, ***Cavalieri***, ***Fermat*** and ***Wallis***.... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to ***Newton*** and ***Leibnitz***".

પ્રકરણ **9**

વિકલ સમીકરણો

❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain.* – *D. HILBERT* ❖

9.1 પ્રાસ્તાવિક

Henri Poincare
(C.E. 1854 - C.E. 1912)

આપણે ધોરણ XIમાં અને આ પુસ્તકના પ્રકરણ 5 માં આપેલ વિધેય fનું સ્વતંત્ર ચલની સાપેક્ષે કેવી રીતે વિકલન કરી શકીએ તેની ચર્ચા કરી હતી એટલે કે આપેલા વિધેય fને વ્યાખ્યાયિત કરતા પ્રદેશ પરના દરેક x આગળ $f'(x)$ કેવી રીતે શોધી શકાય તેની ચર્ચા કરી હતી. વળી, જેનું વિકલિત આપેલ વિધેય g હોય તેવું વિધેય f કેવી રીતે શોધી શકાય તેની ચર્ચા પણ આપણે સંકલનના પ્રકરણમાં કરી હતી. તે નીચે પ્રમાણે ગાણિતિક રીતે દર્શાવી શકાય :

આપેલ વિધેય g માટે વિધેય f એવું શોધો કે જેથી,

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \text{ જ્યાં, } y = f(x) \qquad ...(1)$$

સમીકરણ (1) પ્રકારના સ્વરૂપને ***વિકલ સમીકરણ*** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેની ગાણિતિક અર્થસભર વ્યાખ્યા હવે પછી આપીશું. આ પ્રકારનાં સમીકરણોનો ઉપયોગ ભૌતિકશાસ્ત્ર, રસાયણશાસ્ત્ર, જૈવિકશાસ્ત્ર, માનસશાસ્ત્ર, ભૂસ્તરશાસ્ત્ર, અર્થશાસ્ત્ર વગેરે જેવાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં ઉદ્ભવે છે. આથી, વિકલ સમીકરણનો ઊંડાણપૂર્વક અભ્યાસ એ આધુનિક વૈજ્ઞાનિક સંશોધન માટે અતિ મહત્ત્વનો છે એવું માનવામાં આવે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે વિકલ સમીકરણને લગતા પાયાના સિદ્ધાંતો, વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક અને વિશિષ્ટ ઉકેલ, વિકલ સમીકરણની રચના, પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણી વિકલ સમીકરણના ઉકેલની કેટલીક રીતો અને વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વિકલ સમીકરણના ઉપયોગોનો અભ્યાસ કરીશું.

9.2 પાયાના સિદ્ધાંતો

આપણે અગાઉથી નીચેનાં પ્રકારનાં સમીકરણોથી પરિચિત છીએ :

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad ...(1)$$

$$\sin x + \cos x = 0 \qquad ...(2)$$

$$x + y = 7 \qquad ...(3)$$

ચાલો આપણે નીચેનાં સમીકરણનો વિચાર કરીએ :

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{...(4)}$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે સમીકરણો (1), (2) અને (3) ફક્ત સ્વતંત્ર અને/અથવા અવલંબી ચલ ધરાવે છે. જ્યારે સમીકરણ (4) ચલ ઉપરાંત અવલંબી ચલ y નું સ્વતંત્ર ચલ x ને સાપેક્ષ વિકલિત પણ ધરાવે છે. આવા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ કહે છે.

વ્યાપક રીતે, સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ (Differential Equation) કહે છે.

જે વિકલ સમીકરણ ફક્ત એક જ સ્વતંત્ર ચલની સાપેક્ષે અવલંબી ચલના વિકલિતોને સમાવતા હોય તેમને સામાન્ય વિકલ સમીકરણો (Ordinary Differential Equations) કહે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ એ ***સામાન્ય વિકલ સમીકરણ*** છે. ...(5)

અલબત્ત, એક કરતાં વધુ સ્વતંત્ર ચલની સાપેક્ષે વિકલિતો સમાવતાં વિકલ સમીકરણો પણ હોય છે. તેમને ***આંશિક વિકલ સમીકરણો (Partial Differential Equations)*** કહે છે. આ તબક્કે આપણે આપણો અભ્યાસ ફક્ત સામાન્ય વિકલ સમીકરણો પૂરતો સીમિત રાખીશું. હવે પછી આપણે 'સામાન્ય વિકલ સમીકરણ' માટે 'વિકલ સમીકરણ' એવા શબ્દનો પ્રયોગ કરીશું.

☛ નોંધ : (1) આપણે વિકલિતો માટે નીચે પ્રમાણેના સંકેતો વાપરીશું :

$$\frac{dy}{dx} = y', \ \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \ \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

(2) ઉચ્ચ કક્ષાના વિકલિતો માટે ઘણા બધા ' (dashes) પ્રત્યય તરીકે વાપરવા પ્રતિકૂળ હોવાથી, આપણે n મી કક્ષાના વિકલિત $\frac{d^ny}{dx^n}$ માટે સંકેત y_n નો ઉપયોગ કરીશું.

9.2.1 વિકલ સમીકરણની કક્ષા

વિકલ સમીકરણમાં સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા (order) તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

નીચેનાં વિકલ સમીકરણનો વિચાર કરો :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \text{...(6)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{...(7)}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \quad \text{...(8)}$$

સમીકરણ (6), (7) અને (8) માં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય કક્ષાનું છે. માટે, આ સમીકરણોની કક્ષા અનુક્રમે 1, 2 અને 3 છે.

9.2.2 વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ

વિકલ સમીકરણના પરિમાણનો અભ્યાસ કરવા માટે મહત્ત્વનો મુદ્દો એ છે કે, વિકલ સમીકરણ વિકલિતોમાં એટલે કે y', y'', y''' વગેરેમાં બહુપદીય સમીકરણ જ હોવું જોઈએ.

નીચેનાં વિકલ સમીકરણોનો વિચાર કરો :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0 \qquad ...(9)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \sin^2 y = 0 \qquad ...(10)$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad ...(11)$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, સમીકરણ (9) એ y''', y'' અને y' ની બહુપદી છે. સમીકરણ (10) એ y' ની બહુપદી છે (છતાં એ y ની બહુપદી નથી). આવાં વિકલ સમીકરણોનાં પરિમાણ મળી શકે છે. પરંતુ સમીકરણ (11) એ વિકલિતોમાં બહુપદીય સમીકરણ નથી અને આવા વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ મળી શકે નહિ.

જો વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે આપેલ હોય, તો વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ (degree) એ વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતનો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક (ધન પૂર્ણાંક ઘાતાંક) એવો અર્થ આપણે કરીએ છીએ.

ઉપરની વ્યાખ્યાના અનુસંધાનમાં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે વિકલ સમીકરણ (6), (7), (8) અને (9) એ દરેકનું પરિમાણ એક છે. વિકલ સમીકરણ (10)નું પરિમાણ બે છે અને વિકલ સમીકરણ (11) નું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

☛ નોંધ : વિકલ સમીકરણના કક્ષા અને પરિમાણ (જો વ્યાખ્યાયિત હોય, તો તે) હંમેશાં ધન પૂર્ણાંક હોય છે.

ઉદાહરણ 1 : જો વ્યાખ્યાયિત હોય, તો નીચેનાં વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ મેળવો :

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ (iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

ઉકેલ :

(i) આ વિકલ સમીકરણમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\frac{dy}{dx}$ છે. આથી તેની કક્ષા એક છે. તે y' માં બહુપદીય સમીકરણ છે અને $\frac{dy}{dx}$ નો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક એક છે. આથી તેનું પરિમાણ એક છે.

(ii) આપેલ વિકલ સમીકરણમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત $\frac{d^2y}{dx^2}$ છે. આથી તેની કક્ષા બે છે. તે $\frac{d^2y}{dx^2}$ તથા $\frac{dy}{dx}$ માં બહુપદીય સમીકરણ છે અને $\frac{d^2y}{dx^2}$ નો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક એક છે, આથી તેનું પરિમાણ એક છે.

(iii) આ વિકલ સમીકરણમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત y''' છે. આથી તેની કક્ષા ત્રણ છે. આપેલ વિકલ સમીકરણ તેનાં વિકલિતોનું બહુપદીય સમીકરણ નથી અને તેથી તેનું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

સ્વાધ્યાય 9.1

જો વ્યાખ્યાયિત હોય, તો પ્રશ્ન 1 થી 10 માં આપેલ વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ નક્કી કરો :

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ **2.** $y' + 5y = 0$

3. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = cos\ 3x + sin\ 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$

7. $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$

9. $y'' + (y')^2 + 2y = 0$

10. $y'' + 2y' + sin\ y = 0$

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ નું પરિમાણ .... છે.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) અવ્યાખ્યાયિત

12. વિકલ સમીકરણ $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ ની કક્ષા .... છે.

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) અવ્યાખ્યાયિત

9.3 વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક અને વિશિષ્ટ ઉકેલ

અગાઉનાં ધોરણોમાં આપણે નીચેના પ્રકારનાં સમીકરણોના ઉકેલ શોધ્યા હતા :

$$x^2 + 1 = 0 \quad ...(1)$$

$$sin^2x - cos\ x = 0 \quad ...(2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ના ઉકેલ આપેલ સમીકરણોનું સમાધાન કરતી હોય તેવી વાસ્તવિક કે સંકર સંખ્યાઓ છે. એટલે કે જ્યારે આ સંખ્યા અજ્ઞાત x ના સ્થાને સમીકરણની ડાબી બાજુએ મૂકીએ ત્યારે ડાબી બાજુની અભિવ્યક્તિ જમણી બાજુને સમાન થાય.

હવે, વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો વિચાર કરો. ...(3)

પ્રથમ બે સમીકરણોથી વિપરીત, આ વિકલ સમીકરણોનો ઉકેલ એટલે તેનું સમાધાન કરતું વિધેય $y = \phi$ થશે તેમ આપણે વ્યાખ્યા આપીશું. એટલે કે આપેલ વિકલ સમીકરણની ડાબી બાજુએ જ્યારે અજ્ઞાત y (અવલંબી ચલ)ની જગ્યાએ ϕ મૂકીએ, તો ડાબી બાજુની અભિવ્યક્તિ જમણી બાજુને સમાન થાય છે.

વક્ર, $y = \phi(x)$ ને આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ વક્ર (solution curve) (સંકલિત વક્ર, integral curve) કહે છે.

નીચેના વિધેયનો વિચાર કરીએ :

$$y = \phi(x) = a\ sin\ (x + b) \qquad a, b \in R \quad ....(4)$$

જ્યારે આ વિધેય અને તેના વિકલિત સમીકરણ (3) માં મૂકીએ, ત્યારે

ડાબી બાજુ = જમણી બાજુ થાય. આથી, તે વિકલ સમીકરણ (3) નો ઉકેલ થશે.

ધારો કે a અને b ની $a = 2$ અને $b = \frac{\pi}{4}$ જેવી અમુક ખાસ કિંમતો લઈએ, તો

$$y = \phi_1(x) = 2\ sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ....(5)$$

જ્યારે આ વિધેય અને તેનાં વિકલિત સમીકરણ (3) માં મૂકીએ ત્યારે ડાબી બાજુ = જમણી બાજુ થાય.

માટે, ϕ_1 પણ એ સમીકરણ (3) નો ઉકેલ થાય.

વિધેય ϕ એ a અને b એમ બે સ્વૈર અચળો ધરાવે છે અને ϕને આપેલા વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ (general solution) કહે છે. જ્યારે વિધેય ϕ_1 કોઈ સ્વૈર અચળ ધરાવતું નથી, પરંતુ a અને b ખાસ કિંમતો ધારણ કરે છે અને તેથી ϕ_1ને આપેલા વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ (particular solution) કહે છે.

સ્વૈર અચળો ધરાવતા ઉકેલને વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ (પૂર્વગ) કહે છે.

સ્વૈર અચળોથી મુક્ત હોય તેવા ઉકેલને એટલે કે વ્યાપક ઉકેલમાં સ્વૈર અચળોની નિશ્ચિત કિંમત ધરાવતા ઉકેલને વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ કહે છે.

ઉદાહરણ 2 : વિધેય $y = e^{-3x}$ એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ નો ઉકેલ છે તેમ ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં $y = e^{-3x}$

બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -3e^{-3x} \quad \text{...(1)}$$

હવે, સમીકરણ (1) નું x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ અને y ની કિંમત આપેલ વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં,

ડા.બા. $= 9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6e^{-3x} = 9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0 =$ જ.બા.

આમ, આપેલ વિધેય એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 3 : $a, b \in R$ માટે વિધેય $y = a \cos x + b \sin x$, એ વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ નો ઉકેલ છે તેમ ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં $y = a \cos x + b \sin x$ ...(1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુએ એક પછી એક બે વખત વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos x - b \sin x \quad \text{...(2)}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ અને y ની કિંમતો આપેલા વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં,

ડા.બા. $= (-a \cos x - b \sin x) + (a \cos x + b \sin x) = 0 =$ જ.બા.

આમ, આપેલ વિધેય એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

(**નોંધ :** (2) પરથી જ $\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos x - b \sin x = -y$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$)

સ્વાધ્યાય 9.2

પ્રશ્ન 1 થી 10 માં આપેલ વિધેયને (સ્પષ્ટ અથવા ગૂઢ રીતે) અનુરૂપ વિકલ સમીકરણોનો ઉકેલ છે તેમ ચકાસો :

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$

2. $y = x^2 + 2x + c$: $y' - 2x - 2 = 0$

3. $y = cos\ x + c$: $y' + sin\ x = 0$

4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

5. $y = Ax$: $xy' = y$ $(x \neq 0)$

6. $y = x\ sin\ x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$ અને $x > y$ અથવા $x < -y$)

7. $xy = \log y + c$: $y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$ $(xy \neq 1)$

8. $y - cos\ y = x$: $(y\ sin\ y + cos\ y + x)\ y' = y$

9. $x + y = tan^{-1}y$: $y^2y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in (-a, a)$: $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $(y \neq 0)$

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. ચતુર્થ કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં સ્વૈર અચળની સંખ્યા .... હશે.

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. તૃતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં સ્વૈર અચળની સંખ્યા .... હશે.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4 વ્યાપક ઉકેલ આપેલો હોય તેવા વિકલ સમીકરણની રચના

(**નોંધ :** જો વર્તુળનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 1 = 0$ સ્વરૂપનું હોય, તો તેના કેન્દ્રના યામ $(-g, -f)$ તથા $g^2 + f^2 - c > 0$ હોય, તો તેની ત્રિજ્યા $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ થાય.)

આપણે જાણીએ છીએ કે સમીકરણ

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \qquad ...(1)$$

એ 1 એકમ ત્રિજ્યાવાળું અને $(-1, 2)$ કેન્દ્રવાળું વર્તુળ દર્શાવે છે.

સમીકરણ (1) નું x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \qquad (y \neq 2) \qquad ...(2)$$

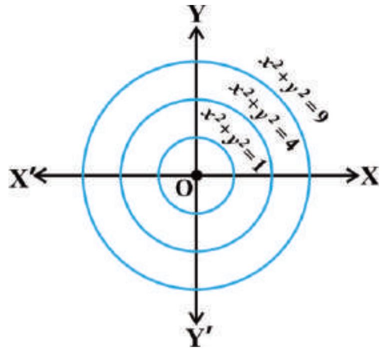
આ એક વિકલ સમીકરણ છે. હવે પછી આપણે જોઈશું કે (જુઓ વિભાગ 9.5.1, ઉદાહરણ 9) આ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ વર્તુળોની સંહતિ દર્શાવે છે અને સમીકરણ (1) નું વર્તુળ આ સંહતિનો એક સભ્ય છે.

