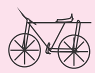
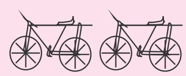
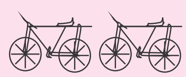
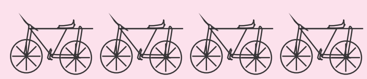
अध्याय 16

आँकड़ों का प्रबन्धन

16.1 हम अपने आसपास प्रायः समाचार पत्रों, पत्रिकाओं और दूरदर्शन पर कई तरह के आँकड़े, तालिकाएँ व आलेख देखते हैं। ये चीजें हमें कुछ जानकारियाँ देती हैं। आप भी अपने आसपास से सूचनाएँ एकत्रित कर अध्ययन कर सकते हैं। आँकड़े एकत्रित करने के पहले हमें यह जानना होगा कि हम क्या अध्ययन करना चाहते हैं। जैसे आप जानना चाहते हैं कि आपकी कक्षा के साथियों की औसत लम्बाई क्या है?

इसे जानने के लिये कक्षा के साथियों की लम्बाई के आँकड़े एकत्रित करने पड़ेंगे। आँकडे क्या बताते हैं इसे सुस्पष्ट करने के लिये आलेखीय रूप से दर्शाते हैं। पिछली कक्षाओं में विभिन्न प्रकार के आलेख आपने पढ़े हैं, आइए उन्हें फिर से देखें–

(i) चित्रालेख (Pictograph) : नीचे दिए गए चित्रालेख के देखकर प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

 = एक संकेत 1000 साईकिल का उत्पादन	
अप्रेल	
मार्च	
फरवरी	
जनवरी	

आलेख 16.1

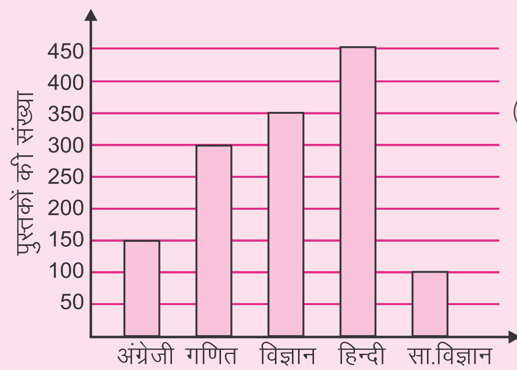
(i) मार्च के महीने में कितनी साईकिलों का उत्पाद हुआ ?

(ii) किन दो महीनों में बराबर उत्पादन हुआ ?

(ii) दंड आलेख (Bar - Graph)– दंड आलेख में प्रत्येक दंड की चौड़ाई समान होती है तथा वे एक दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। दंड की लम्बाई (ऊँचाई) पैमाने के अनुसार दिए गए आँकड़े के संगत होती है, इसे हम संगत आँकड़ों के समानुपातिक भी कह सकते हैं।

करो और सीखो

नीचे दिए गए दंड आलेख में किसी पुस्तकालय में अलग–अलग विषयों की पुस्तकों की संख्या देखकर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



दंड समान चौड़ाई के हैं और दो क्रमागत दंडो के बीच में समान दूरी रखी गई है।

दंड़ की लम्बाई संगत आँकड़े की संख्या दर्शाती है।

आलेख 16.2

(i) सबसे अधिक किस विषय की पुस्तके हैं और वह कितनी हैं?

(ii) सबसे कम किस विषय की पुस्तकें हैं और वह कितनी हैं?

(iii) पुस्तकालय में कुल कितनी पुस्तकें हैं?

(iv) इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई हैं ?

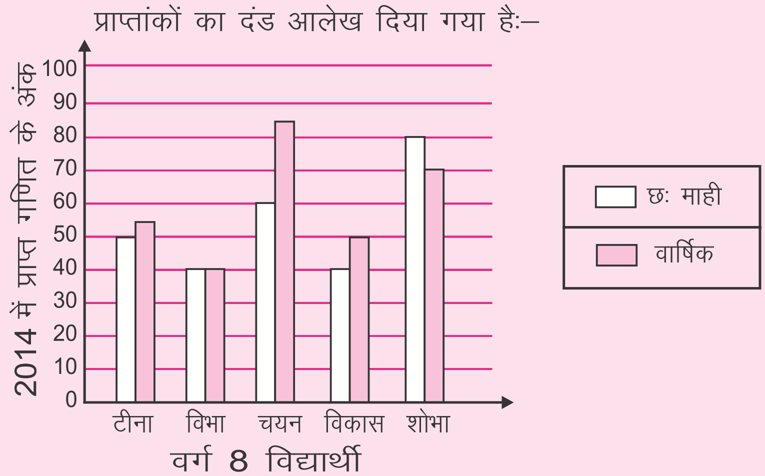
(v) किन दो विषयों की पुस्तकों की संख्या का अन्तर सबसे कम हैं ?

(iii) दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs)

जब हमें आँकड़ो के दो समूहों की तुलना करने की आवश्यकता होती है तो दोहरे दंड आलेख खींचते हैं।

करो और सीखो

नीचे 5 विद्यार्थियों के वार्षिक एवं अर्धवार्षिक परीक्षा में गणित विषय के प्राप्तांकों का दंड आलेख दिया गया है:–



आलेख 16.3

आलेख के आधार पर निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

(i) किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छः माही और वार्षिक में समान रहा ?

(ii) किस विद्यार्थी का प्रदर्शन छः माही की तुलना में वार्षिक में सबसे अच्छा रहा ?

(iii) कितने विद्यार्थियों ने वार्षिक परीक्षा में 50 से अधिक अंक प्राप्त किए ?

(iv) इस दोहरे दंड आलेख में क्या सूचना दी गई है ?

(v) छः माही के अंकों का औसत क्या है? क्या यह वार्षिक परीक्षा के औसत से कम है ?

करो और सीखो

दी गयी सूचनाओं को दर्शाने के लिए अलग–अलग आलेख खींचिए।

(i).

