प्रारम्भिक गणितीय संकल्पनाएँ (Elementary Mathematical Concepts)

CHAPTER 2

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

किसी भौतिक राशि के परिमाण को व्यक्त करने के लिए उसके आंकिक मान तथा मात्रक की आवश्यकता होती है। परन्तु कुछ भौतिक राशियाँ ऐसी है जिन्हें केवल परिमाण द्वारा ही पूर्णरूप से व्यक्त किया जा सकता है। जैसे-किसी वस्तु का द्रव्यमान 5Kg द्रव्यमान को पूर्णरूप से व्यक्त करता है। जबकि कुछ भौतिक राशियाँ ऐसी है जो केवल परिमाण के आधार पर पूर्णरूप से व्यक्त नहीं की जा सकती है। जैसे-किसी व्यक्ति को किसी वस्तु को 10 मीटर विस्थापित करने के लिए कहा जाये तब यह प्रश्न आता है कि वस्तु को किस दिशा में विस्थापित किया जाये? इस प्रकार ऐसी अनेक भौतिक राशियाँ हैं जिन्हें केवल परिमाण के आधार पर ही पूर्णरूप से व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

2.2 अदिश तथा सदिश राशियाँ (Scalar and Vector quantities)

2.2.1 अदिश राशियाँ (Scalar quantities)

वे भौतिक राशियाँ जिन्हें पूर्णतया व्यक्त करने के लिए केवल परिमाण (आंकिक मान तथा मात्रक) की आवश्यकता होती है तथा दिशा की आवश्यकता नहीं होती है, अदिश राशियाँ कहलाती है।

उदाहरण–द्रव्यमान, दूरी, चाल, कार्य (ऊर्जा), समय, आयतन, ताप, घनत्व आदि।

2.2.2 सदिश राशियाँ (Vector quantities)–

वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं तथा जो सदिश नियमों का पालन करती है अर्थात् इनका जोड़ना, घटाना व गुणा करना सदिश नियमों के अनुसार ही होता है, सदिश राशियाँ कहलाती है।

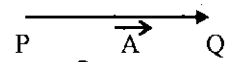
उदाहरण–विस्थापन, वेग, बल, संवेग, बल–आघूर्ण आदि।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. यदि किसी भौतिक राशि में परिमाण तथा दिशा दोनों हो तो यह हमेशा ही सदिश नहीं होती। इसके सदिश होने के लिए सदिश नियमों का पालन करने की शर्त आवश्यक रूप से संतुष्ट होनी चाहिए।
   उदाहरण–भौतिक राशि 'विद्युत धारा' में परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं, परन्तु फिर भी यह एक अदिश राशि है क्योंकि यह सदिश नियमों का पालन नहीं करती है।
2. कुछ भौतिक राशियां ऐसी होती है। जिन्हें न तो अदिश तथा न ही सदिश की श्रेणी में रख सकते हैं। इन राशियों को **प्रदिश राशियाँ** (Tensor Quantities) कहते हैं। इन राशियों की स्वयं की कोई दिशा नहीं होती है, परन्तु परिमाण भिन्न–भिन्न दिशाओं में भिन्न–भिन्न होते हैं।
   उदाहरण–प्रतिबल, जड़त्व आघूर्ण, विद्युतशीलता, चुम्बकशीलता आदि।

2.3 सदिशों का निरूपण (Representation of Vectors)

एक सदिश राशि को एक सरल रेखा द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। जिसके एक सिरे पर तीर का निशान लगा दिया जाता है। सरल रेखा की लम्बाई सदिश के परिमाण को व तीर का निशान दिशा को व्यक्त करता है।



चित्र 2.1

जहाँ से सदिश प्रारंभ होता है, सदिश का टेल (Tail) कहलाता है तथा जहाँ सदिश का अन्त होता है, सदिश का हैड (Head) कहलाता है।

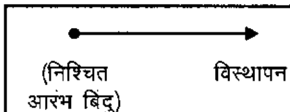
चित्रानुसार P टेल तथा Q हैड कहलाता है। इसे $\overrightarrow{PQ}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। सदिश को अंग्रेजी वर्णमाला के एक अक्षर द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है। जैसे–$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{A}$ (चित्र से) इसे $\overleftarrow{PQ}$ नहीं लिखकर $\overrightarrow{QP}$ लिखते हैं।

सदिशों को निम्न दो भागों में बाँटा गया है–

(i) ध्रुवीय सदिश (ii) अक्षीय सदिश

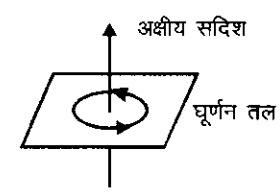
(i) ध्रुवीय सदिश (Polar Vector)–वे सदिश जिनकी दिशा कण की गति की दिशा में होती है, ध्रुवीय सदिश कहलाते हैं।

उदाहरण–विस्थापन, वेग, बल आदि। इन सदिश राशियों का सम्बन्ध रेखीय गति से होता है अर्थात् जिनका आरंभ एक निश्चित क्रिया बिन्दु से होता है।



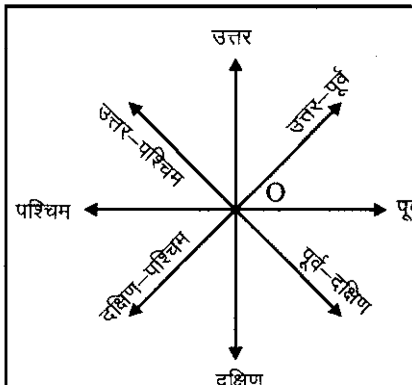
चित्र 2.2

(ii) अक्षीय सदिश (Axial Vectors)–वे सदिश जिनकी दिशा धूर्णन अक्ष की दिशा में होती है, अक्षीय सदिश कहलाते हैं। **उदाहरण**–कोणीय वेग, बल आघूर्ण, कोणीय संवेग आदि। इन सदिश राशियों की दिशा दक्षिणावर्त पेंच नियम द्वारा निर्धारित होती है।



चित्र 2.3

सदिश का मापांक (Modulus of the vector)–किसी सदिश $\overrightarrow{A}$ के परिमाण को प्रदर्शित करने वाली धन संख्या को सदिश का मापांक कहते हैं। इसे A या $|\overrightarrow{A}|$ [मापांक (modulus) $\overrightarrow{A}$] द्वारा व्यक्त करते हैं। इस प्रकार सदिश $\overrightarrow{A}$ का परिमाण तथा दिशा सहित निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं–



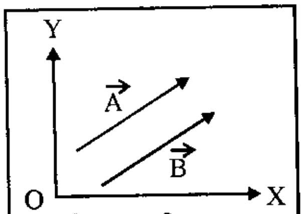
चित्र 2.4

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{n} = A\hat{n}$$

यहाँ $\hat{n}$ सदिश $\vec{A}$ की दिशा व्यक्त करता है। द्विविमीय सदिश को व्यक्त करने के लिए निम्न प्रकार दिशाओं का निर्धारण किया जाता है। यहाँ सभी दिशायें मूल बिन्दु के सापेक्ष निर्देशित की गई है।

2.4 सदिश से सम्बन्धित कुछ महत्त्वपूर्ण परिभाषाएँ (Some Important Definitions Related with Vectors)

1. तुल्य सदिश या समतुल्य सदिश (Equivalent vector)–जब दो सदिशों के परिमाण व दिशा समान हो तब वे परस्पर तुल्य सदिश कहलाते हैं। यहाँ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर तुल्य सदिश है।



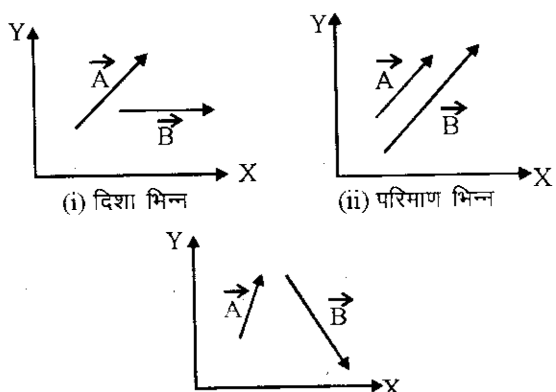
परिणाम व दिशा समान
चित्र 2.5

2. असमान सदिश (Unequal vector)–

(i) जब दो सदिशों के परिमाण तो समान हो तो परन्तु दिशा भिन्न–भिन्न हो तो वे असमान सदिश कहलाते हैं।

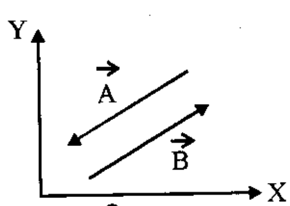
(ii) जब दो सदिशों का परिमाण अलग–अलग व दिशा समान हो तो वे असमान सदिश कहलाते हैं।

(iii) जब दो सदिशों का परिमाण व दिशा भिन्न–भिन्न हो तो वे असमान सदिश कहलाते हैं।



चित्र 2.6

3. विपरीत अथवा ऋणात्मक सदिश (Negative vector)–जब दो सदिशों के परिमाण तो समान हो परन्तु दिशा विपरीत हो तब वे परस्पर विपरीत सदिश कहलाते है। यहाँ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ विपरीत सदिश है अर्थात् $\vec{A} = -\vec{B}$



चित्र 2.7

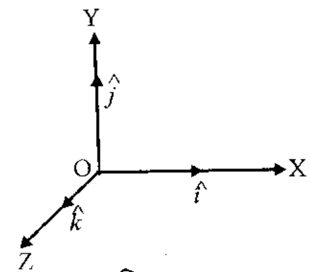
4. एकांक सदिश(इकाई सदिश) (Unit vector)–वह सदिश जिसका परिमाण एकांक (1) हो तथा दिशा दिये गये सदिश के समान्तर हो, एकांक सदिश कहलाता है।

माना कि किसी सदिश $\vec{r}$ का परिमाण r है तथा एकांक सदिश $\hat{r}$ (r केप) है। किसी सदिश में उसके परिमाण का भाग देने पर एकांक सदिश प्राप्त होता है।

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad ...(1)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad ....(2)$$

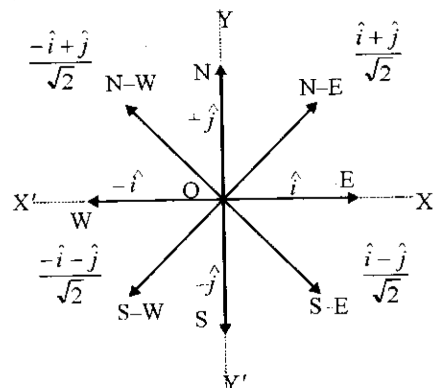
इस प्रकार किसी सदिश को उसके परिमाण व एकांक सदिश के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।



चित्र 2.8

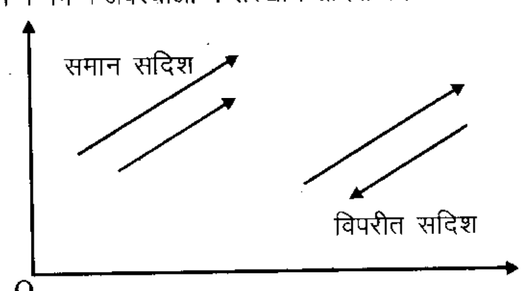
X अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{i}$, Y अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{j}$ तथा Z अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{k}$ होता है।

निम्न चित्र में विभिन्न दिशाओं के एकांक सदिशों को व्यक्त किया गया है जो सदिश में परिमाण का भाग देकर व्यक्त की गई है–



चित्र 2.9

5. संरेखीय सदिश–जब दो या दो से अधिक सदिश एक ही रेर के समान्तर अथवा परस्पर विपरीत हों तब वे संरेखीय सदिश कहलाते है चित्र में दो भिन्न–भिन्न अवस्थाओं में संरेखीय सदिश प्रदर्शित किये गये है



चित्र 2.10

6. शून्य सदिश (Zero vector or Null vector)–इस सदिश परिमाण शून्य होता है। इसे $\vec{0}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इसमें दिशा का इ नहीं होता क्योंकि इसका प्रारंभ तथा अन्तिम बिन्दु एक ही होता है अथ इसकी दिशा स्वेच्छ होती है। शून्य सदिश किसी सदिश को शून्य से गु करने पर प्राप्त होता है,

अतः $\vec{A}(0) = \vec{0}$

शून्य सदिश किसी सदिश में उसका ऋण सदिश जोड़ने पर भी प्राप्त किया जा सकता है,

अर्थात् $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

शून्य सदिश के निम्न गुण है–

(i) किसी सदिश में शून्य सदिश जोड़ने या घटाने पर दिया गया सदिश अपरिवर्तित रहता है

अर्थात् $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ तथा $\vec{A} - \vec{0} = \vec{A}$

(ii) शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है तथा दिशा का ज्ञान नहीं होता है। अतः $|\vec{0}| = 0$

(iii) किसी संख्या को शून्य सदिश से गुणा करने पर शून्य सदिश ही प्राप्त होता है अर्थात् $n\vec{0} = \vec{0}$

विशेष–

(i) शून्य सदिश, मूल बिन्दु की स्थिति सदिश को व्यक्त करता है।

(ii) किसी कण की किसी समयान्तराल में स्थिर अवस्था के लिए यह विस्थापन सदिश को व्यक्त करता है।

शून्य सदिश के उदाहरण–

(i) स्थिर कण का वेग सदिश शून्य सदिश होता है।

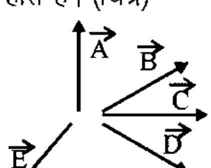
(ii) समान वेग से गतिशील कण का त्वरण सदिश शून्य सदिश होता है।

महत्त्वपूर्ण तथ्य

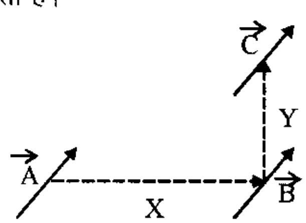
1. मुक्त सदिश (Free vector)–वह सदिश जिसकी स्थिति अथवा क्रिया रेखा महत्त्वपूर्ण नहीं हो अर्थात् इसको इसके समान्तर विस्थापित करने पर सदिश अपरिवर्तित रहता है।

2. स्थानगत सदिश (Localised vector)–वह सदिश जिसकी स्थिति अथवा क्रिया रेखा महत्त्वपूर्ण हो अर्थात् इसको विस्थापित नहीं किया जा सकता है।

3. समतलीय सदिश (Coplanar vectors)–जो सदिश एक ही तल में स्थित होते हैं, समतलीय सदिश कहलाते हैं कागज के तल में खींचे गए सभी सदिश समतलीय होते हैं। (चित्र)



4. किसी सदिश को इसके अपने समान्तर विस्थापित करने पर सदिश अपरिवर्तित रहता है।



$\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}$

5. किसी सदिश को 2π (या 360°) के पूर्ण गुणांक के अतिरिक्त किसी अन्य कोण पर घुमाने से सदिश परिवर्तित हो जाता है।

6. $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

7. दो समान और विपरीत सदिशों को जोड़ने पर शून्य सदिश प्राप्त होता है। अतः $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

8. एकांक सदिश की कोई विमा नहीं होती है और न ही कोई मात्रक। इसका उपयोग मात्र दिशा व्यक्त करने के लिए किया जाता है।

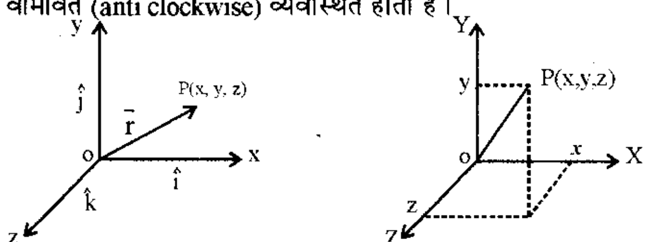
9. $\hat{i}, \hat{j}$ व $\hat{k}$ एक दूसरे के लम्बवत् होते हैं।

10. अल्प कोणीय विस्थापन एक सदिश (अक्षीय) राशि है। परन्तु कोणीय विस्थापन का परिमाण अधिक होने के कारण यह सदिश नहीं होता। अतः यह योग के क्रम विनिमय नियमों का पालन नहीं करता है।

अतः $d\vec{\theta}_1 + d\vec{\theta}_2 = d\vec{\theta}_2 + d\vec{\theta}_1$ परन्तु $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$

2.5 कार्तीय निर्देशांक पद्धति में एकविमीय, द्विविमीय एवं त्रिविमीय सदिश (One dimensional, two dimensional and three dimensional vectors in Cartesian Coordinate System)

कार्तीय निर्देशांक पद्धति एक सरलतम सर्वमान्य पद्धति है। इस पद्धति में तीन परस्पर लम्बवत् अक्ष होते हैं जिन्हें X, Y तथा Z अक्ष कहते हैं। इन अक्षों का कटान बिन्दु (O) कहलाता है तथा यह संदर्भ बिन्दु होता है। कार्तीय निर्देशांक पद्धति में X- अक्ष, Y- अक्ष तथा Z- अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ होते हैं। इस पद्धति में मूल बिन्दु (O) तथा किसी एक अक्ष का चयन स्वैच्छिक होता है जबकि शेष अक्षें क्रमागत वामावर्त (anti clockwise) व्यवस्थित होती है।

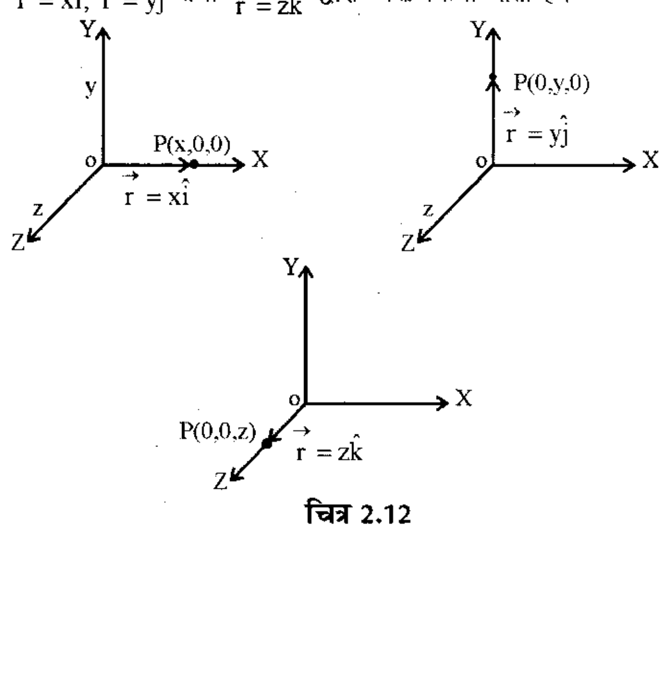


चित्र 2.11

यहाँ किसी बिन्दु P(x, y, z) की स्थिति मूल बिन्दु (O) तथा निर्देशांक अक्षों के सापेक्ष दर्शायी गयी है। यहाँ $\vec{r}$ कण की स्थिति को दर्शाने वाला स्थिति सदिश है।