ચાલો આપણે નીચેના સમીકરણનો વિચાર કરીએ :

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad ...(3)$$

r ની ભિન્ન કિંમતો લેતાં આપણને આ સંહતિના ભિન્ન સભ્યો મળશે. ઉદાહરણ પ્રમાણે, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ વગેરે (જુઓ આકૃતિ 9.1). આમ, સમીકરણ (3) એ જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને ત્રિજ્યાઓ ભિન્ન હોય તેવાં સમકેન્દ્રી વર્તુળોની સંહતિ દર્શાવે છે.

સંહતિનો દરેક સભ્ય જેનું સમાધાન કરે તેવું વિકલ સમીકરણ શોધવામાં આપણને રસ છે. વિકલ સમીકરણ r થી મુક્ત હોવું જ જોઈએ, કારણ કે સંહતિના ભિન્ન સભ્યો માટે r પણ ભિન્ન હશે. સમીકરણ (3) નું r ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં નીચેના સમીકરણ જેવું સમીકરણ મેળવી શકાશે.



આકૃતિ 9.1

એટલે કે $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore\ x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad ...(4)$$

સમીકરણ (3) આપેલ સમકેન્દ્રી વર્તુળોની સંહતિ દર્શાવે છે.

પુનઃ નીચેના સમીકરણનો વિચાર કરો :

$$y = mx + c \qquad ...(5)$$

પ્રચલ m અને c ની ભિન્ન કિંમતો મૂકતાં આપણને સંહતિના ભિન્ન સભ્યો મળે.

ઉદાહરણ તરીકે, $y = x \qquad (m = 1, c = 0)$

$y = \sqrt{3}x \qquad (m = \sqrt{3}, c = 0)$

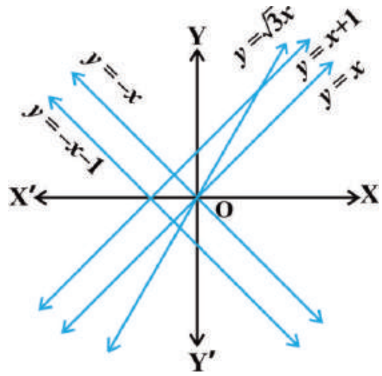
$y = x + 1 \qquad (m = 1, c = 1)$

$y = -x \qquad (m = -1, c = 0)$

$y = -x - 1 \qquad (m = -1, c = -1)$ વગેરે (જુઓ આકૃતિ 9.2.)

આમ, સમીકરણ (5) એ જ્યાં m, c પ્રચલો હોય તેવી રેખાઓની સંહતિ દર્શાવે છે.

સંહતિનો દરેક સભ્ય જેનું સમાધાન કરે તેવું વિકલ સમીકરણ શોધવામાં આપણને રસ છે. વળી, સમીકરણ m અને c થી મુક્ત હોવું જ જોઈએ, કારણ કે સંહતિના ભિન્ન સભ્ય માટે m અને c ની કિંમત ભિન્ન હોય છે. સમીકરણ (5) નું x ની સાપેક્ષે બે વખત વિકલન કરવાથી આ મેળવી શકાય છે.



આકૃતિ 9.2

$$\frac{dy}{dx} = m$$

અને $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad ...(6)$

સમીકરણ (6) એ સમીકરણ (5) માં આપેલી રેખાઓની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ દર્શાવે છે.

અહીં નોંધીશું કે સમીકરણ (3) અને (5) એ અનુક્રમે સમીકરણ (4) અને (6) નાં વ્યાપક ઉકેલો છે.

9.4.1 આપેલ વક્રોની સંહતિ દર્શાવતાં વિકલ સમીકરણોની રચનાની રીત

(a) જો આપેલ વક્રોની સંહતિ F_1 માં માત્ર એક જ સ્વૈર અચળ હોય, તો તેને નીચેના જેવા સમીકરણ દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$F_1(x, y, a) = 0 \qquad ...(1)$$

ઉદાહરણ તરીકે, પરવલયોની સંહતિ $y^2 = ax$ ને સમીકરણ $f(x, y, a) : y^2 = ax$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

સમીકરણ (1) નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં મળતું સમીકરણ y', y, x અને a ધરાવે છે, એટલે કે

$$g(x, y, y', a) = 0 \quad ...(2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) માંથી a નો લોપ કરતા માંગેલ વિકલ સમીકરણ $F(x, y, y') = 0$ મળે છે.

$$F(x, y, y') = 0 \quad ...(3)$$

(b) જો આપેલ વક્રોની સંહતિ F_2 માં બે સ્વૈર અચળો a, b હોય, તો તેને નીચેના જેવા સમીકરણ દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$F_2 (x, y, a, b) = 0 \quad ...(4)$$

સમીકરણ (4) નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં મળતું સમીકરણ y', x, y, a, b ધરાવે છે, એટલે કે

$$g(x, y, y', a, b) = 0 \quad ...(5)$$

આ બે સમીકરણોમાંથી બે પ્રચલો a, b નો લોપ કરવો શક્ય નથી, એટલે આપણને ત્રીજા સમીકરણની જરૂર પડશે. સમીકરણ (5) નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં આ સમીકરણ મળે છે. તે નીચે પ્રમાણેના સ્વરૂપનું છે :

$$h (x, y, y', y'', a, b) = 0 \quad ...(6)$$

સમીકરણ (4), (5) અને (6) માંથી a અને b નો લોપ કરતાં માંગેલ વિકલ સમીકરણ મળે છે.

તે $F(x, y, y', y'') = 0$ છે. ...(7)

☛ નોંધ : વક્રોની સંહતિ દર્શાવતા વિકલ સમીકરણની કક્ષા એ વક્રોની સંહતિને દર્શાવતા સમીકરણમાં આવેલા સ્વૈર અચળાંકો જેટલી હોય છે.

ઉદાહરણ 4 : સંહતિ $y = mx$ (m સ્વૈર અચળ છે) ને દર્શાવતા વિકલ સમીકરણની રચના કરો.

ઉકેલ : અહીં $y = mx$ ...(1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = m$$

m ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં, $y = x\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \; x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ પ્રચલ m થી મુક્ત છે અને તેથી માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 5 : વક્રોની સંહતિ $y = a \sin (x + b)$ (a, b સ્વૈર અચળો છે.) ને દર્શાવતા વિકલ સમીકરણની રચના કરો.

ઉકેલ : અહીં $y = a \sin (x + b)$ ...(1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ x ની સાપેક્ષે બે વખત વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = a \cos (x + b) \quad ...(2)$$

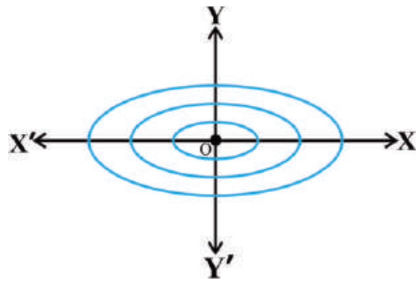
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \sin (x + b) \quad ...(3)$$

સમીકરણ (1), (2) અને (3) માંથી a અને b નો લોપ કરતા,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad ...(4)$$

આ સમીકરણ અચળો a અને b થી મુક્ત છે અને તેથી માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 6 : જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને નાભિઓ X-અક્ષ પર હોય તેવા ઉપવલયોની સંહતિને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.



આકૃતિ 9.3

ઉકેલ : માંગ્યા પ્રમાણેના ઉપવલયોની સંહતિ (જુઓ આકૃતિ 9.3) નું સમીકરણ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ...(1)$$

સમીકરણ (1) નું x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-b^2}{a^2} \quad ...(2)$$

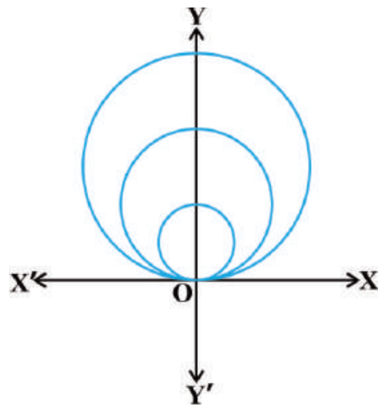
સમીકરણ (2) ની બંને બાજુ x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0 \quad ...(3)$$

માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 7 : X-અક્ષને ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શતાં હોય તેવાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.



આકૃતિ 9.4

ઉકેલ : ધારો કે C એ X-અક્ષને ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શતા વર્તુળોની સંહતિ છે. ધારો કે આ સંહતિના કોઈ સ્વૈર સભ્યના કેન્દ્રના યામ $(0, a)$ છે. (આકૃતિ 9.4) માટે સંહતિ C નું સમીકરણ

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 2ay \quad ...(1)$$

જ્યાં, a એ સ્વૈર અચળ છે.

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ x ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2a\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad x + y\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad a = \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \qquad ...(2)$$

સમીકરણ (2) માંથી મળેલ a ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$x^2 + y^2 = 2y \frac{\left[x + y\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\therefore \quad (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy + 2y^2 \frac{dy}{dx}$$

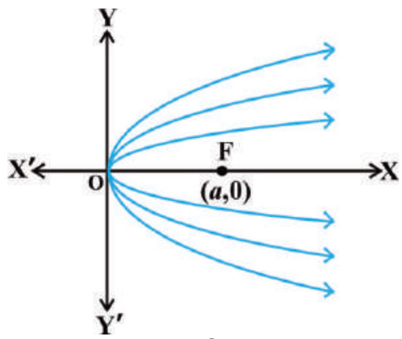
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

આ આપેલ વર્તુળોની સંહતિ માટેનું માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 8 : જેનું શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય અને અક્ષ એ X-અક્ષની ધન દિશા હોય તેવા પરવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P એ ઉપર પ્રમાણેની પરવલયોની સંહતિ છે (જુઓ આકૃતિ 9.5.) અને ધારો કે સ્વૈર અચળ a માટે $(a, 0)$ એ તેના એક સભ્યની નાભિ છે, માટે સંહતિ P નું સમીકરણ

$$y^2 = 4ax \qquad ...(1)$$



આકૃતિ 9.5

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$2y \frac{dy}{dx} = 4a \qquad ...(2)$$

સમીકરણ (2) માંથી મળતી $4a$ ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$y^2 = \left(2y\frac{dy}{dx}\right)(x) \qquad ...(3)$$

$\therefore \quad y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$ આપેલ પરવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ છે.

સ્વાધ્યાય 9.3

પ્રશ્ન 1 થી 5 ના વક્રોની સંહતિ માટે સ્વૈર અચળ a અને b નો લોપ કરીને વિકલ સમીકરણ મેળવો :

1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. $y^2 = a(b^2 - x^2)$

3. $y = ae^{3x} + be^{-2x}$

4. $y = e^{2x}(a + bx)$

5. $y = e^x(a \cos x + b \sin x)$

6. Y-અક્ષને ઊગમબિંદુ આગળ સ્પર્શતાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

7. જેનું શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય અને અક્ષ એ Y-અક્ષની ધન દિશા હોય તેવા પરવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

8. જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને નાભિઓ Y-અક્ષ પર હોય તેવા ઉપવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

9. જેનું કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય અને નાભિઓ X-અક્ષ પર હોય તેવા અતિવલયોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

10. જેનું કેન્દ્ર Y-અક્ષ પર હોય અને ત્રિજ્યા 3 એકમ હોય તેવાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

પ્રશ્નો 11 તથા 12 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

11. નીચેનામાંથી કયા વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ છે ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} - 1 = 0$

12. નીચેનામાંથી કયા વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ $y = x$ છે ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = x$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0$

9.5 પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણના ઉકેલ માટેની રીતો

આ વિભાગમાં આપણે પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણના ઉકેલ માટેની ત્રણ રીતોની ચર્ચા કરીશું.

9.5.1 વિયોજનીય ચલનાં વિકલ સમીકરણો

પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણી વિકલ સમીકરણનું સ્વરૂપ નીચે પ્રમાણે છે :

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad ...(1)$$

જો F(x, y) ને g(x) એ x નું વિધેય હોય અને h(y) એ y નું વિધેય હોય, તે રીતે g(x) h(y) તરીકે દર્શાવી શકાય તો વિકલ સમીકરણ (1) ને વિયોજનીય ચલ પ્રકારનું વિકલ સમીકરણ (Differential equation with variables separable) કહે છે.

વિકલ સમીકરણ (1) નું સ્વરૂપ હવે નીચે પ્રમાણે થશે :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \qquad ...(2)$$

જો $h(y) \neq 0$ તો ચલોને જુદા પાડીને સમીકરણ (2) નીચે પ્રમાણે થશે :

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx \qquad ...(3)$$

સમીકરણ (3) ની બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx \qquad ...(4)$$

આમ, સમીકરણ (4) આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ નીચેના સ્વરૂપમાં પૂરો પાડે છે :

$$H(y) = G(x) + c$$

જ્યાં, H(y) અને G(x) એ અનુક્રમે $\frac{1}{h(y)}$ અને $g(x)$ ના પ્રતિવિકલિત છે અને c સ્વૈર અચળ છે.

ઉદાહરણ 9 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$, $(y \neq 2)$નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$ ...(1)

સમીકરણ (1) ને વિયોજનીય ચલના વિકલ સમીકરણ તરીકે લખતાં,

$(2 - y)\, dy = (x + 1)\, dx$ ...(2)

સમીકરણ (2) નું બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int (2 - y)\, dy = \int (x + 1)\, dx$$

$$\therefore \quad 2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2c_1 = 0$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + c = 0$ જ્યાં, $c = 2c_1$

આ સમીકરણ (1) નો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 10 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : $1 + y^2 \neq 0$ હોવાથી આપેલ વિકલ સમીકરણને વિયોજનીય ચલના વિકલ સમીકરણ તરીકે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ ...(1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad tan^{-1}y = tan^{-1}x + c$$

આ સમીકરણ (1) નો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 11 : જ્યારે $x = 0$ હોય ત્યારે $y = 1$ થાય તે પ્રારંભિક શરત અનુસાર વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : જો $y \neq 0$ હોય, તો આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

$\frac{dy}{y^2} = -4x\, dx$ ...(1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4 \int x\, dx$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{y} = -2x^2 + c$$

$\therefore \quad y = \frac{1}{2x^2 - c}$ ...(2)

સમીકરણ (2) માં $y = 1$ અને $x = 0$ મૂકતાં, $c = -1$ મળે છે.

હવે, સમીકરણ (2) માં c ની કિંમત મૂકતાં આપેલા વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ $y = \frac{1}{2x^2+1}$ મળે છે.

ઉદાહરણ 12 : જેનું વિકલ સમીકરણ $x\, dy = (2x^2 + 1)dx$ $(x \neq 0)$ હોય તેવા $(1, 1)$ માંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$dy^* = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right) dx^*$$

$$\therefore \quad dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{...(1)}$$

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\therefore \quad y = x^2 + \log|x| + c \qquad \text{...(2)}$$

સમીકરણ (2) એ આપેલા વિકલ સમીકરણના ઉકેલના વક્રોની સંહતિ દર્શાવે છે. પરંતુ આપણને સંહતિના $(1, 1)$ માંથી પસાર થતો હોય તેવા સભ્યના સમીકરણમાં રસ છે. માટે સમીકરણ (2) માં $x = 1$, $y = 1$ મૂકતાં $c = 0$ મળે.