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014
पुस्तकालय के लिए खरीदी गई पुस्तकें	170	150	190	180	210

(ii).

गाँव का नाम	मांकडी	आकोला	रावलीया खुर्द	सिवडिया
पुरूषों की संख्या	1800	1700	1800	1500
स्त्रियों की संख्या	1600	1700	1900	1600

कक्षा VIII में हुई गणित की परीक्षा में बच्चों के 50 में से प्राप्त अंक निम्न प्रकार है।

28, 25, 27, 8, 28, 37, 28, 28, 14, 1

15, 28, 18, 20, 36, 37, 10, 27, 15, 8

इस उदाहरण में प्रत्येक संख्या एक अवलोकन (Observation) है। इस प्रकार एकत्रित अवलोकनों के समूह को यथा प्राप्त आँकड़े (Raw Data) कहते हैं। अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिये हमें यथा प्राप्त आँकड़ो को क्रमबद्ध (आरोही या अवरोही) रूप में व्यवस्थित करने की आवश्यकता है।

जैसेः– कक्षा–8 के बच्चों द्वारा 50 में से प्राप्त प्राप्तांकों का आँकड़ा दिया गया है।

1, 8, 8, 10, 14, 15, 15, 18, 20, 25

27, 27, 28, 28, 28, 28, 28, 36, 37, 37

यहाँ अधिकतम प्राप्तांक और न्यूनतम प्राप्तांक का अन्तर 37-1 = 36 है। यही अंतर (36) उपर्युक्त आँकड़ो का परिसर (Range) है।

16.2.1 बारम्बारता बंटन

कौनसा प्राप्तांक सबसे अधिक छात्रों ने प्राप्त किया और कौन–सा प्राप्तांक सबसे कम छात्रों ने प्राप्त किया ? इसके लिए मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, निम्न सारणी बनाते हैं –

प्राप्तांक	मिलान चिह्न	बारंबारता
1	I	1
8	II	2
10	I	1
14	I	1
15	II	2
18	I	1
20	I	1
25	I	1
27	II	2
28	IIII̸	5
36	I	1
37	II	2
	योग	20

(तालिका 16.1)

प्रत्येक प्राप्तांक के सामने लिखी मिलान चिह्नों की संख्या से हमें उस प्राप्तांक को प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या का पता चलता है। यह संख्या उस प्राप्तांक की बारम्बारता(Frequency) कहलाती है। किसी प्रविष्टि की बारम्बारता वह संख्या है, जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

सारणी में प्राप्तांक 28 की बारम्बारता 5 है तथा प्राप्तांक 8, 15, 27 व 37 की बारम्बारता 2 है। उपर्युक्त रूप से बनाई गई सारणी बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency Distribution Table) कहलाती है। इससे पता चलता है कि एक प्रविष्टि कितनी बार आई है।

16.2.2 आँकड़ों का वर्गीकरण (वर्ग अन्तराल के रूप में)

कभी–कभी हमें ऐसे आँकड़े प्राप्त होते हैं जिनमें विविधता अधिक होती है, जैसे– किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों पर विचार कीजिए–

10, 13, 11, 7, 8, 5, 17, 20, 3, 14, 11, 10
8, 1, 13, 8, 10, 18, 14, 5, 3, 4, 13, 14
4, 9, 12, 11, 12, 16, 20, 13, 18, 12, 14

यदि हम प्रत्येक प्रेक्षण (प्राप्तांक) के लिए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाएँ, तो वह बहुत लंबी होती है तथा कई बार अनावश्यक भी हो जाती है। अतः हम सुविधा के लिये प्रेक्षणों के कुछ समूह या वर्ग बनाते हैं, जैसे 0-5, 5-10, 10-15... इत्यादि इस प्रकार उपर्युक्त आँकड़ो के लिए, वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी निम्न प्रकार हो सकती है।

वर्ग अंतराल	मिलान चिह्न	बारंबारता
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸 II	7
10 - 15	𝍸 𝍸 𝍸 II	17
15 - 20	IIII	4
20 - 25	II	2
	योग	35

तालिका 16.2

इस सारणी में 35 छात्रों के प्राप्तांक को पाँच के वर्गो (0–5, 5–10 इत्यादि) में विभाजित करके सभी प्रेक्षणों (Observations) को सम्मिलित कर लिया गया है। इसमें प्रत्येक समूह को वर्ग अन्तराल (Class Interval) तथा संक्षेप में एक वर्ग (Class) भी कहते है।

जब आँकड़ों को इस रूप में लिखा जाता है, तब वे वर्गीकृत आँकड़े (Grouped Data) कहे जाते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त बंटन को वर्गीकृत बारम्बारता बंटन (Grouped Frequency Distribution) कहते हैं। इससे अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है,

जैसे :

(i) 12 विद्यार्थियों ने 0 और 10 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।

(ii) अधिकांश विद्यार्थियों ने 10 और 15 के बीच अंक प्राप्त किए हैं।

(iii) 20 अंको की परीक्षा में 4 विद्यार्थियों ने 15 से 20 अंक प्राप्त किए हैं।

(iv) इन आँकड़ों का बहुलक वर्ग 10-15 है।

ध्यान दीजिए की प्रेक्षण 5 दोनों ही वर्गों 0-5 और 5-10 में सम्मिलित हैं। इसी प्रकार प्रेक्षण 10 व 20 भी दो–दो वर्गों में सम्मिलित है। परन्तु कोई भी प्रेक्षण एक साथ दोनों वर्गो में शामिल नहीं हो सकता। इससे बचने के लिए हम एक परिपाटी अपनाते हैं, उभयनिष्ठ प्रेक्षण उच्चतम वर्ग में सम्मिलित करते हैं। अर्थात प्रेक्षण 5, वर्ग अन्तराल 5-10 में सम्मिलित है; न कि 0-5 में

इसी प्रकार 10 वर्ग अन्तराल 10-15 में सम्मिलित है (5-10 में नहीं)।

यहाँ प्रत्येक वर्ग को निश्चित करने के लिये दो संख्याएँ है, जैसे वर्ग अन्तराल 5-10 में 5 और 10 वर्ग सीमाएँ हैं, जिसमें 5 वर्ग की निम्न वर्ग सीमा तथा 10 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा कहलाती है। क्या आप वर्ग अन्तराल 15-20 में उच्च वर्ग सीमा तथा निम्न वर्ग सीमा बता सकते हैं ?