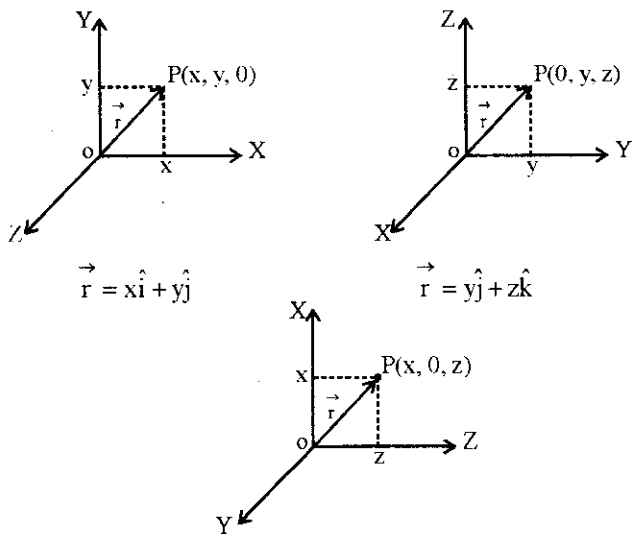
(i) एकविमीय सदिश (One dimensional vector)

वह सदिश जिसकी दिशा किसी एक अक्ष के अनुदिश हो तो उसे एकविमीय सदिश या एकदिशीय सदिश कहते हैं। किसी सदिश $\vec{r}$ की दिशा x- अक्ष, y- अक्ष तथा z- अक्ष के अनुदिश होने पर सदिश को क्रमशः $\vec{r} = x\hat{i}$, $\vec{r} = y\hat{j}$ तथा $\vec{r} = z\hat{k}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।



चित्र 2.12

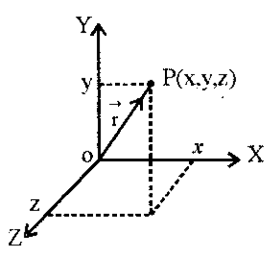
(ii) द्विविमीय सदिश–वह सदिश, जो एक तल में स्थित हो तो उसे द्विविमीय सदिश या समतलीय सदिश कहते हैं। द्विविमीय सदिश का प्रभाव किन्हीं दो अक्षों के अनुदिश होता है। किसी सदिश $\vec{r}$ के तलों X-Y, Y-Z तथा X-Z में स्थित होने पर सदिश को क्रमशः $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, $\vec{r} = y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।



$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ $\quad$ $\vec{r} = y\hat{j} + z\hat{k}$ $\quad$ $\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$

चित्र 2.13

(iii) त्रिविमीय सदिश–वह सदिश जो आकाश (समष्टि) में किसी कण की स्थिति को प्रदर्शित करने के लिए प्रयुक्त होता है, त्रिविमीय सदिश कहलाता है। इस सदिश का प्रभाव तीनों अक्षों के अनुदिश होता है। इसके अन्तर्गत किसी बिन्दु P(x, y, z) की स्थिति को $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।



$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

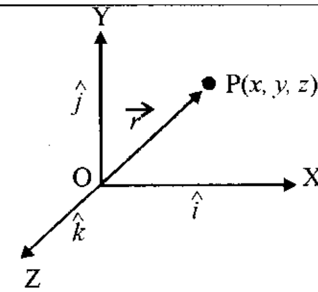
चित्र 2.14

महत्त्वपूर्ण तथ्य

• **स्थिति सदिश (Postition vector)**–वह सदिश जिसके द्वारा निर्देश तंत्र में किसी बिन्दु की स्थिति को व्यक्त किया जाता है स्थिति सदिश कहलाता है। यहाँ किसी बिन्दु P की स्थिति को सदिश $\vec{r}$ द्वारा व्यक्त किया गया है। यह सदिश $\vec{r}$ स्थिति सदिश कहलाता है।

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad ...(1)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \quad ...(2)$$

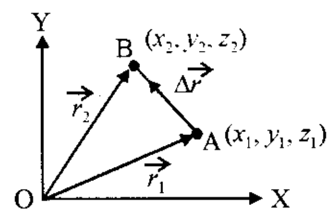


यदि सदिश $\vec{r}$ अक्ष X, Y तथा Z से क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता हो तब

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\cos\beta \\ z = r\cos\gamma \end{array}\right] \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) \\ \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{array}$$

• **विस्थापन (Displacement)**–किसी वस्तु द्वारा निश्चित दिशा में तय की गई दूरी को वस्तु का विस्थापन कहते हैं। जैसे–माना कि कोई वस्तु पूर्व दिशा में 100मीटर दूरी तय करती है। तब वस्तु का विस्थापन 100 मीटर पूर्व की ओर होगा।

• **विस्थापन सदिश (Displacement vector)**–दो स्थिति सदिशों जिनका मूल बिन्दु एक ही हो के अन्तराल को विस्थापन सदिश द्वारा व्यक्त किया जा सकता है अर्थात् कण की प्रारम्भिक स्थिति से अंतिम स्थिति को मिलाने वाला सदिश विस्थापन सदिश कहलाता है। इसे सरल रेखा द्वारा व्यक्त किया जाता है। किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विस्थापन सदिश का परिमाण या तो गतिमान वस्तु की पथ लम्बाई से कम होता है या उसके बराबर।



यहाँ $\vec{r_1}$ व $\vec{r_2}$ किसी कण के स्थिति सदिश है तथा $\Delta\vec{r}$ विस्थापन सदिश है।

$$\vec{r_1} + \Delta\vec{r} = \vec{r_2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} \quad ...(1)$$

स्थिति सदिश $\quad \vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

तथा $\quad \vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

∴ विस्थापन सदिश $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

तथा परिमाण $\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

2.6 सदिशों का संयोजन (Combination of Vectors)

2.6.1. ग्राफीय विधि (Graphical Method)

सदिश राशियों में परिमाण तथा दिशा होने से इनका योग अदिश राशियों से भिन्न होता है। सदिश राशियों का योगफल निम्न बिन्दुओं के आधार पर होता है–

(i) किसी सदिश राशि को समान्तर तथा समान परिमाण में अन्य स्थान

पर विस्थापित किया जा सकता है।

(ii) सदिश राशियों का योगफल समान भौतिक राशियों में ही होता है।

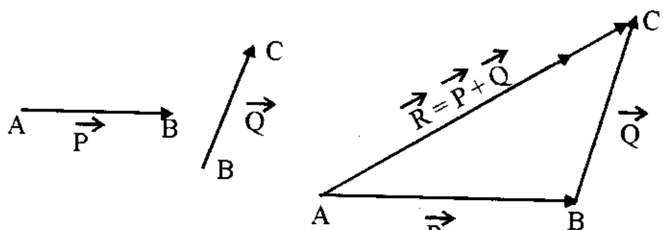
(iii) सदिश राशियों के योगफल से प्राप्त राशि सदिश राशि होती है। जिसे **परिमाणी सदिश** (Resultant vector) कहते हैं।

परिणामी सदिश $\vec{R}$ का परिमाण व दिशा को कुछ नियमों की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है–

(अ) सदिश योग का त्रिभुज नियम
(ब) सदिश योग का समान्तर चतुर्भुज का नियम
(स) सदिश योग का बहुभुज का नियम

(अ) सदिशों के संयोजन का त्रिभुज नियम (Triangle law of vectors addition)

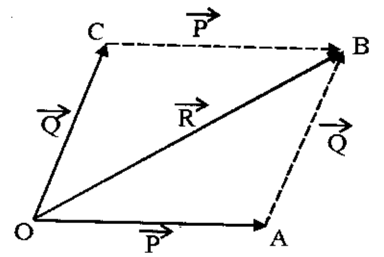
इस नियमानुसार **"जब किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं को क्रमशः दो सदिशों के परिमाण व दिशा के रूप में समान क्रम में निरूपित किया जाता हैं तब विपरीत क्रम में ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा परिणामी सदिश के परिमाण व दिशा को निरूपित करेगी।"** यदि दो सदिश $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ को जोड़ना है तो सर्वप्रथम $\vec{P}$ को उतने ही परिमाण व दिशा में चित्रित कीजिए फिर $\vec{Q}$ की पूँछ को $\vec{P}$ के शीर्ष पर रखकर $\vec{Q}$ के परिमाण के बराबर व $\vec{Q}$ की दिशा में सदिश $\vec{Q}$ को चित्रित कीजिए। अब परिणामी सदिश की पूँछ को $\vec{P}$ की पूँछ से मिलाकर तथा शीर्ष को $\vec{Q}$ के शीर्ष से मिलाकर प्राप्त किया जा सकता है।



चित्र 2.15

(ब) सदिशों के संयोजन का समान्तर चतुर्भुज का नियम (Law of parallelogram of vectors addition)

इस नियमानुसार **"जब किसी समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं को क्रमशः दो सदिशों के परिमाण व दिशा के रूप में व्यक्त किया जाये तब उनके कटान बिन्दु से होकर गुजरने वाला विकर्ण परिणामी सदिश के परिमाण व दिशा को व्यक्त करता है।"** इसमें दोनों सदिशों के पूँछ एक ही बिन्दु पर रखे जाते हैं परिणामी सदिश $\vec{R}$ उन दोनों सदिशों को भुजा मानकर निर्मित समान्तर चतुर्भुज के उस विकर्ण से दिया जाता है जो उनके प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है, सदिशों $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ का परिणामी सदिश $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

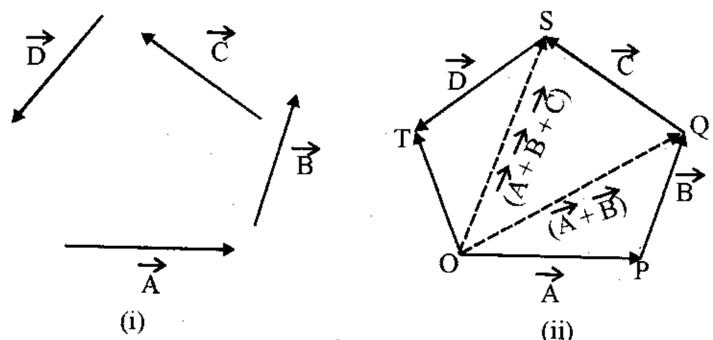


चित्र 2.16

(स) सदिशों के संयोजन का बहुभुज का नियम (Law of polygon of vectors addition)

इस नियम के अनुसार दो से अधिक सदिशों को क्रमशः विस्थापित कर किसी बहुभुज की क्रमागत भुजाओं द्वारा निरूपित किया जाये तो बहुभुज को बन्द करने वाली अन्तिम भुजा परिमाण व दिशा में परिणामी सदिश को विपरीत क्रम में प्रदर्शित करती है।

माना कि चित्रानुसार $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ तथा $\vec{D}$ आदि सदिश हैं इनका परिणामी सदिश ज्ञात करने के लिये सदिश $\vec{B}$ को इसके समान्तर इस प्रकार विस्थापित करते हैं कि इसका प्रारंभिक बिन्दु सदिश $\vec{A}$ के अंतिम बिन्दु से संपाती हो जाये। इसी प्रकार सदिश $\vec{C}$ को भी इसके समान्तर विस्थापित करते हैं ताकि इसका प्रारंभिक बिन्दु सदिश $\vec{B}$ के अंतिम बिन्दु से संपाती हो जाये तथा सदिश $\vec{D}$ को स्वयं के समान्तर विस्थापित करते हैं ताकि सदिश $\vec{D}$ का प्रारंभिक बिन्दु सदिश $\vec{C}$ के अंतिम बिन्दु से संपाती हो जाये।



चित्र 2.17

चित्र (ii) के अनुसार त्रिभुज OPQ में सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$
$$= \vec{A} + \vec{B} \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार त्रिभुज OQS से

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QS} \qquad ...(2)$$

समी. (1) से $\overrightarrow{OQ}$ का मान रखने पर

$$\overrightarrow{OS} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad ...(3)$$

तथा त्रिभुज OST से

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST}$$

समी. (2) से $\overrightarrow{OS}$ का मान रखने पर

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

इस प्रकार यह दो से अधिक सदिशों के योग के लिए बहुभुज का नियम है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. दो असमान सदिशों का परिणामी सदिश शून्य सदिश नहीं हो सकता।

2. तीन समतलीय सदिशों का परिणामी शून्य हो सकता या नहीं भी।

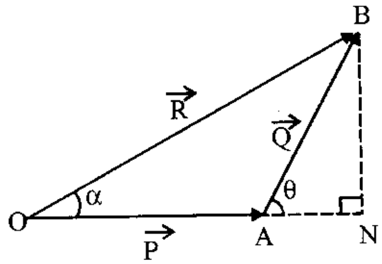
3. तीन असमतलीय सदिशों का परिणामी शून्य नहीं हो सकता है।

2.6.2 गणितीय विधि (Mathematical Method)

दो सदिशों के परिणामी सदिश का परिमाण ज्ञात करना

(To Determine the magnitude of resultant vector of two vectors)

माना कि दो सदिश $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ का परिणामी सदिश $\vec{R}$ है जिसका परिमाण R ज्ञात करना है। $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ के मध्य कोण θ है तथा सदिश $\vec{P}$ व $\vec{R}$ के मध्य कोण α है।



चित्र 2.18

भुजा OA को आगे बढ़ाकर इस पर बिन्दु B से लम्ब डालते हैं। समकोण त्रिभुज ONB से पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$(OB)^2 = (ON)^2 + (NB)^2 \quad ...(1)$$

$\because$ $$ON = OA + AN \quad ...(2)$$

$\therefore$ समी (1) व (2) से

$$(OB)^2 = (OA + AN)^2 + (NB)^2$$

$$\Rightarrow (OB)^2 = (OA)^2 + 2(OA)(AN) + (AN)^2 + (NB)^2 \quad ...(3)$$

समकोण त्रिभुज ANB से

$$(AB)^2 = (AN)^2 + (NB)^2 \quad ...(4)$$

$\because$ $$\cos\theta = \frac{AN}{AB}$$

$\Rightarrow$ $$AN = AB\cos\theta \quad ...(5)$$

$\therefore$ समी.(3), (4) व (5) से

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2 + 2(OA)(AB\cos\theta)$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mathbf{R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}} \quad ...(6)$$

जहाँ θ सदिश $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ के मध्य कोण है।

$$\Rightarrow R = \left(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta\right)^{1/2} \quad ...(7)$$

समी. (6) को **कोज्या का नियम (Law of Cosines)** कहते हैं।

परिणामी सदिश की दिशा का निर्धारण (To Determine the direction of resultant vector)–समकोण त्रिभुज ONB से

$$\tan\alpha = \frac{NB}{ON}$$

$$\tan\alpha = \frac{NB}{OA + AN}$$

$\because$ $$\sin\theta = \frac{NB}{AB}$$

$\Rightarrow$ $$NB = AB\sin\theta \quad ...(8)$$

$$\tan\alpha = \frac{AB\sin\theta}{P + AB\cos\theta}$$

$$= \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}\right) \quad ...(9)$$

विशेष परिस्थितियाँ (Special cases)

(i) जब $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ एक ही दिशा में हो तो $\theta = 0°$

$\therefore$ समी. (7) से

$$R = \left(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°\right)^{1/2}$$

$$= \left(P^2 + Q^2 + 2PQ\right)^{1/2}$$

$$= (P+Q)^{2\times 1/2} = (P+Q)$$

$$\Rightarrow R = P + Q$$

समी. (9) से

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin 0°}{P + Q\cos 0°}\right)$$

$$= \tan^{-1}(0°) = 0$$

$$\therefore \alpha = 0$$

(ii) जब $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ परस्पर लम्बवत् दिशा में हो तो $\theta = 90°$

$\therefore$ समी. (7) से

$$R = \left(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90°\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow R = \left(P^2 + Q^2\right)^{1/2}$$

समी. (9) से

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

(iii) जब $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ परस्पर विपरीत दिशा में हो तो $\theta = 180°$

$\therefore$ समी. (7) से

$$R = \left(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180°\right)^{1/2}$$

$$R = \left(P^2 + Q^2 - 2PQ\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R = (P-Q)^{2\times 1/2} = (P-Q)$$

$$\Rightarrow R = (P-Q)$$

समी. (9) से $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin 180°}{P + Q\cos 180°}\right)$$

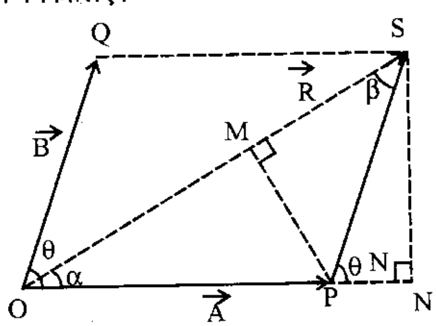
$$= \tan^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 0$$

तब $\alpha = 0°$ जब $P > Q$

$\alpha = 180°$ जब $P < Q$

उदा.1.चित्र में दिखाए गए दो सदिशों A तथा B के बीच का कोण θ है। इनके परिणामी सदिश का परिमाण तथा दिशा उनके परिमाणों तथा θ के पद में निकालिए।



चित्र 2.19

हल– चित्र में सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ को क्रमशः समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं (adjacent sides) OP तथा OQ द्वारा व्यक्त किया गया है। सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण θ है एवं सदिश $\vec{A}$ व $\vec{R}$ के मध्य कोण α है।

सदिश योग के समान्तर चतुर्भुज नियम से

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

समकोण त्रिभुज ONS से

$$(OS)^2 = (ON)^2 + (NS)^2$$

$\Rightarrow \quad (OS)^2 = (OP + PN)^2 + (NS)^2$

$\Rightarrow \quad (OS)^2 = (OP)^2 + (PN)^2 + 2(OP)(PN) + (NS)^2$

$\Rightarrow \quad (OS)^2 = (OP)^2 + (PN)^2 + (NS)^2 + 2(OP)(PN) \quad ...(1)$

समकोण त्रिभुज PNS से

$$(PS)^2 = (PN)^2 + (NS)^2 \quad ...(2)$$

तथा $\cos\theta = \frac{PN}{PS}$

$\therefore \quad PN = PS\cos\theta \quad ...(3)$

समी. (1), (2) व (3) से

$$(OS)^2 = (OP)^2 + (PS)^2 + 2(OP)(PS\cos\theta)$$

$\Rightarrow \quad R^2 = A^2 + B^2 + 2(A)(B\cos\theta)$

$\Rightarrow \quad R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad ...(4)$

समी. (4) को **कोज्या-नियम** कहते हैं।

समकोण त्रिभुज ONS से

$$\sin\alpha = \frac{NS}{OS} = \frac{NS}{R}$$

$\Rightarrow \quad NS = R\sin\alpha \quad ...(5)$

समकोण त्रिभुज PNS से

$$\sin\theta = \frac{NS}{PS} = \frac{NS}{B}$$

$\Rightarrow \quad NS = B\sin\theta \quad ...(6)$

$\therefore$ समी. (5) व (6) से

$$R\sin\alpha = B\sin\theta$$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad ...(7)$

इसी प्रकार $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

$\Rightarrow \quad \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad ...(8)$

$\therefore$ समी.(7) व (8) से

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad ...(9)$$

समकोण त्रिभुज ONS से

$$\tan\alpha = \frac{NS}{ON} = \frac{NS}{OP + PN}$$

$$= \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \quad ...(10)$

समी. (9) को **ज्या-नियम** कहते है।

उदा.2. दो समान परिमाण के सदिशों के मध्य का कोण कितना होगा यदि उनके परिणामी सदिश का परिमाण भी उनके परिमाण के तुल्य हो? (पुस्तक का उदाहरण 2.1)

हल–परिणामी सदिश का परिमाण

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$$

माना कि $P = Q = R = a$

$\therefore \quad a = \sqrt{a^2 + a^2 + 2a^2\cos\theta}$

$\Rightarrow \quad a^2 = a^2 + a^2 + 2a^2\cos\theta$

$\Rightarrow \quad 2a^2\cos\theta = -a^2$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ$

