ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ

(RATIO AND PROPORTION)

6.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ତୁମେମାନେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଅନେକ ବସ୍ତୁ ବା ପଦାର୍ଥର ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସୁଛ । ସାଧାରଣତଃ ଏକ ପ୍ରକାରର ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥକୁ ଗୁଣାତ୍ମକ (Quality) କିମ୍ବା ପରିମାଣାତ୍ମକ (Quantity) ଭାବରେ ତୁଳନା କରିଥାଅ । ଏକ ଜାତୀୟ ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥକୁ ପରିମାଣ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସାଧାରଣତଃ କେତେ କମ୍ ବା ବେଶୀ କେତେ ଗୁଣ ବା ଅଂଶ ଦ୍ୱାରା ତୁଳନା କରିଥାଅ । କମ୍ ବା ବେଶୀ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବଡ଼ରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟାର ଫେଡ଼ାଣ ଦ୍ୱାରା ତୁଳନା କରିବା ବେଳେ ଗୁଣ ବା ଅଂଶ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁପାତର ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁଳନା କରିଥାଅ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେମାନେ ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଜାଣିଛ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଅନୁପାତ, ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଟିଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନର ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

6.2. ଅନୁପାତ (Ratio) :

ପଦାର୍ଥଗୁଡ଼ିକର ତୁଳନାତ୍ମକ ଅର୍ଥରେ ଅନୁପାତ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ତୁଳନା କରିବାକୁ ହେଲେ ତୁଳନୀୟ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଜାତୀୟ ବା ଏକ ପ୍ରକାରର ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ରାଶିକୁ ତୁଳନା କଲେ, ପ୍ରଥମ ରାଶି ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିର କେତେ ଗୁଣ ବା କେତେ ଅଂଶ, ଏହା ଯେଉଁ ରାଶି ବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ବ୍ୟକ୍ତ ହୁଏ, ତାହାକୁ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ (Ratio) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 30 ମିଟର ଓ 6 ମିଟର, ଏହି ସମଜାତୀୟ ରାଶିଦ୍ୱୟକୁ ତୁଳନା କଲେ ଦେଖାଯାଏ ଯେ, 30 ମିଟର, 6 ମିଟରର 5 ଗୁଣ । ତେଣୁ 30 ମିଟର ଓ 6 ମିଟର ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ ହେଉଛି $\frac{30}{6}$ ବା 5:1 ।

ଏଠାରେ ଅନୁପାତଟି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହେଲା ।

ପୁନଶ୍ଚ 25 ପଇସା, 1 ଟଙ୍କା ବା 100 ପଇସାର $\frac{25}{100}$ ବା $\frac{1}{4}$

$\therefore$ 25 ପଇସା ଓ 1 ଟଙ୍କା ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ ହେଉଛି $\frac{25}{100}$ ବା 1:4

ମନେକରାଯାଉ; ଗୋଟିଏ ଏକକରେ ପ୍ରକାଶିତ ରାଶି ଦୁଇଟି a ଓ b ଅଟେ । a ରାଶି ସହ b ରାଶି ଅନୁପାତକୁ a:b ବା $\frac{a}{b}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । (a:b କୁ a ଅନୁପାତ b ବା a is to b ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : a:b କୁ ବିକଳ୍ପ ଭାବେ $\frac{a}{b}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଗଲେ ମଧ୍ୟ ଏଠାରେ ବୁଝିବାକୁ ହେବ ଯେ, a କୁ b ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଉ ନାହିଁ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରୁ **ସ୍ପଷ୍ଟ** ହେବ ।