किसी भी वर्ग अंतराल की दोनों सीमाओं के अन्तर को वर्ग माप (Class Size) या वर्ग चौड़ाई (Class Width) कहते हैं। यहाँ वर्ग अन्तराल 5 -10 का वर्ग माप 5 है। वर्ग अंतराल 20 – 25 और 15-20 का वर्ग माप क्या है ?

करो और सीखो

1. नीचे दिए गए बारम्बारता बंटन सारणी का अध्ययन कीजिए और उनके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?

(ii) वर्ग अन्तराल 300-350 की उच्च सीमा क्या है?

(iii) किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है?

(iv) किन दो वर्गों की बारम्बारता समान है।

वर्ग अंतराल	बारंबारता
100 -150	45
150 - 200	25
200 - 250	55
250 - 300	125
300 - 350	140
350 - 400	65
400 - 450	45
योग	500

(तालिका 16.3)

2. एक कक्षा के 40 छात्रों ने विज्ञान में 50 में से जो अंक प्राप्त किए वे निम्नानुसार हैं –

38, 35, 44, 30, 30, 33, 38, 40, 35, 45, 48, 40 , 35, 45, 38,
35, 44, 33, 40, 42, 45, 38, 35, 33, 34, 37, 47, 49, 37, 47,
40, 31, 38, 43, 31, 37, 41, 38, 45, 40

(i) दिए गए आँकड़ों के वर्ग अन्तराल 30-35 , 35-40, ----------लेकर एक बारम्बारता सारणी बनाइए।

(ii) वर्ग अन्तराल 35-40 की वर्ग सीमाएँ क्या हैं ?

(iii) वर्ग अन्तराल का वर्ग माप क्या है ?

16.3 आयत चित्र – आँकड़ों का आलेखीय निपरूपण

40 विद्यार्थियों द्वारा गणित के टेस्ट में 36 अंको में से प्राप्त किए गए अंको के वर्गीकृत बारम्बारता बंटन पर विचार करें।

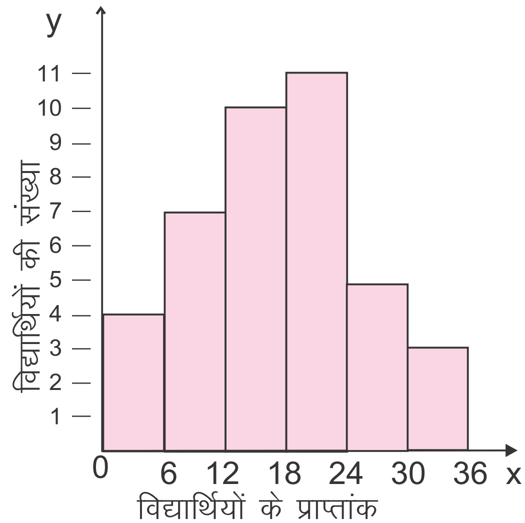
वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 6	4
6 - 12	7
12 - 18	10
18 - 24	11
24 - 30	5
30 - 36	3
योग	40

(तालिका 16.4)

आलेख 16.4 में उपर्युक्त बारम्बारता बंटन सारणी को दिखाया गया है

क्या यह आलेख उन दंड आलेखों से अलग है, जो आपने पिछली कक्षा में खींचे थे ? स्पष्टतः यहाँ दंडों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है,क्योंकि वर्ग अन्तरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।

दूसरे क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों (प्रेक्षणों के समूहों) को दिखाया गया है तथा दंड की लम्बाई वर्ग अन्तराल की बारम्बारता दर्शाती है। आँकड़ों का इस प्रकार आलेखीय निरूपण एक आयत चित्र (Histogram) कहलाता है।



आलेख 16.4

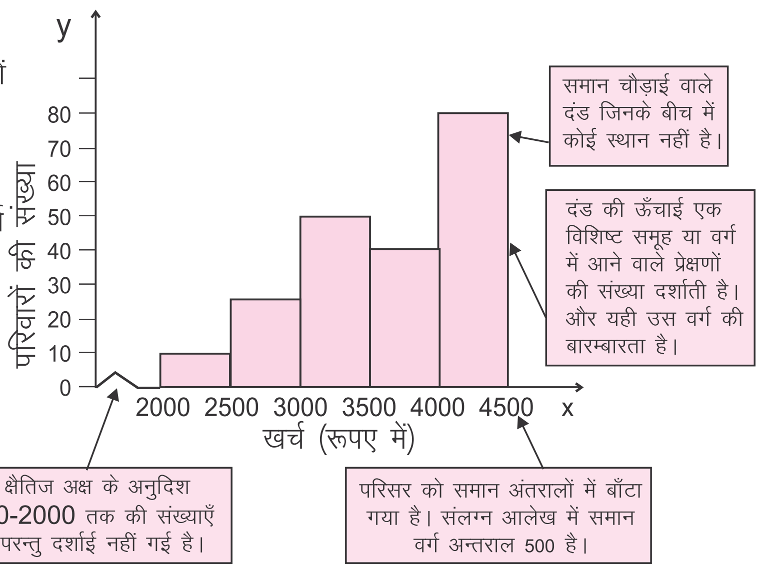
नीचे परिवारो की संख्या एवं उनके खर्च के मध्य आयत का चित्र (आलेख 16.5 बनाया गया है –)

इस आयत चित्र 16.5 के दंडों से हम बता सकते हैं कि–

(i) कितने परिवारों का खर्च न्यूनतम है?