$\therefore \quad \theta = 120^\circ$

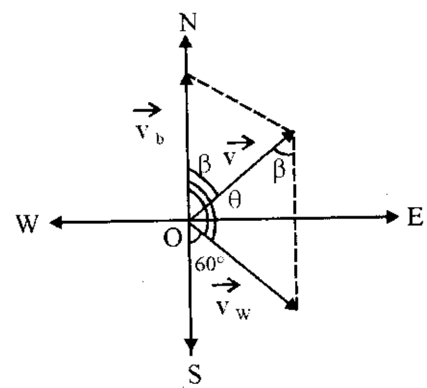
अर्थात् दोनों सदिशों के मध्य कोण 120° होगा।

उदा.3. एक मोटरबोट उत्तर दिशा की ओर 25 km/h के वेग से गतिमान है। इस क्षेत्र में जल-धारा का वेग 10 km/h है। जल-धारा की दिशा की दक्षिण से पूर्व की ओर 60° पर है। मोटरबोट का परिणामी वेग निकालिए।

हल– दिया गया है ; $v_b = 25 \frac{\text{किमी}}{\text{घंटा}}$

$$v_W = 10 \frac{\text{किमी}}{\text{घंटा}}$$

$$\theta = 120^\circ$$



चित्र 2.20

कोज्या नियम से मोटर बोट का परिणामी वेग

$$v = \sqrt{v_b^2 + v_w^2 + 2v_b v_W\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(25)^2 + (10)^2 + 2\times 25\times 10\times\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{625 + 100 + 500\times\left(\frac{-1}{2}\right)} \qquad \left[\because \cos 120^\circ = \frac{-1}{2}\right]$$

$$= \sqrt{625 + 100 - 250}$$

$$= 21.8 \frac{\text{किमी}}{\text{घंटा}}$$

$\vec{v}$ की दिशा का निर्धारण ज्या नियम से

$$\frac{v}{\sin\theta} = \frac{v_W}{\sin\beta}$$

$\Rightarrow \quad \sin\beta = \left(\frac{v_W}{v}\right)\sin\theta = \left(\frac{10}{21.8}\right)\sin 120^\circ$

$$= \frac{10}{21.8}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.397$$

$$\beta = \sin^{-1}(0.397) = 23.4^\circ$$

उदा. 4. एक कण पर 3N व 4N के दो बल परस्पर लम्बवत् कार्यरत है। परिणामी बल का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए।
(पुस्तक का उदाहरण 2.2)

हल- दिया गया है- $F_1 = 3$ न्यूटन, $F_2 = 4$ न्यूटन, $\theta = 90°$

$\therefore$ परिणामी बल का परिमाण

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 90°}$$
$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16}$$
$$= 5 \text{ न्यूटन}$$

यदि परिणामी बल $\vec{F}$ का बल $\vec{F_1}$ के साथ कोण α हो तो

$$\tan\alpha = \frac{F_2 \sin 90°}{F_1 + F_2\cos 90°} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{4}{3} = 1.33$$
$$\alpha = \tan^{-1}(1.33) = 53.1°$$

2.7 सदिशों का वियोजन (Resolution of Vectors)

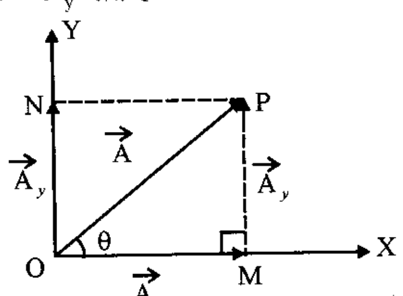
सामान्यत: किसी सदिश को अनेक स्वैच्छिक घटकों में वियोजित किया जा सकता है। सदिशों का वियोजन सदिश योग का विपरीत होता है। सदिश के वियोजन से प्राप्त घटकों का योग करने पर पुन: वही सदिश प्राप्त हो जाता है। यहाँ हम सदिश वियोजन के लिए कार्तीय निर्देशांक पद्धति का उपयोग कर सदिश का द्विविमीय तथा त्रिविमीय वियोजन का अध्ययन करेंगे।

किसी सदिश के वियोजन की निम्न दो विधियाँ है-
(i) द्विविमीय (समतल) निर्देश तंत्र में वियोजन
(ii) त्रिविमीय निर्देश तंत्र मे वियोजन

(i) किसी सदिश का द्विविमीय निर्देश तंत्र में वियोजन (Two dimensional resolution of a vector)

माना कि किसी सदिश $\vec{A}$ का द्विविमीय निर्देशांक पद्धति में वियोजन करना है। जिसे चित्र में परिमाण व दिशा में रेखा OP द्वारा प्रदर्शित किया गया है। जो समतल $X-Y$ में स्थित है। यहाँ सदिश $\vec{A}$ तथा X अक्ष के मध्य कोण θ है। सदिश $\vec{A}$ के अन्तिम बिन्दु से क्रमशः X व Y अक्ष पर लम्ब PM व PN डालते हैं।

माना सदिश $\vec{A}$ का X अक्ष व Y अक्ष के अनुदिश घटक क्रमशः $\overrightarrow{OM} = \vec{A}_x$ व $\overrightarrow{ON} = \vec{A}_y$ लेते हैं जो समकोणीय घटक कहलाते हैं।



चित्र 2.21

समकोण त्रिभुज OMP में
सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \qquad ...(1)$$

यदि $\hat{i}$ व $\hat{j}$ क्रमशः X व Y अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश हो तो

$$\vec{A}_x = A_x\hat{i}, \vec{A}_y = A_y\hat{j}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad ...(2)$$

घटक A_x व A_y को $\vec{A}$ के परिमाण तथा उसके द्वारा X अक्ष के साथ बनने वाले कोण θ के पदों में

ΔOPM में $\frac{A_x}{A} = \cos\theta$

$$\therefore \quad A_x = A\cos\theta \qquad ...(3)$$

इसी प्रकार $\frac{A_y}{A} = \sin\theta$

$$\therefore \quad A_y = A\sin\theta \qquad ...(4)$$

अत: किसी सदिश का घटक कोण θ पर निर्भर करता है तथा वह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

सदिश $\vec{A}$ का परिमाण A ज्ञात करना-

समीकरण (3) व (4) का वर्ग करके जोड़ने पर

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad ...(5)$$

दिशा ज्ञात करना,
$\therefore$ समकोण त्रिभुज OMP में

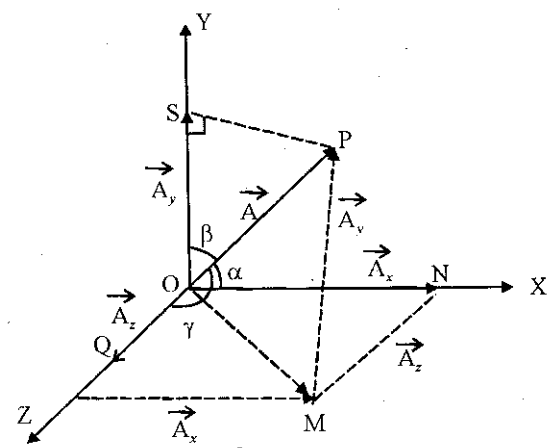
$$\tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{A_y}{A_x}$$
$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \qquad ...(6)$$

(ii) किसी सदिश का त्रिविमीय निर्देश तंत्र में वियोजन (Three dimensional resolution of a vector)

माना कि किसी सदिश $\vec{A}$ का त्रिविमीय निर्देशांक पद्धति में वियोजन करता है। सदिश $\vec{A}$ के X, Y व Z अक्षों के अनुदिश घटक क्रमशः $\vec{A_x}, \vec{A_y}$ व $\vec{A_z}$ लेते हैं।

सदिश $\vec{A}$ के X,Y तथा Z अक्षों के अनुदिश घटक प्राप्त करने के लिए सदिश $\vec{A}$ के अन्तिम बिन्दु से X-Z तल में लम्ब PM तथा Y अक्ष पर लम्ब PS डालते हैं।

इस प्रकार सदिश $\vec{A}$ के दो घटक सदिश $\overrightarrow{OS}$ तथा $\overrightarrow{OM}$ प्राप्त होते हैं।



चित्र 2.22

त्रिभुज OMP से सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \quad ...(1)$$

त्रिभुज ONM से $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$

∴ समी. (1) से

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z}$$

$$\because \quad \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{A_y}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z} \quad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad ...(3)$$

सदिश $\overrightarrow{A}$ का परिमाण A ज्ञात करना–त्रिभुज OMP से पाइथागोरस प्रमेय से

$$(OP)^2 = (OM)^2 + (MP)^2 \quad ...(4)$$

त्रिभुज ONM से पाइथागोरस प्रमेय से

$$(OM)^2 = (ON)^2 + (NM)^2$$

$$\Rightarrow \quad (OM)^2 = A_x^2 + A_z^2$$

समी.(4) से $(OP)^2 = A_x^2 + A_z^2 + (MP)^2$

$$(OP)^2 = A_x^2 + A_z^2 + A_y^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = A_x^2 + A_z^2 + A_y^2 \quad ...(5)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad ...(6)$$

माना कि सदिश $\overrightarrow{A}$, X अक्ष के साथ α कोण, Y अक्ष के साथ β कोण तथा Z अक्ष के साथ γ कोण बनाता है।

Δ OS P से

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A}$$

$$\Rightarrow \quad A_y = A\cos\beta \quad ...(7)$$

इसी प्रकार $A_x = A\cos\alpha \quad ...(8)$

$$A_z = A\cos\gamma \quad ...(9)$$

यहाँ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ तथा $\cos\gamma$ सदिश की दिक्कोज्याएँ (direction cosines) कहलाती हैं। किसी सदिश की दिक्कोज्या उन कोणों की कोज्याएँ हैं जो कोई सदिश क्रमश: X, Y तथा Z अक्ष से बनाता है।

समी.(5) में A_x, A_y व A_z के मान रखने पर

$$A^2 = A^2\cos^2\alpha + A^2\cos^2\gamma + A^2\cos^2\beta$$

$$A^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma + \cos^2\beta)$$

या $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad ...(10)$

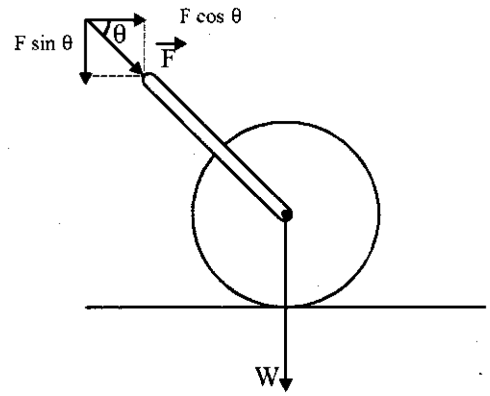
अर्थात् किसी सदिश की दिक्कोज्याओं के वर्ग का योगफल सदैव इकाई होता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

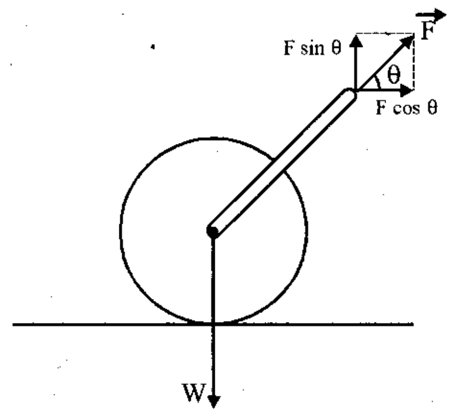
सदिश वियोजन का अनुप्रयोग–रौलर (Roller) को खींचना धकेलने की अपेक्षा अधिक सरल है–

बलों के सदिश वियोजन का उदाहरण जमीन (जैसे क्रिकेट का पिच या घास का मैदान) को समतल करने वाले रौलर में मिलता है। इस रौलर को दो प्रकार से काम में लाया जा सकता है– रौलर को धकेलकर अथवा खींचकर। इसमें रौलर को धकेलने की अपेक्षा उसे खींचना आसान है। इस बात को निम्न प्रकार समझाया जा सकता है–

माना रौलर का भार W है। यह पृथ्वी को W भार के बल से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर दबायेगा। इसके फलस्वरूप पृथ्वी भी रौलर पर प्रतिक्रिया बल R लगायेगी जो ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होगा। Rका मान W के बराबर होगा। यदि रौलर को खींचने या धकेलने वाला बल $\vec{F}$ क्षैतिज दिशा से θ कोण बनाता है। तब



चित्र (i) रौलर को धकेलना



चित्र (ii) रौलर को खींचना

(i) चित्र (i) से स्पष्ट है कि रौलर को धकेलने पर रौलर का प्रभावी भार W से बढ़कर $(W + F\sin\theta)$ हो जाता है।

(ii) चित्र (ii) से स्पष्ट है कि रौलर को खींचने पर रौलर का प्रभावी भार W से घटकर $(W - F\sin\theta)$ हो जाता है।

इस प्रकार यदि रौलर को परिमाण तथा दिशा में समान बल लगाकर खींचा या धकेला जाये तो रौलर पर आगे की ओर कार्य करने वाला बल $F\cos\theta$ दोनों स्थितियों में समान रहता है तथा धकेलने पर प्रभावी भार $F\sin\theta$ से बढ़ जाता है तथा खींचने पर प्रभावी भार $F\sin\theta$ से घट जाता है।

उदा. 5. सदिश $\vec{A} = 5\hat{i} + 12\hat{j}$ का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 2.3)

हल–यदि सदिश $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ हो तो सदिश $\vec{A}$ का परिमाण $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ तथा सदिश $\vec{A}$ का X- अक्ष के साथ बनाया गया कोण θ हो तो

$$\tan\theta = \left(\frac{A_y}{A_x}\right) \text{ होता है।}$$

अतः दिये गये सदिश $\vec{A}$ के लिए $A_x = 5$ तथा $A_y = 12$

∴ सदिश $\vec{A}$ का परिमाण

$$A = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25+144}$$
$$= \sqrt{169} = 13$$

तथा $\tan\theta = \frac{12}{5} = 2.4$

$$\theta = \tan^{-1}(2.4) = 67.5^\circ$$

उदा.6.यदि $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j}, \vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ है तो $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल–
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = \hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$= -5\hat{j} + 3\hat{k}$$

परिमाण $= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9}$

$= \sqrt{34} = 5.83$ न्यूटन

उदा. 7. यदि सदिश $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ हो तो सदिश $\vec{A}$ का परिमाण व इसकी दिशा में एकांक सदिश ज्ञात कीजिए।
(पुस्तक का उदाहरण 2.4)

हल– दिये गये सदिश की सदिश $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

तथा $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ से

तुलना करने पर $A_x = 3, A_y = -2, A_z = 5$

∴ दिये गये सदिश $\vec{A}$ का परिमाण

$$A = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

सदिश $\vec{A}$ की दिशा में एकांक सदिश

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{38}}$$

उदा.8. एक वस्तु पर तीन बल $\vec{A}, \vec{B}$ तथा $\vec{C}$ इस प्रकार लग रहे हैं कि वस्तु सन्तुलित अवस्था में हैं। यदि $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{C}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल– सन्तुलित अवस्था में

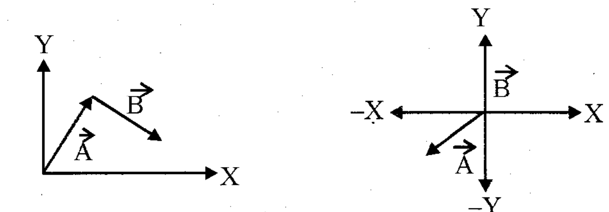
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$$
$$\Rightarrow 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + \vec{C} = 0$$
$$\Rightarrow 3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \vec{C} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{C} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}$$
$$C = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 25 + 36} = \sqrt{70}$$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. दिये गये चित्र (i) में–

(i) $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के y- घटक के क्या चिन्ह हैं ?

(ii) $(\vec{A} + \vec{B})$ के x-घटक तथा y-घटक के क्या चिन्ह हैं?



(i) (ii)

2. दिये गये चित्र (ii) में (a) $\vec{A}$ तथा (b) $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ के x-घटक तथा y-घटक के क्या चिन्ह हैं?

3. क्षैतिज से 30° कोण पर कार्यरत एक बल का ऊर्ध्व घटक 200 न्यूटन है, आरोपित बल का मान बताइये।

4. $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ यह सम्बन्ध कब सही है?

5. यदि $\vec{A} = 5\hat{i} - 4\hat{j}$ तथा $\vec{B} = 7.5\hat{i} + 6\hat{j}$, तब क्या हम $\vec{B} = k\vec{A}$ लिख सकते हैं ? क्या हम $\frac{\vec{B}}{\vec{A}} = k$ कह सकते हैं?

6. यदि $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, तो $\vec{B}$ के दो ऐसे मान लिखिये जिसमें $\vec{A} \neq \vec{B}$ लेकिन $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ हो।

7. 5(6 मीटर/सेकण्ड^2) उत्तर तथा 5 किग्रा (6 मीटर/सेकण्ड^2) उत्तर में क्या अन्तर है ?

8. सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ का परिमाण लिखिए।

9. किसी सदिश की दिक्कोज्याओं के वर्गों का योगफल कितना होता है?