ମନେକର ଜଣେ ଲୋକକୁ ପାଣିରେ 100 ଗ୍ରାମ୍ ମିଶ୍ରିଥିବା ଏକ ଗ୍ଲାସ ମୃଦୁପାନୀୟ ପିଇବାକୁ ଦିଆଗଲା । ଏହାକୁ ପିଇବା ସମୟରେ ତା'ର ହୃଦ୍‌ଘାତରେ ମୃତ୍ୟୁ ହୋଇଗଲା । କିନ୍ତୁ କିଛି ଲୋକ ଏହି ମୃତ୍ୟୁ ବିଷଯୁକ୍ତ ପାନୀୟ ସେବନ ଦୁର୍ଘଟଣା ହୋଇପାରେ ବୋଲି ସନ୍ଦେହ କରି ପୋଲିସ୍‌ରେ ଏତଲା ଦେଲେ । ଫଳରେ ଏହି ପାନୀୟର ଏକ ନମୁନା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ପାଇଁ ଡାକ୍ତରଙ୍କୁ ଦିଆଗଲା ।

ପରୀକ୍ଷା ପରେ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ ପାନୀୟ ପଦାର୍ଥରେ ବିଷ ନାହିଁ । ଯଦି ନମୁନାରେ 50 ଗ୍ରାମ୍ ମିଶ୍ରି ଥିବ, ତେବେ ମିଶ୍ରି ଓ ବିଷର ଅନୁପାତ 50:0 ହେବ ।

ଅନୁପାତର ଅର୍ଥ ହରଣ ନୁହେଁ । ଏହା ସୂଚାଉଛି କି ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକରେ a ଭାଗ ଥିଲେ ଅନ୍ୟଟି b ଭାଗ ହେବ ।

ଅନୁପାତ a:b ରେ a ପ୍ରଥମ ପଦ ଏବଂ b ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ । ଏଠାରେ a ଓ b ଦୁଇଟି ପଦ ବା ରାଶି । a ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ପୂର୍ବ ପଦ (antecedent) ଓ b ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦକୁ ଉତ୍ତର ପଦ (consequent) କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ହୁଏ, ଏଠାରେ ପୂର୍ବପଦ 2; ଉତ୍ତରପଦ 5 । ତେଣୁ ପ୍ରଥମ ରାଶି 2, ଯାହା ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶି 5ର $\frac{2}{5}$ ଅଂଶ ।

ସେହିପରି ଯଦି $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ ହୁଏ, ଏଠାରେ ପୂର୍ବପଦ 5; ଉତ୍ତରପଦ 2 ।

ତେଣୁ ପ୍ରଥମ ରାଶି 5, ଯାହା ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶି 2ର $\frac{5}{2}$ ଗୁଣ ।

ଯଦି ଦୁଇଜଣଙ୍କ ପାଖରେ 30 ଟଙ୍କା ଓ 42 ଟଙ୍କା ଥାଏ, ତେବେ ତାଙ୍କ ପାଖରେ ଥିବା ଟଙ୍କାର ଅନୁପାତ $\frac{30 \text{ ଟଙ୍କା}}{42 \text{ ଟଙ୍କା}} = \frac{30}{42}$ । ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, $\frac{30}{42} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ । ଏଥିରୁ ବୁଝିବା ଯେ, ପ୍ରଥମ ବ୍ୟକ୍ତିର ଟଙ୍କା 5 ଗୁଣ ହେଲେ, ଦ୍ୱିତୀୟ ବ୍ୟକ୍ତିର ଟଙ୍କା 7 ଗୁଣ ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - (i) : 4 କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ଓ 9 କିଲୋଗ୍ରାମ୍‌ର ଅନୁପାତ, 4 ଟନ୍ ଓ 9 ଟନ୍ ର ଅନୁପାତ, 4 ଲିଟର ଓ 9 ଲିଟର ଅନୁପାତ 4:9 ।

(ii) କୌଣସି ଅନୁପାତରେ ପୂର୍ବ ଓ ଉତ୍ତର ରାଶିଦ୍ୱୟକୁ ଯଦି ସମାନ ଅଣଶୂନ୍ୟ (Non-Zero) ରାଶିଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ ବା ହରଣ କରାଯାଏ, ତାହାହେଲେ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହିବ ।

(iii) ଅନୁପାତ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରାଶି ବା ଏକ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୁଏ । ଏହା ଏକକ ନିରପେକ୍ଷ (Indepedent of unit) ରାଶି ।

6.2.1 ବିଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ : (Different type of ratios)