હવે, સમીકરણ (2) માં c ની કિંમત મૂકતા આપણને માંગેલ વક્રનું સમીકરણ $y = x^2 + \log|x|$ મળે છે.

ઉદાહરણ 13 : કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{2x}{y^2}$ આપેલ છે. $(-2, 3)$માંથી પસાર થતા આ સંહતિના વક્રનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે વક્રના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}$ છે.

$$\text{તેથી,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \text{...(1)}$$

વિયોજનીય ચલના વિકલ સમીકરણ તરીકે લખતાં,

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \text{...(2)}$$

સમીકરણ (2) ની બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int y^2\, dy = \int 2x\, dx$$

$$\therefore \quad \frac{y^3}{3} = x^2 + c \qquad \text{...(3)}$$

લીબનીટ્ઝનો સંકેત $\frac{dy}{dx}$ અત્યંત લચીલો છે અને ઘણીબધી ગણતરીઓમાં ઉપયોગી છે. આપણે dy અને dx ને સંખ્યા તરીકે ઉપયોગ થાય તેવા ઔપચારિક પરિવર્તનમાં વાપરીએ છીએ. dx અને dy ને ભિન્ન રાશિ તરીકે લેવાથી ઘણીબધી ગણતરીઓમાં વધુ સ્પષ્ટ રીતે અભિવ્યક્તિ કરી શકાય છે.

સંદર્ભ : Introduction to Calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Springel – Verlog New York.

સમીકરણ (3) માં $x = -2$ અને $y = 3$ મૂકતાં $c = 5$ મળે છે.

c ની કિંમત સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5$$

$$\therefore \quad y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

માંગેલ વક્રનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 14 : બૅન્કમાં રાખેલ મુદ્દલ વાર્ષિક 5 % ના દરે સતત વધી રહ્યું છે. જો બૅન્કમાં ₹ 1000 ની રાશિ મૂકી હોય, તો તે કેટલાં વર્ષમાં બમણી થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ પણ t સમયે મુદ્દલ P છે.

પ્રશ્નમાં આપેલ માહિતી પરથી,

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dt} = \frac{P}{20} \qquad ...(1)$$

સમીકરણ (1) ના ચલોનું વિયોજન કરતાં,

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{20} \qquad ...(2)$$

સમીકરણ (2) ની બંને બાજુએ સંકલન કરતાં,

$$\log P = \frac{t}{20} + c_1$$

$$\therefore \quad P = e^{\frac{t}{20}} e^{c_1}$$

$$\therefore \quad P = c\, e^{\frac{t}{20}} \qquad (\text{જ્યાં } e^{c_1} = c) \qquad ...(3)$$

હવે, જો $t = 0$ તો $P = 1000$

P અને t ની કિંમતો (3) માં મૂકતાં, $c = 1000$ મળે.

∴ સમીકરણ (3) પરથી,

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

ધારો કે મુદ્દલ બમણું થવા માટે લાગતો સમય t વર્ષ છે.

$$\therefore \quad 2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \Rightarrow t = 20 \log_e 2$$

સ્વાધ્યાય 9.4

પ્રશ્નો 1 થી 10 નાં વિકલ સમીકરણોના વ્યાપક ઉકેલ મેળવો :

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4 - y^2} \qquad (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = 1 \qquad (y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$

9. $\frac{dy}{dx} = sin^{-1}x$

10. $e^x\, tan\, y\, dx + (1 - e^x)\, sec^2 y\, dy = 0$

પ્રશ્નો 11 થી 14 માં આપેલી શરતનું સમાધાન કરતા વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો :

11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x$; જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $y = 1$.

12. $x(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 1$; જ્યારે $x = 2$ ત્યારે $y = 0$.

13. $cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = a\ (a \in \mathrm{R})$; જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $y = 2$.

14. $\frac{dy}{dx} = y\, tan\, x$; જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $y = 1$.

15. જેનું વિકલ સમીકરણ $y' = e^x\, sin\, x$ હોય તેવા બિંદુ $(0, 0)$ માંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

16. બિંદુ $(1, -1)$ માંથી પસાર થતો વિકલ સમીકરણ $xy\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ નો ઉકેલ વક્ર શોધો.

17. જે વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ સ્પર્શકના ઢાળ અને તે બિંદુના y યામનો ગુણાકાર તે બિંદુના x-યામ જેટલો છે અને જે $(0, -2)$ માંથી પસાર થાય છે તેવા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

18. વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ એ સ્પર્શબિંદુ અને બિંદુ $(-4, -3)$ માંથી પસાર થતી રેખાના ઢાળ કરતાં બમણો છે. વક્ર $(-2, 1)$ માંથી પસાર થતો હોય, તો આ વક્રનું સમીકરણ શોધો.

19. ગોળાકાર બલૂનમાં એવી રીતે હવા ભરવામાં આવે છે કે, તેનું ઘનફળ ચોક્કસ દરથી વધે છે. જો શરૂઆતમાં તેની ત્રિજ્યા 3 એકમ હોય અને 3 સેકન્ડ પછી તે 6 એકમ હોય તો t સેકન્ડ પછી બલૂનની ત્રિજ્યા શોધો.

20. બૅન્કમાં રાખેલ મુદ્દલ વાર્ષિક r % ના દરે સતત વધી રહ્યું છે. જો 10 વર્ષમાં બૅન્કમાં મૂકેલા ₹ 100 બમણા થતા હોય તો r ની કિંમત શોધો. $(\log_e 2 = 0.6931)$

21. બૅન્કમાં રાખેલ મુદ્દલ વાર્ષિક 5 % ના દરે સતત વધી રહ્યું છે. બૅન્કમાં ₹ 1000 થાપણ તરીકે મૂક્યા છે, તો 10 વર્ષ પછી તે કેટલા થશે ? $(e^{0.5} = 1.648)$

22. એક સંવર્ધન કેન્દ્રમાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 1,00,000 છે. 2 કલાકમાં તેની સંખ્યા 10 % ના દરે વધે છે. જો બૅક્ટેરિયાનો વૃદ્ધિ-દર કોઈ પણ સમયે હાજર બૅક્ટેરિયાની સંખ્યાના પ્રમાણમાં હોય, તો કેટલા કલાકમાં તેની સંખ્યા 2,00,000 થશે ?

પ્રશ્ન 23 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

23. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... થશે.

(A) $e^x + e^{-y} = c$ (B) $e^x + e^y = c$ (C) $e^{-x} + e^y = c$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = c$

9.5.2 સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ

x અને y નાં નીચેનાં વિધેયોનો વિચાર કરીએ :

$$F_1(x, y) = y^2 + 2xy, \qquad F_2(x, y) = 2x - 3y$$

$$F_3(x, y) = cos\left(\frac{y}{x}\right), \qquad F_4(x, y) = sin\ x + cos\ y$$

ઉપરનાં વિધેયોમાં આપણે x અને y ની જગ્યાએ અનુક્રમે λx અને λy (λ શૂન્યેતર અચળ) મૂકીએ, તો

$$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$$

$$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda(2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$$

$$F_3(\lambda x, \lambda y) = cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 F_3(x, y)$$

પરંતુ કોઈ પણ $n \in N$ માટે $F_4(\lambda x, \lambda y) = sin\ \lambda x + cos\ \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$

નોંધ : કોઈ પણ $n \in Q$ માટે, $sin\ \lambda x + cos\ \lambda y \neq \lambda^n F(x, y)$ એ સાબિત કરવું સરળ નથી. પરંતુ, આપણે સાહજિક રીતે સ્વીકારી લઈએ છીએ.

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિધેયો F_1, F_2, F_3 ને $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ સ્વરૂપમાં લખી શકીએ છીએ. પરંતુ F_4 ને આ સ્વરૂપમાં લખી શકાતું નથી. તે નીચેની વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે.

જો $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ (λ શૂન્યેતર અચળ) તો વિધેય $F(x, y)$ ને n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય (Homogeneous function) કહે છે.

આપણે નોંધીશું કે ઉપરના દાખલાઓમાં F_1, F_2, F_3 એ અનુક્રમે 2, 1, 0 ઘાતવાળાં સમપરિમાણીય વિધેયો છે, પરંતુ F_4 એ સમપરિમાણીય વિધેય નથી.

વળી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

અથવા $$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

અથવા $$F_2(x, y) = y^1\left(\frac{2x}{y} - 3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_3(x, y) = x^0\ cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^0 h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

કોઈ પણ $n \in N$ માટે $F_4(x, y) \neq x^n h_6\left(\frac{y}{x}\right)$

અથવા કોઈ પણ $n \in N$ માટે $F_4(x, y) \neq y^n h_7\left(\frac{x}{y}\right)$.

(ઉપરની નોંધ લાગુ પડે છે.)

$\therefore$ **જો $F(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$ અથવા $y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$ તો વિધેય $F(x, y)$ એ n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે.**

જો $\frac{dy}{dx}$ = F(x, y) સ્વરૂપના વિકલ સમીકરણમાં, F(x, y) એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય હોય, તો તેને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ કહે છે.

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ...(1)$$

પ્રકારના સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ શોધવા માટે આપણે

$y = vx$ લઈશું. ...(2)

સમીકરણ (2) નું x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad ...(3)$$

સમીકરણ (3) માંથી $\frac{dy}{dx}$ ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \qquad ...(4)$$

સમીકરણ (4) ને વિયોજનીય ચલના વિકલ સમીકરણ તરીકે લખતાં,

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad ...(5)$$

સમીકરણ (5) ની બંને બાજુએ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx + c \qquad ...(6)$$

જ્યારે આપણે v ની જગ્યાએ $\frac{y}{x}$ મૂકીએ ત્યારે સમીકરણ (6) એ વિકલ સમીકરણ (1) નો વ્યાપક ઉકેલ (પ્રતિવિકલિત) આપશે.

☛ નોંધ : F(x, y) એ શૂન્ય ઘાતવાળા સમપરિમાણીય વિધેય સ્વરૂપનું હોય, તો સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}(x, y)$ ના ઉકેલ માટે આપણે $\frac{x}{y} = v$ એટલે કે $x = vy$ લઈશું. અને ઉપર ચર્ચા કરી એ રીતે $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ લખીને આપણે વ્યાપક ઉકેલ શોધવા આગળ વધીશું.

ઉદાહરણ 15 : સમીકરણ $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ એ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે એમ દર્શાવો અને તેનો ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x - y} \qquad ...(1)$$

ધારો કે $F(x, y) = \dfrac{x+2y}{x-y}$

હવે, $F(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda(x+2y)}{\lambda(x-y)} = \lambda^0 F(x, y)$

$\therefore$ $F(x, y)$ એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે.

આથી, આપેલ વિકલ સમીકરણ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે.

બીજી રીતે જોતાં, $\dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right] = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ...(2)

વિકલ સમીકરણ (2) ની જમણી બાજુ $g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ સ્વરૂપની છે અને તેથી તે શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે. માટે સમીકરણ (1) એ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. આ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ શોધવા માટે

$y = vx$ લઈએ. ...(3)

સમીકરણ (3) નું 'x' ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad ....(4)$$

y અને $\dfrac{dy}{dx}$ ની કિંમતો સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

$$\therefore \quad \frac{v-1}{v^2+v+1}\,dv = -\frac{dx}{x} \quad ...(5)$$

સમીકરણ (5) ની બંને બાજુએ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}\,dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}\,dv = -\log|x| + c_1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv - \frac{3}{2}\int \frac{dv}{v^2+v+1} = -\log|x| + c_1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\log|v^2+v+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dv = -\log|x| + c_1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \log |v^2 + v + 1| - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log |x| + c_1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \log |v^2 + v + 1| + \frac{1}{2} \log x^2 = \sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + c_1$$ (શા માટે?)

$v = \frac{y}{x}$ મૂકતાં,

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \log \left|\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{2} \log x^2 = \sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + c_1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \log \left|\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1\right) \cdot x^2\right| = \sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + c_1$$

$$\therefore \quad \log |(y^2 + xy + x^2)| = 2\sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + 2c_1$$

$$\therefore \quad \log |(x^2 + xy + y^2)| = 2\sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + c \qquad (c = 2c_1)$$

આ સમીકરણ (1) નો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો કે વિકલ સમીકરણ $x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$ એ સમપરિમાણ છે અને તેને ઉકેલો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ આ પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x}{x \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{...(1)}$$

એ $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ પ્રકારનું વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં, $F(x, y) = \dfrac{y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x}{x \cos\left(\frac{y}{x}\right)}$

x ની જગ્યાએ λx અને y ની જગ્યાએ λy મૂકતાં,

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left[y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x\right]}{\lambda\left[x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]}$$

$$= \lambda^0 F(x, y)$$

આમ, $F(x, y)$ એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણ વિધેય છે. માટે આપેલ વિધેય સમીકરણ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. તેનો ઉકેલ શોધવા માટે આપણે,

$y = vx$ લઈએ. ...(2)

સમીકરણ (2) નું 'x' ને સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad ...(3)$$

y અને $\frac{dy}{dx}$ ની કિંમતો સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + 1}{\cos v} - v$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\therefore \quad \cos v\; dv = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \int \cos v\; dv = \int \frac{1}{x}\; dx$$

$$\therefore \quad \sin v = \log|x| + \log|c|$$

$$\therefore \quad \sin v = \log|cx|$$

$v = \frac{y}{x}$ મૂકતાં,

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|cx|$$

આ માંગેલ વિકલ સમીકરણ (1) નો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો કે વિકલ સમીકરણ $2y\, e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x\, e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$ એ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે અને તેનો વિશિષ્ટ ઉકેલ $x = 0$ હોય, ત્યારે $y = 1$ બને તે રીતે મેળવો.

ઉકેલ : આપણે વિકલ સમીકરણ આ પ્રમાણે લખી શકીએ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}} \qquad ...(1)$$

ધારો કે, $F(x, y) = \dfrac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$

$$\therefore \quad F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(2xe^{\frac{x}{y}} - y)}{\lambda(2ye^{\frac{x}{y}})} = \lambda^0 F(x, y)$$

આમ, F(x, y) એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે. માટે આપેલ વિકલ સમીકરણ એ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. તેનો ઉકેલ શોધવા માટે આપણે

$x = vy$ લઈએ. ...(2)

સમીકરણ (2) નું 'y' ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

x અને $\frac{dx}{dy}$ ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v}$$

$$\therefore \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v} - v$$

$$\therefore \quad y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^v}$$

$$\therefore \quad 2e^v\, dv = -\frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad \int 2e^v\, dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad 2e^v = -\log|y| + c$$

$v = \frac{x}{y}$ મૂકતાં,

$$2e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = c \qquad ...(3)$$

સમીકરણ (3) માં $x = 0$ અને $y = 1$ મૂકતાં,

$$2e^0 + \log|1| = c \Rightarrow c = 2$$

c ની કિંમત સમીકરણ (3) માં મૂકતાં,

$$2e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

આ માંગેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 18 : વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ તેના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$ છે. સાબિત કરો કે આવા વક્રોની સંહતિનું સમીકરણ $x^2 - y^2 = cx$ છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, વક્રના કોઈ પણ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad ...(1)$$

સ્પષ્ટ રીતે, (1) એ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. તેનો ઉકેલ શોધવા માટે આપણે $y = vx$ લઈએ.