उत्तरमाला

1. $\vec{A}$ का y-घटक धनात्मक, $\vec{B}$ का y-घटक ऋणात्मक,

(ii) $\vec{A} + \vec{B}$ का x-घटक धनात्मक, A+B का y-घटक धनात्मक

2. (a) $\vec{A}$ का x-घटक ऋणात्मक, $\vec{A}$ का y-घटक ऋणात्मक

(b) $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ का y-घटक ऋणात्मक व x-घटक ऋणात्मक

3. 400 न्यूटन **4.** $\vec{A} \perp \vec{B}$

5. नहीं, नहीं

6. $\vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$, $\vec{B} = \sqrt{20}\,\hat{i} + \sqrt{5}\,\hat{j}$

7. (i) 5 (6 मीटर/सेकण्ड^2) = 30 मीटर/सेकण्ड^2 (त्वरण)

(ii) 5 किग्रा (6 मीटर/सेकण्ड^2) = 30 न्यूटन (बल)

8. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **9.** 1

2.8 सदिशों का गुणनफल (Product of Vectors)

सदिश राशियों में परिमाण व दिशा दोनों होने के कारण सदिशों का बीजगणितीय गुणनफल नहीं होता है। सदिश राशियों के गुणनफल से प्राप्त राशि सदिश भी हो सकती है और अदिश भी हो सकती है।

सदिश राशियों का गुणनफल निम्न प्रकार का होता है–

(1) अदिश गुणनफल (2) सदिश गुणनफल

(1) अदिश गुणनफल (बिन्दु गुणनफल, डॉट गुणनफल) (Scalar Product)

परिमाण तथा उनके बीच के कोण की कोज्या (cosine) के गुणनफल के बराबर होता है।

माना कि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ दो सदिश है जिनके परिमाण A व B हैं। तब इनका अदिश गुणनफल $\vec{A}.\vec{B}$ (इसे $\vec{A}$ डॉट $\vec{B}$ पढ़ते हैं) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \quad ...(1)$$

यहाँ θ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण है।

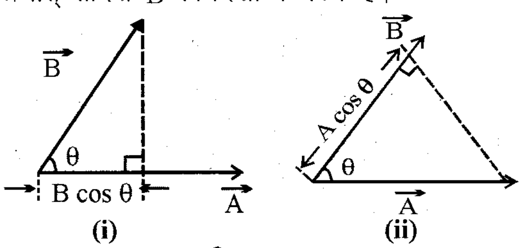
दो सदिशों के अदिश गुणनफल से अदिश राशि प्राप्त होती है।

अदिश गुणनफल की घटक के रूप में परिभाषा-

$$\vec{A}.\vec{B} = A(B\cos\theta) = B(A\cos\theta)$$

चित्र (i) के अनुसार $B\cos\theta$ सदिश $\vec{B}$ का सदिश $\vec{A}$ पर प्रक्षेप है अर्थात् सदिश $\vec{A}$ की दिशा में घटक है।

इसी प्रकार चित्र (ii) के अनुसार $A\cos\theta$ सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\vec{B}$ पर प्रक्षेप है अर्थात् सदिश $\vec{B}$ की दिशा में घटक है।



चित्र 2.23

अतः किसी एक सदिश का परिमाण एवं दूसरे सदिश का प्रथम सदिश की दिशा में प्रक्षेप (घटक) के गुणनफल को अदिश गुणनफल कहते हैं।

अदिश गुणनफल के उदाहरण–

(i) बल ($\vec{F}$) तथा विस्थापन ($\vec{S}$) का अदिश गुणनफल कार्य होता है

अर्थात् कार्य $W = \vec{F}.\vec{S}$

कार्य एक अदिश राशि है।

(ii) बल ($\vec{F}$) तथा वेग ($\vec{v}$) का अदिश गुणनफल तात्क्षणिक शक्ति होती है

अर्थात् तात्क्षणिक शक्ति $P = \vec{F}.\vec{v}$

शक्ति एक अदिश राशि है।

(iii) विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ($\vec{E}$) तथा क्षेत्रफल सदिश ($\vec{A}$) का अदिश गुणनफल पृष्ठ से पारित विद्युत फ्लक्स होता है

अर्थात् $\phi_E = \vec{E}.\vec{A}$

(iv) चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ($\vec{B}$) तथा क्षेत्रफल सदिश ($\vec{A}$) का अदिश गुणनफल पृष्ठ से पारित चुम्बकीय फ्लक्स होता है

अर्थात् $\phi_B = \vec{B}.\vec{A}$

अदिश गुणनफल की विशेषताएँ–

(i) क्रम विनिमय गुणधर्म–

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$= BA\cos\theta = \vec{B}.\vec{A} \quad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

अर्थात् दो सदिशों का अदिश गुणनफल क्रम विनिमय गुणधर्म का पालन करता है।

(ii) बंटन गुणधर्म (वितरण नियम)–

अर्थात् $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

(iii) समान्तर सदिशों का अदिश गुणनफल–

जब दो सदिश समान्तर हो तो $\theta = 0°$, $\vec{A} \parallel \vec{B}$

∴ समी. (1) से

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 0° = AB$$

(iv) समान (तुल्य) सदिशों का अदिश गुणनफल-

सदिश समान होने पर $\vec{A} = \vec{B}$

तो $\theta = 0°$

$$\vec{A}.\vec{A} = AA\cos 0° = AA = A^2$$
$$\vec{B}.\vec{B} = BB\cos 0° = BB = B^2$$

(v) लम्बवत् (समकोणिक) सदिशों का अदिश गुणनफल–

जब दो सदिश लम्बवत् हो तो $\theta = 90°$, $\vec{A} \perp \vec{B}$

∴ समी. (1) से

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90° = 0$$

(vi) एकांक सदिशों का अदिश गुणनफल–

$$\hat{i}.\hat{i} = 1\times 1\times\cos 0° = 1\times 1\times 1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$
$$\hat{i}.\hat{j} = 1\times 1\times\cos 90° = 0$$
$$\Rightarrow \quad \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$$

(viii) दो सदिशों का अदिश गुणनफल घटकों के रूप में–माना कि

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$\therefore \quad \vec{A}.\vec{B} = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$$

अदिश गुणनफल से सम्बन्धित अन्य महत्वपूर्ण बिन्दु

1. दो समान्तर सदिशों का अदिश गुणनफल दोनों सदिशों के परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है तथा यह मान अधिकतम होता है।

$$\vec{A}.\vec{B} = AB \qquad \because \theta = 0°$$

2. दो तुल्य सदिशों का अदिश गुणनफल किसी एक सदिश के परिमाण के वर्ग के बराबर होता है। इसे स्वःअदिश गुणनफल भी कहते हैं।

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 \quad \because \theta = 0° \text{ तथा } \vec{A} = \vec{B}$$
$$\vec{B}.\vec{B} = B^2$$

3. दो लम्बवत् सदिशों का अदिश गुणनफल सदैव शून्य होता है।

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \qquad \because \theta = 90°$$

दो अशून्य सदिश परस्पर लम्बवत् हों तो उनका अदिश गुणनफल शून्य होता है यदि दो अशून्य सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य हो तो वे परस्पर लम्बवत् होते हैं।

उदाहरण–किसी वस्तु के समतल पर विस्थापन में गुरूत्वाकर्षण बल

द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। किसी वृत्ताकार पथ पर परिभ्रमण करते हुए कण पर अभिकेन्द्रीय बल द्वारा कोई कार्य नहीं होता है।

4. $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

तब स्वः अदिश गुणनफल

$$\vec{A}.\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$
$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

5. दो सदिश तथा उनका अदिश गुणनफल ज्ञात होने पर सदिशों के मध्य कोण ज्ञात कर सकते हैं।

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

6. इसी प्रकार एक सदिश का दूसरे की दिशा में घटक

$$A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$$

2. सदिश गुणनफल (क्रॉस गुणनफल, वज्र गुणनफल) (Vector product)

दो सदिश राशियों का सदिश गुणनफल उन दोनों सदिशों के परिमाण तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine). के गुणनफल के बराबर होता है तथा दिशा दोनों सदिशों के तल के लम्बवत् होती है।

माना कि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ है जिनके परिमाण A तथा B भी हैं।

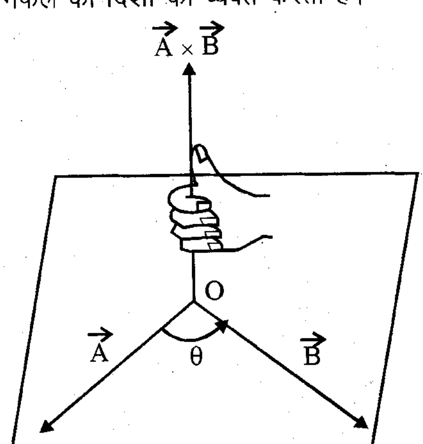
तब इनका सदिश गुणनफल $\vec{A} \times \vec{B}$ (इसे $\vec{A}$ क्रास $\vec{B}$ पढ़ते हैं) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n} \qquad ...(1)$$

यहाँ θ, सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण है। $\hat{n}$ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के तल के लम्बवत् एकांक सदिश है। दो सदिशों के सदिश गुणनफल से सदिश राशि प्राप्त होती है तथा $\theta < 180°$ अर्थात् θ न्यून कोण हैं।

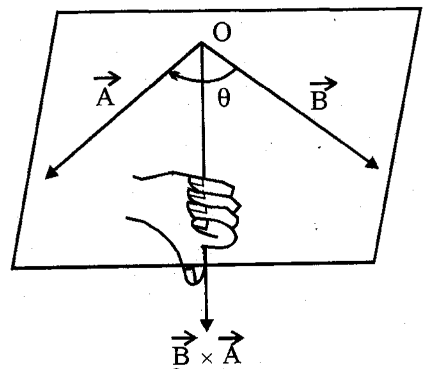
दो सदिशों के सदिश गुणनफल की दिशा का निर्धारण–

(i) दाहिने हाथ का नियम–इस नियम के अनुसार यदि दाहिने हाथ की अंगुलियों को सदिश $\vec{A}$ से $\vec{B}$ की ओर मोड़ा जाये तब सीधा अंगूठा उनके सदिश गुणनफल की दिशा को व्यक्त करता है।



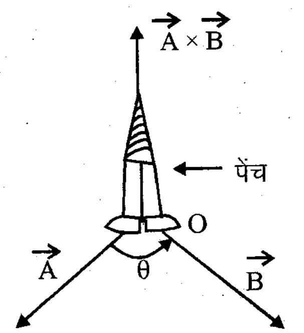
चित्र 2.24

इसके विपरीत दाहिने हाथ की अंगुलियों को सदिश $\vec{B}$ से $\vec{A}$ की ओर मोड़ा जाये तब सीधा अंगूठा उनके सदिश गुणनफल $\vec{B} \times \vec{A}$ की दिशा को व्यक्त करता है।



चित्र 2.25

(ii) दक्षिणावर्ती पेंच नियम–इस नियम के अनुसार यदि दक्षिणावर्ती पेंच (Right Handed Screw) की अक्ष को सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ से पारित तल के लम्बवत् रखकर पेंच को सदिश $\vec{A}$ से सदिश $\vec{B}$ की ओर घुमाने पर पेंच जिस दिशा में रेखीय दूरी तय करता है वह $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा होगी।



चित्र 2.26

सदिश गुणनफल के उदाहरण–

(a) बल आघूर्ण–स्थिति सदिश $\vec{r}$ तथा बल $\vec{F}$ का सदिश गुणनफल बल आघूर्ण $\vec{\tau}$ के बराबर होता है।

बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ इसे τ (tau) पढ़ते हैं।

(b) लॉरेन्ज बल–यदि q आवेश $\vec{v}$ वेग से चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ में गतिमान हो तो उस पर क्षेत्र $\vec{B}$ के कारण बल

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

(c) त्रिभुज का क्षेत्रफल–यदि त्रिभुज की आधार भुजा $\vec{A}$ व अन्य भुजा $\vec{B}$ हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$

(d) कोणीय संवेग–स्थिति सदिश $\vec{r}$ तथा रेखीय संवेग $\vec{p}$ का सदिश गुणनफल कोणीय संवेग के बराबर होता है।

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(e) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल–यदि समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजायें क्रमशः $\vec{L}$ व $\vec{B}$ हो तो

क्षेत्रफल $\vec{A} = \vec{L} \times \vec{B}$

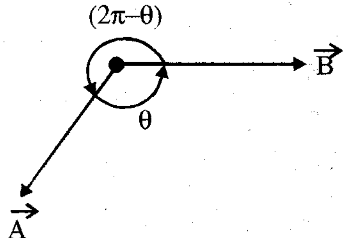
(f) रेखीय वेग $\vec{v}$ तथा कोणीय वेग $\vec{\omega}$ में सम्बन्ध–

घूर्णन कर रही वस्तु का रेखीय वेग $\vec{v}$ कोणीय वेग $\vec{\omega}$ तथा स्थिति सदिश $\vec{r}$ के सदिश गुणनफल के तुल्य होता है अर्थात्

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

सदिश गुणनफल की विशेषताएँ–

(i) क्रम विनिमय गुणधर्म–माना कि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ है तब इनका सदिश गुणनफल



चित्र 2.27

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \hat{n} \quad ......(1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} \times \vec{A} = BA \sin(2\pi - \theta) \, \hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} \times \vec{A} = AB(-\sin\theta) \, \hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} \times \vec{A} = -AB \sin\theta \, \hat{n}$$

∴ समी. (1) से

$$\Rightarrow \quad \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad -\vec{B} \times \vec{A} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad ...(2)$$

अर्थात् $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

अर्थात् दो सदिशों का सदिश गुणनफल क्रम विनिमय गुणधर्म का पालन नहीं करता है।

(ii) बंटन-गुणधर्म (वितरण नियम)

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

(iii) समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल–

यदि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर समांतर हो तो $\theta = 0°$, $\vec{A} \parallel \vec{B}$

$$\therefore \quad \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 0° \, \hat{n} = 0$$

(iv) समान (तुल्य) सदिशों का सदिश गुणनफल–

सदिश समान होने पर

$\vec{A} = \vec{B}$ तो $\theta = 0°$

$$\vec{A} \times \vec{A} = (A.\, A \sin 0°) = 0$$

$$\vec{B} \times \vec{B} = (B.\, B \sin 0°) = 0$$

(v) लम्बवत् सदिशों का सदिश गुणनफल–

यदि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् हो तो $\theta = 90°$, $\vec{A} \perp \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 90° \, \hat{n} = AB \, \hat{n}$$

(vi) एकांक सदिशों का सदिश गुणनफल–

$$\hat{i} \times \hat{i} = 1 \times 1 \times \sin 0° \, \hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$\hat{i} \times \hat{j} = (1 \times 1 \times \sin 90°) \hat{k} = \hat{k} \qquad \Rightarrow \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = (1 \times 1 \times \sin 90°) \hat{i} = \hat{i} \qquad \Rightarrow \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

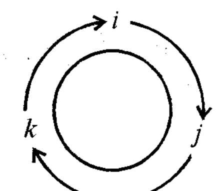
$\hat{k} \times \hat{i} = (1 \times 1 \times \sin 90°) \hat{j} = \hat{j} \qquad \Rightarrow \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\therefore \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$



चित्र 2.28

यदि $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ चक्रीय क्रम (दक्षिणावर्त) में आते हैं तो सदिश गुणनफल धनात्मक और यदि चक्रीय क्रम में नहीं आते हैं (वामावर्त) तो सदिश गुणनफल ऋणात्मक होगा।

(vii) सदिश गुणनफल घटकों के रूप में–माना कि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ निम्न प्रकार है–

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad ...(1)$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \quad ...(2)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

सदिश गुणनफल से सम्बन्धित अन्य महत्वपूर्ण बिन्दु

1. $\vec{A} \times \vec{B}$ एवं $\vec{B} \times \vec{A}$ के परिमाण समान ($AB \sin\theta$) हैं और ये दोनों ही उस तल के अभिलम्बवत् हैं जिसमें A व B स्थित हैं परन्तु दोनों ही विपरीत दिशा में होते हैं।

अतः $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

2. दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य सदिश होता है जिसका परिमाण शून्य होता है।

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}, \quad \because \theta = 0°$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = 0$$

3. दो तुल्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य सदिश होता है। जिसका परिमाण शून्य होता है।

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0 \quad \because \theta = 0° \text{ तथा } \vec{A} = \vec{B}$$

$\Rightarrow \quad |\vec{A}\times\vec{A}| = 0$

$\vec{B}\times\vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad |\vec{B}\times\vec{B}| = 0$

4. दो सदिशों का क्रॉस गुणनफल शून्य होगा यदि उनमें से कोई सदिश शून्य होगा या सदिश समान्तर हों अर्थात् $\theta = 0°$

$\vec{A}\times\vec{B} = 0$ जब $\vec{A} = 0$ या $\vec{B} = 0$

या $\vec{A}$ व $\vec{B}$ समान्तर हैं।

5. यदि दो सदिश परस्पर लम्बवत् हो तो परिणामी दिशा

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n}$

जब $\theta = 90°, \sin 90° = 1$

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\hat{n}$

अतः एकांक सदिश $\hat{n} = \dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{AB}$

6. $\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A})$

$\Rightarrow \quad \vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{A} = 0$

इसी प्रकार $\vec{A}\times\vec{B} + \vec{B}\times\vec{C} + \vec{C}\times\vec{A} = 0$

7. सदिश गुणनफल से प्राप्त परिणामी राशि सदिश राशि होती है जो प्रत्येक सदिश के लम्बवत् होती है। चाहे वे दोनों सदिश लम्बवत् हों या नहीं।

उदा.9. बल $\vec{F} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ तथा विस्थापन $\vec{d} = 5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करो। $\vec{F}$ का $\vec{d}$ पर प्रक्षेप भी ज्ञात करो।

हल–

$\vec{F} = 3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$

$\vec{d} = 5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{F}\cdot\vec{d}}{Fd}$

अतः $\vec{F}\cdot\vec{d} = (3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})\cdot(5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})$
$= 15+16-15$
$= 16$ मात्रक

$F = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} = \sqrt{3^2+4^2+(-5)^2} = \sqrt{50}$ मात्रक

$d = \sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2} = \sqrt{(5)^2+(4)^2+(3)^2} = \sqrt{50}$ मात्रक

अतः $\cos\theta = \dfrac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{16}{50} = 0.32$

$\theta = \cos^{-1}(0.32)$

F का d पर प्रक्षेप $= F\cos\theta = \sqrt{50}\times\dfrac{16}{\sqrt{50}}$

$= \dfrac{16}{\sqrt{50}}$

उदा. 10. यदि चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B} = (\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ तथा क्षेत्रफल $\vec{A} = (-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ हो तो निर्गत चुम्बकीय फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 2.5)

हल– $\because$ चुम्बकीय फ्लक्स $\phi = \vec{B}\cdot\vec{A}$

$\phi = (\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})\cdot(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

$= -1+2+2 = 3$ मात्रक

उदा. 11. दो सदिशों $\vec{A} = (3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})$ एवं $\vec{B} = (-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})$ के अदिश एवं सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल–

$\vec{A} = 3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$

$\vec{B} = -2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})$
$= -6-4-15$
$= -25$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}[12-5]+\hat{j}[-10+9]+\hat{k}[3-8]$

$= 7\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k}$

जबकि $\vec{B}\times\vec{A} = -7\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$

उदा. 12. एक रेखीय संवेग $\vec{p} = (\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})\text{kg}\times\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ किसी बिन्दु $\vec{r} = (2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\text{m}$ पर स्थित कण पर कार्य कर रहा है। मूल बिन्दु के सापेक्ष रेखीय संवेग का मान ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 2.6)

हल– $\because$ कोणीय संवेग $\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p}$

$\vec{J} = (2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\times(\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k})$

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$\vec{J} = \hat{i}[5-(-6)]+\hat{j}[3-10]+\hat{k}[-4-(-1)]$

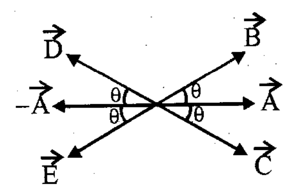
$\vec{J} = 11\hat{i}-7\hat{j}-5\hat{k}$

कोणीय संवेग का परिमाण $J = \sqrt{(11)^2+(-7)^2+(-5)^2}$

$J = \sqrt{121+49+25} = \sqrt{195}\ \text{kg}\times\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ तथा $\vec{E}$ समान परिमाण के सदिश हैं लेकिन दिशायें अलग–अलग हैं (चित्र) तब,



(a) $\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ तथा $\vec{E}$ में से किस–किस सदिश के साथ $\vec{A}$ का अदिश गुणनफल (dot product) समान है ?

(b) $\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ तथा $\vec{E}$ में से किस–किस सदिश के साथ $\vec{A}$ का

अदिश गुणनफल ऋणात्मक है ?

2. यदि $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$ तो क्या $\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ समान होने चाहिए?

3. $(\hat{i}+\hat{j})$ व $(\hat{j}+\hat{k})$ के बीच कितना कोण है?

4. किस दशा में दो सदिशों का अदिश गुणनफल न्यूनतम होता है?

5. यदि $\vec{P}=4\hat{i}+2\hat{j}$ एवं $\vec{Q}=6\hat{i}-3\hat{j}$ हों तो $\vec{P}\cdot\vec{Q}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. बल $\vec{F}$ एक स्थिर पिण्ड को $\vec{d}$ दूरी तक विस्थापित कर देता है। इस क्रिया को सदिश संकेत से कैसे दिखाएंगे ?