(ii) कितने परिवारों का खर्च अधिकतम है?

(iii) 4000 रूपये से कम खर्च वाले परिवार कितने है?



आलेख 16.5

प्रष्नावली 16.1

1. निम्नलिखित में से किस प्रकार के आँकड़ों को दर्शाने के लिये आप एक आयत चित्र का प्रयोग करेंगे?

(i) घर में उपलब्ध विभिन्न अनाजों की मात्रा।

(ii) अपने विद्यालय के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाई।

(iii) 5 कंपनियों द्वारा निर्मित कारों की संख्या।

(iv) एक व्यस्त चौराहे पर प्रातः 8:00 बजे से दोपहर 2 बजे तक गुजरने वाले वाहनों की संख्या।

(v) आपकी कक्षा के सभी छात्रों के घर से विद्यालय की दूरी। (मीटर में)

2. राकेश अपने कपड़ों को रंगों के आधार पर अलग करके इस प्रकार अंकित करता है– सफेद (W), लाल (R), काला (B), पीला (Y), अन्य (X)। बनाई गई सूची निम्न रूप में है –

R R X W R B Y R B W W X X R B Y Y X W R
B Y Y B R R X W W R W X X R Y W B Y X X

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इसे प्रदर्शित करने के लिये एक दंड आलेख खींचिए।

3. खटवाड़ा गाँव के 30 नरेगा मजदूरों का एक सप्ताह के पारिश्रमिक भुगतान रूपयों में निम्नलिखित है।

830, 835, 890, 810, 815, 816, 814, 845, 898, 890,
819, 860, 832, 817, 855, 845, 804, 808, 812, 816,
885, 835, 815, 812, 878, 840, 868, 890, 806, 828

मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, अंतरालों 800-810, 810-820 वाली एक बारम्बारता सारणी बनाइए। प्राप्त सारणी के लिए आयत चित्र बनाइए।

4. मैसर्स राजा इलेक्ट्रॉनिक्स द्वारा 30 दिनों में बेचे गए मोबाइल की संख्या निम्नानुसार है।

222, 228, 238, 215, 225, 219, 217, 230, 218, 237,
214, 210, 235, 222, 220, 214, 212, 220, 237, 212,
238, 218, 210, 216, 217, 234, 233, 237, 219, 239

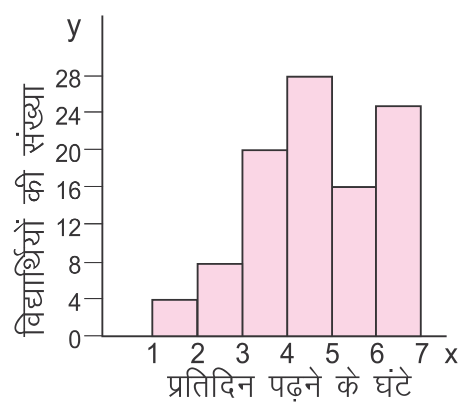
मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, अंतरालों 210-215, 215-220 वाली एक बारम्बारता सारणी बनाइए। प्राप्त सारणी के लिए आयत चित्र बनाइए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) किस अन्तराल में बेचे गए मोबाइल की संख्या सबसे अधिक है ?

(ii) 230 या उससे अधिक मोबाइल कितने दिन बेचे गए ?

(iii) 230 से कम मोबाइल कितने दिन बिके ?

5. अवकाश के दिनों में कक्षा–8 के विद्यार्थियों द्वारा प्रतिदिन पढ़ने के समय (घंटों में), दिए हुए आलेख में दर्शाए गए हैं।



आलेख **16.6**

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) अधिकतम विद्यार्थियों ने कितने घंटों तक पढ़ाई की ?

(ii) 5 या 5 घंटों से कम समय तक कितने विद्यार्थियों ने पढ़ाई की ?

(iii) कुल कितने विद्यार्थियों ने अवकाश के दिनों में पढ़ाई की ?

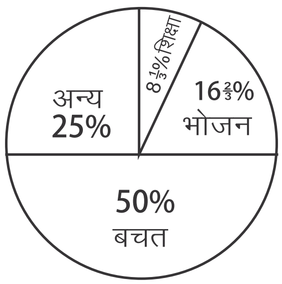
(iv) किस वर्ग अन्तराल की बारम्बारता अधिकतम है ?

16.4 वृत्तआलेख या पाई चार्ट

नीचे वृतीय रूप में निरूपित आँकड़े हैं, उन्हें ध्यान से देखिए –

एक वृत्त आलेख किसी एक सम्पूर्ण के विभिन्न भागों की तुलना करने के लिए प्रयोग किया जाता है। वृत्त एक सम्पूर्ण को दर्शाता है।

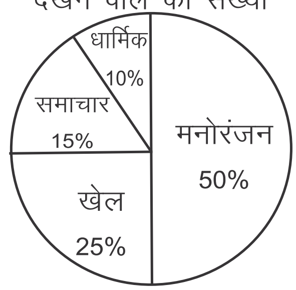
एक परिवार का मासिक बजट



आलेख 16.7 (i)

(i) परिवार द्वारा किस मद पर सबसे कम खर्च किया गया।

टी.वी. पर विभिन्न कार्यक्रम को देखने वाले की संख्या



आलेख 16.7 (ii)

(ii) किस कार्यक्रम को देखने वालों की संख्या सबसे अधिक है।

आपने उपर्युक्त प्रश्नों का हल कैसे ढूँढा ?