$y = vx$ નું 'x' ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\therefore \quad \frac{2v}{1-v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{2v}{v^2-1}\,dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \int \frac{2v}{v^2-1}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \quad \log|v^2-1| = -\log|x| + \log|c_1|$$

$$\therefore \quad \log|(v^2-1)x| = \log|c_1|$$

$$\therefore \quad (v^2-1)\,x = \pm c_1$$

$v = \frac{y}{x}$ મૂકતાં,

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = \pm c_1$$

$\therefore \quad (y^2 - x^2) = \pm c_1 x$ અથવા $x^2 - y^2 = cx$

સ્વાધ્યાય 9.5

પ્રશ્નો 1થી 10 ના વિકલ સમીકરણ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે તેમ દર્શાવો અને દરેકનો ઉકેલ શોધો :

1. $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

2. $y' = \frac{x+y}{x}$

3. $(x - y)\,dy - (x + y)\,dx = 0$

4. $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

5. $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

7. $\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\} y\,dx = \left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\} x\,dy$

8. $x\frac{dy}{dx} - y + x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ **9.** $y\, dx + x \log\left(\frac{y}{x}\right) dy - 2x\, dy = 0$

10. $(1 + e^{\frac{x}{y}})\, dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$

પ્રશ્નો 11 થી 15 માં આપેલ પ્રત્યેક વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ આપેલ શરતોને અધીન રહીને મેળવો :

11. $(x + y)\, dy + (x - y)\, dx = 0$; જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = 1$

12. $x^2\, dy + (xy + y^2)\, dx = 0$; જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = 1$

13. $\left[x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right] dx + x\, dy = 0$; જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = \frac{\pi}{4}$

14. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$; જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = 0$

15. $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$; જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = 2$

પ્રશ્નો 16 તથા 17 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ પ્રકારના સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ કયા આદેશ દ્વારા મેળવી શકાય ?

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

17. નીચેનામાંથી કયું વિકલ સમીકરણ સમપરિમાણ છે ?

(A) $(4x + 6y + 5)\, dy - (3y + 2x + 4)\, dx = 0$

(B) $(xy)\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(D) $y^2\, dx + (x^2 - xy - y^2)\, dy = 0$

9.5.3 સુરેખ વિકલ સમીકરણ

જો P અને Q અચળ વિધેયો અથવા ફક્ત ચલ x નાં વિધેયો હોય, તો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ (Linear Differential Equation of First Order) કહે છે.

પ્રથમ કક્ષાના સુરેખ વિકલ સમીકરણનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે :

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x \log x}\right) = \frac{1}{x}$$

પ્રથમ કક્ષાના વિકલ સમીકરણનું બીજું સ્વરૂપ

$$\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$$

અહીં P_1 અને Q_1 અચળ વિધેયો અથવા ફક્ત ચલ y નાં વિધેયો છે. આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે :

$$\frac{dx}{dy} + x = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{-2x}{y} = y^2e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad ...(1)$$

પ્રકારના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ શોધવા માટે સમીકરણની બંને બાજુ ચલ x ના કોઈક વિધેય $g(x)$ વડે ગુણતાં,

$$g(x)\frac{dy}{dx} + P \cdot g(x)\, y = Q \cdot g(x) \qquad ...(2)$$

સમીકરણની જમણી બાજુ એ $y \cdot g(x)$ નું વિકલિત બને તે રીતે $g(x)$ ની પસંદગી કરો :

એટલે કે, $g(x)\dfrac{dy}{dx} + P \cdot g(x)\, y = \dfrac{d}{dx}[y \cdot g(x)]$ થાય તે રીતે $g(x)$ ની પસંદગી કરો.

$$\therefore \quad g(x)\frac{dy}{dx} + P \cdot g(x)\, y = g(x)\frac{dy}{dx} + y \cdot g'(x)$$

$$\therefore \quad P \cdot g(x) = g'(x)$$

$$\therefore \quad P = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

બંને બાજુએ x ને સાપેક્ષે સંકલન કરતાં,

$$\int P\, dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$$

$$\therefore \quad \int P\, dx = \log\,(g(x))$$

$$\therefore \quad g(x) = e^{\int P\, dx}$$

સમીકરણ (1) ને $g(x) = e^{\int P\, dx}$ વડે ગુણીએ તો તેની ડાબી બાજુએ x અને ચલ y ના કોઈક વિધેયનું વિકલિત મળશે.

આ વિધેય ***$g(x) = e^{\int P\, dx}$ ને સંકલ્યકારક અવયવ (Integrating Factor, ટૂંકમાં I.F.) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.***

સમીકરણ (2) માં $g(x)$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$e^{\int P\, dx}\frac{dy}{dx} + P\, e^{\int P\, dx} y = Q\, e^{\int P\, dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(ye^{\int P\, dx}\right) = Q\, e^{\int P\, dx}$$

બંને બાજુ x પ્રત્યે સંકલન કરતાં,

$$ye^{\int P\, dx} = \int \left(Q\, e^{\int P\, dx}\right) dx + c$$

$$\therefore \quad y = e^{-\int P\, dx} \int \left(Q\, e^{\int P\, dx}\right) dx + c\; e^{-\int P\, dx}$$

આ આપેલા સુરેખ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

પ્રથમ કક્ષાના સુરેખ સમીકરણને ઉકેલવા માટેનાં પગલાં :

(i) જ્યાં P, Q અચળ વિધેયો હોય અથવા ફક્ત ચલ x નાં વિધેયો હોય તે રીતે, આપેલ વિકલ સમીકરણને

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$ સ્વરૂપમાં લખો.

(ii) સંકલ્યકારક અવયવ (I.F.) $= e^{\int P\, dx}$ શોધો.

(iii) આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ નીચે પ્રમાણે લખો :

$$y\,(\text{I.F.}) = \int (Q \times \text{સંકલ્યકારક અવયવ})\, dx + c$$

જો P_1 અને Q_1 અચળ વિધેયો હોય અથવા ફક્ત ચલ y નાં વિધેયો હોય તેવું જો પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ હોય, તો I.F. $= e^{\int P_1\, dy}$ અને વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

$$x \cdot (\text{I.F.}) = \int (Q_1 \times \text{સંકલ્યકારક અવયવ})\, dy + c$$

ઉદાહરણ 19 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માં $P = -1$ અને $Q = \cos x$ છે.

$\therefore$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int -1 dx} = e^{-x}$

સમીકરણની બંને બાજુ સંકલ્યકારક અવયવ વડે ગુણતાં,

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{-x}\cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(ye^{-x}) = e^{-x}\cos x$$

બંને બાજુએ x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$ye^{-x} = \int e^{-x}\cos x\, dx + c \qquad ...(1)$$

ધારો કે, $I = \int e^{-x}\cos x\, dx$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int(-\sin x)(-e^{-x})\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - \int \sin x\, e^{-x}\, dx$$

$$= -\cos x\, e^{-x} - [\sin x\,(-e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\, dx]$$

$$= -\cos x\, e^{-x} + \sin x\, e^{-x} - \int \cos x\, e^{-x}\, dx$$

$$\therefore \quad I = -e^{-x}\cos x + \sin x\, e^{-x} - I$$

$$\therefore \quad 2I = (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$$

$$\therefore \quad I = \frac{(\sin x - \cos x)\, e^{-x}}{2}$$

I ની કિંમત સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$ye^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + c$$

$\therefore \quad y = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) + ce^x$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 20 : વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad ...(1)$$

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુએ x વડે ભાગતાં,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

આ $P = \frac{2}{x}$ અને $Q = x$ માટે $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ પ્રકારનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

$\therefore \quad$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \log x} = e^{\log x^2} = x^2 \qquad$ **$(e^{\log f(x)} = f(x))$**

$\therefore \quad$ આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

$$y \cdot x^2 = \int (x)\,(x^2)\, dx + c = \int x^3\, dx + c = \frac{x^4}{4} + c$$

$\therefore \quad y = \frac{x^2}{4} + cx^{-2}$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 21 : વિકલ સમીકરણ $y\, dx - (x + 2y^2)\, dy = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

આ $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ પ્રકારનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં, $P_1 = \frac{-1}{y}$ અને $Q_1 = 2y$

$\therefore \quad$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

આથી આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

$$\frac{x}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right) dy + c$$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \int 2\, dy + c$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = 2y + c$

$\therefore \quad x = 2y^2 + cy$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 22 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x \ (x \neq 0)$ અને જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $y = 0$ માટે વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : $P = \cot x$ અને $Q = 2x + x^2 \cot x$ માટે આપેલ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ પ્રકારનું સુરેખ સમીકરણ છે.

$\therefore$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \cot x \, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$

આથી, વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ નીચે પ્રમાણે થશે :

$$y \cdot \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x \, dx + c$$

$$\therefore \quad y \cdot \sin x = \int 2x \sin x \, dx + \int x^2 \cos dx + c$$

$$\therefore \quad y \cdot \sin x = \left(\frac{2x^2}{2}\right) \sin x - \int \left(\frac{2x^2}{2}\right) \cos x \, dx + \int x^2 \cos x \, dx + c$$

$$\therefore \quad y \cdot \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos dx + \int x^2 \cos dx + c$$

$$\therefore \quad y \cdot \sin x = x^2 \sin x + c \qquad ...(1)$$

સમીકરણ (1) માં $y = 0$ અને $x = \frac{\pi}{2}$ મૂકતાં,

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c$$

$$\therefore \quad c = \frac{-\pi^2}{4}$$

સમીકરણ (1) માં c ની કિંમત મૂકતાં,

$$y \cdot \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore \quad y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \qquad (\sin x \neq 0)$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 23 : જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ એ આ બિંદુના x-યામ અને x તથા y યામના ગુણાકારના સરવાળા બરાબર હોય, તો બિંદુ $(0, 1)$ માંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, વક્રના કોઈ પણ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{dy}{dx}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = x + xy$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} - xy = x \qquad ...(1)$$

$P = -x$ અને $Q = x$ માટે આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ પ્રકારનું સુરેખ સમીકરણ છે.

$\therefore$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int -x \, dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

આથી, સમીકરણનો ઉકેલ

$$y e^{-\frac{x^2}{2}} = \int x \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx + c \qquad ...(2)$$

ધારો કે $I = \int x\ e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$

ધારો કે $-\frac{x^2}{2} = t$.

તેથી $-x\ dx = dt$. આથી, $x\ dx = -dt$

$\therefore\quad I = -\int e^t\ dt = -e^t = -e^{-\frac{x^2}{2}}$

I ની કિંમત સમીકરણ (2) માં મૂકતાં,

$$y e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$\therefore\quad y = -1 + c e^{\frac{x^2}{2}} \qquad ...(3)$$

સમીકરણ (3) વક્રોની સંહતિનું સમીકરણ દર્શાવે છે.

પરંતુ આપણને આ સંહતિના (0, 1) માંથી પસાર થતા સભ્યને શોધવામાં રસ છે.

સમીકરણ (3) માં $x = 0$ અને $y = 1$ મૂકતાં,

$$1 = -1 + ce^0$$

$\therefore\quad c = 2$

સમીકરણ (3) માં c ની કિંમત મૂકતાં,

$$y = -1 + 2e^{\frac{x^2}{2}}$$

આ માંગેલ વક્રનું સમીકરણ છે.

સ્વાધ્યાય 9.6

પ્રશ્નો 1 થી 12 માં આપેલ વિકલ સમીકરણોના વ્યાપક ઉકેલ શોધો :

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

2. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \quad \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

5. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \quad \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x \quad (x > 0)$

7. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x \quad (x > 0)$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx \ (x \ne 0)$

9. $x \frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0 \ (x \ne 0)$

10. $(x + y) \frac{dy}{dx} = 1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$

12. $(x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = y \quad (y > 0)$

પ્રશ્નો 13 થી 15 માં આપેલ શરતને અધીન નીચેનાં વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો :

13. $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$; જ્યારે $x = \frac{\pi}{3}$ ત્યારે $y = 0$

14. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$; જ્યારે $x = 1$ ત્યારે $y = 0$

15. $\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$; જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $y = 2$

16. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ એ બિંદુના યામના સરવાળા જેટલો થતો હોય, તો ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

17. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુના યામનો સરવાળો એ તે બિંદુ આગળ સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્ય કરતાં 5 વધુ હોય, તો બિંદુ $(0, 2)$ માંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

પ્રશ્નો 18 તથા 19 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

18. વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\frac{1}{x}$ (D) x

19. વિકલ સમીકરણ $(1 - y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$ $(-1 < y < 1)$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $\frac{1}{y^2-1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\frac{1}{1-y^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 24 : વિધેય $y = c_1e^{ax} \cos bx + c_2e^{ax} \sin bx$ એ

વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)\,y = 0$ નો ઉકેલ છે તેમ ચકાસો. (c_1, c_2 સ્વૈર અચળો છે.)

ઉકેલ : આપેલ વિધેય $y = e^{ax}\,[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$ ...(1)

સમીકરણ (1) ની બંને બાજુએ x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\,[-bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx] + [c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]\, e^{ax} \cdot a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{ax}\,[(bc_2 + ac_1) \cos bx + (ac_2 - bc_1) \sin bx] \quad ...(2)$$

સમીકરણ (2)ની બંને બાજુએ x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}\,[(bc_2 + ac_1)(-b \sin bx) + (ac_2 - bc_1)(b \cos bx)] + [(bc_2 + ac_1) \cos bx + (ac_2 - bc_1) \sin bx]\, e^{ax} \cdot a$$

$$= e^{ax}\,[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2) \sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1) \cos bx]$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ અને y ની કિંમતો આપેલ વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં,

ડા.બા. $= e^{ax}\,[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\ sin\ bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\ cos\ bx]$
$- 2ae^{ax}\,[(bc_2 + ac_1)\ cos\ bx + (ac_2 - bc_1)\ sin\ bx]$
$+ (a^2 + b^2)\ e^{ax}\,[c_1\ cos\ bx + c_2\ sin\ bx]$

$= e^{ax}\ (a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2)\ sin\ bx +$
$(a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\ cos\ bx$

$= e^{ax}\ [0 \times sin\ bx + 0 \times cos\ bx] = e^{ax} \times 0 = 0 =$ જ.બા.

આથી, આપેલ વિધેય એ આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

અન્ય રીત : $ye^{-ax} = c_1\ cos\ bx + c_2\,sin\ bx$

$\therefore\ e^{-ax}y_1 - aye^{-ax} = -bc_1\,sin\ bx + bc_2\,cos\ bx$

$\therefore\ y_2e^{-ax} - 2ae^{-ax}y_1 + a^2ye^{-ax} = -b^2c_1\ cos\ bx - b^2c_2\ sin\ bx$
$= -b^2\ ye^{-ax}$

$\therefore\ y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)\,y = 0$

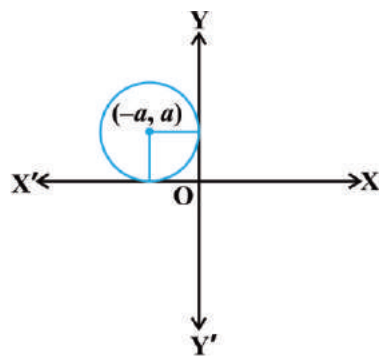
ઉદાહરણ 25 : દ્વિતીય ચરણમાં આવેલ અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે C એ દ્વિતીય ચરણમાં આવેલા અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતાં વર્તુળોની સંહતિ છે. ધારો કે આ સંહતિના સ્વૈર સભ્યના કેન્દ્રના યામ $(-a,\ a)$ તથા ત્રિજ્યા $a > 0$ છે. (જુઓ આકૃતિ 9.6.)