7. यदि $\vec{A}=3\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ तथा $\vec{B}=2\hat{i}-5\hat{j}$ हो तो $\vec{A}\cdot\vec{B}$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. $\vec{A}\times\vec{B}=0,\ \vec{B}\times\vec{C}=0$ तो $\vec{A}\times\vec{C}$ क्या होगा?

9. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2+|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\vec{A}\times\vec{B}=0$, तब क्या हम (a) $\vec{A}=\vec{B}$ (b) $\vec{A}\neq\vec{B}$ कह सकते हैं ?

11. यदि $\vec{A}=\hat{i}-3\hat{k}$ तथा $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$ हो तो $\vec{A}\times\vec{B}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. (a) $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$, $\vec{A}\cdot\vec{D}=\vec{A}\cdot\vec{E}$, (b) $\vec{A}\cdot\vec{D}$ और $\vec{A}\cdot\vec{E}$ ऋणात्मक है।
2. सामान्यतः नहीं, लेकिन यदि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच का कोण $\vec{A}$ व $\vec{C}$ के बीच के कोण के बराबर हो तो $\vec{B}=\vec{C}$ हो सकता है।
3. $\cos\theta=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=60°$
4. $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=0$, न्यूनतम होने के लिए $\theta=90°$
5. 18
6. $W=\vec{F}\cdot\vec{d}$
7. –14
8. $\vec{A}\times\vec{C}=0$
9. A^2B^2
10. नहीं,नहीं
11. $-(3\hat{i}+11\hat{j}+\hat{k})$

2.9 अवकलन गणित (Differential Calculus)

अवकलन गणित, गणित की एक शाखा है। यह भौतिक निकाय के विश्लेषण में बहुत उपयोगी है। अवकलन गणित का भौतिकी में अनुप्रयोग निम्न है–

कुछ भौतिक राशियों के मान नियत होते हैं जैसे निर्वात में प्रकाश का वेग (3×10^8 मी./से.) नियत रहता है। अधिकांश भौतिक राशियाँ चर होती है। इन भौतिक राशियों के मान में परिवर्तन निकाय के अवस्था परिवर्तन को दर्शाते है।

एक राशि (x) के मान में परिवर्तन से दूसरी राशि y का मान भी प्रभावित होता है। राशियों की परस्पर निर्भरता को गणितीय फलन के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

$$y=f(x)$$

y, x का फलन है ताकि x के प्रत्येक मान से y का एक मान सम्बन्धित किया गया है। x के मान परिवर्तित होने पर y का मान भी परिवर्तित होता है। x को स्वतंत्र चर एवं y को परतंत्र चर कहते है। गतिमान कण के स्थिति सदिश $\vec{r}$ को परतन्त्र चर व t (समय) स्वतंत्र चर लेकर स्थिति सदिश के समय t के साथ परिवर्तन को फलन रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=\vec{r}(t)$$

f पर तीर चिन्ह फलन के सदिश होने को प्रदर्शित करता है। माना कि क्षण t पर एक पिण्ड का वेग v है। δt समय बाद अर्थात् $t+\delta t$ समय पर पिण्ड का वेग $v+\delta v$ है तो समय t के साथ वेग में परिवर्तन की दर $\dfrac{\delta v}{\delta t}$ होगी। यदि $\lim\limits_{\delta t\to0}$ हो तो $\lim\limits_{\delta t\to0}\dfrac{\delta v}{\delta t}$ को एक संकेत $\dfrac{dv}{dt}$ से व्यक्त करते हैं और इसे v का t के सापेक्ष यथार्थ (exact) अवकल गुणांक या अवकलन कहते हैं जबकि इस अवकल गुणांक को प्राप्त करने की क्रिया अवकलन कहलाती है।

निष्कर्ष–अवकल गणित वह शाखा है जिसमें एक चर राशि के सापेक्ष दूसरी चर राशि में क्षणिक परिवर्तन की दर का अध्ययन करते हैं। वास्तव में $\dfrac{dv}{dt}$ कोई निष्पति न होकर एक संकेत है।

$\dfrac{dy}{dx}\rightarrow y$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक

$\dfrac{dx}{dy}\rightarrow x$ का y के सापेक्ष अवकलन गुणांक

$\dfrac{dv}{d\theta}\rightarrow$ v का θ के सापेक्ष अवकल गुणांक

$\dfrac{dx}{d\theta}\rightarrow x$ का θ के सापेक्ष अवकल गुणांक

उदाहरण के लिए गतिमान कण पर विचार करे तो समय में अल्प परिवर्तन δt होने पर कण की स्थिति में परिवर्तन $\delta\vec{r}$ होती है। $\dfrac{\delta\vec{r}}{\delta t}$ को कण के औसत वेग से परिभाषित किया जायेगा।

यदि औसत वेग का मान एक निश्चित सीमा तक कम कर दिया जाये तो इसे कण का तात्क्षणिक वेग (instantenous velocity) कहेंगे।

$$\text{तात्क्षणिक वेग}=\lim_{\delta t\to0}\left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right)$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

इसी प्रकार वेग में समय के साथ परिवर्तन हो तो औसत त्वरण (a)

$$\vec{a}=\frac{\delta\vec{v}}{\delta t}$$

$$\vec{a}=\lim_{\delta t\to0}\frac{\delta\vec{v}}{\delta t}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\qquad\text{(तात्क्षणिक वेग)}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

इसी प्रकार गति के द्वितीय नियम से–संवेग में परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है–

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

अतः संवेग में परिवर्तन

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t$$

2.9.1 अवकलन गणित के सूत्र (Formulae of Differential Calculus)

x के सापेक्ष अवकलन का संकेत : $\frac{d}{dx}$

इसी प्रकार t के सापेक्ष अवकलन $\frac{d}{dt}$ द्वारा दर्शाया जाता है, इत्यादि।

- $\frac{d}{dx}(x) = 1$
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}(cx^n) = c\frac{d}{dx}(x^n) = cnx^{n-1}$ जहाँ c नियतांक है।
- $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\log_c cx) = \frac{c}{cx} = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\sin cx) = c\cos cx$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\cos cx) = -c\sin cx$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\tan cx) = c\sec^2 cx$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\sec cx) = c\sec cx\tan cx$
- $\frac{d}{dx}[\sin(cx+d)] = c\cos(cx+d)$
- $\frac{d}{dx}[\cos(cx+d)] = -c\sin(cx+d)$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$
- $\frac{d}{dx}(\text{constant}) = 0$
- $\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{d}{dx}(f) \pm \frac{d}{dx}(g)$
- $\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}(g) + g\frac{d}{dx}(f)$ जहाँ f व g, x के फलन हैं
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$

श्रृंखला नियम

- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df}\cdot\frac{df}{dx}$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df}\cdot\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x^2) = 2x.\cos x^2$
- $\frac{d}{dt}(\sin x) = \frac{d}{dx}(\sin x).\frac{dx}{dt}$ जहाँ x, t का फलन है।

2.9.2 भौतिकी में अवकलन गणित के उपयोग (Uses of differential mathematics in physics)

जब किसी भौतिक राशि का मान अन्य भौतिक राशि पर निर्भर करता हो तब उन राशियों के लिए अवकलन गुणांक ज्ञात कर उनके परिवर्तन की दर प्राप्त की जा सकती है।

स्थिति व समय की निर्भरता (Dependance of Position and time)

यदि किसी प्रक्रिया के अन्तर्गत किसी कण की स्थिति का मान समय पर निर्भर करे तब

$$\vec{r}_t = \vec{f}(t)$$

तथा अल्प समय δt पश्चात् कण की स्थिति

$$\vec{r}_{t+\delta t} = \vec{f}(t+\delta t)$$

कण की स्थिति में परिवर्तन

$$\delta\vec{r} = \left(\vec{r}_{t+\delta t} - \vec{r}_t\right)$$

समय के साथ स्थिति में परिवर्तन की दर $= \frac{\delta\vec{r}}{\delta t}$

यदि limit $\delta t \to 0$ हो तो

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

यहाँ राशि $\frac{d\vec{r}}{dt}$ प्रथम अवकल गुणांक कहलाती है।

राशि $\frac{d\vec{r}}{dt}$ कण के तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करती है।

अर्थात् $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad ...(1)$$

इसी प्रकार कण का तात्क्षणिक त्वरण

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

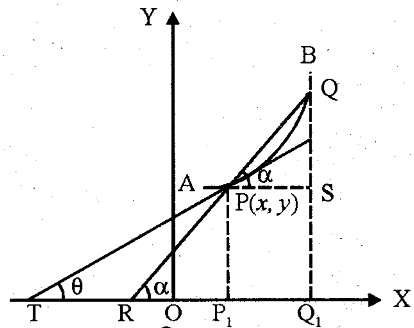
कार्य व समय की निर्भरता (Dependance of Work and Time)

किसी बल द्वारा किया गया कार्य, समय का फलन होता है। किसी मशीन के कार्य करने की दर को तात्क्षणिक शक्ति कहते हैं।

अर्थात् $$P = \frac{dw}{dt}$$

2.9.3 अवकलन का ग्राफीय निरुपण (Graphical Representation of Differentation)

माना कि फलन $y = f(x)$ वक्र AB द्वारा निरूपित किया जाता है (चित्र से)। वक्र पर दो समीप बिन्दु $P(x,y)$ तथा $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ लेते हैं। बिन्दु P व Q को मिलाते हैं तब PQ रेखा द्वारा धनात्मक X अक्ष के साथ बनाया गया कोण α है। सीधी रेखा QQ_1 पर एक अभिलम्ब PS लेते हैं।



चित्र 2.29

चित्र से $PS = P_1Q_1 = OQ_1 - OP_1$
$= (x+\delta x) - x = \delta x.$

इसी प्रकार $QS = \delta y$

$$PQ \text{ का ढाल} = \tan\alpha = \frac{QS}{PS}$$
$$= \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(y+\delta y)-y}{\delta x}$$
$$= \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

जैसे–जैसे बिन्दु P बिन्दु Q के समीप पहुँचता है δx तथा δy दोनों का मान निरन्तर घटता है। जब बिन्दु Q बिन्दु P पर सम्पाती हो जाये तब PQ बिन्दु P पर एक स्पर्श रेखा होगी। माना कि स्पर्श रेखा धनात्मक X अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तब स्पर्श रेखा का ढाल tan θ होगा।

इस प्रकार

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \tan\theta$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

अतः यह स्पष्ट होता है कि फलन $y = f(x)$ का किसी बिन्दु पर x के सापेक्ष अवकल गुणांक का मान फलन के वक्र के उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के ढाल के बराबर होता है।

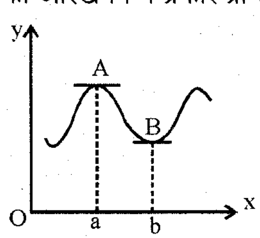
स्थिति–I यदि θ का मान 90° से कम हो तो ढाल धनात्मक होता है।

स्थिति–II यदि θ का मान 90° से अधिक हो तो ढाल ऋणात्मक होता है।

2.9.4 फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान (Maximum or minimum value of the function)

यदि y, x का फलन है अर्थात् y = f(x)

तब माना कि इसका आरेख निम्न प्रकार प्राप्त होता है–



चित्र 2.30

तब A तथा B बिन्दु के संगत स्थितियाँ क्रमशः उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ कहलाती है। इन दोनों बिन्दुओं के संगत वक्र का ढाल $\frac{dy}{dx}$ शून्य है।

जबकि बिन्दु A के संगत वक्रता नीचे की ओर तथा बिन्दु B के संगत वक्रता ऊपर की ओर है। जिससे बिन्दु A के संगत वक्रता $\frac{d^2y}{dx^2}$ ऋणात्मक तथा बिन्दु B के संगत वक्रता $\frac{d^2y}{dx^2}$ धनात्मक होगी।

इस प्रकार यदि y,x का फलन है तो y का मान $x = a$ पर अधिकतम होगा। यदि

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = 0$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a} = \text{ऋणात्मक संख्या}$$

इसी प्रकार $x = b$ पर मान के न्यूनतम होने की शर्त हैं–

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=b} = 0$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=b} = \text{धनात्मक संख्या}$$

2.10 समाकलन गणित (Integral Calculus)

किसी फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन या पूर्वत्र एक ऐसा फलन $g(x)$ है जिसका x के सापेक्ष अवकलन गुणांक $f(x)$ है। इसके लिये संकेत $\int f(x)dx = g(x)$ का प्रयोग करते हैं।

फलन $f(x)$ का समाकलन ज्ञात करने की यह प्रक्रिया समाकलन कहलाती है। वास्तव में समाकलन, अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है यही कारण है कि किसी फलन के समाकलन को उस फलन का प्रति अवकलन कहते हैं।

समाकलन दो प्रकार के होते हैं–

(i) अनिश्चित समाकलन (Indefinite Integration)

(ii) निश्चित समाकलन (Definite Integration)

2.10.1 अनिश्चित समाकलन (Indefinite Integration)

$\frac{d}{dx}(c) = 0$ के अनुसार नियतांक का अवकलन शून्य होता है। अतः

यदि $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = g(x)$ है तो

$\frac{d}{dx}\{f(x) + \text{नियतांक}\} = g(x)$ होगा

यही कारण है कि $g(x)$ के समाकलन में नियतांक की अनिश्चितता रहती है।

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

यहाँ C समाकलन नियतांक है।

गणितीय संभावनाओं के आधार पर समाकलन का मान कुछ भी हो सकता है लेकिन भौतिकी में इसका मान निकाय की प्रारम्भिक अवस्था से अन्य शर्तो के आधार पर निर्धारित होता है।

2.10.2 निश्चित समाकलन (Definite Integration)

भौतिक समस्याओं में स्वतंत्र चर के मान से दूसरे मान तक परिवर्तन से होने वाले प्रभावों का विश्लेषण किया जाता है। इसमें निश्चित समाकलन उपयोगी है। निश्चित समाकलन की गणना स्वतंत्र चर की निम्न सीमा (Lower Limit) व ऊपरी सीमा (Upper Limit) बता कर की जाती है।

$$\int_{x=x_i}^{x=x_f} g(x)dx = [f(x=x_f) - f(x=x_i)]$$

जहाँ पर $\int g(x)dx = f(x)$ है एवं उपरोक्त समीकरण में x_i निम्न सीमा व x_f ऊपरी सीमा है।

$f(x)$ के स्थान पर "$f(x)$ +समाकलन नियतांक" पर भी वही मान रहता है।

2.10.3 समाकलन के सूत्र (Formulae of Integration)

(i) $\int$ नियतांक (dx) = नियतांक $\times x + C$

यहाँ C समाकलन नियतांक है।

(ii) नियतांक यदि फलन का गुणांक है तो वह अप्रभावित रहता है।

$\int$ नियतांक $\times f(x)\,dx$ = नियतांक $\times \int f(x)\,dx + C$

(iii) फलन का जोड़ पर बंटन–

$$\int \{C_1 f(x) + C_2 h(x)\}dx = C_1\int f(x)dx + C_2\int h(x)dx + C$$

C_1, C_2 नियतांक है।

(vi) गुणनफल का समाकलन–

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int \frac{df(x)}{dx}\{g(x)dx\}dx + C$$

(v) बहुपद के समाकलन के लिए सूत्र–

$$\int \frac{1}{x}dx = \log_e |x| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{जबकि } n \neq -1$$

(vi) त्रिकोणमितीय फलनों के लिए सूत्र–

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

जहाँ a, b नियतांक है।

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

(vii) अन्य महत्त्वपूर्ण समाकलन सूत्र–

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

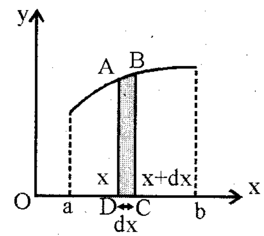
2.10.4 समाकलन का भौतिकी में अनुप्रयोग (Application of Integration in Physics)

पूर्व में तात्क्षणिक वेग को स्थिति सदिश $\vec{r}$ के प्रथम अवकलन गुणांक के रूप में परिभाषित किया है फलतः $\vec{r}(t)$ ज्ञात होने पर, अवकलन के द्वारा वेग का फलन ज्ञात किया जा सकता है। यदि वेग, समय के फलन रूप में $\vec{v}(t)$ ज्ञात है तो अवकलन की व्युत्क्रम प्रक्रिया जिसे समाकलन कहते हैं की सहायता से $\vec{r}(t)$ ज्ञात कर सकते हैं।

$$\vec{r} = \int \vec{v}(t)dt + \text{समाकलन नियतांक}$$

2.10.5 समाकलन एवं ग्राफीय निरुपण (Integration and Graphical Representation)

यदि y, x का फलन है तब x के विभिन्न मानों के संगत y के प्राप्त मानों से फलन का ग्राफीय निरुपण किया जा सकता है। माना कि यह आरेख निम्न प्रकार प्राप्त होता है–

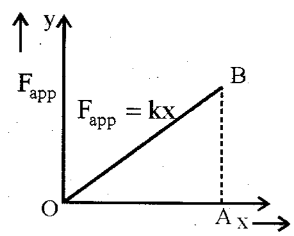


चित्र 2.31 समाकलन का ग्राफीय निरुपण

अब वक्र के नीचे के क्षेत्र को अल्प अन्तराल की पट्टिकाओं में विभक्त किया जा सकता है। मानों x व x + dx के मध्य एक अल्प अन्तराल dx की आयताकार पट्टिका पर विचार करते हैं जिसके संगत y का मान नियत है। जिससे इस आयताकार पट्टिका का क्षेत्रफल ydx होगा। इसी प्रकार अन्य आयताकार पट्टियों के मध्य भी y का मान नियत माना जा सकता है। इस प्रकार के सभी आयतों का क्षेत्रफल, ydx के कुल मान को व्यक्त करता है। अल्प अन्तराल dx लेने पर योगफल की यह प्रक्रिया संगत फलन का समाकलन कहलाती है।

इस प्रकार $\int_a^b ydx$ = सीमाओं x = a से x = b के मध्य Y-X वक्र तथा X- अक्ष के मध्य घिरा कुल क्षेत्रफल

उदाहरण–प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का मान बल–विस्थापन वक्र तथा X- अक्ष के मध्य के क्षेत्रफल से प्राप्त किया जा सकता है–



चित्र 2.32

त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times x \times kx = \frac{1}{2}kx^2$$

अर्थात् स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ = बल–विस्थापन रेखा तथा O से x तक विस्थापन अक्ष के बीच का क्षेत्रफल

2.11 लघुगणक एवं इसके उपयोग (Logarithm and Its uses)

किसी भौतिक राशि का मान गणना द्वारा ज्ञात करते समय गुणा तथा भाग करने में काफी समय नष्ट हो जाता है। परीक्षा में छात्रों के समय की बचत के लिए लघु–गणक सारणी का प्रयोग बहुत ही आवश्यक है। लघु–गणक सारणी के उपयोग से गणना काफी कम समय में तथा सरलता से हो जाती है।

लघु-गणक की परिभाषा–किसी दिये हुए आधार पर किसी संख्या का लघु–गणक वह संख्या है जिसे दिये हुए आधार पर घात के रूप में रखने पर मूल संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरणार्थ, यदि $a^y = b$

तब $\log_a b = y$ [log b to the base a is equal to y]

इस प्रकार, $10^3 = 1000$

तब $\log_{10} 1000 = 3$

व्यवहार में आधार (base) 10 ही प्रयोग में लिया जाता है। अतः व्यवहार में

$\log_{10} 1000$ के स्थान पर केवल $\log 1000 = 3$ ही लिखते हैं। जहाँ $\log_e X = 2.303 \log_{10} X$