ବର୍ଗାନୁପାତ (Duplicate Ratio) :

$\frac{a^2}{b^2}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ର ବର୍ଗାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ର ବର୍ଗାନୁପାତ $\frac{4}{9}$

ଘନାନୁପାତ (Triplicate Ratio) :

$\frac{a^3}{b^3}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ର ଘନାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ର ଘନାନୁପାତ $\frac{8}{27}$

ଘନାନୁପାତଟି ହେଉଛି $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ ।

ଉପବର୍ଗାନୁପାତ କିମ୍ବା ବର୍ଗମୂଳାନୁପାତ (Subduplicate Ratio) :

$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ ବା $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ଅନୁପାତରେ ଉପବର୍ଗାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{4}{5}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{4}{9}$ ଓ $\frac{16}{25}$ ର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ।

ଉପଘନାନୁପାତ କିମ୍ବା ଘନମୂଳାନୁପାତ (Sub-Triplicate Ratio) :

$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$ ବା $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ଅନୁପାତର ଉପଘନାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{5}{6}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{8}{27}$ ଓ $\frac{125}{216}$ ର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ।

ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ (Inverse Ratio) :

କୌଣସି ଅନୁପାତର ପୂର୍ବପଦ ଓ ଉତ୍ତର ପଦକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଉତ୍ତରପଦ ଓ ପୂର୍ବପଦ କରିଦେଲେ, ଯେଉଁ ନୂତନ ଅନୁପାତଟି ସୃଷ୍ଟି ହେବ, ତାହାକୁ ସେହି ଅନୁପାତର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{4}{5}$ ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{3}{2}$ ଓ $\frac{5}{4}$ ହେବ ।

ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ (Compound Ratio) :

ଅନୁପାତ ଗୁଡିକ ଯଦି $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ..... ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେଗୁଡିକର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ ହେବ, $\frac{ace.....}{bdf......}$

15 : 2 , 3:4, 13:9 ଓ 5:26 ର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ = $\frac{15\times3\times13\times5}{2\times4\times9\times26}=\frac{25}{16}$

6.3 : ସମାନୁପାତ (Proportion) :

ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ଅନୁପାତର ସମାନତାକୁ ସମାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ଗୋଟିଏ ସମାନୁପାତ । ଏହି ସମାନୁପାତକୁ a:b :: c:d ବା a:b = c:d ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ଏଠାରେ ରାଶି ଚାରୋଟି a,b,c,d ସମାନୁପାତୀ (Proportional) ବା ସମାନୁପାତ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସମାନୁପାତରେ a,b,c,d କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ପ୍ରଥମ, ଦ୍ୱିତୀୟ, ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦ ବା ରାଶି କୁହାଯାଏ । a ଓ d କୁ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି (extremes) ଏବଂ b ଓ c କୁ ମଧ୍ୟରାଶି (means) କୁହାଯାଏ । d ରାଶିକୁ a, b ଓ c ରାଶିଗୁଡିକର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ (Fourth proportional) କୁହାଯାଏ ।

a, b, c ଓ d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, a : b = c : d ହେବ ।

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ [bd ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣାଗଲା]

∴ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ

ଅର୍ଥାତ୍ **ଚାରିଗୋଟି ରାଶି ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରାନ୍ତ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ, ମଧ୍ୟରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।**

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ ହୁଏ, ତାହାହେଲେ, a,b,c,d,e,f .... ରାଶିମାନ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

6.3.1 : କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ (Continued Proportion) :

ସମଜାତୀୟ ତିନିଗୋଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିର ଅନୁପାତ, ଯଦି ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ରାଶିର ଅନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ, ସେ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ କୁହାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ । ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ଅନୁପାତର ଉତ୍ତର ରାଶି, ଦ୍ୱିତୀୟ ଅନୁପାତର ପୂର୍ବ ରାଶି ସହିତ ସମାନ ଅଟେ ।

a:b :: b:c ଗୋଟିଏ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ । ଏଠାରେ b କୁ a ଓ c ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ (mean proportional) ଓ c କୁ a ଓ b ର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ (third proportional) କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି ଚାରିଗୋଟି ବା ତତୋଧିକ ରାଶିକୁ ନେଇ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇପାରିବ ।

a,b,c,d ... କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots\ldots$

a, b, c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ bc ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ)