સંહતિ C ના વર્તુળોને દર્શાવતું સમીકરણ,

$$(x + a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \qquad ...(1)$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + a^2 = 0 \qquad ...(2)$$



આકૃતિ 9.6

સમીકરણ (2) નું x ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2a - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ x + y\frac{dy}{dx} = a\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$$

$$\therefore\ a = \frac{x + yy'}{y' - 1}$$

સમીકરણ (1) માં a ની કિંમત મૂકતાં,

$$\left[x + \frac{x + yy'}{y'-1}\right]^2 + \left[y - \frac{x + yy'}{y'-1}\right]^2 = \left[\frac{x + yy'}{y'-1}\right]^2$$

$$\therefore\ [xy' - x + x + yy']^2 + [yy' - y - x - yy']^2 = [x + yy']^2$$

$$\therefore\ [(x + y)\,y']^2 + [x + y]^2 = [x + yy']^2$$

$$\therefore\ (x + y)^2\,[(y')^2 + 1] = [x + yy']^2$$

આ આપેલ વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 26 : જ્યારે $x = 0$ હોય ત્યારે $y = 0$ માટે વિકલ સમીકરણ $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x + 4y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{4y} \qquad ...(1)$$

વિયોજનીય ચલના વિકલ સમીકરણ તરીકે લખતાં,

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x}\, dx$$

$$\therefore \quad \int e^{-4y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$$

$$\therefore \quad \frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + c \qquad ...(2)$$

સમીકરણ (2) માં $x = 0$ અને $y = 0$ મૂકતાં,

$$4 + 3 + 12c = 0 \quad \text{અથવા} \quad c = \frac{-7}{12}$$

સમીકરણ (2) માં c ની કિંમત મૂકતાં,

$$4e^{3x} + 3e^{-4y} - 7 = 0$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 27 : વિકલ સમીકરણ ઉકેલો : $(x\,dy - y\,dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\left[xy \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dy = \left[xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

જમણી બાજુ અંશ અને છેદને x^2 વડે ભાગતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad ...(1)$$

સમીકરણ (1) એ $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ પ્રકારનું સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે.

આ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે $y = vx$ લઈશું.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad ...(2)$$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v \cos v + v^2 \sin v}{v \sin v - \cos v} \qquad \text{((1) અને (2)ના ઉપયોગથી)}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{2v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v}\right) dv = \frac{2dx}{x}$$

માટે, $\int\left(\frac{v\, sin\, v - cos\, v}{v\, cos\, v}\right) dv = 2\int\frac{1}{x}\, dx$

$\therefore \int tan\ v\ dv - \int\frac{1}{v}\ dv = 2\int\frac{1}{x}\ dx$

$\therefore \log|sec\ v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|c_1|$

$\therefore \log\left|\frac{sec\ v}{vx^2}\right| = \log|c_1|$

$\therefore \frac{sec\ v}{vx^2} = \pm c_1$

સમીકરણ (3)માં $v = \frac{y}{x}$ મૂકતાં,

$\therefore \frac{sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = c$ જ્યાં, $c = \pm c_1$

$\therefore sec\left(\frac{y}{x}\right) = cxy$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

અન્ય રીત : $\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) y\ sin\ \frac{y}{x} = \left(\frac{y\,dx + x\,dy}{x}\right) cos\ \frac{y}{x}$

$\therefore d\left(\frac{y}{x}\right) sin\ \frac{y}{x} = \frac{d(xy)}{xy}\ cos\ \frac{y}{x}$

$\therefore d\left(\frac{y}{x}\right) tan\ \frac{y}{x} = \frac{d(xy)}{xy}$

$\therefore \log\left|sec\ \frac{y}{x}\right| = \log|cxy|$

$\therefore sec\ \frac{y}{x} = cxy$

ઉદાહરણ 28 : વિકલ સમીકરણ ઉકેલો : $(tan^{-1}y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad ...(1)$$

હવે, સમીકરણ (1) એ $P_1 = \frac{1}{1+y^2}$ અને $Q_1 = \frac{tan^{-1}y}{1+y^2}$ માટે $\frac{dy}{dx} + P_1x = Q_1$ પ્રકારનું સુરેખ સમીકરણ છે.

$\therefore$ સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}$

$= e^{tan^{-1}y}$

આમ, આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ,

$$xe^{tan^{-1}y} = \int \left(\frac{tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{tan^{-1}y}\, dy + c$$

ધારો કે, $I = \int \left(\frac{tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{tan^{-1}y}\, dy$

$tan^{-1}y = t$ મૂકતાં,

$$\left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy = dt$$

$$\therefore \quad I = \int te^t\, dt$$
$$= te^t - \int 1 \cdot e^t\, dt$$
$$= te^t - e^t$$
$$= e^t\,(t-1)$$

$$\therefore \quad I = e^{tan^{-1}y}\,(tan^{-1}y - 1)$$

I ની કિંમત સમીકરણ (2)માં મૂકતાં,

$$xe^{tan^{-1}y} = e^{tan^{-1}y}\,(tan^{-1}y - 1) + c$$

$$\therefore \quad x = (tan^{-1}y - 1) + c\,e^{-tan^{-1}y}$$

આ આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 9

1. નીચેનાં વિકલ સમીકરણોની કક્ષા અને પરિમાણ (શક્ય હોય, તો) મેળવો :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = sin\, x$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} - sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

2. નીચે આપેલ દરેક પ્રશ્નમાં ચકાસો કે, આપેલ વિધેય (ગૂઢ અથવા સ્પષ્ટ) એ તેના અનુરૂપ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે :

(i) $y = ae^x + be^{-x} + x^2$: $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^x\,(a\, cos\, x + b\, sin\, x)$: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x \sin 3x$: $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y - 6 \cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$: $(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0$

3. વક્રની સંહતિ $(x - a)^2 + 2y^2 = a^2$ દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ શોધો. (a સ્વૈર અચળ)

4. સાબિત કરો કે પ્રચલ c માટે વિકલ સમીકરણ $(x^3 - 3xy^2)\, dx = (y^3 - 3x^2y)\, dy$ નો વ્યાપક ઉકેલ $x^2 - y^2 = c(x^2 + y^2)^2$ છે.

5. પ્રથમ ચરણમાં આવેલાં અને બંને અક્ષોને સ્પર્શતાં વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

6. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

7. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ $(x + y + 1) = A(1 - x - y - 2xy)$ છે, તેમ દર્શાવો. (A સ્વૈર અચળ)

8. જેનું વિકલ સમીકરણ $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ હોય તેવા $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માંથી પસાર થતા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

9. જ્યારે $x = 0$ હોય ત્યારે $y = 1$ માટે વિકલ સમીકરણ $(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

10. વિકલ સમીકરણ $y e^{\frac{x}{y}} dx = \left(x e^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy$ નો ઉકેલ શોધો. $(y \neq 0)$

11. જ્યારે $x = 0$ હોય ત્યારે $y = -1$ માટે વિકલ સમીકરણ $(x - y)(dx + dy) = dx - dy$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો. (**સૂચન :** $x - y = t$ લો.)

12. વિકલ સમીકરણ $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right] \frac{dx}{dy} = 1$ ઉકેલો. $(x \neq 0)$

13. જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ હોય ત્યારે $y = 0$ માટે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$ $(x \neq 0)$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

14. જ્યારે $x = 0$ હોય ત્યારે $y = 0$ માટે વિકલ સમીકરણ $(x + 1) \frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

15. એક ગામની વસતીનો સતત વૃદ્ધિ-દર કોઈ પણ સમયે હાજર રહેવાસીઓની સંખ્યાના પ્રમાણમાં છે. જો 1999 માં ગામની વસતી 20,000 હોય અને 2004માં 25,000 હોય, તો 2009 માં તે ગામની વસતી કેટલી હશે ?

પ્રશ્નો 16 થી 18 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

16. વિકલ સમીકરણ $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ ....

(A) $xy = c$ (B) $x = cy^2$ (C) $y = cx$ (D) $y = cx^2$

17. $\dfrac{dx}{dy} + \text{P}_1 x = \text{Q}_1$ પ્રકારના વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ ....

(A) $y \cdot e^{\int \text{P}_1 dy} = \int (\text{Q}_1 e^{\int \text{P}_1 dy})\, dy + c$ (B) $y \cdot e^{\int \text{P}_1 dx} = \int (\text{Q}_1 e^{\int \text{P}_1 dx})\, dx + c$

(C) $x \cdot e^{\int \text{P}_1 dy} = \int (\text{Q}_1 e^{\int \text{P}_1 dy})\, dy + c$ (D) $x \cdot e^{\int \text{P}_1 dx} = \int (\text{Q}_1 e^{\int \text{P}_1 dx})\, dx + c$

18. વિકલ સમીકરણ $e^x\, dy + (ye^x + 2x)\, dx = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ ....

(A) $xe^y + x^2 = c$ (B) $xe^y + y^2 = c$

(C) $ye^x + x^2 = c$ (D) $ye^y + x^2 = c$

સારાંશ

- સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતોને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ કહે છે.
- વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષા એ વિકલ સમીકરણની કક્ષા છે.
- જો વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી હોય, તો તેનું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત થાય છે.
- વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ (જો તે વ્યાખ્યાયિત હોય, તો) એ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતનો ઉચ્ચતમ ઘાતાંક (ધન પૂર્ણાંક) છે.
- જે વિધેય આપેલા વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેને તેનો ઉકેલ કહે છે.
- વિકલ સમીકરણની જેટલી કક્ષા હોય તેટલા સ્વૈર અચળાંકો ધરાવતા ઉકેલને તેનો વ્યાપક ઉકેલ કહે છે અને સ્વૈર અચળાંકોથી મુક્ત હોય તેવા ઉકેલને વિશિષ્ટ ઉકેલ કહે છે.
- આપેલ વિધેયમાં જેટલા સ્વૈર અચળો આવેલા હોય તેટલા વખત એક પછી એક વિકલન કરીને આ સ્વૈર અચળોનો લોપ કરીને વિકલ સમીકરણની રચના કરી શકાય છે.
- જે સમીકરણમાં ચલોને સંપૂર્ણપણે અલગ કરી શકાતા હોય (એટલે કે જે પદમાં ચલ y હોય તે dy સાથે હોય અને જે પદમાં ચલ x હોય તે dx સાથે હોય) તેનો ઉકેલ શોધવા માટે વિયોજનીય ચલની રીત વપરાય છે.
- જ્યાં $f(x, y)$ અને $g(x, y)$ એ શૂન્ય ઘાતવાળા સમપરિમાણીય વિધેય હોય તે રીતે જે વિકલ સમીકરણને $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ અથવા $\dfrac{dx}{dy} = g(x, y)$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તેને સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ કહે છે.
- જે વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ જ્યાં P અને Q અચળ હોય અથવા ફક્ત ચલ x નાં વિધેયો હોય તેને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ કહે છે.

Historical Note

One of the principal languages of Science is that of differential equations. Interestingly, the date of birth of differential equations is taken to be November, 11,1675, when ***Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz*** (C.E. 1646 - C.E. 1716) first put in black and white the identity $\int y\, dy = \frac{1}{2}y^2$, thereby introducing both the symbols $\int$ and dy.

Leibnitz was actually interested in the problem of finding a curve whose tangents were prescribed. This led him to discover the 'method of separation of variables' C.E. 1691. A year later he formulated the 'method of solving the homogeneous differential equations of the first order'. He went further in a very short time to the discovery of the 'method of solving a linear differential equation of the first-order'. How surprising is it that all these methods came from a single man and that too within 25 years of the birth of differential equations!

In the old days, what we now call the 'solution' of a differential equation, was used to be referred to as 'integral' of the differential equation, the word being coined by ***James Bernoulli*** (C.E. 1654 - C.E. 1705) in C.E. 1690. The word 'solution' was first used by ***Joseph Louis Lagrange*** (C.E. 1736 - C.E. 1813) in C.E. 1774, which was almost hundred years since the birth of differential equations. It was ***Jules Henri Poincare*** (C.E. 1854 - C.E. 1912) who strongly advocated the use of the word 'solution' and thus the word 'solution' has found its deserved place in modern terminology. The name of the 'method of separation of variables' is due to ***John Bernoulli*** (C.E. 1667 - C.E. 1748), a younger brother of ***James Bernoulli***.

Application to geometric problems were also considered. It was again ***John Bernoulli*** who first brought into light the intricate nature of differential equations. In a letter to ***Leibnitz***, dated May 20, 1715, he revealed the solutions of the differential equation

$$x^2 y'' = 2y,$$

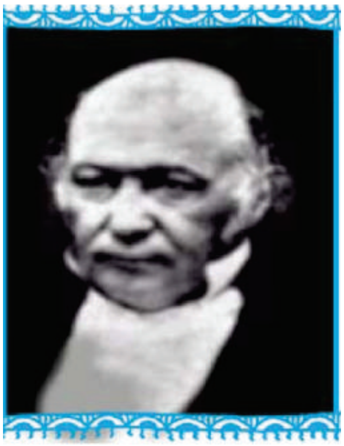
which led to three types of curves, viz., parabolas, hyperbolas and a class of cubic curves. This shows how varied the solutions of such innocent looking differential equation can be. From the second half of the twentieth century attention has been drawn to the investigation of this complicated nature of the solutions of differential equations, under the heading '***qualitative analysis of differential equations***'. Now-a-days, this has acquired prime importance being absolutely necessary in almost all investigations.

પ્રકરણ **10**

સદિશ બીજગણિત

❖ *In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL* ❖

10.1 પ્રાસ્તાવિક



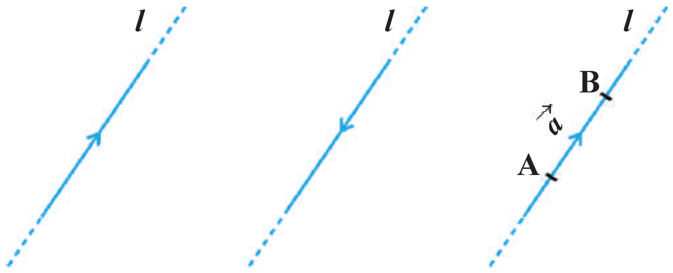
W. R. Hamilton
(C.E. 1805 - C.E. 1865)

આપણા રોજિંદા જીવનમાં નીચેના જેવા ઘણા બધા પ્રશ્નો ઉપસ્થિત થાય છે. તમારી ઊંચાઈ શું છે ? ફૂટબૉલ ટીમના ખેલાડીએ, પોતાની ટીમના ખેલાડીને 'પાસ' આપવા માટે બૉલને કઈ રીતે ધકેલવો જોઈએ? નિરીક્ષણ કરો કે પ્રથમ પ્રશ્નનો શક્ય ઉત્તર 1.6 મીટર હોઈ શકે. તે માત્ર એક વાસ્તવિક સંખ્યાના માન પર આધારિત હોય એવી રાશિ છે. આવી રાશિઓને *અદિશો* કહે છે. આમ છતાં, બીજા પ્રશ્નનો ઉત્તર જે રાશિ (બળ કહેવાય છે) છે તે સ્નાયુઓની શક્તિ (માપ) અને દિશા (કે જે દિશામાં બીજો ખેલાડી સ્થાયી છે) પર આધારિત છે. આવી રાશિઓને *સદિશો* કહે છે. ગણિતશાસ્ત્ર, ભૌતિકશાસ્ત્ર અને યંત્રશાસ્ત્રમાં આપણી પાસે અવારનવાર બંને પ્રકારની રાશિઓ ઉપસ્થિત થાય છે. અદિશ રાશિઓ જેવી કે લંબાઈ, દળ, સમય, અંતર, ઝડપ, ક્ષેત્રફળ, ઘનફળ, તાપમાન, કાર્ય, નાણું, વીજળીનું દબાણ, ઘનતા, વીજળીની પ્રતિરોધક શક્તિ વગેરે અને સદિશ રાશિઓ જેવી કે સ્થાનાંતર, વેગ, પ્રવેગ, બળ, વજન, વેગમાન, વીજક્ષેત્રની તીવ્રતા વગેરે વ્યવહારમાં ઉપસ્થિત થાય છે.