लघु–गणक सारणी की सहायता से गणना करने के लिए निम्नलिखित मूल सिद्धान्तों का उपयोग किया जाता है–

1. एक से अधिक संख्याओं के गुणनफल का लघु–गणक उन संख्याओं के पृथक्–पृथक् लघुगणकों के योग के बराबर होता है। उदाहरण के लिए यदि कोई संख्या, $R = a \times b \times c$ है।

तब $\log R = \log a + \log b + \log c$

2. किसी भिन्न का लघु–गणक उसके अंश तथा हर के लघु–गणकों के अन्तर के बराबर होता है जैसे,

$$R = \frac{a}{b}$$

तब $\log R = \log a - \log b$

3. किसी घात वाली संख्या का लघु–गणक ज्ञात करने के लिए उस राशि के लघु–गणक को उस घात से गुणा कर देते है। जैसे, $R = x^n$

तब $\log R = n \log x$

नोट– $\log 1 = 0$ तथा $\log 10 = 1$ होता है यह हमेशा याद रखना चाहिए।

4. लघुगणक में आधार परिवर्तन–

$\because \quad \log_e 10 = 2.303$

$\therefore \quad \log_e x = \log_{10} x \times \log_e 10 = 2.303 \log_{10} x$

2.11.1 किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात करना (Find out Logarithm of any Number)

प्रत्येक राशि के दो भाग होते है। एक भाग दशमलव से पहले का तथा दूसरा भाग दशमलव के बाद का। इसी प्रकार प्रत्येक संख्या का लघु–गुणक भी दो भागों में बना होता है। एक दशमलव से पहले का भाग जिसे पूर्णांश (characteristic) कहते हैं तथा दूसरा भाग दशमलव के बाद का होता है। जिसको अपूर्णांश (Mantissa) कहते हैं। पूर्णांश धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों प्रकार का सकता है परन्तु अपूर्णांश हमेशा धनात्मक होना आवश्यक है। किसी भी संख्या का लघु–गुणक ज्ञात करने के लिये उसका पूर्णांश तथा अपूर्णांश अलग–अलग ज्ञात किया जाता है।

2.11.2 लघुगणक ज्ञात करने की विधि (Method to find Logarithm)

किसी संख्या का पूर्णांश उस संख्या के दशमलव से पहले के अंकों की संख्या में से 1 (एक) घटाने पर प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए 8934, 893.4, 89.34, 8.934 संख्याओं के लघु–गुणकों के पूर्णांश 3, 2, 1 और 0 (शून्य) होते है।

(अ) पूर्णांश ज्ञात करने की विधि

यदि दी हुई संख्या में **दशमलव से पहले कोई अंक नहीं है तो उस संख्या के लघु-गुणक का पूर्णांश ऋणात्मक होता है तथा दशमलव के ठीक बाद आने वाले शून्यों की संख्या में 1 (एक) जोड़ने पर प्राप्त होता है।** उदाहरण के लिए, 0.2369, 0.02369, 0.002369 संख्याओं के लघु–गुणकों क पूर्णांश क्रमशः 1, 2, 3 होंगे अर्थात् ऋणात्मक पूर्णांशों को बार (पूर्णांश के ऊपर) लगाकर प्रदर्शित करते हैं जैसे क्रमशः $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ । अतः यदि किसी संख्या के दशमलव से पहले अंकों की संख्या एक है तो पूर्णांश शून्य होता है और यदि दशमलव से पहले संख्या में कोई अंक शून्य को छोड़कर नहीं है तो पूर्णांश ऋणात्मक होता है।

(ब) अपूर्णांश ज्ञात करने की विधि

किसी संख्या के लघु–गणक का अपूर्णांश लघु–गणक सारणी से ज्ञात किया जाता है। लघु–गणक सारणी इस अध्याय के अन्त में दी गई है। इस सारणी में कुछ ऊर्ध्वाधर खाने हैं सबसे पहले खाने में 10 से लेकर 99 तक की संख्याओं के 10 खाने है। सारणी में सबसे ऊपर इन ऊर्ध्वाधर खानों में 0 से लेकर 9 तक अंक क्रमानुसार लिखे हुए है। इन खानों में आगे मध्यमान अन्तर शीर्षक के अन्तर्गत फिर 9 ऊर्ध्वाधर खाने हैं। जिसमें ऊपर 1 से लेकर 9 अंक तक क्रमानुसार लिखे गये हैं। प्रत्येक खाने में मध्यमान अन्तर के अंक लिखे हैं।

अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए दी गई संख्या का दशमलव चिन्ह छोड़ दिया जाता है क्योंकि दशमलव की स्थिति का अपूर्णांश के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। उदाहरण के लिए 8934, 89.34, 8.934, 0.08934 तथा 0.08934 संख्याओं का पूर्णांश समान ही होता है। दी हुई संख्या में चाहे कितने भी अंक हों, अपूर्णांश संख्या के केवल चार अंकों से देखा जाता है। अपूर्णांश देखने के लिए संख्या के पहले दो अंकों को सारणी के पहले ऊध र्वाधर स्तम्भ में ढूँढ कर उसके सामने संख्या के तीसरे अंक के नम्बर वाले खाने में लिखी संख्या को नोट कर लेते है। इसी के सामने मध्यमान–अन्तर के ऊर्ध्वाधर खानों की संख्या के चौथे अंक वाले खाने में लिखी संख्या को पहली नोट की गई संख्या में जोड़ देते हैं। यहीं दी हुई संख्या के लघु–गुणक का अपूर्णांश होता है।

अतः दी गई संख्या का लघुगणक = पूर्णांश + अपूर्णांश

उदाहरण के लिए 893.4 का लघुगणक ज्ञात करने के लिये पहले पूर्णांश ज्ञात करते हैं फिर अपूर्णांश। इस संख्या में दशमलव से पहले तीन अंक है। अतः इसका पूर्णांश 2 होगा। अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए पहले चार अंक ही लिये जाते हैं। संख्या में केवल चार अंक है। लघुगणक सारणी के पहले खाने में 89 के आगे 3 अंक वाले ऊर्ध्वाधर खाने में लिखी संख्या 9509 है इसको नोट कर लेते हैं। अब मध्यमान अन्तर वाले खानों में 89 के आगे 4 अंक के ऊर्ध्वाधर खाने में लिखा अंक 2 संख्या 9509 में जोड़ देते हैं जोड़ने से प्राप्त 9511 संख्या के पहले दशमलव लगा देते हैं। यही अभीष्ट संख्या 893.4 के लघुगणक का अपूर्णांश होता है जो 0.9511 है।

अतः संख्या 893.4 का लघुगणक

= पूर्णांश + अपूर्णांश

= 2 + 0.9511

= 2.9511

दिये हुये लघुगणक का **प्रतिलघुगणक** ज्ञात करने के लिये प्रतिलघुगणक सारणी काम में लेते हैं। इसकी विधि लघुगणक के विपरीत है।

नोट–यदि दी गई संख्या के चार से अधिक अंक है जिसे 893.45, 893.456 आदि तब भी पहले चार अंकों का ही लघुगणक देखा जाता है क्योंकि अधिकांश लघुगणक सारणी चार अंकों के लिये ही होती है।

2.11.3 प्रति लघुगणक ज्ञात करने की विधि (Method to find Antilogarithm)

किसी संख्या के लघुगणक का प्रति–लघुगणक वह संख्या ही होती है। इस प्रकार यदि log 470.6 = 2.6726 हो तो प्रति लोग (Antilog) 2.6726 = 470.6। किसी लघुगणक का प्रति लघुगणक ज्ञात करने के लिए प्रति–लघुगणक सारणी होती है।

प्रति-लघुगणक ज्ञात करना–सर्वप्रथम लघुगणक के केवल अपूर्णांश से ही प्रति–लघुगणक (Antilog) सारणी में देखकर संख्या के अंक ज्ञात करते हैं। प्रति–लघुगणक सारणी को उसी प्रकार देखते हैं जिस प्रकार लघुगणक ज्ञात करने में लघुगणक सारणी को देखते हैं। और पूर्णांश को देखते हुए दशमलव का चिन्ह लगाते हैं।

मान लिया हमें 1.7507 का प्रति–लघुगणक ज्ञात करना है। इसका अपूर्णांश (Mantissa) 0.7507 है। प्रति–लघुगणक सारणी के पहले ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में 0.75 के सामने 0 अंक वाले में लिखा मान 5023 लिख लेते हैं। इसके पश्चात् मध्यमान अन्तर वाले खानों में अपूर्णांश के चौथे अंक 7 वाले खाने में 5623 संख्या की सीध में लिखे अंक 9 को 5623 में जोड़ देते हैं। जोड़ने पर संख्या मान 5632 हो जाता है। इस संख्या में दशमलव लघुगणक से प्राप्त संख्या के पूर्णांश वाले भाग के अनुसार लगाया जाता है। प्रति–लघुगणक से प्राप्त संख्या में दशमलव निम्न प्रकार लगाते हैं

1. यदि पूर्णांश धनात्मक है तो संख्या में बाई तरफ से दशमलव पूर्णांश वाले अंक से एक अधिक अंक छोड़कर लगाना है।

2. यदि पूर्णांश ऋणात्मक है तो संख्या के बाई तरफ पूर्णांश वाले अंक में से एक अंक कम शून्य लगाकर तब उन शून्यों के बाई तरफ दशमलव लगाते है।

3. उदाहरण के लिए संख्या जिसका लघुगणक 1.7507 है इसके अपूर्णांश (Mantissa) भाग 0.7507 का प्रतिलघुगणक 5632 है। अब इसमें दशमलव पूर्णांश के अनुसार लगाना है। यहाँ पर पूर्णांश 1 है तथा धनात्मक है इसलिये दशमलव संख्या 5632 में बाई तरफ दो अंक छोड़कर लगाना है यदि संख्या जिसका लघुगणक 1.7507 है वह 56.32 होगी।

इसी प्रकार वह संख्या जिसका लघुगणक $\bar{5}.7826$ है यदि अपूर्णांश भाग यदि 0.7826 का प्रतिलघुगणक 6061 है अब इसमें दशमलव पूर्णांश के अनुसार लगाना है पूर्णांश 5 है यानि पूर्णांश 5 है परन्तु ऋणात्मक है इसलिये 6061 के बाई तरफ पहले चार बार शून्य–शून्य (पूर्णांश से एक कम शून्य) लिखकर तब सबसे बाई तरफ दशमलव लगाना है अर्थात् संख्या का मान

$$= 0.00006061$$
$$= 60.61 \times 10^{-6}$$

नोट–ऊपर वर्णित विधि में से संख्या का मान उस समय ज्ञात करते है जिस समय लघुगणक में अपूर्णांश धनात्मक है।

यदि अपूर्णांश धनात्मक नहीं है तो पहले अपूर्णांश का धनात्मक बनाना आवश्यक है। धनात्मक बनाने के लिये नीचे दिया गया उदाहरण काम में लाया जा सकता है–

$$\log\frac{56}{72} = \log 56 - \log 72$$
$$= 1.7482 - 1.8573$$
$$= -0.1091$$
$$= -1 + 1 - 0.1091$$
$$= \bar{1}.8909$$

इस प्रकार अपूर्णांश धनात्मक बनाकर तब प्रतिलघुगणक ज्ञात करते हैं।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. किसी मिश्रित संख्या में जोड़ने व घटाने की प्रक्रिया पूर्ण करने के पश्चात् ही लघुगणक प्रक्रिया प्रयुक्त की जाती है।

2. किसी भिन्न के लघुगणक प्रक्रिया में सदैव अंश के लघुगणक में से हर का लघुगणक घटाया जाता है।

3. अपूर्णांश सदैव धनात्मक होता है जबकि पूर्णांश धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। एक पूर्णांश में से दूसरे पूर्णांश को घटाते समय चिन्हों का ध्यान रखा जाता है।

लघुगणक (Logarithm) तथा प्रतिलघुगणक (Antilogarithm) सारणियाँ

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	.9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	089	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	19	18	20
						2900	2923	295	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17

23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	438	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4515	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	8	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	3682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	9212	9222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	9304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7429	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7828	7232	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	789	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8141	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8241	8242	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5

79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	929	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9563	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	2	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	966	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9594	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9456	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	3
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	12850	1	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1178	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	177	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4

.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2548	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	4	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2823	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2838	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3349	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4576	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	63339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	8	7	8	10	12	13	15

.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8277	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	1	14	16	18	20

उदा.13. एक कण के स्थिति सदिश को S.I. मात्रक में समय के फलन के रूप में नीचे व्यक्त किया गया है-

$$\vec{r} = t^3\hat{i} + 4t^2\hat{j} + 7\hat{k}$$

कण का तात्क्षणिक वेग व तात्क्षणिक त्वरण को समय के फलन रूप में व्यक्त कीजिए।

हल–
$$\vec{r} = t^3\hat{i} + 4t^2\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3\hat{i} + 4t^2\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$= \hat{i}\frac{d(t^3)}{dt} + \hat{j}\frac{d(4t^2)}{dt} + \hat{k}\frac{d(7)}{dt}$$

$$= 3t^2\hat{i} + 8t\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{v} = 3t^2\hat{i} + 8t\hat{j}$$

इसी प्रकार से–

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2)\hat{i} + \frac{d}{dt}(8t)\hat{j}$$

$$\vec{a} = 6t\hat{i} + 8\hat{j}$$

उदा. 14. किसी क्षण t पर किसी कण की स्थिति का समीकरण निम्न हैं- $x = 4t^2 + 6t + 5$

जहाँ x मीटर (m) में तथा t सेकण्ड (s) में है।

ज्ञात कीजिए- (i) कण का प्रारम्भिक वेग, (ii) कण का t = 2s पर वेग, (iii) कण का त्वरण, (iv) कण का t = 3s पर विस्थापन।

(पुस्तक का उदाहरण 2.7)

हल- ∵ कण का वेग $V = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{d}{dt}(4t^2 + 6t + 5) = 4 \times 2t + 6 \times 1 + 0$$

$$= 8t + 6$$

(i) कण का t = 0s पर वेग अर्थात् प्रारंभिक वेग

$$V_{t=0} = 8 \times 0 + 6 = 6 \text{ m/s}$$

(ii) कण का t = 2s पर वेग

$$V_{t=2} = 8 \times 2 + 6 = 22 \text{ m/s}$$

(iii) कण का त्वरण $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(8t + 6) = 8 \times 1 + 0 = 8 \text{ m/s}^2$

(iv) कण का t = 3s पर विस्थापन

$$x_{t=3} = 4(3)^2 + 6(3) + 5 = 36 + 18 + 5 = 59 \text{ m}$$

उदा 15. S.I. मात्रक में कण का तात्क्षणिक वेग समय फलन के रूप में निम्नानुसार है-

$$\vec{v} = t^4\hat{i} + t^3\hat{j} + t^2\hat{k}$$

कण का क्षण t = 2 पर तात्क्षणिक त्वरण ज्ञात कीजिए क्या यह समयान्तराल t = 1 से t = 3 के मध्य औसत त्वरण के तुल्य है?

gy –
$$\vec{v} = t^4\hat{i} + t^3\hat{j} + t^2\hat{k}$$

अतः
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= 4t^3\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t\hat{k}$$

क्षण $t = 2$ पर त्वरण का मान–

$$\vec{a}(t=2) = 4 \times 2^3\hat{i} + 3 \times 2^2\hat{j} + 2 \times 2\hat{k}$$

$$a = 32\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$$

क्षण $t = 1$ पर वेग

$$\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

क्षण $t = 3$ पर वेग

$$\vec{v} = (3)^4\hat{i} + (3)^3\hat{j} + (3)^2\hat{k}$$

$$\vec{v} = 81\hat{i} + 27\hat{j} + 9\hat{k}$$

$$\Delta\vec{a} = \frac{\vec{v}(t=3) - \vec{v}(t=1)}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta\vec{a} = \frac{(81\hat{i} + 27\hat{j} + 9\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{2}$$

$$\Delta\vec{a} = \frac{80\hat{i} + 26\hat{j} + 8\hat{k}}{2}$$

$$\Delta\vec{a} = 40\hat{i} + 13\hat{j} + 4\hat{k}$$

उदा. 16. 5kg द्रव्यमान वाले पिण्ड का किसी क्षण t पर वेग निम्न सूत्र से दिया जाता है-

$$V = (2t^3 + 3t^2 + 10) \text{ m/s}$$

पिण्ड पर t = 4s पर लगने वाले बल की गणना कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 2.8)

हल- ∵ पिण्ड का त्वरण $a = \frac{dV}{dt}$

$$a = \frac{d}{dt}(2t^3 + 3t^2 + 10) = 2 \times 3t^2 + 3 \times 2t + 0$$

$= (6t^2 + 6t)\ m/s^2$

t = 4s पर पिण्ड का त्वरण

$a_{t=4} = 6(4)^2 + 6(4) = 96 + 24 = 120\ m/s^2$

∴ पिण्ड पर लगने वाला बल F = ma

F = 5 × 120 = 600 न्यूटन

उदा 17.किसी कण की स्थिति-

$\vec{r} = a\sin(\omega t)\hat{i} + a\cos(\omega t)\hat{j}$ से व्यक्त होती है। a एवं ω नियतांक है। कण के वेग, त्वरण के व्यंजक प्राप्त करो।

हल– $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$= \frac{d}{dt}[a\sin(\omega t)\hat{i} + a\cos(\omega t)\hat{j}]$

$= \frac{d}{dt}[a\sin(\omega t)\hat{i}] + \frac{d}{dt}[a\cos(\omega t)\hat{j}]$

$= a\omega\cos(\omega t)\hat{i} - a\omega\sin(\omega t)\hat{j}$

$= \omega[a\cos(\omega t)\hat{i} - a\sin(\omega t)\hat{j}]$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega a\cos(\omega t)\hat{i} - \omega a\sin(\omega t)\hat{j}]$

$= a\omega\frac{d}{dt}[\cos(\omega t)\hat{i}] - a\omega\left[\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\hat{j}\right]$

$= -a\omega \times \sin\omega t.\omega\hat{i} - a\omega\cos\omega t.\omega\hat{j}$

$= -\omega^2(a\sin\omega t\hat{i} + a\cos\omega t\hat{j})$

$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$

उदा.18. एक गतिशील पिण्ड की स्थिति (x), समय (t) पर निम्न समीकरण के अनुसार निर्भर करती है-

$\sqrt{x} = (t-3)$

जहाँ x मीटर (m) में तथा t सेकण्ड (s) में है। किस समय पिण्ड स्थिर अवस्था में आ जायेगा?