∴ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶିର ବର୍ଗ ।

ଅର୍ଥାତ୍ (ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ)^2 = ପ୍ରାନ୍ତରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : a,b,c,d କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନେ ସର୍ବଦା ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

କିନ୍ତୁ a,b,c,d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ନହୋଇପାରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 5, 10, 7, 14 ସମାନୁପାତୀ, ମାତ୍ର କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ନୁହଁନ୍ତି ।

6.4 ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା :

କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସମାନୁପାତକୁ ନେଇ, ସେଥିରୁ ଆମେ ଆଉ କେତୋଟି ପ୍ରାମାଣିକ ନୂତନ ଅନୁପାତ ସିଦ୍ଧ କରିପାରିବା । ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ଅନୁପାତର ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବୋଲି ବିବେଚିତ ହୁଏ । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକର ବିଶେଷ ଉପଯୋଗିତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନାମକରଣ କରାଯାଇଛି ।

1. ବ୍ୟସ୍ତାନୁପାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Invertendo) : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow bc=ad$

$\Rightarrow \frac{bc}{ac}=\frac{ad}{ac}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ac ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ) $\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

2. ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା (Alternendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$

$\Rightarrow \frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ cd ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ) $\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

3. ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Componendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 1 ଯୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

4. ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 1 ବିୟୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

5. ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା (Componendo and Dividendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା) ....(1)

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା) ..... (2)

(1) କୁ (2) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

6. ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Addendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) $\Rightarrow \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$ (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)

କିନ୍ତୁ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ତେଣୁ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=.......\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e+...}{b+d+f+....}$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=......=k$

$a = bk,\ c = dk,\ e = fk....$ ଇତ୍ୟାଦି ।

$\therefore \frac{a+c+e+...}{b+d+f+....}=\frac{bk+dk+fk+....}{b+d+f+.....}=\frac{k(b+d+f+...)}{b+d+f+.....}=k$

ତେଣୁ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=......\frac{a+c+e+....}{b+d+f+.....}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 1 :

(i) 7, 13 ଓ 14 ର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $a^3-b^3+ab(a-b)$, a^2-b^2 ର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ କେତେ ?

(iii) $a-b$ ଓ $4(a-b)$ ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି x

$\Rightarrow 7:13 = 14 : x$

$\Rightarrow \frac{7}{13}=\frac{14}{x} \Rightarrow 7x = 13 \times 14 \Rightarrow x = 26$

$\therefore$ ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି 26 । (ଉତ୍ତର)

(ii) ମନେକର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି x

ତେଣୁ $a^3-b^3+ab(a-b) : a^2-b^2 = a^2-b^2 : x$

$\Rightarrow \frac{a^3-b^3+ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{x}$

$\Rightarrow x[(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)] = (a^2-b^2)^2$

$\Rightarrow x(a-b)(a^2+2ab+b^2) = [(a+b)(a-b)]^2$

$\Rightarrow x(a-b)(a+b)^2 = (a+b)^2(a-b)^2$

$\Rightarrow x(a-b) = (a-b)^2 \Rightarrow x = a-b$

$\therefore$ ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି $(a-b)$ । (ଉତ୍ତର)

(iii) ମନେକର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ x

$\therefore$ ପ୍ରାନ୍ତରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶିର ବର୍ଗ

$\therefore (a-b) \times 4(a-b) = x^2$

$\Rightarrow x^2 = 4(a-b)^2 = [\pm 2(a-b)]^2$

$\Rightarrow x = \pm 2(a-b)$

$\therefore$ ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି $2(a-b)$ ବା $2(b-a)$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 :