આ પ્રકરણમાં સદિશો, સદિશો પરની વિવિધ ક્રિયાઓ અને તેમના બૈજિક અને ભૌમિતિક ગુણધર્મોના પાયાના સિદ્ધાંતોનો અભ્યાસ કરીશું. આ બે પ્રકારના ગુણધર્મોનો જ્યારે સંયુક્ત રીતે વિચાર કરવામાં આવે છે ત્યારે તે સદિશોની સંકલ્પનાનો સંપૂર્ણ ખ્યાલ આપે છે અને ઉપર વર્ણવેલ જુદાં-જુદાં ક્ષેત્રોમાં તેમની ઉપયોગિતાનાં અસ્તિત્વ તરફ દોરી જાય છે.

10.2 કેટલીક પાયાની સંકલ્પનાઓ

ધારો કે 'l' એ ત્રિપરિમાણીય અવકાશ અથવા સમતલની કોઈ રેખા છે. આ રેખાને તીરની નિશાની દ્વારા દિશા આપી શકાય છે. *સૂચવેલ પૈકી કોઈ એક દિશા સાથેની રેખાને દિશાયુક્ત રેખા કહે છે.* (આકૃતિ 10.1 (i), (ii)).



(i) (ii) (iii)

આકૃતિ 10.1

હવે નિરીક્ષણ કરો કે જો આપણે રેખા l ને રેખાખંડ AB સુધી જ મર્યાદિત કરીએ, તો બેમાંથી એક દિશાવાળી રેખાને એવી રીતે માન સૂચવવામાં આવે છે, જેથી આપણને દિશાયુક્ત રેખાખંડ મળે છે. (આકૃતિ 10.1 (iii)).

વ્યાખ્યા 1 : જે રાશિને માન અને દિશા બંને હોય તે રાશિને સદિશ કહે છે.

નોંધ કરો કે દિશાયુક્ત રેખાખંડ એ સદિશ છે (આકૃતિ 10.1 (iii)). તેને $\overrightarrow{AB}$ અથવા કેવળ $\vec{a}$ વડે દર્શાવાય છે અને 'સદિશ $\overrightarrow{AB}$' અથવા 'સદિશ $\vec{a}$' એમ વંચાય છે.

જે બિંદુ A થી સદિશ $\overrightarrow{AB}$ પ્રસ્થાન કરે છે તે બિંદુ A ને સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નું ***પ્રારંભિક બિંદુ (પ્રારંભ બિંદુ)*** કહે છે અને જ્યાં $\overrightarrow{AB}$ અંત પામે છે તે બિંદુ B ને સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નું ***અંત્યબિંદુ (અંતિમ બિંદુ)*** કહે છે. સદિશના પ્રારંભ બિંદુ અને અંત્યબિંદુ વચ્ચેના અંતરને ***સદિશનું માન (અથવા લંબાઈ)*** કહે છે અને તેને $|\overrightarrow{AB}|$ અથવા $|\vec{a}|$ અથવા a દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. તીરની નિશાની સદિશની દિશા સૂચવે છે.

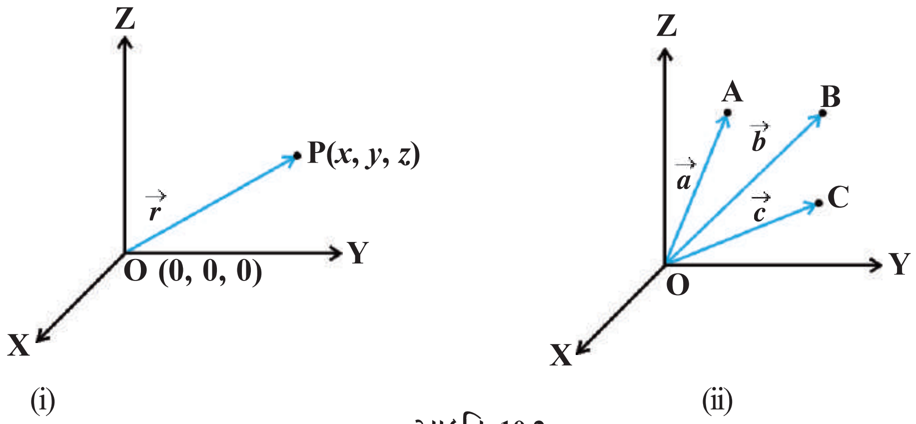
☞ **નોંધ** લંબાઈ ક્યારેય ઋણ હોતી નથી, તેથી સંકેત $|\vec{a}| < 0$ નો કોઈ અર્થ નથી.

સ્થાન સદિશ

ધોરણ XI ની, જમણા હાથની ત્રિપરિમાણીય લંબચોરસીય યામપદ્ધતિ (આકૃતિ 10.2 (i)) નું સ્મરણ કરો. ઊગમબિંદુ O (0, 0, 0) ને સાપેક્ષ જેના યામ (x, y, z) હોય તેવું અવકાશનું એક બિંદુ P લો. અહીં, પ્રારંભ બિંદુ O અને અંતિમ બિંદુ P વાળા સદિશ $\overrightarrow{OP}$ ને બિંદુ O ને સાપેક્ષ બિંદુ P નો ***સ્થાનસદિશ*** કહે છે. અંતરસૂત્ર (ધોરણ XI)નો ઉપયોગ કરીને, $\overrightarrow{OP}$ (અથવા $\vec{r}$) નું માન, સૂત્ર

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

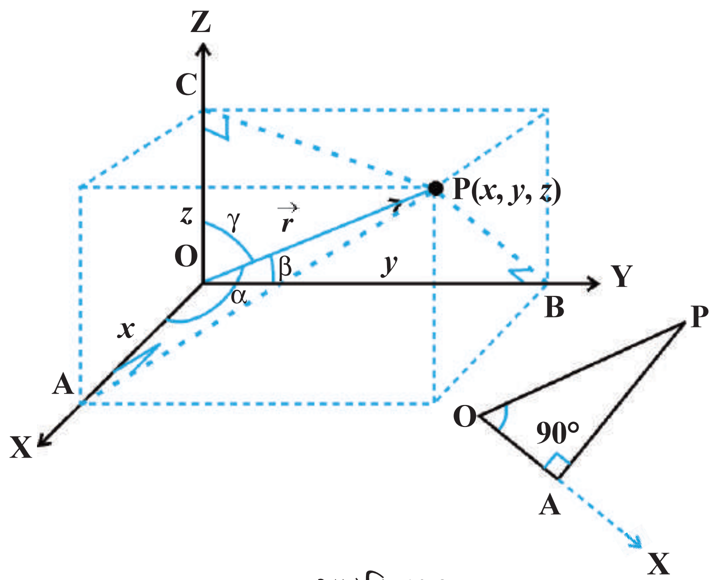
દ્વારા આપવામાં આવે છે. વ્યવહારમાં, બિંદુઓ A, B, C વગેરેના બિંદુ O ને સાપેક્ષ સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ વગેરે દ્વારા દર્શાવાય છે (આકૃતિ 10.2 (ii)).



આકૃતિ 10.2

દિક્કોસાઈન

આકૃતિ 10.3 પ્રમાણે બિંદુ P (x, y, z) ના સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OP}$ (અથવા $\vec{r}$) નો વિચાર કરો. ***સદિશ $\vec{r}$ એ x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે α, β અને γ ખૂણાઓ આંતરે છે. તેમને સદિશ $\vec{r}$ ના દિક્ખૂણાઓ કહે છે. આ ખૂણાઓનાં કોસાઈન મૂલ્યો, એટલે કે $\cos \alpha$, $\cos \beta$ અને $\cos \gamma$ ને સદિશ $\vec{r}$ ની દિક્કોસાઈનો કહેવાય છે અને તેમને સામાન્ય રીતે અનુક્રમે l, m, n વડે દર્શાવાય છે.***



આકૃતિ 10.3

આકૃતિ 10.3 પરથી જોઈ શકાય કે, ત્રિકોણ OAP એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને તે પરથી આપણને $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ (r એ $|\vec{r}|$ માટે છે) મળે. આ જ પ્રમાણે કાટકોણ ત્રિકોણો OBP અને OCP પરથી આપણે $\cos \beta = \frac{y}{r}$ અને $\cos \gamma = \frac{z}{r}$ લખી શકીએ. આમ, બિંદુ P ના યામ પણ (lr, mr, nr) દ્વારા દર્શાવી શકાય. સંખ્યાઓ lr, mr અને nr દિક્કોસાઈનના પ્રમાણમાં છે. તેમને સદિશ $\vec{r}$ ના ***દિક્ગુણોત્તરો*** કહે છે અને તેમને અનુક્રમે a, b અને c દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

☞ **નોંધ** સામાન્ય રીતે, નોંધનીય છે કે $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, પરંતુ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ હોય તે જરૂરી નથી.

10.3 સદિશોના પ્રકાર

શૂન્ય સદિશ : *જે સદિશનું પ્રારંભ બિંદુ અને અંત્યબિંદુ એકનું એક જ હોય તેને શૂન્ય સદિશ કહે છે અને તેને $\vec{0}$ વડે દર્શાવાય છે. શૂન્ય સદિશનું માન શૂન્ય છે અને શૂન્ય સદિશ સાથે ચોક્કસ દિશા સંગત કરી શકાતી નથી. અથવા, બીજી રીતે વિચારતાં, તેને કોઈ પણ દિશા છે તેમ વિચારી શકાય. સદિશો $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ શૂન્ય સદિશ દર્શાવે છે.*

એકમ સદિશ : *જે સદિશનું માન 1 એકમ હોય તેને એકમ સદિશ કહે છે. આપેલ સદિશ $\vec{a}$ ની દિશામાં આવેલા એકમ સદિશને $\hat{a}$ વડે દર્શાવાય છે.*

સમઉદ્ભવ સદિશો : *બે કે તેથી વધુ સદિશોનું પ્રારંભ બિંદુ એક જ હોય, તો તે સદિશોને સમઉદ્ભવ સદિશો કહે છે.*

સમરેખ સદિશો : *જો બે કે તેથી વધુ સદિશો તેમના માન અને દિશાઓથી નિરપેક્ષ રીતે, એક જ રેખાને સમાંતર હોય, તો તે સદિશોને સમરેખ સદિશો કહે છે.*

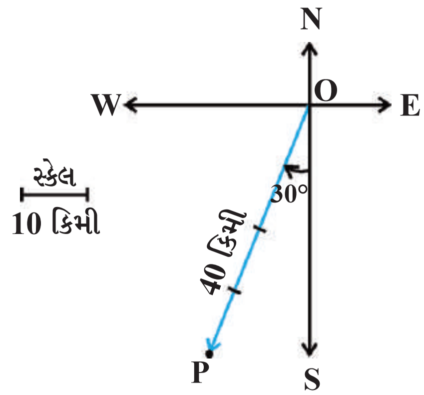
સમાન સદિશો : *જો બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નાં માન અને દિશા, તેમનાં પ્રારંભ બિંદુઓથી નિરપેક્ષ રીતે સમાન હોય, તો તેમને સમાન સદિશો કહે છે અને સમાન સદિશો $\vec{a}$ તથા $\vec{b}$ ને $\vec{a} = \vec{b}$ તરીકે લખાય છે.*

સદિશનો ઋણ સદિશ : *જે સદિશનું માન આપેલ સદિશ $\overrightarrow{AB}$ (કહો) ના માન જેટલું જ હોય, પરંતુ દિશા આપેલ સદિશની દિશાની વિરુદ્ધ દિશા હોય તે સદિશને આપેલ સદિશનો ઋણ સદિશ કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, સદિશ $\overrightarrow{BA}$ એ સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નો ઋણ સદિશ છે અને $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ એમ લખાય છે.*

નોંધ : ઉપર વ્યાખ્યાયિત કરેલા સદિશોનું દિશા તથા માન બદલ્યા વગર સમાંતર સ્થાનાંતર કરી શકાય. આવા સદિશોને ***મુક્ત સદિશો*** કહે છે. આ સમગ્ર પ્રકરણ દરમિયાન, આપણે માત્ર મુક્ત સદિશોનો જ ઉપયોગ કરીશું.

ઉદાહરણ 1 : દક્ષિણથી પશ્ચિમ તરફ 30° ના ખૂણે 40 કિમીનું સ્થાનાંતર આલેખ દ્વારા દર્શાવો.

ઉકેલ : સદિશ $\overrightarrow{OP}$ માંગેલ સ્થાનાંતર દર્શાવે છે (આકૃતિ 10.4).



આકૃતિ 10.4

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ માપને અદિશ અને સદિશમાં વર્ગીકૃત કરો :

(i) 5 સેકન્ડ (ii) 1000 સેમી^{3}

(iii) 10 ન્યૂટન (iv) 30 કિમી/કલાક

(v) 10 ગ્રામ/સેમી^{3} (vi) 20 મી/સે ઉત્તર તરફ

ઉકેલ : (i) સમય - અદિશ છે. (ii) ઘનફળ - અદિશ છે.

(iii) બળ - સદિશ છે. (iv) ઝડપ - અદિશ છે.

(v) ઘનતા - અદિશ છે. (vi) વેગ - સદિશ છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 10.5 માં કયા સદિશો

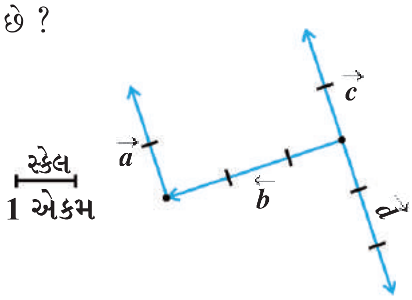
(i) સમરેખ (ii) સમાન (iii) સમઉદ્‌ભવ સદિશો છે ?

ઉકેલ :

(i) સમરેખ સદિશો : $\vec{a}$, $\vec{c}$ અને $\vec{d}$

(ii) સમાન સદિશો : $\vec{a}$ અને $\vec{c}$

(iii) સમઉદ્‌ભવ સદિશો : $\vec{b}$, $\vec{c}$ અને $\vec{d}$



આકૃતિ 10.5

સ્વાધ્યાય 10.1

1. ઉત્તરથી પૂર્વ તરફ 30° ના ખૂણે 40 કિમીનું સ્થાનાંતર આલેખ દ્વારા દર્શાવો.
2. નીચે આપેલ માપને અદિશ અને સદિશમાં વર્ગીકૃત કરો :

   (i) 10 કિગ્રા (ii) 2 મી ઉત્તર-પશ્ચિમ દિશામાં (iii) 40°

   (iv) 40 વૉટ (v) 10^{-19} કુલંબ (vi) 20 મી/સે^{2}
3. નીચે આપેલ રાશિને અદિશ અને સદિશ રાશિઓમાં વર્ગીકૃત કરો :

   (i) સમયગાળો (ii) અંતર (iii) બળ

   (iv) વેગ (v) થયેલ કાર્ય
4. આકૃતિ 10.6 માં (એક ચોરસ), નીચે આપેલ સદિશો ઓળખો :

   (i) સમઉદ્‌ભવ (ii) સમાન

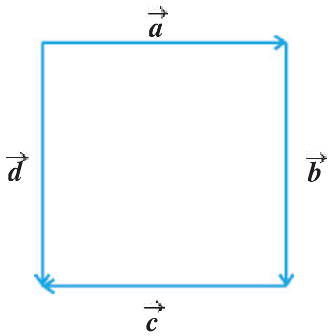
   (iii) સમરેખ પરંતુ સમાન નહિ.
5. નીચે આપેલ વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

   (i) $\vec{a}$ અને $-\vec{a}$ સમરેખ છે.