आप जानते हैं कि वृत के केन्द्र पर बने कोणों का योग 360^0 डिग्री होता है। आलेख (i) में शिक्षा का क्षेत्र केन्द्र पर सबसे छोटा कोण बना रहा है जबकि आलेख (ii) में मनोरंजन के कार्यक्रम का क्षेत्र सबसे बड़ा कोण बना रहा है। यहाँ सम्पूर्ण वृत्त को त्रिज्यखंडों (Sectors) में विभाजित किया गया है। प्रत्येक त्रिज्य खंड का आकार (Size) उसके द्वारा निरूपित सूचना के समानुपाती होता है। इस प्रकार का निरूपण वृत आलेख (Circle Graphs) या पाई चार्ट (Pie Chart) कहलाता हैं।

16.4.1 पाई चार्ट बनाना

आलेख 16.7 (i) निम्न आँकड़ों का वृत्तीय रूप में निरूपण हैः एक परिवार का मासिक बजट निम्न प्रकार है–

बजट	खर्च
भोजन	1500
पढ़ाई	750
अन्य	2250
बचत	4500
कुल आय	9000

(तालिका 16.5)

आइए, इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित करने के चरणों को समझें।

चरण (i) सबसे पहले सभी प्रेक्षणों का योग करते हैं।

$$1500 + 750 + 2250 + 4500 = 9000$$

चरण (ii) प्रत्येक प्रेक्षण (सूचना) को निरूपित करने वाले वृत का भाग (सम्पूर्ण का भाग) ज्ञात करते हैं।

जैसे – भोजन पर खर्च का सम्पूर्ण में भाग (Part)

$$= \frac{\text{भोजन पर खर्च}}{\text{कुल आय}} = \frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$$

अतः भोजन के खर्च को पूरे वृत के $\frac{1}{6}$ वें भाग में खींचा जाएगा।

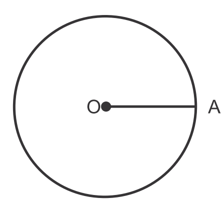
> वृत्त के $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$..... आदि हिस्से करना तो सरल है। यदि हमें $\frac{1}{6}$ या $\frac{1}{10}$ आदि हिस्से करने हो तो क्या तरीका काम में लिया जा सकता है?

चरण (iii) सम्पूर्ण केन्द्रीय कोण (360^0) का प्रत्येक खर्च के लिये कोणीय माप ज्ञात करते हैं। जैसा कि तालिका 16.6 में दिखाया गया है।

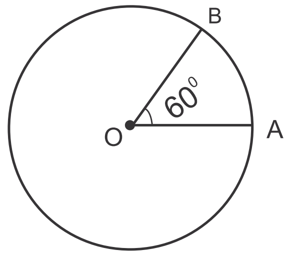
बजट	खर्च	सम्पूर्ण का भाग	360^0 का भाग
भोजन	1500	$\frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$	$360 \times \frac{1}{6} = 60^0$
पढ़ाई	750	$\frac{750}{9000} = \frac{1}{12}$	$360 \times \frac{1}{12} = 30^0$
अन्य	2250	$\frac{2250}{9000} = \frac{1}{4}$	$360 \times \frac{1}{4} = 90^0$
बचत	4500	$\frac{4500}{9000} = \frac{1}{2}$	$360 \times \frac{1}{2} = 180^0$

(तालिका 16.6)

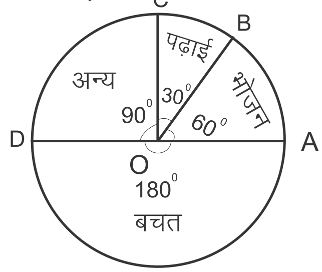
चरण (iv) किसी सुविधाजनक त्रिज्या का एक वृत खींचिए। इसका केन्द्र (O) और त्रिज्या (OA) अंकित कीजिए।



चरण (v) भोजन पर खर्च के त्रिज्यखण्ड का कोण 60^0 है। चाँदे की सहायता से AOB $= \angle 60^0$ खींचिए।



चरण (vi) बचे हुए त्रिज्यखण्डों के कोणों को इसी प्रकार चाँदे से अंकित कीजिए। सम्पूर्ण वृत विभिन्न त्रिज्यखंडों में बंट जाएगा।



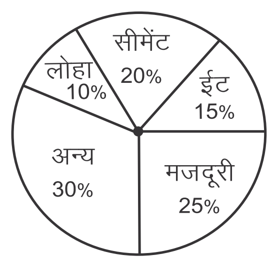
आलेख 16.8

उदाहरण 1 संलग्न पाई चार्ट (आलेख 16.9) एक मकान के बनाने में विभिन्न मदों में खर्च को दर्शाता है।

(i) किस मद में व्यय सबसे अधिक है?

(ii) किन दो मदों का व्यय कुल व्यय का आधा है?

(iii) यदि ईटों का खर्च 30,000 रूपये है तो लोहे पर खर्च क्या है?



आलेख 16.9

हल (i) अन्य मद का व्यय सबसे अधिक है।

(ii) सीमेंट और अन्य का व्यय कुल व्यय का आधा है।

(iii) $\because$ 15% निरुपित करता है = 30,000 रू

$\therefore$ 1% निरूपित करेगा $= \dfrac{30,000}{15}$ रू

अतः 10% निरूपित करेगा $= \dfrac{30,000}{15} \times 10 = 20,000$ रू

उदाहरण 2 एक विशेष दिन एक विद्यालय में छात्रों की उपस्थिति निम्न प्रकार है।

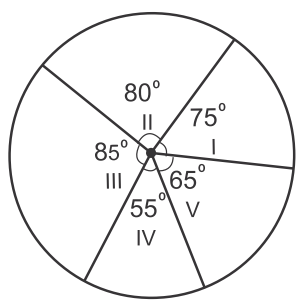
वर्ग	I	II	III	IV	V
छात्रों की संख्या	15	16	17	11	13

इन आँकड़ों के लिए एक पाई चार्ट खींचिए।

हल हम प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का केन्द्रीय कोण ज्ञात करते हैं। यहाँ कुल छात्र 72 है। इससे हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है।