$x:y = 2:3$ ହେଲେ, $5x-2y : x+3y$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $x:y = 2:3$ (ଦତ୍ତ)

$$5x-2y : x+3y = \frac{5x - 2y}{x + 3y} = \frac{\frac{5x}{y} - 2}{\frac{x}{y} + 3}$$ (ହର ଓ ଲବକୁ y ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ)

$$= \frac{5\left(\frac{2}{3}\right) - 2}{\left(\frac{2}{3}\right) + 3} = \frac{10 - 6}{2 + 9} = \frac{4}{11}$$

$= 5x-2y : x+3y = 4:11$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3 :

a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a^2 : b^2 = a^2 + c^2 : b^2 + d^2$ ।

ସମାଧାନ : a, b, c d ସମାନୁପାତୀ

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ (ମନେକରାଯାଉ) $\Rightarrow a = bk$ ଓ $c = dk$

ବାମପକ୍ଷ = $\frac{a^2}{b^2} = \frac{(bk)^2}{b^2} = \frac{b^2k^2}{b^2} = k^2$ .... (1)

ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ = $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{(bk)^2 + (dk)^2}{b^2 + d^2} = \frac{k^2(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2} = k^2$ .... (2)

(1) ଓ ରୁ (2) $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$

$\therefore a^2 : b^2 = a^2 + c^2 : b^2 + d^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 :

a, b ଓ c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$ ।

ସମାଧାନ : a,b,c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ । ତେଣୁ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2$

ବାମପକ୍ଷ $(a+b+c)(a-b+c)$ $= [(a+c)+b]\,[(a+c)-b]$

$= (a+c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$

$= a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 \quad (\because ac = b^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 5 :

$x+5y : x-5y = 4:7$ ହେଲେ $3x+5y : 3x-5y$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{x + 5y}{x - 5y} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{(x + 5y) + (x - 5y)}{(x + 5y) - (x - 5y)} = \frac{4 + 7}{4 - 7}$ (ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$\Rightarrow \frac{2x}{10y} = \frac{11}{-3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-55}{3} \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{3}{5}\left(\frac{-55}{3}\right) \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{(-11)}{1}$

$\Rightarrow \frac{3x+5y}{3x-5y} = \frac{(-11)+1}{(-11)-1}$ (ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) $\Rightarrow \frac{3x+5y}{3x-5y} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$

$\therefore 3x + 5y : 3x - 5y = 5:6$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 :

a,b,c,d,e,f ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab + cd + ef)^2$

ସମାଧାନ : a,b,c,d,e,f ସମାନୁପାତୀ, ତେଣୁ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ (ମନେକର)

$\therefore a = bk, c = dk, e = fk$

ବାମପକ୍ଷ $= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (b^2k^2+ d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2)$

$= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2) = k^2(b^2+ d^2+f^2)^2$ .....(1)

ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= (ab + cd+ ef)^2 = (bkb +dkd+fkf)^2 = (b^2k +d^2k+f^2k)^2$

$= k^2(b^2+d^2+f^2)^2$ ....(2)

(1) ଓ (2) ରୁ $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab + cd+ ef)^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 7 :

ଅର୍ପିତା ଓ ନନ୍ଦିତାଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସର ଅନୁପାତ 9 : 7 । 4 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ 4 : 3 ଥିଲା । ତେବେ 4 ବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ କେତେ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ଅର୍ପିତାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 9x ବର୍ଷ ଓ ନନ୍ଦିତାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 7x ବର୍ଷ । ଚାରିବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ଯଥାକ୍ରମେ (9x–4) ବର୍ଷ ଓ (7x–4) ବର୍ଷ ଥିଲା ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{9x-4}{7x-4} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow 27x-12 = 28x-16 \quad \Rightarrow x = 4$

ଚାରିବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ହେବ (9x+4) ବର୍ଷ ଓ (7x+4) ବର୍ଷ ।

$\frac{9x + 4}{7x + 4} = \frac{9(4) + 4}{7(4) + 4} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ 4 ବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ 5 : 4 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 :

7000 ଟଙ୍କାକୁ A, B ଓ C ମଧ୍ୟରେ ଏପରି ବାଣ୍ଟିଦିଅ ଯେ A ଓ B, B ଓ C ପାଇଥିବା ଟଙ୍କାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 : 3 ଓ 3 : 4 ହେବ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A, B, C ପାଇଥିବା ଟଙ୍କା ଯଥାକ୍ରମେ a, b, c ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ $\Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ ଓ $\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ $\Rightarrow \frac{a}{8}=\frac{b}{12}$ ଓ $\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$