   (ii) બે સમરેખ સદિશો હંમેશાં સમાન માનવાળા સદિશો હોય છે.

   (iii) સમાન માનવાળા બે સદિશો સમરેખ હોય છે.

   (iv) સમાન માનવાળા બે સમરેખ સદિશો સમાન હોય છે.



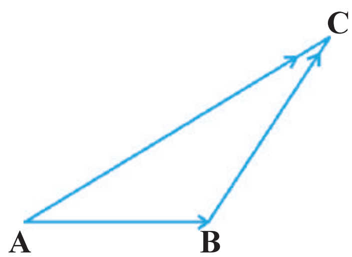
આકૃતિ 10.6

10.4 સદિશોનો સરવાળો

સદિશ $\overrightarrow{AB}$ નો સાદો અર્થ, બિંદુ A થી બિંદુ B સુધીનું સ્થાનાંતર થાય છે. હવે, એક છોકરી બિંદુ A થી B અને પછી B થી C જાય છે તે પરિસ્થિતિનો વિચાર કરો (આકૃતિ 10.7). છોકરી દ્વારા બિંદુ A થી બિંદુ C સુધી થયેલ કુલ સ્થાનાંતરને સદિશ $\overrightarrow{AC}$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

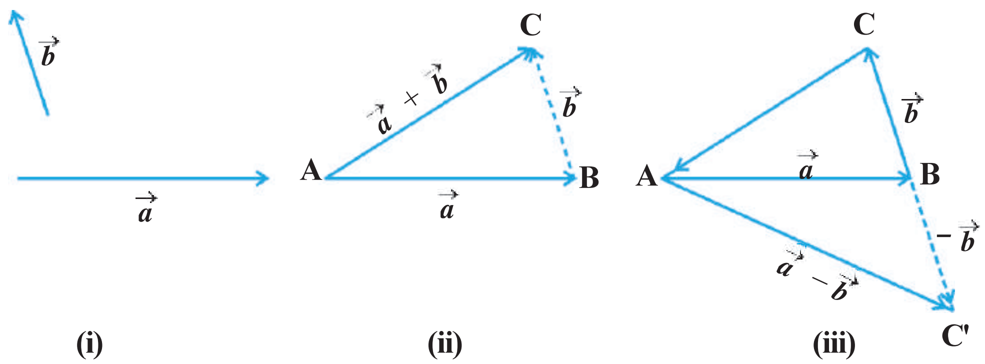
વડે દર્શાવાય છે.



આકૃતિ 10.7

આ નિયમ સદિશ સરવાળા માટે ત્રિકોણના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.

વ્યાપક રીતે, જો આપણી પાસે બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ (આકૃતિ 10.8 (i)) હોય, તો તેમનો સરવાળો કરવા માટે એક સદિશનું પ્રારંભ બિંદુ અને બીજાનું અંતિમ બિંદુ એકના એક જ હોય એ રીતે તે ગોઠવાયેલા હોવા જોઈએ (આકૃતિ 10.8 (ii)).



આકૃતિ 10.8

ઉદાહરણ તરીકે, આકૃતિ 10.8 (ii) માં, સદિશ $\vec{b}$ ને તેનું માન અને દિશા બદલ્યા વિના સ્થાનાંતરિત કર્યો છે કે જેથી તેનું પ્રારંભ બિંદુ અને $\vec{a}$ નું અંતિમ બિંદુ એકના એક જ રહે. ત્યાર બાદ સદિશ $\vec{a}+\vec{b}$ ને ત્રિકોણ ABCની ત્રીજી બાજુ AC દ્વારા દર્શાવ્યો છે. તે આપણને સદિશો **$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો સરવાળો (અથવા પરિણામી સદિશ)** આપે છે, એટલે કે ત્રિકોણ ABC દ્વારા (આકૃતિ 10.8 (ii)) આપણને મળે છે.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

હવે ફરીથી, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ હોવાથી, ઉપર દર્શાવેલ સમીકરણ પરથી, આપણી પાસે

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

આનો અર્થ એ છે કે જ્યારે ત્રિકોણની બાજુઓ ક્રમમાં લેવામાં આવે ત્યારે તેમનો સરવાળો શૂન્ય બને છે, કારણ કે પ્રારંભ અને અંતિમ બિંદુઓ એકના એક જ બને છે (આકૃતિ 10.8 (iii)).

હવે, સદિશ $\overrightarrow{BC}$ ના માન જેટલા જ માનવાળો, પરંતુ જેની દિશા $\overrightarrow{BC}$ ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશા બને એવો સદિશ $\overrightarrow{BC'}$ રચો (આકૃતિ 10.8 (iii)), એટલે કે $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$

પછી, ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં આકૃતિ 10.8 (iii) પરથી આપણને મળે છે

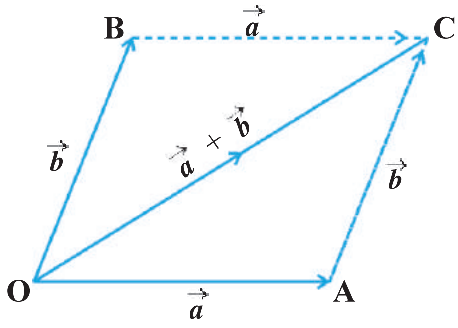
$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{BC}\right) = \vec{a} - \vec{b}$$

સદિશ $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ *નો તફાવત દર્શાવે છે*, એમ કહેવાય છે.

એક હોડી નદીના એક કિનારેથી બીજા કિનારે નદીના પ્રવાહની લંબ દિશામાં જાય છે. પછી, તેની પર બે વેગ સદિશો કાર્ય કરે છે – એક સદિશ હોડીના એન્જિન દ્વારા હોડીને મળતો વેગ અને બીજો નદીના પ્રવાહનો વેગ. આ બંને વેગના સંયુક્ત પ્રભાવ હેઠળ, હોડી વાસ્તવમાં જુદા વેગ સાથે મુસાફરી શરૂ કરે છે. હોડીની અસરકારક ગતિ

અને દિશા (એટલે કે પરિણામી વેગ) વિશેનો ચોક્કસ ખ્યાલ મેળવવા માટે, આપણી પાસે નીચે આપેલ ***સદિશ સરવાળાનો નિયમ*** છે.

જો આપણે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને કોઈ સ.બા.ચ.ની બે પાસ-પાસેની બાજુઓ દ્વારા માન અને દિશા સાથે દર્શાવીએ, તો તેમના સરવાળા $\vec{a} + \vec{b}$ ને માન અને દિશા સહિત તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના તેમના સામાન્ય પ્રારંભિક બિંદુમાંથી પસાર થતા વિકર્ણ દ્વારા દર્શાવાય છે (આકૃતિ 10.9). આ નિયમ સદિશ ***સરવાળા માટે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના નિયમ*** તરીકે ઓળખાય છે.



આકૃતિ 10.9

☞ **નોંધ** આકૃતિ 10.9 પરથી, ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરીને લખી શકાય કે,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

અથવા $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \qquad (\text{કારણ કે } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB})$$

આ જ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો નિયમ છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે સદિશ સરવાળાના બે નિયમો એકબીજાને સમકક્ષ છે.

સદિશ સરવાળાના ગુણધર્મો

ગુણધર્મ 1 : કોઈ પણ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(ક્રમનો ગુણધર્મ)}$$

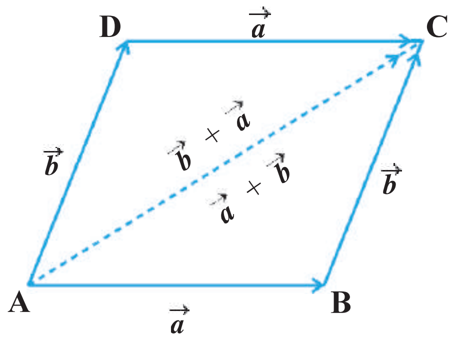
સાબિતી : વિચારો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (આકૃતિ 10.10). $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ અને $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ લો. તો ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, ત્રિકોણ ABC પરથી આપણને,

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} \text{ મળે.}$$

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ સમાન અને સમાંતર હોવાથી, આકૃતિ 10.10 પરથી આપણી પાસે, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ અને $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ છે. ફરીથી ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, ત્રિકોણ ADC પરથી આપણી પાસે,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a} \text{ છે.}$$

તેથી, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

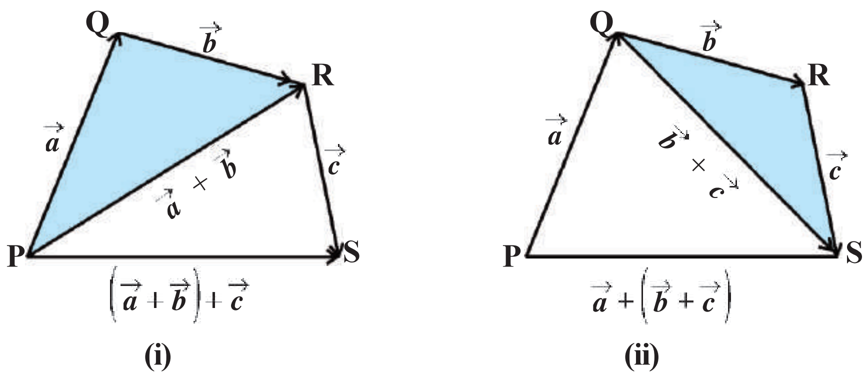


આકૃતિ 10.10

ગુણધર્મ 2 : કોઈ પણ ત્રણ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ માટે,

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \qquad \text{(જૂથનો ગુણધર્મ)}$$

સાબિતી : આકૃતિ 10.11 (i) અને (ii) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે અનુક્રમે $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ અને $\overrightarrow{RS}$ વડે દર્શાવાતા સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ લો.



આકૃતિ 10.11

હવે, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

અને $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}$

એટલે કે $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$

તથા $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

તેથી, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

નોંધ : આપણે સદિશ સરવાળા માટે જૂથના ગુણધર્મના કારણે ત્રણ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ના સરવાળાને કૌંસ વગર, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ સ્વરૂપે લખી શકીએ છીએ.

નોંધ કરો કે કોઈ પણ સદિશ $\vec{a}$ માટે $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ સત્ય છે.

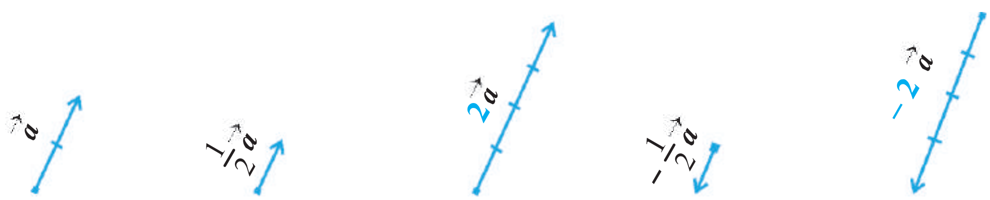
અહીં, શૂન્ય સદિશ $\vec{0}$ ને સદિશ સરવાળા માટે ***તટસ્થ ઘટક*** કહે છે.

10.5 સદિશનો અદિશ સાથેનો ગુણાકાર

આપેલ સદિશ $\vec{a}$ અને શૂન્યેતર અદિશ λ છે. સદિશ $\vec{a}$ નો અદિશ λ સાથેનો ગુણાકાર, $\lambda\vec{a}$ દ્વારા દર્શાવાય છે. તેને સદિશ $\vec{a}$ નો અદિશ λ સાથેનો ગુણાકાર કહે છે. નોંધ કરો કે $\lambda\vec{a}$ પણ સદિશ છે. તે સદિશ $\vec{a}$ ને સમરેખ છે. સદિશ $\lambda\vec{a}$ ની દિશા, એ સદિશ $\vec{a}$ ની જ દિશા (અથવા વિરુદ્ધ દિશા) છે અને તે λની ધન (અથવા ઋણ) કિંમત પ્રમાણે નક્કી થતું હોય છે. વળી, સદિશ $\lambda\vec{a}$નું માન સદિશ $\vec{a}$ ના માન કરતાં $|\lambda|$ ગણું હોય છે, એટલે કે

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

સદિશના અદિશ સાથેના ગુણાકારનું ભૌમિતિક નિરૂપણ આકૃતિ 10.12માં આપેલ છે.



આકૃતિ 10.12

જ્યારે $\lambda = -1$ હોય, ત્યારે $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$. આ સદિશનું માન $\vec{a}$ ના માન જેટલું જ હોય છે અને દિશા, $\vec{a}$ ની દિશાથી વિરુદ્ધ છે. સદિશ $-\vec{a}$ ને સદિશ $\vec{a}$ નો ઋણ (અથવા સરવાળા પ્રત્યે વ્યસ્ત) સદિશ કહે છે. અહીં હંમેશાં $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ થાય.

વળી, જો $\vec{a} \neq \vec{0}$ એટલે કે $\vec{a}$ શૂન્ય સદિશ ન હોય અને $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, તો

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}\,|\vec{a}| = 1$$

તેથી, $\lambda\vec{a}$ એ $\vec{a}$ ***ની દિશામાં એકમ સદિશ*** દર્શાવે છે.

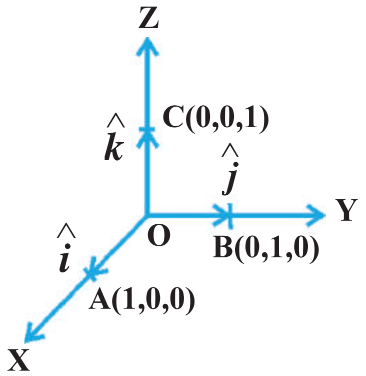
તેને આપણે $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ સ્વરૂપે લખીએ છીએ.

☞ નોંધ કોઈ પણ અદિશ k માટે, $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 સદિશના ઘટકો

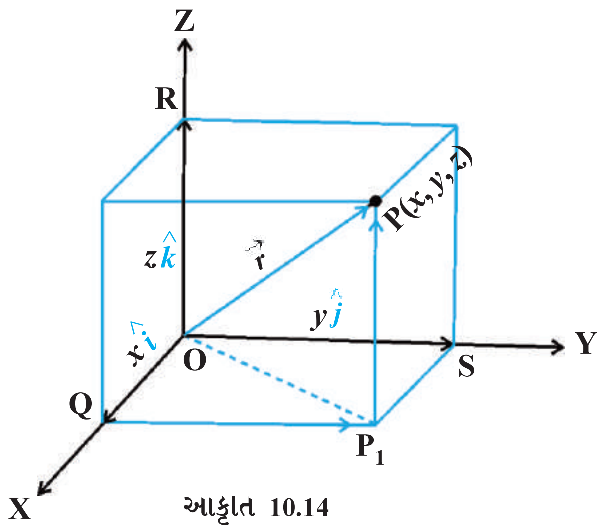
આપણે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર અનુક્રમે બિંદુઓ A (1, 0, 0), B (0, 1, 0) અને C (0, 0, 1) લઈએ. આથી સ્પષ્ટ છે કે $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = 1$ અને $|\vec{OC}| = 1$

સદિશો $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ અને $\vec{OC}$ પૈકી પ્રત્યેકનું માન 1 છે. તેમને અનુક્રમે અક્ષો OX, OY અને OZ ની દિશામાં એકમ સદિશો કહેવાય છે અને તેમને અનુક્રમે $\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ વડે દર્શાવાય છે (આકૃતિ 10.13).