वर्ग	छात्रों की सं.	संपूर्ण का भाग	360° का भाग
I	15	$\frac{15}{72}$	$360 \times \frac{15}{72} = 75^\circ$
II	16	$\frac{16}{72}$	$360 \times \frac{16}{72} = 80^\circ$
III	17	$\frac{17}{72}$	$360 \times \frac{17}{72} = 85^\circ$
IV	11	$\frac{11}{72}$	$360 \times \frac{11}{72} = 55^\circ$
V	13	$\frac{13}{72}$	$360 \times \frac{13}{72} = 65^\circ$

(तालिका 16.7)



आलेख 16.10

करो और सीखो

(1) किसी विद्यालय मे विद्यार्थियों द्वारा पसंद की जाने वाली मिठाईयाँ नीचे दी गई है। दिए गए आँकड़ों के आधार पर पाई चार्ट बनाइए।

मिठाई	जलेबी	लड्डू	पेड़ा	गुलाब जामुन	अन्य
छात्रों की संख्या	40%	20%	25%	10%	5%

(2) अपने पाँच साथियों के परिवार में सदस्यों की संख्या को लिखें और उसे पाई चार्ट द्वारा दर्शाएँ।

प्रश्नावली 16.2

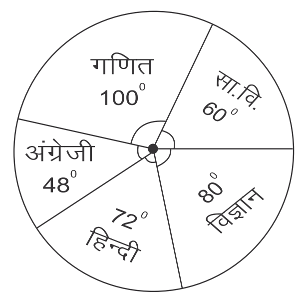
1. किसी विद्यालय में विभिन्न विषयों की पुस्तकें नीचे दी गई है। इन आँकड़ो को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

विषय	विज्ञान	गणित	अंग्रेजी	हिन्दी	सा· विज्ञान	योग
पुस्तकों की संख्या	200	120	190	170	40	720

2. एक बालक की प्रतिदिन क्रियाओं का ब्यौरा इस प्रकार है। इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

व्यतीत किया समय	सोना	विद्यालय	खेलने	अन्य
घंटे	8 घंटे	6 घंटे	2 घंटे	8 घंटे

3. संलग्न पाई चार्ट 16.11 एक विद्यार्थी द्वारा किसी परीक्षा में हिंदी, अंग्रेजी, गणित, सा. विज्ञान और विज्ञान में प्राप्त किए गए अंकों को दर्शाता है। यदि उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए कुल अंक 900 थे, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
   (i) किस विषय में उस विद्यार्थी ने 250 अंक प्राप्त किए?
   (ii) उस विद्यार्थी ने गणित में हिन्दी से कितने अधिक अंक प्राप्त किए?
   (iii) जाँच कीजिए कि क्या सामाजिक विज्ञान और गणित में प्राप्त किए गए अंकों का योग अंग्रेजी और हिन्दी में प्राप्त किए गए अंकों के योग से अधिक है ?



आलेख 16.11

4. निम्नलिखित सूचना को दर्शाने वाला एक पाई चार्ट खींचिए। यह सारणी किसी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा पसंद किए जाने वाले खेलों को दर्शाती है।

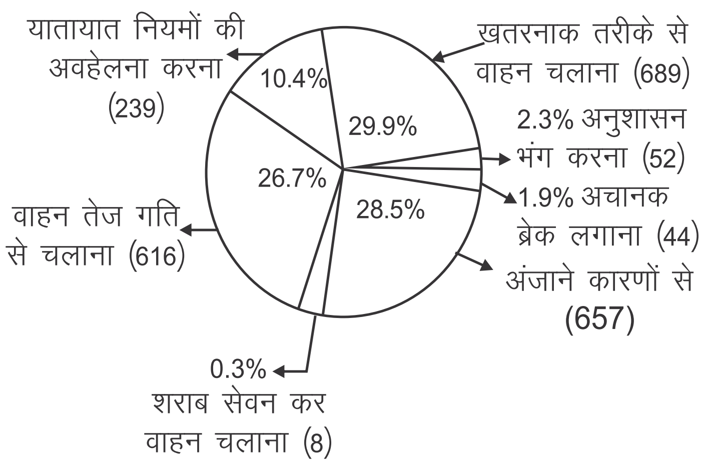
खेल	खो–खो	कबड्डी	फुटबाल	क्रिकेट
विद्यार्थियों की संख्या	5	6	7	18

5. भारत सरकार की जनधन योजना के अन्तर्गत कोटा शहर में एक माह में निम्न बैंकों में खोले गए खातों की संख्या को पाई चार्ट में प्रदर्शित कीजिए–

बैंक का नाम	SBBJ	SBI	IDBI	BOI
खोले गए खातों की संख्या	21000	18000	6000	9000

6. नीचे दिए गए पाई चार्ट में वाहन चालकों की विभिन्न गलतियों को दर्शाया गया है। पाई चार्ट की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) तेज गति से वाहन चलाने पर कितने प्रतिशत दुर्घटना होती है ?
(ii) सबसे ज्यादा दुर्घटनाएँ वाहन चालक की किस गलती से होती है ?
(iii) शराब का सेवन कर वाहन चलाने से कितनी दुर्घटना हुई ?
(iv) यातायात नियमों की अवहेलना करने पर कितने लोग दुर्घटना ग्रस्त हुए ?