$\therefore \frac{a}{8}=\frac{b}{12}=\frac{c}{15}=k$ (ମନେକରାଯାଉ)

$\therefore a = 8k,\ b = 12k,\ c = 15k$ ....(1)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $a + b + c = 7000 \Rightarrow 8k + 12k + 15k = 7000$

$\Rightarrow 35k = 7000 \quad \therefore k = 200$

k ର ଏହି ମାନକୁ (1) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$a = 1600, \quad b = 2400, \quad c = 3000$

$\therefore$ A, B, C ର ଟଙ୍କା ଯଥାକ୍ରମେ 1600 ଟଙ୍କା, 2400 ଟଙ୍କା ଓ 3000 ଟଙ୍କା । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 9 :

ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଅଷ୍ଟମ, ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 3 : 1, 5 : 3 ଓ 7 : 5 ଅଟେ । ପ୍ରତି ଶ୍ରେଣୀରେ ଯଦି ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ଥାଆନ୍ତି ତେବେ, ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 3x ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା x

$\therefore$ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା $= 3x + x = 4x$

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 5y ଓ 3y ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା $= 5y + 3y = 8y$

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 7z ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା 5z

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା $= 7z + 5z = 12z$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $4x=8y=12z$

$\therefore \frac{4x}{24}=\frac{8y}{24}=\frac{12z}{24} \Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}=k$ (ମନେକରାଯାଉ)

$\therefore x = 6k,\ y = 3k,\ z = 2k$

ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା $= x+3y+5z$ ଏବଂ ଛାତ୍ରୀସଂଖ୍ୟା $= 3x + 5y + 7z$

ତେଣୁ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ $= \frac{x+3y+5z}{3x+5y+7z}$

$$= \frac{6k+3(3k)+5(2k)}{3(6k)+5(3k)+7(2k)} = \frac{6k+9k+10k}{18k+15k+14k} = \frac{25k}{47k} = \frac{25}{47}$$

$\therefore$ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ 25:47 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 2:1 ଓ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 4:3 ଅଟେ । ଉକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 2:3 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରଥମ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 2x ଓ ପ୍ରସ୍ଥ = x ଏବଂ

ଦ୍ୱିତୀୟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4y ପ୍ରସ୍ଥ = 3y

ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 2x \,.\, x = 2x^2$ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 4y \,.\, 3y = 12y^2$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{2x^2}{12y^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$

ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା $= 2(2x+x) = 6x$ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା $= 2(4y+3y) = 14y$

ତେଣୁ ପରିସୀମା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ $= \frac{6x}{14y} = \frac{6}{14} \times \frac{2}{1} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

$\therefore$ କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ 6 : 7 (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

   (i) a:b=3:4, b:c=5:6, c:d=11:9 ହେଲେ, a:d=.... (65:84, 30:40, 55:72, 45 : 63)

   (ii) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{2}{5}$ ହେଲେ, $\frac{a}{d}$ =.... $\left(\frac{4}{25}, \frac{5}{2}, \frac{8}{125}, \frac{2}{25}\right)$

   (iii) p:q :: r:s ହେଲେ, p:r =... (q:s, s:q, p:s, q:r)

   (iv) a:b=2:3 ହେଲେ, (4a+b) : (2a+3b) =.... (3:5, 5:8, 7:9, 11:13)

   (v) 2x=3y=4z ହେଲେ, x:y:z = ... (2:3:4,6:4:3,2:3:4, 4:3:2)

   (vi) x:y=2:5, y:z=3:4 ହେଲେ, x:y:z =.... (20:15:6, 6:15:20, 2:5:3, 5:3:4)

   (vii) 3:(k+2) :: 5:(k+4) ହେଲେ, k =.... (2,4,1,6)

2. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତି ଗୁଡିକ ଠିକ୍ ବା ଭୁଲ୍ ଦର୍ଶାଅ ।