हल- ∵ दिया गया सम्बन्ध $\sqrt{x} = t-3$

⇒ $x = (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$

∴ पिण्ड का वेग $V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 6t + 9)$

⇒ $V = 2t - 6 + 0 = (2t-6)\ m/s$

पिण्ड के स्थिर अवस्था में आने पर V = 0 m/s

∴ $0 = 2t - 6$

⇒ $2t = 6$ ⇒ $t = 3s$

उदा 19. एक विमीय सरल आवर्त गति में बल F को F = –Kx से व्यक्त कर सकते हैं। जहाँ पर K बल नियतांक है तथा x विस्थापन को दर्शाता है इस बल द्वारा प्रारम्भिक स्थिति x_i से अन्तिम स्थिति x_f तक विस्थापन में किये गये कार्य का व्यंजक प्राप्त करो।

हल– परिभाषा से बल द्वारा कार्य (W) = $\int_{x_i}^{x_f} F dx$

दिया गया है–

$F = -Kx$

$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$

$= \int_{x_i}^{x_f} (-Kx)dx = -K\int_{x_i}^{x_f} x\,dx$

$= -K\left(\frac{x^2}{2}\right)_{x_i}^{x_f} = -\frac{K}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$

$W = \frac{K}{2}\left(x_i^2 - x_f^2\right)$

उदा. 20. यदि बल F = (5x + 2)N है तो x = 1 से x = 2m तक विस्थापित करने में अर्जित ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

(पुस्तक का उदाहरण 2.10)

हल– ∵ अर्जित ऊर्जा = विस्थापित करने में किया गया कार्य W

∴ $W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$ से

$W = \int_1^2 (5x+2)dx$

$W = \left[5.\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2$

$W = \left[5.\frac{(2)^2}{2} + 2(2)\right] - \left[5.\frac{(1)^2}{2} + 2(1)\right]$

W = (10 + 4) – (4.5) = 14–4.5 = 9.5 जूल

उदा 21.एक कण के वेग का मान समय निम्न संबंध के अनुसार निर्भर करता है।

$\vec{v} = (3t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + 5\hat{k})\ m/s$

यदि यह कण $t=0$ पर मूल बिन्दु पर स्थित था तो $t=2$ पर उसकी स्थिति ज्ञात करो। (पुस्तक का उदाहरण 2.11)

हल– दिया गया है–

$\vec{v} = 3t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + 5\hat{k}$

∵ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

∴ $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$\int d\vec{r} = \int \vec{v}dt$

$= \int (3t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + 5\hat{k})dt$

$= \int 3t^2\hat{i}dt + \int 2t\hat{j}\,dt + \int 5\hat{k}\,dt$

$= 3\hat{i}\left(\frac{t^3}{3}\right) + 2\hat{j}\left(\frac{t^2}{2}\right) + 5\hat{k}(t)$

$\vec{r} = t^3\hat{i} + t^2\hat{j} + 5t\hat{k} + C_1$

प्रश्नानुसार $t = 0$ पर कण मूल बिन्दु पर था जिससे $\vec{r} = 0$

$0 = 0 + 0 + 0 + C_1$

$C_1 = 0$

$\vec{r} = t^3\hat{i} + t^2\hat{j} + 5t\hat{k}$

$\vec{r}_{t=2} = 8\hat{i} + 4\hat{j} + 10\hat{k}$

अत: कण के निर्देशांक (8, 4, 10)m होंगे।

उदा 22. एक विमीय गति में कण के स्थिति निर्देशांक (x) व समय t में निम्न सम्बन्ध है–

$$x = 12t - 3t^2$$

जहाँ पर x मीटर में तथा t सेकण्ड में है। किस क्षण पर x का मान अधिकतम होगा?

हल– $x = 12t - 3t^2$

अतः t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = 12 - 6t$$

पुनः t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6$$

अधिकतम की शर्त के अनुसार

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$12 - 6t = 0$$

$$t = 2$$

अधिकतम मान $x(t=2) = 12 \times 2 - 3 \times 2^2$

$$= 24 - 12$$

$$x = 12 \text{ मीटर}$$

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. $\frac{d}{dx}(\cos^2 x)$ ज्ञात कीजिए।

प्र.2. $\int x^{0.25} dx$ का मान लिखिए।

प्र.3. $\int e^{2x+3}$ का मान लिखिए।

प्र.4. $\sin(\sqrt{x^2+7})$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए।

प्र.5. 0.0004 के लघुगणक का अपूर्णांश लिखिए।

प्र.6. $0.32\ (68.66)^{3/2}$ का मान लिखिए।

उत्तरमाला

1. $\frac{d}{dx}(\cos^2 x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(\cos 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0 + (-2\sin 2x)]$$

$$= -\sin 2x$$

∵ त्रिकोणमितीय सूत्र

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\therefore 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

2. $\int x^{0.25} dx = \frac{x^{0.25+1}}{0.25+1} = \frac{x^{1.25}}{1.25}$

3. $\int e^{2x+3} = \frac{e^{2x+3}}{2}$

4. $\frac{d}{dx}[\sin(\sqrt{x^2+7})] = \frac{d}{dx}[\sin(x^2+7)^{½}]$

$$= \cos(x^2+7)^{½} \cdot \frac{1}{2}(x^2+7)^{½-1} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} \cdot \cos\left(\sqrt{x^2+7}\right)$$

5. 0.0004 से 3 अंक की संख्या 400 बनाने पर 40 के आगे 0 वाले ऊर्ध्वाधर खाने के संगत संख्या 6021 है। अतः 0.0004 का लघुगणक का अपूर्णांश 0.6021 है।

माना कि $x = 0.32\ (68.66)^{3/2}$

लघुगणक लेने पर

$$\log x = \log 0.32 + \frac{3}{2}\log(68.66)$$

∵ $\log 0.32 = \bar{1}.5051$ तथा $\log 68.66 = 1.8367$

∴ $\log x = \bar{1}.5051 + \frac{3}{2} \times 1.8367 = 2.2601$

प्रतिलघुगणक लेने पर $x = 182$

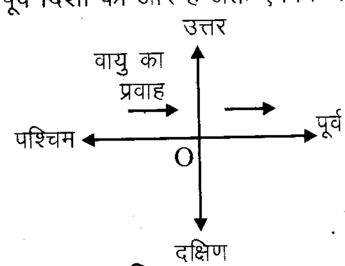
विविध उदाहरण

उदा.23. यदि पूर्व दिशा में एकांक सदिश $\hat{i}$ तथा उत्तर दिशा में $\hat{j}$ हो तो वायु के वेग का एकांक सदिश ज्ञात करो जबकि-

(i) वायु पश्चिम दिशा से पूर्व दिशा की ओर प्रवाहित हो रही हो।

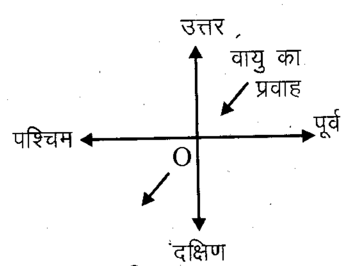
(ii) वायु उत्तर-पूर्व दिशा से दक्षिण–पश्चिम दिशा की ओर प्रवाहित हो रही हो।

हल– **(i)** प्रथम स्थिति में चित्र से इस स्थिति में मूल बिन्दु O के सापेक्ष वायु प्रवाह पूर्व दिशा की ओर है अतः एकांक सदिश $\hat{i}$ होगा।



चित्र 2.33

(ii) द्वितीय स्थिति में चित्र से इस स्थिति में मूल बिन्दु O के सापेक्ष वायु प्रवाह दक्षिण–पश्चिम की ओर है अतः एकांक सदिश $\frac{-\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{2}}$ होगा।



चित्र 2.34

उदा.24. दो बल 4N तथा 3N का न्यूनतम परिमाण कितना होगा?

हल– $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

$\theta = 180°$ पर R न्यूनतम होगा

$$R_{min} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + 2 \times 4 \times 3 \cos 180°}$$

$$R_{min} = \sqrt{16 + 9 - 24}$$

$\because \cos 180° = -1$

$$= \sqrt{1} = 1N$$

उदा.25.दो बराबर बल एक दूसरे के लम्बवत् कार्यरत है। इनका परिणामी बल 14.14 है। प्रत्येक बल का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल–

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

$\because$ $P = Q = R = F$

$$14.14 = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F \cos 90°}$$

$$\Rightarrow 14.14 = \sqrt{2F^2}$$

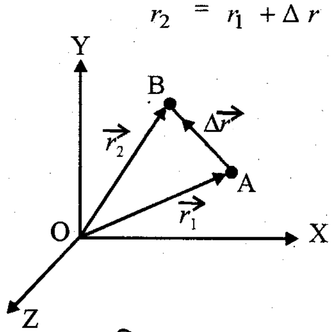
$$\Rightarrow F = \frac{14.14}{\sqrt{2}} = \frac{14.14}{1.414} = 10$$

$\therefore$ दोनों बलों का परिमाण 10 न्यूटन होगा।

उदा.26.एक कण का प्रारंभिक स्थिति सदिश $\vec{r_1} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ तथा 2 सेकण्ड के पश्चात् उसका स्थिति सदिश $\vec{r_2} = 4\hat{i} - 6\hat{j} - 5\hat{k}$ मीटर है। कण का विस्थापन सदिश तथा उसकी चाल ज्ञात कीजिए।

हल– सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\vec{r_2} = \vec{r_1} + \Delta\vec{r}$$



चित्र 2.35

जहाँ $\Delta\vec{r}$ = विस्थापन सदिश

$$\Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

$$= (4\hat{i} - 6\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})$$

$$= (3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k})$$

$\therefore$ विस्थापन सदिश $\Delta\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k})$ ...(1)

वेग $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$= \frac{3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}}{2}$$

$\therefore$ कण की चाल $v = \sqrt{\frac{(3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}{(2)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{9 + 4 + 36}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ मी./से.}$$

उदा.27. एक तल में स्थित निम्नलिखित तीन सदिशों का योग ज्ञात कीजिए-

$$\vec{A} = 7\hat{i} - 2\hat{j}, \vec{B} = -5\hat{i} + 3\hat{j} \text{ तथा } \vec{C} = -2\hat{i} + \hat{j}$$

हल– माना कि सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ व $\vec{C}$ का परिणामी सदिश $\vec{R}$ है, तब

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$= (7\hat{i} - 2\hat{j}) + (-5\hat{i} + 3\hat{j}) + (-2\hat{i} + \hat{j})$$

$$= (0\hat{i} + 2\hat{j})$$

$$= 2\hat{j}$$

इस प्रकार परिणामी सदिश Y अक्ष के अनुदिश है, जिसका परिमाण 2 है।

उदा 28.एक कण बल $(4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$ न्यूटन के प्रभाव में स्थिति $\vec{r_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ से स्थिति $\vec{r_2} = 14\hat{i} + 13\hat{j} - 9\hat{k}$ तक गति करता है। किये गये कार्य की गणना करो।

हल– यहाँ $\vec{F} = (4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$ न्यूटन

कण का विस्थापन

$$\vec{S} = (\vec{r_2} - \vec{r_1})$$

$$= (14\hat{i} + 13\hat{j} - 9\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$= (11\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k}) \text{ मी.}$$

$\therefore$ किया गया कार्य $W = \vec{F}\vec{S}$

$$W = (4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}).(11\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= 44\hat{i}.\hat{i} + 11\hat{j}.\hat{j} - 9\hat{k}.\hat{k}$$

$$= 55 - 9 = 46 \text{ J}$$

$[\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0]$

= 46 जूल

उदा.29.एक वस्तु केवल X अक्ष की दिशा में गति कर सकती है। उस वस्तु पर बल $\vec{F} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ न्यूटन लगाने पर वह 5 मीटर दूरी तय करती है। बल के द्वारा किए गए कार्य की गणना कीजिए।

हल– दिया गया है : $\vec{F} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{d} = 5\hat{i}$$

कार्य $W = \vec{F}.\vec{d}$

$$= (\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}).(5\hat{i})$$

= 5 जूल

उदा.30. सदिश $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, सदिश $\vec{B} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - x\hat{k}$ के लम्बवत् है, तब x का मान क्या होगा?

हल– इस स्थिति में सदिशों का ऐसा गुणनफल प्रयुक्त करना पड़ेगा जिसका मान शून्य हो।

$\because$ $\vec{A}.\vec{B} = AB \cos \theta$

$\because$ $\theta = 90°$

$\therefore$ $\vec{A}.\vec{B} = AB \cos 90° = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{A}.\vec{B} = 0$

$$(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).(5\hat{i} + 2\hat{j} - x\hat{k}) = 0$$

$\Rightarrow \quad 15+2-2x=0$
$\Rightarrow \quad 2x=17$
$\Rightarrow \quad x=8.5$

उदा. 31. सदिश $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{B}=-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल– $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

$\vec{A}.\vec{B}=(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}).(-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$
$=-1+2+2$
$=3$

$A=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2}$
$=\sqrt{6}$

$B=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{6}$

$\therefore \quad \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$=\cos 60°$
$\therefore \quad \theta=60°$

उदा 32. सिद्ध करो कि $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}$ एक दूसरे के लम्बवत् है।

हल– सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् होगें यदि

$\vec{A}.\vec{B}=0$

$\therefore \quad \vec{A}.\vec{B}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}).(2\hat{i}-\hat{j})$
$=2-2=0$

अतः सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् है।

उदा.33. दो सदिशों $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ का परिणामी सदिश $\vec{R}$ है। सदिश $\vec{Q}$ की दिशा विपरीत करने पर परिणामी सदिश $\vec{S}$ हो जाता है तब सिद्ध कीजिए कि $R^2+S^2=2(P^2+Q^2)$

हल– दिया गया है–

$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ तथा

$\vec{P}-\vec{Q}=\vec{S}$

$\therefore$ स्वतः अदिश गुणनफल करने पर

$\vec{R}.\vec{R}=(\vec{P}+\vec{Q}).(\vec{P}+\vec{Q})$

$\Rightarrow \quad R^2=P^2+\vec{P}.\vec{Q}+\vec{Q}.\vec{P}+Q^2 \quad ...(1)$

इसी प्रकार

$\vec{S}.\vec{S}=(\vec{P}-\vec{Q}).(\vec{P}-\vec{Q})$

$\therefore \quad S^2=P^2-\vec{P}.\vec{Q}-\vec{Q}.\vec{P}+Q^2 \quad ...(2)$

समी. (1) व (2) को जोड़ने पर

$R^2+S^2=2P^2+2Q^2$

$\Rightarrow \quad R^2+S^2=2(P^2+Q^2)$ **इतिसिद्धम्**

उदा.34.दो सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के योग व अन्तर परस्पर लम्बवत् है। सिद्ध कीजिए दोनों सदिश परिमाण में बराबर है।

हल– दिया गया है–

$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=0$

$\Rightarrow A^2-\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{A}-B^2=0$

$\because \quad \vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$
$A^2-B^2=0$
$\Rightarrow \quad A^2=B^2$
$\Rightarrow \quad A=B$

उदा.35.दो सदिशों के योग तथा अन्तर परिमाण में परस्पर बराबर है-

$$|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$$

सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् है।

हल– दिया गया है–

$|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$

$\Rightarrow \quad |\vec{A}+\vec{B}|^2=|\vec{A}-\vec{B}|^2$

किसी सदिश का उसी सदिश से अदिश गुणनफल उस सदिश के परिमाण के वर्ग के बराबर होता है।

अतः

$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})$

$\Rightarrow \quad A^2+\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{A}+B^2=A^2-\vec{A}.\vec{B}-\vec{B}.\vec{A}+B^2$

$\Rightarrow \quad \because \quad \vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

$\therefore \quad \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{B}=-\vec{A}.\vec{B}-\vec{A}.\vec{B}$

$\Rightarrow \quad 4(\vec{A}.\vec{B})=0$

$\Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B}=0$

अर्थात् $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का अदिश गुणनफल शून्य है। अतः $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् है।

उदा.36. (i) सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ में यदि $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ तथा $A+B=C$ तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर समान्तर है।

(ii) यदि $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ तथा $A^2+B^2=C^2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् है।

हल– (i) दिया गया है–

$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$

दोनों ओर स्वतः अदिश गुणनफल करने पर

$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=\vec{C}.\vec{C}$

$\Rightarrow \quad A^2+\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{A}+B^2=C^2$

$\Rightarrow \quad A^2+\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{B}+B^2=C^2$

$\Rightarrow \quad A^2+2\vec{A}.\vec{B}+B^2=C^2$

$\Rightarrow \quad A^2+2AB\cos\theta+B^2=C^2 \quad ...(1)$

परन्तु $\quad A+B=C$

$\Rightarrow \quad (A+B)^2=C^2$

$\Rightarrow \quad A^2+2AB+B^2=C^2 \quad ...(1)$

समी. (1) व (2) से तुलना करने पर

$$\cos\theta = 1 = \cos 0°$$
$$\Rightarrow \quad \theta = 0°$$

अतः $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर समान्तर है।

(ii) दिया गया है–

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$\therefore \quad A^2 + 2AB\cos\theta + B^2 = C^2$ [समी.(1) की भांति]

परन्तु $\quad A^2 + B^2 = C^2$

$\therefore \quad 2AB\cos\theta = 0 \quad (\because A \neq 0, B \neq 0)$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0 = \cos 90°$

$\Rightarrow \quad \theta = 90°$

अतः $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् है।

उदा. 37. यदि सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का परिणामी सदिश $\vec{R}$ है तो सदिश $\vec{R}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है–

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

दोनों ओर स्वतः अदिश गुणनफल करने पर

$$\vec{R}\cdot\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} + \vec{B})$$

$\Rightarrow \quad R^2 = A^2 + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + B^2$

$\because \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

$\therefore \quad R^2 = A^2 + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{B} + B^2$

$$R^2 = A^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + B^2$$

यदि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण θ है तो

$$R^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2$$
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

उदा.38. सदिश $\vec{A} = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा सदिश $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल– $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का अदिश गुणनफल

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (5\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k})\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j})$$
$$= 10 + 18$$
$$= 28$$

उदा.39. यदि $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ है तो उसके तीन सम्भावित उत्तर लिखिए।

हल– $\quad \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

यदि $\quad A = 0$ तो $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

या $\quad B = 0$ तो $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

या $\quad \cos\theta = 0$

या $\quad \theta = 90°$ तो $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

अतः $A = 0$ या $B = 0$ या $\theta = 90°$ होने पर $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ होगा।

उदा.40. समान्तर चतुर्भुज की भुजाएँ सदिश $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ तथा सदिश $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j}$ के द्वारा व्यक्त की जाती है। चतुर्भुज के क्षेत्रफल का मान ज्ञात कीजिए।

हल– समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (\hat{i} + 4\hat{j})$$
$$= 8\hat{k} - 3\hat{k}$$
$$= 5\hat{k}$$

$\Rightarrow \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = 5$ इकाई

उदा.41. एक निर्वात पात्र में चुम्बकीय प्रेरण (B)0.2 वेबर/मीटर^2 तथा विद्युत क्षेत्र 10^5 वोल्ट/मीटर परस्पर लम्बवत् लग रहे हैं। इन दोनों क्षेत्रों के लम्बवत् कैथोड़ किरणें अविक्षेपित गुजर रही है। किरणों का वेग ज्ञात करो।

हल– कण पर आरोपित बल $\quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\vec{v} \times \vec{B} = vB\sin\theta$$
$$= vB\sin 90° = vB$$

F के शून्य मान के लिए $\quad E = vB$

$\therefore \quad v = \dfrac{E}{B}$

दिया गया है– $\quad B = 0.2$ वेबर/मीटर^2

$E = 10^5$ वोल्ट/मीटर

अतः $\quad v = \dfrac{10^5}{0.2}$

$= 5 \times 10^5$ मी./से.