आलेख 16.12

आओ चर्चा करें–
आजकल भागदौड़ की जिंदगी में कई तरह की दुर्घटनाएँ होती है। जिनमें से सर्वाधिक सड़क दुर्घटनाएँ होती है।
यह इस प्रकार है:
(1). वाहन चालक की गलती
(2) पीड़ित की गलती
(3) वाहन की तकनीकी खराबी
(4) सड़क की खराब स्थिति
(5). सड़क परिस्थिति/खराब सड़क बनावट
(6). अज्ञान/अन्य
आओ अध्यापक जी के साथ इन कारणों पर चर्चा करें एवं एक प्रोजेक्ट बनाएँ।

16.5 संयोग और प्रायिकता

16.5.1 संयोग से अभिप्राय

विशाल ने रवि से कहा– मैं रोज विद्यालय आते समय घर से छाता लेकर आता हूँ, परन्तु बरसात नहीं होती है। आज मै भूलवश छाता लेकर नहीं आया तो संयोग से बरसात हो रही है।

रवि ने कहा– अरे यार ऐसा मेरे साथ भी होता है जब मैं रोज विद्यालय जाने के लिए समय पर बस स्टेण्ड आता हूँ तो बस देरी से आती है, जिस दिन में देर से पहुँचता हूँ बस समय पर निकल जाती है।

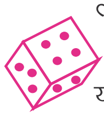
तभी राकेश बोला– मेरे साथ अक्सर यह होता है जब मैं गृहकार्य पूर्ण नहीं कर पाता संयोग से अध्यापक महोदय गृहकार्य जाँच करते ही नहीं है।

आपको उपर्युक्त प्रकार की अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है जहाँ आप संयोग (Chance) का सहारा लेकर कार्य करना चाहते हैं परन्तु वह उस प्रकार से नहीं होता जैसा आप

चाहते हैं। क्या आप ऐसे कुछ और उदाहरण दे सकते है?

जब कोई व्यक्ति लॉटरी की टिकिट खरीदता है तो उसके जीतने व हारने का संयोग बराबर नहीं होता, अतः जीतने की संभावना बहुत कम व हारने की संभावना बहुत अधिक होती है, परन्तु यहाँ हम कुछ ऐसे प्रयोगों की बात करेंगे जिनके परिणामों के घटित होने के संयोग बराबर है।

16.5.2 पासा (DICE) और सिक्का (COIN) उछालने पर प्राप्त संभावनाओं की गणना



लविना और नीमा पासे से खेल रहे थे, तभी लविना ने नीमा से कहा कि पासे मे छः सबसे कम बार आता है। आप क्या सोचते है? क्या ऐसा ही होता है,................

यह जानने के लिए कि क्या 6 अन्य अंकों 1,2,3,4,5 से वास्तव में कम आता है अथवा नहीं।

लविना और नीमा ने 30–30 बार पासे को फेंका। प्राप्त अंकों की एक बारम्बारता सारणी बनाई

लविना द्वारा 30 बार फेंके पासे के लिए सारणी

1	2	3	4	5	6
卌 III	卌 I	III	III	卌 I	IIII

आप भी पासा लेकर देखें कि 30 बार फेंकने पर आपको प्राप्त अंको की सारणी कैसी बनती है? अतः यह जरूरी नहीं है कि कोई अंक कम आए अथवा ज्यादा। पासे पर किसी भी अंक के आने की संभावना बराबर है।

इस प्रकार का प्रयोग एक यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment) कहलाता है।

1, 2, 3, 4, 5, व 6 इस प्रयोग के छः परिणाम है।

जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको क्या संभव परिणाम प्राप्त होते हैं? निः संदेह, चित (Head) या पट (Tail)। कल्पना कीजिए कि आप एक टीम के कप्तान है और आपका मित्र दूसरी टीम का कप्तान है। आप एक सिक्का उछालते है और अपने मित्र से चित या पट बोलने को कहते है।

क्या आप इस उछाल के परिणाम पर कोई नियंत्रण रख सकते हैं?

क्या आपको चित प्राप्त हो सकता है? अथवा क्या आपको पट प्राप्त हो सकता है? नहीं ऐसा संभव नहीं है। इस प्रकार का प्रयोग एक यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment) कहलाता है। चिट और पट इस प्रयोग के दो परिणाम (Outcomes) है।

16.5.3 सम संभावित परिणाम

अपनी कक्षा के बच्चों को 3-4 की टोलियों मे बाँटकर प्रत्येक टोली को एक सिक्का दे दीजिए। कहिए कि वे सिक्के को कई बार उछालें और हर बार नोट करें कि चित आया या पट।

प्रत्येक टोली इन आँकड़ों को तालिका 1 में बनाए अनुसार दो कॉलम में दर्ज कर सकती है। आइए अपने परिणाम शीट (तालिका) को देखें, जहाँ हम उछालों की संख्या में वृद्धि करते जा रहे हैं।

उछालों की सं.	मिलान चिन्ह (H)	चितों की सं.	मिलान चिन्ह (T)	पटों की संख्या
40	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 |||	18
50	卌 卌 卌 卌 |||	23	卌 卌 卌 卌 卌 ||	27
60	卌 卌 卌 卌 卌 ||||	29	— — —	31
70	— — —	33	— — —	37
80	— — —	38	— — —	42
90	— — —	44	— — —	46

तालिका 16.8

ध्यान दीजिए कि जब आप उछालों की संख्या को अधिकाधिक बढ़ाते जाते हैं, तब चितों की संख्या और पटों की संख्या परस्पर अधिकाधिक निकट आती जाती हैं।

ऐसा ही एक पासे के साथ भी हो सकता है, जब उसे एक बड़ी संख्या में फेंका जाता हैं। छः परिणामों में से प्रत्येक की संख्या परस्पर लगभग बराबर हो जाती है।

ऐसी स्थिति में, हम कह सकते हैं कि प्रयोग के विभिन्न परिणाम समसंभावित या समप्रायिक (equally likely) हैं। इसका अर्थ यह है कि सभी में से प्रत्येक परिणाम के आने का संयोग (chance) एक ही है।

16.5.4 अनुकूल संभावनाओं की गणना (प्रायिकता)

जब हम एक सिक्का उछालते हैं तो यहाँ चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों (चित और पट) में से 1 है अर्थात $\frac{1}{2}$ है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता (probablity) = $\frac{1}{2}$ है। एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है ? यहाँ दोनों ही परिणाम समप्रायिक (equally likely) हैं।

अब यदि आप एक पासे को फेंकें, तो परिणाम क्या प्राप्त होंगे ? स्पष्ट है: 1,2,3,4,5,6 में से कोई एक, यहाँ छः समप्रायिक परिणाम है। इसमें 3 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी ?