   (i) a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସମସ୍ତ ରାଶି ଏକ ଜାତୀୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

   (ii) a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନେ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

   (iii) କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀରେ ସମସ୍ତ ରାଶି ଏକ ଜାତୀୟ ହେବେ ।

   (iv) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ଚତୁର୍ଥର ଅନୁପାତ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟର ଘନାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

(v) ତିନୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟର ଅନୁପାତ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

(vi) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟର ଅନୁପାତ, ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

(vii) a, b, c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, $a+2$, $b+2$, $c+2$ ମଧ୍ୟ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

(viii) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

3. ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 5,7,15 (ii) 0.1, 0.01, 0,001
(iii) $a,\ a^2b,\ a^2b^2$ (iv) $a^2 - b^2,\ a+b,\ a-b$
(v) $a^2+5a + 6,\ 3a + 6,\ 4a + 12$ (vi) $a^3 - b^3,\ a^4+a^2b^2+b^4,\ a - b$

4. ଦତ୍ତ ରାଶିମାନଙ୍କର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 9, 15 (ii) $a^2b,\ ab^2$

(iii) $x^2 - y^2,\ x + y$ (iv) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a},\ \sqrt{a^2+b^2}$

5. ନିମ୍ନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 9, 25 (ii) $4a^2b,\ 9bc^2$ (iii) $(a-b)(a+b)^3,\ (a+b)(a-b)^3$

6. (i) $(2+a)$ ଓ $(5+a)$ ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ $(3+a)$ ହେଲେ, a ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $(23-x)$, $(28-x)$ ଓ $(19-x)$ ର ମଧ୍ୟସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, x ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(iii) a ଓ c ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ b ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ
a^2+b^2 ଓ b^2+c^2 ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ $ab+bc$ ହେବେ ।

(iv) ଯଦି b, a ଓ c ର ମଧ୍ୟସମାନୁପାତୀ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
$(ab+bc+ca)^3 = abc\ (a+b+c)^3$

7. (i) 1, 7, 17 ପ୍ରତ୍ୟେକରେ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ, ଯୋଗଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?

(ii) 6, 14, 18 ଓ 38 ପ୍ରତ୍ୟେକରେ କେତେ ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ /

(iii) 5, 9, 17 ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ, ବିୟୋଗଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?

(iv) 14, 17, 34 ଓ 42 ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ, ବିୟୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?

8. (i) $a:b = 2:3$ ହେଲେ, $(3a+4b) : (4a+5b)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $a:b=3:4$ ହେଲେ, $(6a+5b) : (5a+4b)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) 581 କୁ a, b, c ତିନୋଟି ଅଂଶରେ ଭାଗକର ଯେପରି 4a=5b=7c ହେବ ।

(iv) $6x+5y : 6x-5y = 3:2$ ହେଲେ, $2x+3y : 2x-3y$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(v) $(a-b) : (a+b) = 1:5$ ହେଲେ, $a^2-b^2 : a^2+b^2$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

9. a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) $pa+qc : pb+qd = ma+nc : mb+nd$

(ii) $3a+4b : 3c+4d = \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}$

(iii) $b^2 : d^2 = a^2+b^2 : c^2+d^2$

(iv) $a^2+b^2 : c^2+d^2 = b^2+d^2 : a^2+c^2$

10. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $\frac{ac}{bd}=\frac{a^2-3c^2+5e^2}{b^2-3d^2+5f^2}$

(ii) $\frac{ace}{bdf}=\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}$

(iii) $\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}=\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}$

(iv) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{4a-6c-9e}{4b-6d-9f}$

(v) $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$

11. a, b, c କ୍ରମିକ ସାମନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $a:c = a^2 : b^2$

(ii) $a:c = (a^2+b^2) : (b^2+c^2)$

(iii) $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$

(iv) $2a+3b : 3a+2b = 2b+3c : 3b+2c$

12. a, b, c, d କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $(b+c)(b+d) = (c+a)(c+d)$