આકૃતિ 10.13

હવે, આકૃતિ 10.14 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ $P(x, y, z)$ નો સ્થાન સદિશ $\vec{OP}$ લઈએ. બિંદુ P માંથી સમતલ XOY પર લંબનો લંબપાદ P_1 છે. આમ, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે P_1P એ z-અક્ષને સમાંતર છે.



આકૃતિ 10.14

$\hat{i}$, $\hat{j}$ અને $\hat{k}$ અનુક્રમે x, y અને z અક્ષની દિશાના એકમ સદિશો હોવાથી અને બિંદુ P ના યામોની વ્યાખ્યા અનુસાર, આપણી પાસે $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$.

આ જ પ્રમાણે, $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ અને $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$

માટે $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$

અને $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

તેથી, O ના સંદર્ભમાં P નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OP} \text{ (અથવા } \vec{r}\text{)} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે.

કોઈ પણ સદિશના આ સ્વરૂપને તેનું ***ઘટક સ્વરૂપ*** કહે છે. અહીં, ***x, y અને z ને $\vec{r}$ ના અદિશ ઘટકો કહે છે, અને $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ અને $z\hat{k}$ ને $\vec{r}$ ના અનુરૂપ અક્ષોની દિશાના સદિશ ઘટકો કહે છે.*** કેટલીક વખત x, y અને z ને લંબચોરસીય ઘટકો તરીકે પણ પરિભાષિત કરવામાં આવે છે.

કોઈ પણ સદિશ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ની લંબાઈ, પાયથાગોરસના પ્રમેયનો બે વાર ઉપયોગ કરીને સહેલાઈથી શોધી શકાય છે. આપણે નોંધ કરીશું કે કાટકોણ ત્રિકોણ OQP_1 પરથી (આકૃતિ 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

અને કાટકોણ ત્રિકોણ OP_1P પરથી આપણી પાસે,

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

તેથી, કોઈ પણ સદિશ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ની લંબાઈ

$$|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

જો કોઈ પણ બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને ઘટક સ્વરૂપમાં, અનુક્રમે $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ તરીકે આપેલ હોય, તો

(i) **સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો સરવાળો (અથવા પરિણામી સદિશ)**

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$ **દ્વારા આપવામાં આવે છે.**

(ii) સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો તફાવત નીચે પ્રમાણે આપવામાં આવે છે :

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$

(iii) સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમાન હોય, તો અને તો જ

$a_1 = b_1, a_2 = b_2$ **અને** $a_3 = b_3$

(iv) સદિશ $\vec{a}$ નો કોઈ પણ અદિશ λ સાથેનો ગુણાકાર

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ **દ્વારા આપવામાં આવે છે.**

સદિશોનો સરવાળો અને સદિશનો અદિશ સાથેનો ગુણાકાર સાથે મળીને નીચે દર્શાવેલ વિભાજનના નિયમોનું પાલન કરે છે :

કોઈ પણ સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ અને કોઈ પણ અદિશ k તથા m આપેલા છે, તો

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k + m)\vec{a}$

(ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

(iii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

નોંધ :

(i) એ અવલોકન કરવું સરળ છે કે λ ના કોઈ પણ શૂન્યેતર મૂલ્ય માટે, સદિશ $\lambda\vec{a}$ હંમેશાં સદિશ $\vec{a}$ ને સમરેખ હોય છે. વાસ્તવમાં, બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમરેખ હોય, તો અને તો જ શૂન્યેતર અદિશ λ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ જો સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ઘટક સ્વરૂપમાં આપેલ હોય એટલે કે $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ અને $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, તો તે બે સદિશો સમરેખ હોય તો અને તો જ

$$b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, b_3 = \lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

(ii) જો $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ હોય, તો a_1, a_2, a_3 ને $\vec{a}$ ના દિક્‌ગુણોત્તર પણ કહે છે.

(iii) કોઈક વિકલ્પમાં, એમ આપેલ હોય કે l, m, n એ સદિશના દિક્‌કોસાઈન છે, તો

$l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$ એ આપેલા સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ છે. સદિશે x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ સાથે બનાવેલા ખૂણા અનુક્રમે α, β અને γ છે.

ઉદાહરણ 4 : જો સદિશો $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ સમાન હોય, તો x, y અને z નાં મૂલ્યો શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે બે સદિશો સમાન હોય તો અને તો જ તેમના અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોય છે. આમ, આપેલ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમાન થાય તો અને તો જ

$$x = 2,\ y = 2,\ z = 1$$

ઉદાહરણ 5 : જો સદિશો $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ હોય, તો $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ થાય ? સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમાન છે ?

ઉકેલ : આપણી પાસે $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ અને $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

તેથી, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. પરંતુ, બે સદિશો સમાન નથી, કારણ કે તેમના અનુરૂપ ઘટકો ભિન્ન છે.

ઉદાહરણ 6 : સદિશ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : સદિશ $\vec{a}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ, $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ વડે દર્શાવાય છે.

હવે, $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

તેથી, $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$

ઉદાહરણ 7 : સદિશ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ ની દિશામાં જે સદિશનું માન 7 એકમ હોય તેવો સદિશ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સદિશ $\vec{a}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$

તેથી, $\vec{a}$ ની દિશામાં 7 માનવાળો સદિશ

$$7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

ઉદાહરણ 8 : સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ના સરવાળાના સદિશની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સદિશોનો સરવાળો

$$\vec{a} + \vec{b}\ (= \vec{c} \text{ કહો}) = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

અને $|\vec{c}| = \sqrt{4^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

આમ, માંગેલ એકમ સદિશ

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

ઉદાહરણ 9 : સદિશ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ના દિક્ગુણોત્તરો લખો અને એ પરથી દિક્કોસાઈનની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે સદિશ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ના દિક્ગુણોત્તર a, b, c એ સદિશના અનુરૂપ ઘટકો x, y અને z જ છે. એટલે આપેલ સદિશ માટે, આપણી પાસે $a = 1$, $b = 1$ અને $c = -2$. વધુમાં, જો l, m અને n આપેલ સદિશના દિક્કોસાઈન હોય, તો

$$|\vec{r}| = \sqrt{6} \text{ હોવાથી, } l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}},\ m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}},\ n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

આમ, આપેલ સદિશના દિક્કોસાઈન $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ છે.

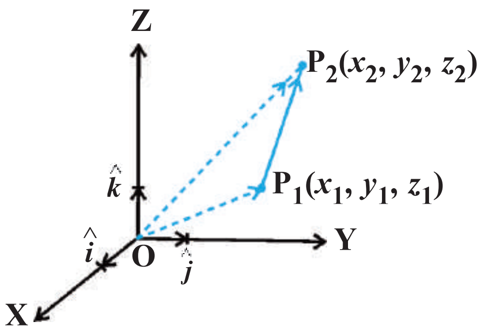
10.5.2 બે બિંદુઓને જોડતો સદિશ

જો $P_1(x_1, y_1, z_1)$ અને $P_2(x_2, y_2, z_2)$ કોઈ પણ બે બિંદુઓ હોય, તો P_1 ને P_2 સાથે જોડતો સદિશ $\overrightarrow{P_1P_2}$ છે (આકૃતિ 10.15).

બિંદુઓ P_1 અને P_2 ને ઊગમબિંદુ સાથે જોડતાં અને ત્રિકોણના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, ત્રિકોણ OP_1P_2 પરથી,

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$$

સદિશ સરવાળાના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરતાં, ઉપર દર્શાવેલ સમીકરણ $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ સ્વરૂપે લખાય છે.



આકૃતિ 10.15

એટલે કે $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

સદિશ $\overrightarrow{P_1P_2}$ નું માન, $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ છે.

ઉદાહરણ 10 : બિંદુઓ P (2, 3, 0) અને Q (–1, –2, –4) ને જોડતો P થી Q તરફની દિશાવાળો સદિશ શોધો.

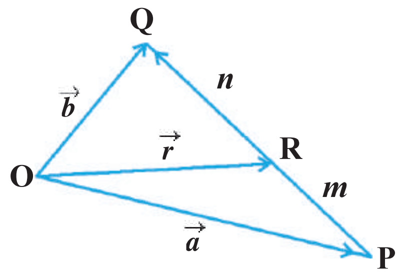
ઉકેલ : સદિશની દિશા P થી Q તરફની હોવાથી, સ્પષ્ટ છે કે P એ પ્રારંભ બિંદુ અને Q એ અંતિમ બિંદુ છે, તેથી P અને Q ને જોડતો માંગેલ સદિશ $\overrightarrow{PQ}$ એ

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\,\hat{i} + (-2-3)\,\hat{j} + (-4-0)\,\hat{k}$$

એટલે કે, $\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$ છે.

10.5.3 વિભાજન સૂત્ર

બિંદુઓ P અને Q લો. ઊગમબિંદુ O ને સાપેક્ષ તેમના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\overrightarrow{OP}$ અને $\overrightarrow{OQ}$ દ્વારા દર્શાવ્યા છે. ત્યાર બાદ ત્રીજું બિંદુ R, P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું અંતઃવિભાજન (આકૃતિ 10.16) અને બહિર્વિભાજન (આકૃતિ 10.17) કરી શકે. અહીં, આપણી ઈચ્છા ઊગમબિંદુ O ને સાપેક્ષ બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OR}$ શોધવાની છે. આપણે એક પછી એક બે વિકલ્પો લઈશું.



આકૃતિ 10.16

વિકલ્પ I : *જ્યારે R, રેખાખંડ PQ નું અંતર્વિભાજન કરે.* (આકૃતિ 10.16)

$\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ લો.

R એ $\overrightarrow{PQ}$ નું એ રીતે વિભાજન કરે છે કે જેથી ધન અદિશ સંખ્યાઓ m અને n માટે, $m\overrightarrow{RQ} = n\overrightarrow{PR}$ અને આપણે કહીએ છીએ કે બિંદુ R એ $\overrightarrow{PQ}$ નું $m : n$ ગુણોત્તરમાં અંતર્વિભાજન કરે છે. હવે, ત્રિકોણો ORQ અને OPR પરથી,

આપણી પાસે, $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$

અને $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$

તેથી, આપણને $m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a})$ **(શા માટે ?)**

મળે છે અથવા $\vec{r} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ **(સાદું રૂપ આપતાં)**

તેથી, જે બિંદુ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું ગુણોત્તર $m : n$ માં અંતર્વિભાજન કરે તે બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ,

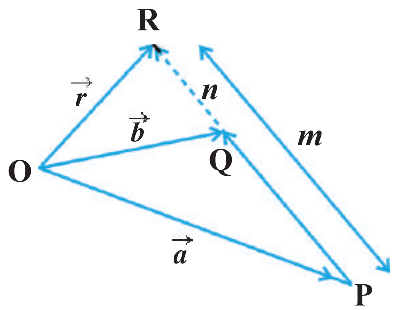
$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$ **(સાદું રૂપ આપતાં)**

વિકલ્પ II : *જ્યારે R, રેખાખંડ PQ નું બહિર્વિભાજન કરે.* (આકૃતિ 10.17)

R રેખાખંડ PQ નું બહારથી ગુણોત્તર $m : n$ માં વિભાજન કરે છે.

(એટલે કે $\dfrac{PR}{QR} = \dfrac{m}{n}$) તો બિંદુ R નો **સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OR} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ છે.**

આ કાર્ય આપણે વાચક માટે સ્વાધ્યાય તરીકે ચકાસવા માટે રાખીશું.



આકૃતિ 10.17

નોંધ : જો R એ રેખાખંડ PQ નું મધ્યબિંદુ હોય તો $m = n$ મળે. અને તેથી વિકલ્પ-I પરથી, રેખાખંડ PQ ના

મધ્યબિંદુ R નો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OR} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ થશે.

ઉદાહરણ 11 : બિંદુઓ P અને Q ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ અને $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ છે. બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં (i) અંતર્વિભાજન અને (ii) બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુ R ના સ્થાનસદિશ શોધો.

ઉકેલ :

(i) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં અંતર્વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)}{2+1} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતાં રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતાં બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ A $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, B $(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, C $(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ કાટકોણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

ઉકેલ : અહીં,

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

અને $\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

ઉપરાંત, જુઓ કે $|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

તેથી, ત્રિકોણ ABC એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 10.2

1. નીચે આપેલા સદિશોનાં માનની ગણતરી કરો :

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k};\ \vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k};\ \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. સમાન માપવાળા બે ભિન્ન સદિશો લખો.

3. જેની દિશા સમાન હોય તેવા બે ભિન્ન સદિશો લખો.

4. સદિશો $2\hat{i} + 3\hat{j}$ અને $x\hat{i} + y\hat{j}$ સમાન થાય તેવી x અને y ની કિંમતો શોધો.

5. જે સદિશનું પ્રારંભ બિંદુ (2, 1) અને અંતિમ બિંદુ (–5, 7) હોય, તેના અદિશ અને સદિશ ઘટકો શોધો.

6. સદિશો $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ નો સરવાળો શોધો.

7. સદિશો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

8. જો P અને Q અનુક્રમે બિંદુઓ (1, 2, 3) અને (4, 5, 6) હોય, તો $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

9. આપેલ સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો સદિશ $\vec{a} + \vec{b}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

10. $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ સદિશની દિશામાં 8 એકમ માનવાળો સદિશ શોધો.

11. દર્શાવો કે સદિશો $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ સમરેખ છે.

12. સદિશ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ના દિક્કોસાઈન શોધો.

13. જે સદિશ બિંદુઓ A (1, 2, –3) અને B (–1, –2, 1) ને A થી B તરફની દિશામાં જોડતો હોય તે સદિશના દિક્કોસાઈન શોધો.

14. સાબિત કરો કે સદિશ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ એ અક્ષો OX, OY અને OZ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

15. બિંદુ R એ બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 2:1 ગુણોત્તરમાં (i) અંતઃ (ii) બહિર્વિભાજન કરે છે. P અને Q ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ છે, તો બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ શોધો.

16. બિંદુઓ P (2, 3, 4) અને Q (4, 1, –2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુનો સ્થાનસદિશ શોધો.

17. સાબિત કરો કે બિંદુઓ A, B અને C ના સ્થાનસદિશો અનુક્રમે $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ હોય, તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ રચે છે.

પ્રશ્નો 18 તથા 19 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

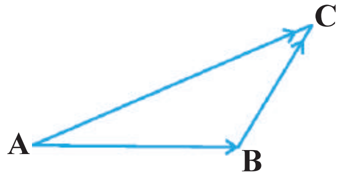
18. ત્રિકોણ ABC (આકૃતિ 10.18) માટે નીચેનામાંથી કયાં વિધાનો સત્ય નથી :

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$



આકૃતિ 10.18