यह प्रायिकता है $\frac{1}{6}$ → 3 देने वाले परिणामों की संख्या (अंश), → समप्रायिक परिणामों की संख्या (हर)

प्रत्येक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम के संग्रह से एक घटना बनती है। उदाहरणार्थ एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में एक चित प्राप्त करना एक घटना है तथा पट प्राप्त करना भी एक घटना है। एक पासे को फेंकने की स्थिति में परिणामों 1,2,3,4,5,6 में से प्रत्येक परिणाम प्राप्त करना एक घटना है।

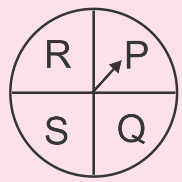
जैसे एक सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{6}$ है

3 = उन परिणामों की संख्या जो घटना बनाते है (2,4,6)

6 = कुल संभव परिणामों की संख्या

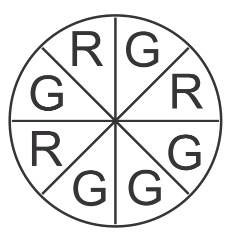
करो और सीखो

1. जब एक पासे (dice) को फेंका जाता है, तो संभव छः परिणाम क्या है?
2. जब आप निम्न पहिए को घुमाएँगे, तो संभावित परिणाम क्या होंगे? इनकी सूची बनाइए। (यहाँ परिणाम का अर्थ है कि वह त्रिज्यखण्ड जहाँ पर सूचक (Pointer) घुमाने पर रूकेगा।



3. आपके पास एक थैला है और उसमें भिन्न–भिन्न रंगो की सात एक जैसी गेंदे है। आप बिना देखे इसमें से एक गेंद निकालते हैं। प्राप्त होने वाले परिणामों को लिखिए।

उदाहरण 3 यदि आपके पास 5 हरे त्रिज्यखण्ड, 3 लाल त्रिज्यखण्ड वाला एक घूमने वाला पहिया है तो (i) लाल त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है ? (ii) ऐसा त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है जो लाल न हो?



हल यहाँ घटना के कुल परिणाम (5+3) = 8 हैं। लाल त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने के लिए 3 परिणाम है।

अतः लाल त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

ऐसे त्रिज्य खण्डों की संख्या जो लाल नहीं है = 5

अतः ऐसे त्रिज्यखण्ड प्राप्त करने की प्रायिकता जो लाल न हो = $\frac{5}{8}$

प्रश्नावली 16.3

1. एक सिक्का उछालने पर चित आने की क्या प्रायिकता है?
2. एक थैले में 6 सफेद, 11 लाल और 7 पीले रंग की गेंद हैं। उस थैले में से एक सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. अच्छी तरह से फेंटी हुई 52 ताशों की एक गड्डी में से 1 बेगम प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी ?
4. जब एक पासे को फेंका जाता है तब निम्नलिखित प्रत्येक घटना की प्रायिकता लिखिए।
   (i) एक अभाज्य संख्या (ii) एक अभाज्य संख्या नहीं
   (iii) 3 से बड़ी एक संख्या (vi) 5 से बड़ी संख्या नहीं
   (v) एक विषम संख्या
5. 15 अलग–अलग पर्चियों पर 1 से 15 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं (एक पर्ची पर एक संख्या) उन्हें एक डिब्बे में रखकर अच्छी तरह मिला दिया जाता है। डिब्बे के अन्दर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है। निम्नलिखित की प्रायिकता क्या होगी–
   (i) संख्या 5 प्राप्त करना
   (ii) दो अंक की एक संख्या प्राप्त करना
   (iii) 1 अंक की एक संख्या प्राप्त करना।

हमने सीखा

1. हमारे पास अधिकतर उपलब्ध आँकड़े जो असंगठित रूप में होते हैं। उन्हें यथा प्राप्त आँकड़े कहा जाता है।
2. किन्हीं भी आँकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिये हमें उन्हें क्रमबद्ध रूप में संगठित करने की आवश्यकता पड़ती है।
3. बारम्बारता वह संख्या दर्शाती है जितनी बार कोई एक विशिष्ट प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।
4. यथाप्राप्त आँकड़ों के समूह बनाए जा सकते हैं और उन्हें एक क्रमबद्ध प्रकार से 'वर्गीकृत बारंबारता बंटन' के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
5. वर्गीकृत आँकड़ों को आयतचित्र का प्रयोग करते हुए प्रदर्शित किया जा सकता है। आयत चित्र एक प्रकार का दंड आलेख है, जिसमें क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अंतरालों को दर्शाया जाता है तथा दंडों की लंबाइयाँ वर्ग अंतरालों की बारंबारताएँ दर्शाती हैं। साथ ही, दंडों के बीच में कोई रिक्तता नहीं होती, क्योंकि वर्ग अंतरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।
6. आँकड़ों को वृत आलेख या पाई–चार्ट का प्रयोग करके भी प्रस्तुत किया जा सकता है। एक वृत्त आलेख एक संपूर्ण और उसके भागों में संबंध को दर्शाता है।
7. कुछ ऐसे प्रयोग होते हैं जिनमें परिणामों के आने के संयोग बराबर होते हैं।
8. एक यादृच्छ प्रयोग वह प्रयोग है जिसमें परिणामों की ठीक–ठीक प्रागुक्ति (भविष्यवाणी) पहले से नहीं की जा सकती है।
9. किसी प्रयोग के परिणाम सम संभावित या समप्रायिक कहलाते हैं, यदि उनके आने के संयोग बराबर हों।
10. एक घटना की प्रायिकता $= \dfrac{\text{घटना को बनाने वाले परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के परिणामों की कुल संख्या}}$
11. किसी प्रयोग के एक या अधिक परिणामों से एक घटना बनती है।