(ii) $\frac{a}{c}=\frac{a^2-b^2+c^2}{b^2-c^2+d^2}$

(iii) $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(iv) a–b ଓ c–d ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ b–c

(v) a^2-b^2 ଓ c^2-d^2 ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ b^2-c^2

(vi) $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$

13. (i) $x=\frac{2ab}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$ ।

(ii) $x=\frac{6ab}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x+3a}{x-3a}+\frac{x+3b}{x-3b}=2$ ।

(iii) $x=\frac{8ab}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x+4a}{x-4a}+\frac{x+4b}{x-4b}=2$ ।

14. (i) x+y, y+z, x-y, y-z ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, x,y,z କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

(ii) $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0$

(iii) $\frac{x}{b^2+bc+c^2} = \frac{y}{c^2+ca+a^2} = \frac{z}{a^2+ab+b^2}$ ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0$

15. ସ୍ମିତି, ସୃଷ୍ଟି ଠାରୁ ଦୁଇ ବର୍ଷ ବଡ଼ । ଦଶ ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସୃଷ୍ଟି ଓ ସ୍ମିତିର ବୟସର ଅନୁପାତ 1 : 2 ଥିଲା । ବର୍ତ୍ତମାନ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ କେତେ ?

16. ଚାରି ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ଅନିଲ୍ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର ବୟସର ଅନୁପାତ 3 : 5 ଥିଲା । ଚାରିବର୍ଷ ପରେ ଏହି ଅନୁପାତ 5 : 7 ହେବ । ବର୍ତ୍ତମାନ କାହାର ବୟସ କେତେ ?

17. 1400 ଜଣ ଛାତ୍ରଥିବା ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଶିକ୍ଷକ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ 35 : 2 ଅଟେ । ଆଉ ଅଧିକ କେତେ ଜଣ ଶିକ୍ଷକ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଯୋଗଦେଲେ, ଏହି ଅନୁପାତ 25 : 2 ହେବ ?

18. 60 ଲିଟର ମିଶ୍ରଣରେ କ୍ଷୀର ଓ ଜଳର ଅନୁପାତ 2 : 1 । ସେଥିରେ ଆଉ କେତେ ଲିଟର ଜଳ ମିଶାଇଲେ, ମିଶ୍ରଣରେ କ୍ଷୀର ଓ ଜଳର ଅନୁପାତ 8 : 5 ହେବ ?

19. A ଓ B ଆୟର ଅନୁପାତ 3 : 2 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 5 : 3 ଅଟେ । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ 1500 ଟଙ୍କା ସଞ୍ଚୟ କରୁଥିବେ, ତେବେ B ର ଆୟ କେତେ ?

20. (i) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 3 : 4 ର ବର୍ଗାନୁପାତ, 15 : 17 ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ ଏବଂ 25: 42 ର ବର୍ଗମୂଳାନୁପାତର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ 51 : 112 ହେବ ।

(ii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 7 : 6 ର ବର୍ଗାନୁପାତ, 125 : 343 ର ଘନମୂଳାନୁପାତ ଏବଂ 35 : 36 ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ 1 : 1 ହେବ ।

21. 120 ଟଙ୍କାକୁ A,. B, C ମଧ୍ୟରେ ଏପରି ବାଣ୍ଟିଦିଅ ଯେପରି, ସେମାନେ ପାଉଥିବା ଟଙ୍କାରୁ ଯଥାକ୍ରମେ 15 ଟଙ୍କା, 10 ଟଙ୍କା ଓ 5 ଟଙ୍କା କମାଇ ଦେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଅବଶିଷ୍ଟ ଟଙ୍କା 2, 3, 4 ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

22. ତିନି ଶ୍ରେଣୀ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଅଷ୍ଟମ, ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 : 3, 3 : 7 ଓ 7 : 8 ଅଟେ । ଶ୍ରେଣୀ ତିନୋଟିରେ ସମାନ ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ପିଲା ପଢୁଥିଲେ ତେବେ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

23. ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ ଗୁଡିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ସମାଧାନ କର ।

(i) $\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}} s = 5$ (ii) $\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}} = 4$ (iii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$