

नाम

131/1

334 (DV)

2018

गणित

प्रथम प्रश्न-पत्र

(बीजगणित, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन तथा निर्देशांक ज्यामिति)

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 50]

नोट :

- प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- इस प्रश्न-पत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।
- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
- प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

334 (DV)

1

P.T.O.

L निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) वृत्त $3x^2 + 3y^2 + 14x + 10y + 8 = 0$ पर x -अक्ष से कटी जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

1

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(A')' = A$.

1

(ग) असमिका $8x + 4 < 7x + 8$ को हल कीजिए।

1

(घ) x का मान ज्ञात कीजिए, यदि

$$\tan^{-1}(x^{-1}) = \cot^{-1}\left(\frac{4}{x}\right).$$

1

(ङ) यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + \lambda = 0$, x -अक्ष को स्पर्श करता है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

334 (DV)

2

1

2. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$,

तो x, y, z का मान ज्ञात कीजिए ।

2

(ख) यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

हो, तो दिखाइए कि $|3A| = 27|A|$.

2

(ग) यदि $\sin^{-1} \frac{5}{x} + \sin^{-1} \frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

2

(घ) xy तल में उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x = 0$, $y = 0$ तथा $x = c$ को स्पर्श करता है ।

2

(ङ) असमिका $\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$

को हल कीजिए ।

2

3. निम्नलिखित में से किन्हीं चार खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0.$$

2

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1} \frac{a}{b} - \tan^{-1} \frac{a-b}{a+b} = \frac{\pi}{4}.$$

2

(ग) दीर्घवृत्त $12x^2 + 5y^2 = 60$ की उत्केन्द्रता तथा नाभियाँ ज्ञात कीजिए ।

2

(घ) अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ तथा अनुप्रस्थ अक्ष 8 हैं ।

2

(ङ) बिन्दुओं $P(2, -4, 6)$ तथा $Q(-5, 2, 7)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

2

4. निम्नलिखित में से किन्हीं *तीन* खण्डों को हल कीजिए :

(क) असमिका $4x + 3y > 12$ को आलेखीय विधि से हल कीजिए । 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \cos^{-1} \frac{1 - ab}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}}. \quad 3$$

(ग) यदि तीन बिन्दुओं A, B और C के निर्देशांक क्रमशः $(3, 0, 4), (-2, -2, 4)$ तथा $(8, 2, 4)$ हैं, तो दिखाइए कि बिन्दु A, B और C सरेख हैं । 3

(घ) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ तथा

आव्यूह $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हैं,

तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$. 3

5. निम्नलिखित में से किन्हीं *तीन* खण्डों को हल कीजिए :

(क) दर्शाइए कि वृत्त $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 26 = 0$ एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं । 3

(ख) यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ तो सिद्ध कीजिए कि $x + y + z = xyz$. 3

(ग) दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी एक नाभि $(3, 4)$, संगत नियता $3x + 4y = 5$ तथा उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$ हो । 3

(घ) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 - yz \\ 1 & y & y^2 - zx \\ 1 & z & z^2 - xy \end{vmatrix} = 0. \quad 3$$

6. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) सारणियों के गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2. \quad 4$$

(ख) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । 4

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) परवलय $4y^2 - 6x - 4y = 5$ की नाभि, अक्ष और नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए । 4

(ख) बिन्दु A और B के निर्देशांक क्रमशः $(-2, 2, 3)$ तथा $(13, -3, 13)$ हैं । यदि कोई बिन्दु P इस प्रकार गमन करता है कि $3PA = 2PB$, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 12y + 10z - 247 = 0$ होगा । 4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि अतिपरवलय

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ तथा}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

की उत्केन्द्रताएँ क्रमशः e_1 तथा e_2 हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = 1$.

(ख) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 4

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$x + 4y + 9z = 6$$

(English Version)

Note :

- i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all **eight** questions in this question paper.
- (iii) **All** questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start from the first question and proceed to the last.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt any **four** parts of the following :

- (a) Find the length of the chord intercepted by the x -axis and the circle $3x^2 + 3y^2 + 14x + 10y + 8 = 0$. 1
- (b) If $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, then prove that $(A')' = A$. 1
- (c) Solve the inequality $8x + 4 < 7x + 8$. 1
- (d) Determine the value of x when $\tan^{-1}(x^{-1}) = \cot^{-1}\left(\frac{4}{x}\right)$. 1
- (e) If the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + \lambda = 0$ touches the x -axis, find the value of λ .

4. Attempt any **four** parts of the following :

(a) If $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$,

find the values of x, y, z .

2

(b) If $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$,

then show that $|3A| = 27|A|$.

2

(c) If $\sin^{-1} \frac{5}{x} + \sin^{-1} \frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$, find the value of x .

2

(d) Determine the equation of a circle in xy plane such that it touches the lines $x=0$, $y=0$ and $x=c$.

2

(e) Solve the inequality

$$\frac{x}{2} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$$

2

3. Attempt any **four** parts of the following :

(a) Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Prove that

$$\tan^{-1} \frac{a}{b} - \tan^{-1} \frac{a-b}{a+b} = \frac{\pi}{4}.$$

2

(c) Find the eccentricity and foci of an ellipse given by $12x^2 + 5y^2 = 60$.

2

(d) Find the equation of a hyperbola whose foci are $(\pm 5, 0)$ and transverse axis is 8.

2

(e) Find the distance between the points $P(2, -4, 6)$ and $Q(-5, 2, 7)$.

2

4. Attempt any **three** parts of the following :

(a) Solve the inequality $4x + 3y > 12$ graphically. 3

(b) Prove that

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \cos^{-1} \frac{1 - ab}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}}.$$
 3

(c) If the coordinates of the three points A , B and C are $(3, 0, 4)$, $(-2, -2, 4)$ and $(8, 2, 4)$ respectively, then show that the points A , B and C are collinear. 3

(d) If A and B are matrices given by

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

prove that $(AB)' = B'A'$. 3

5. Attempt any **three** parts of the following :

(a) Show that the circles
 $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0$ and
 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 26 = 0$ touch each other externally. 3

(b) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$,
 prove that $x + y + z = xyz$. 3

(c) Find the equation of an ellipse whose one focal point is at $(3, 4)$ and corresponding directrix is $3x + 4y = 5$ with eccentricity $\frac{2}{3}$. 3

(d) Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 - yz \\ 1 & y & y^2 - zx \\ 1 & z & z^2 - xy \end{vmatrix} = 0.$$
 3

6. Attempt any **one** part of the following :

(a) Using the properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2. \quad 4$$

(b) If matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ then find } A^{-1}. \quad 4$$

7. Attempt any **one** part of the following :

(a) Find the focal point, axis and the equation of directrix of the parabola $4y^2 - 6x - 4y = 5$. 4

(b) The coordinates of the points A and B are $(-2, 2, 3)$ and $(13, -3, 13)$ respectively. If any point P moves such that $3PA = 2PB$, then prove that the locus of the point P is

$$x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 12y + 10z - 247 = 0. \quad 4$$

8. Attempt any **one** part of the following :

(a) If e_1 and e_2 are the eccentricities of the hyperbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ and}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

respectively, prove that $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = 1$. 4

(b) Solve the following equations by using matrix method : 4

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$x + 4y + 9z = 6$$