उदा.42. यदि सदिश $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 3\hat{i}$ किसी त्रिभुज की दो संगत भुजाओं को निरूपित करते हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}|(\vec{A} \times \vec{B})|$

$$= \frac{1}{2}|(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i})|$$
$$= \frac{1}{2}|(\hat{i} \times 3\hat{i} + \hat{j} \times 3\hat{i} + \hat{k} \times 3\hat{i})|$$
$$= \frac{1}{2}|(0 - 3\hat{k} + 3\hat{j})|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{18}}{2}$$

उदा.43. सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{A} = \hat{i} - 5j$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - 10j$ के मध्य कोण शून्य है।

हल– सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण 0° होगा यदि

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0$$

$\therefore \quad \vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - 5j) \times (2\hat{i} - 10\hat{j})$

$$= -10\hat{k} + 10\hat{k}$$
$$= 0$$

अतः सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण 0° है।

उदा.44.एक इलेक्ट्रॉन चुम्बकीय क्षेत्र से 45° का कोण बनाता हुआ 10^6 मी./से० वेग से गति कर रहा है। यदि चुम्बकीय क्षेत्र का मान 2.0 वेबर/मी.^{2} है तो इलेक्ट्रॉन पर लगने वाले बल का मान ज्ञात करो। ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम)

हल– दिया गया है–

$q = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम
$v = 10^6$ मी./से.
$B = 2.0$ वेबर/मी.^{2}
$\theta = 45^\circ$

चुम्बकीय क्षेत्र में गतिमान आवेश पर बल

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB\sin\theta\ \hat{n}$$

$$F = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^6 \times 2 \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow F = 1.6 \times \sqrt{2} \times 10^{-13} \text{ न्यूटन}$$

उदा.45. यदि बल $\vec{F} = 5\hat{i} - 3j + 2\hat{k}$ न्यूटन किसी वस्तु पर बिन्दु (–3, 4, 1) पर लग रहा हो तो इसका बल आघूर्ण ज्ञात करो।

हल– $\because$ बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{r} = (-3\hat{i} + 4j + \hat{k})$$

$$\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\therefore$ बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(8+3) + \hat{j}(5+6) + \hat{k}(9-20)$$

$$= 11\hat{i} + 11\hat{j} - 11\hat{k}$$

$$\tau = \sqrt{(11)^2 + (11)^2 + (-11)^2}$$

$$= \sqrt{121 + 121 + 121}$$

$$= \sqrt{363}$$

उदा.46. सिद्ध करो कि-

$$(\vec{A} \times \vec{B})^2 + (\vec{A}.\vec{B})^2 = A^2B^2$$

हल– $(\vec{A} \times \vec{B})^2 + (\vec{A}.\vec{B})^2$

$$= (AB\sin\theta.\ \hat{n})^2 + (AB\cos\theta)^2$$
$$= A^2B^2\sin^2\theta + A^2B^2\cos^2\theta \quad (\because \hat{n}\cdot\hat{n} = 1)$$
$$= A^2B^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= A^2B^2$$

उदा 47. m द्रव्यमान का एक कण नियत बल के अन्तर्गत X-अक्ष के अनुदिश गतिशील है। कण के वेग तथा स्थिति के समीकरण व्युत्पन्न करो।

हल– माना कि नियत बल

$$F = ma = K \text{ (नियतांक)}$$

$$\because \quad a = \frac{F}{m}$$

परन्तु
$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad dv = adt = \frac{F}{m}dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = \frac{F}{m}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow [v]_{v_i}^{v_f} = \frac{F}{m}(t)_0^t$$

$$v_f - v_i = \frac{F}{m}t$$

$$\Rightarrow v_f = v_i + \frac{F}{m}t$$

$\Rightarrow$ यदि $v_f = v$ तथा $v_i = u$ माना जाये तब

$$v = u + \frac{F}{m}t$$

या
$$v = u + at \quad ...(1)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow dx = vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_0^t vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_0^t (u + at)dt$$

$$[x]_{x_i}^{x_f} = \left[ut + \frac{1}{2}at^2\right]_0^t$$

$$x_f - x_i = ut + \frac{1}{2}at^2$$

यदि $x_f - x_i = s$ माना जाये

तब
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(2)$$

उदा 48. $\int_\infty^R \frac{GMm}{x^2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

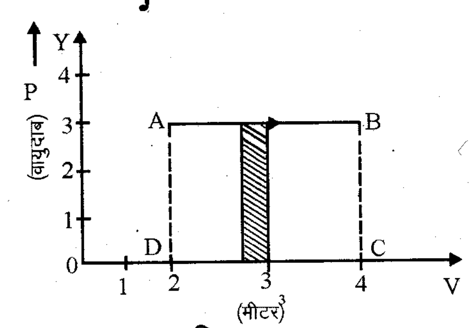
हल–
$$\int_\infty^R \frac{GMm}{x^2}dx = GMm\int_\infty^R x^{-2}dx$$

$$= GMm\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_\infty^R$$

$$= -GMm\left[\frac{1}{x}\right]_\infty^R = -GMm\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$= -GMm\left[\frac{1}{R} - 0\right] = -\frac{GMm}{R}$$

उदा 49. दिये गये चित्र में प्रदर्शित आरेख द्वारा कार्य की गणना करो जबकि कार्य $W = \int PdV$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।



चित्र 2.36

हल– कार्य $W = \int PdV$ = वक्र तथा आयतन अक्ष के मध्य घिरा क्षेत्रफल

= आयत ABCD का क्षेत्रफल

= $(4-2) \times (3-0)$मी.^{3} × वायुदाब

$= 6 \times 10^5$ मी.$^3 \times \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}^2}$

$= 6 \times 10^5$ न्यूटन–मी. $= 6 \times 10^5$ जूल

उदा. 50. 3.14 का लघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल– $\log 3.14 = 0.4969$

उदा. 51. Antilog $\bar{2}.0593$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल– $\bar{2}.0593$ में पूर्णांश 2 तथा अपूर्णांश 0.0593 है। $\bar{2}$ यह व्यक्त करता है कि संख्या एक से छोटी है तथा उस संख्या में दशमलव के पश्चात् अशून्य संख्या आने से पूर्व $2-1=1$ शून्य है।

प्रतिलघुगणक सारणी से संख्या 0.05 के संगत 9 के नीचे 1146 है तथा माध्य अन्तर में 3 के नीचे 1 है। अत: कुल मान $1146+1=1147$ होगा।

∴ Antilog $\bar{2}.0593 = 0.01147$

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. सदिश कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर–सदिशों को निम्न दो भागों में बाँटा गया है–

(i) ध्रुवीय सदिश (ii) अक्षीय सदिश।

प्र.2. तुल्य सदिश किसे कहते हैं?

उत्तर–जब दो सदिशों के परिमाण व दिशा समान हो तब वे परस्पर तुल्य सदिश कहलाते हैं।

प्र.3. एकांक सदिश किसे कहते हैं?

उत्तर–वह सदिश जिसका परिमाण एकांक (1) हो तथा दिशा दिये गये सदिश के समान्तर हो, एकांक सदिश कहलाता है।

प्र.4. X- अक्ष, Y- अक्ष तथा Z- अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश बताइये।

उत्तर–X- अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{i}$, y - आ के अनुदिश $\hat{j}$ तथा z- अक्ष के अनुदिश $\hat{k}$ होता है।

प्र.5. शून्य सदिश किसे कहते हैं?

उत्तर–वह सदिश जिसका परिमाण शून्य हो तथा दिशा स्वच्छ हो, शून्य सदिश $\vec{0}$ कहलाता है।

प्र.6. सदिशों का वियोजन कितने प्रकार का होता है?

उत्तर–सदिशों का वियोजन दो प्रकार का होता है–

(i) द्विविमीय वियोजन, (ii) त्रिविमीय वियोजन

प्र.7. क्या दो सदिशों के परिणामी सदिश का परिमाण दिये गये सदिशों में से किसी एक सदिश के परिमाण से कम हो सकता है?

उत्तर–हाँ, यदि सदिशों के बीच कोण 90° से अधिक है।

प्र.8. निम्न भौतिक राशियों में से अदिश तथा सदिश राशियों को अलग-अलग कीजिए- बल आघूर्ण, पृष्ठ तनाव, संवेग तथा ताप।

उत्तर– अदिश राशियाँ- पृष्ठ तनाव, ताप।

सदिश राशियाँ–बल आघूर्ण, संवेग।

प्र.9. क्या एक अदिश और एक सदिश राशि को जोड़ा जा सकता है?

उत्तर–नहीं, अदिश राशि में दिशा नहीं होती जबकि सदिश राशि में दिशा होती है। अत: दोनों के जोड़ने की बीजगणित में अन्तर होता है।

प्र.10. यदि किसी सदिश राशि का एक घटक शून्य हो व अन्य घटक शून्य न हो तो क्या वह सदिश राशि शून्य हो सकती है?

उत्तर– नहीं।

प्र.11. $\vec{A}.\vec{A}$ का परिमाण कितना होगा?

उत्तर– $\vec{A}.\vec{A} = AA\cos 0° = A^2$

प्र.12. क्या सदिश गुणनफल क्रम विनिमेय होता है?

उत्तर– नहीं, $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$

प्र.13. दो सदिशों के सदिश गुणनफल से प्राप्त सदिश की दिशा क्या होती है?

उत्तर–दो सदिशों के सदिश गुणनफल की दिशा दोनों सदिशों के लम्बवत् दिशा में होती है।

प्र.14. दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल क्या होता है?

उत्तर–दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. प्रदिश किसे कहते हैं?

उत्तर–वे राशियाँ जिनकी स्वयं की कोई दिशा नहीं होती है, परन्तु भिन्न-भिन्न दिशाओं में परिमाण भिन्न-भिन्न होता है, प्रदिश राशियाँ (Tensor Quantities) कहलाती है। उदाहरण–प्रतिबल, जड़त्व आघूर्ण आदि।

प्र.2. अदिश एवं सदिश में अन्तर बताइये।

उत्तर– **(i) अदिश राशियाँ (Scalar quantities)**–वे भौतिक राशियाँ जिन्हें पूर्णतया व्यक्त करने के लिए केवल परिमाण (आंकिक मान तथा मात्रक) की आवश्यकता होती है तथा दिशा की आवश्यकता नहीं होती है, अदिश राशियाँ कहलाती है।

उदाहरण–द्रव्यमान, दूरी, चाल, कार्य (ऊर्जा), समय, आयतन, ताप, घनत्व आदि।

(ii) सदिश राशियाँ (Vector quantities)–वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं तथा जो सदिश नियमों का पालन करती है अर्थात् इनका जोड़ना, घटाना व गुणा करना सदिश नियमों के अनुसार ही होता है, सदिश राशियाँ कहलाती है।

उदाहरण–विस्थापन, वेग, बल, संवेग, बल–आघूर्ण आदि।

प्र.3. सदिशों के योग का त्रिभुज नियम लिखिये।

उत्तर– सदिश योग के त्रिभुज नियम के अनुसार जब किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं को क्रमशः दो सदिशों के परिमाण व दिशा के रूप में समान क्रम में निरूपित किया जाता हैं तब विपरीत क्रम में ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा परिणामी सदिश के परिमाण व दिशा को निरूपित करेगी।

प्र.4. सदिशों के वियोजन की द्विविमीय विधि को समझाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 2.7 का (i) भाग देखें।

प्र.5. दो सदिशों के अदिश गुणनफल को समझाइये।

उत्तर–दो सदिश राशियों का अदिश गुणनफल उन दोनों सदिशों के परिमाण तथा उनके बीच के कोण की कोज्या (cosine) के गुणनफल के बराबर होता है।

माना कि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ दो सदिश है जिनके परिमाण A व B हैं। तब इनका अदिश गुणनफल $\vec{A}.\vec{B}$ (इसे $\vec{A}$ डॉट $\vec{B}$ पढ़ते हैं) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

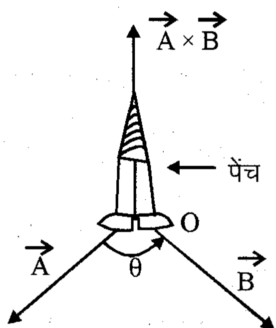
$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

यहाँ θ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के मध्य कोण है।

दो सदिशों के अदिश गुणनफल से अदिश राशि प्राप्त होती है।

प्र.6. सदिशों के सदिश गुणनफल के लिए दक्षिणावर्ती पेंच का नियम लिखिए।

उत्तर–इस नियम के अनुसार यदि दक्षिणावर्ती पेंच (Right Handed Screw) की अक्ष को सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ से पारित तल के लम्बवत् रखकर पेंच को सदिश $\vec{A}$ से सदिश $\vec{B}$ की ओर घुमाने पर पेंच जिस दिशा में रेखीय दूरी तय करता है वह $\vec{A}\times\vec{B}$ की दिशा होगी।



चित्र 2.37

निबन्धात्मक प्रश्न

प्र.1. भौतिकी में अवकलन गणित का उपयोग समझाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 2.9.2 पर देखें।

प्र.2. सदिशों के संयोजन का समान्तर चतुर्भुज का नियम लिखिये। आवश्यक नामांकित चित्र बनाइये। परिणामी सदिश $\vec{R}$ के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

उत्तर–अनुच्छेद 2.6.1 का (ब) भाग देखें।

प्र.3. सदिशों के त्रिविमीय वियोजन को विस्तारपूर्वक समझाइये। आवश्यक चित्र भी बनाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 2.7 का (ii) भाग देखें।

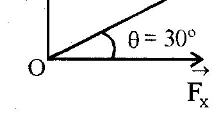
प्र.4. सदिशों के सदिश गुणनफल को आवश्यक चित्र बनाते हुए विस्तारपूर्वक समझाइये।

उत्तर–अनुच्छेद 2.8 का भाग 2 देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. क्षैतिज से 30° कोण पर कार्यरत एक बल का ऊर्ध्वघटक 200N है, आरोपित बल का मान बताइये।

उत्तर–माना कि आरोपित बल $\vec{F}$ का क्षैतिज घटक $\vec{F_x}$ है तब प्रश्नानुसार ऊर्ध्वघटक $F_y = 200N$



चित्र 2.38

$\because \quad F_y = F\sin\theta$

$\Rightarrow \quad 200 = F\sin 30^\circ = \frac{F}{2} \quad \Rightarrow \quad F = 400\,N$

प्र.2. $\vec{A} = (3\hat{i}+4\hat{j})$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल– दिये गये समीकरण की $\vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$ से तुलना करने पर

$A_x = 3$ तथा $A_y = 4$

$\therefore$ $\vec{A}$ का परिमाण

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16}$$

$$A = \sqrt{25} = 5$$

प्र.3. $\vec{A} = (4\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$ के अनुदिश एकांक सदिश लिखिए।

हल– $\vec{A}$ का एकांक सदिश $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$

$\because \quad A = \sqrt{(4)^2+(3)^2+(-5)^2} = \sqrt{16+9+25}$

$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\therefore \quad \hat{A} = \frac{4\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}}{5\sqrt{2}}$

प्र.4. $\frac{d}{dx}(x^7)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$

प्र.5. $\frac{d}{dx}(x^{-3})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

प्र.6. $\int x^4 dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$

यहाँ C समाकलन नियतांक है।

प्र.7. $\int x^{-5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल– $\int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

यहाँ C समाकलन नियतांक है।

प्र.8. संख्या 83256 का पूर्णांश बताइये।

उत्तर– 4

प्र.9. संख्या 0.00356 का पूर्णांश बताइये।

उत्तर– $\bar{3}$

प्र.10. log (8621) का मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर–3.9356

प्र.11. X-Y तल में किसी बिन्दु पर दो बल $\vec{F_1} = (2\hat{i}-3\hat{j})$ N व $\vec{F_2} = (-\hat{i}+3\hat{j})$ N कार्यरत है। परिणामी बल ज्ञात कीजिए।

हल–दिया गया है– $\vec{F_1} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ न्यूटन

$\vec{F_2} = (-\hat{i} + 3\hat{j})$ न्यूटन

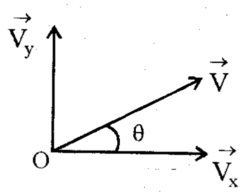
परिणामी बल $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{i} + 3\hat{j}$

$= \hat{i}$ न्यूटन

प्र.12. किसी कण के वेग के दो समकोणीय घटकों में से एक 10m/s अभीष्ट वेग की दिशा से 60° कोण बनाता है तो वेग का दूसरा घटक ज्ञात कीजिए।

हल– माना कि वेग का एक घटक $V_x = 10$ m/s, $\theta = 60°$

तब वेग का दूसरा घटक V_y होने पर



चित्र 2.39

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_y}{10} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad V_y = 10\sqrt{3}\,\text{m/s}$$

प्र.13. पिण्ड पर कार्यरत बल $\vec{F} = (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ एवं विस्थापन $\vec{dr} = (-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ हो तो कार्य की गणना कर बल एवं विस्थापन के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल– कार्य $dW = \vec{F}.\vec{dr} = (\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

$= -1 + 2 + 2 = 3$ मात्रक

बल एवं विस्थापन के मध्य कोण के लिए

$$\cos\theta = \frac{\vec{F}.\vec{dr}}{Fdr}$$

$\because \quad \vec{F}.\vec{dr} = 3$

तथा $\quad F = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$dr = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60°$$

$\therefore \quad \theta = 60°$

प्र.14. यदि एक इलेक्ट्रॉन $\vec{B} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})T$ के चुम्बकीय क्षेत्र में $\vec{V} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})m/s$ वेग से गति करे तो लॉरेन्ज बल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया गया है– $\vec{B} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})T$

$\vec{V} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})m/s$

$\because$ यदि q आवेश $\vec{v}$ वेग से चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ में गतिमान हो तो उस पर क्षेत्र $\vec{B}$ के कारण बल

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

आवेशित कण इलेक्ट्रॉन होने पर

$$\vec{F} = -e\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = -1.6 \times 10^{-19} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\vec{F} = -1.6 \times 10^{-19}[\hat{i}(3-1) + \hat{j}(2+2) + \hat{k}(2+6)]$ न्यूटन

$\vec{F} = -1.6 \times 10^{-19}(2\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k})$ न्यूटन

प्र.15. एक कण की स्थितिज ऊर्जा $U = y^2 \sin y$ है। इस कण पर कार्यरत बल $F = -\frac{dU}{dy}$ द्वारा परिभाषित है। बल का मान ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार $F = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}(y^2 \sin y)$

$$F = -\left[y^2 \frac{d}{dy}(\sin y) + \sin y \frac{d}{dy}(y^2)\right]$$

$F = -[y^2 \cos y + 2\,y \sin y]$

प्र.16. कण के कोणीय संवेग तथा बल आघूर्ण में निम्न संबंध होता है–

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

यदि $\vec{\tau} = (t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k})$ है एवं क्षण t = 0 पर $\vec{J} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k})$ है तो $\vec{J}$ को समय के फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल–दिया गया है– $\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$

$\Rightarrow \quad d\vec{J} = \vec{\tau}\,dt$

$\Rightarrow \quad \int d\vec{J} = \int \vec{\tau}\,dt$

$\Rightarrow \quad \vec{J} = \int (t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k})dt$

$\Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{t^2}{2}\hat{i} + \frac{t^3}{3}\hat{j} + \frac{t^4}{4}\hat{k} + C \qquad ...(i)$

जहाँ c समाकलन नियतांक है।

प्रश्नानुसार t = 0 समय पर $\vec{J} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore$ समीकरण (1) में उपरोक्त मान प्रतिस्थापित करने पर

$C = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore$ समीकरण (1) से

$$\vec{J} = \frac{t^2}{2}\hat{i} + \frac{t^3}{3}\hat{j} + \frac{t^4}{4}\hat{k} + 3\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{J} = \left(\frac{t^2}{2} + 3\right)\hat{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 4\right)\hat{j} + \left(\frac{t^4}{4} + 7\right)\hat{k}$$