6 ರೇಖಾಗಣಿತ

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ
- ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ
- ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು
- ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ
- ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - Pythagoras

6.1 ಪೀಠಿಕೆ

ರೇಖಾಗಣಿತವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ವಿಭಾಗವಾಗಿದ್ದು, ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆಗಳ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೇ ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಂದ ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕಾರಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನವು ವ್ಯಕ್ತಿಯು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಚಿಂತಿಸುವಂತೆ ಅವರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಕ್ರಿ. ಪೂ. 300ರ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪಿತಾಮಹ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಅಥವಾ ಸ್ವೀಕೃತ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಕೆಲವು ಸ್ವ–ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರಿತ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಊಹೆಗಳು ಮತ್ತು ಹಿಂದೆ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ನಿಗಮನ ತಾರ್ಕಿಕತೆಗಳಿಂದ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಚಿಂತನೆಯ ಹೊಸ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದರು.

ಇಂಜಿನೀಯರಿಂಗ್ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತುಶಿಲ್ಪಗಳಂತಹ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿರುವ ಹಲವಾರು ಸೇತುವೆಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಬಾಳಿಕೆ ಬರುವಂತೆ ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಸೇತುವೆಯು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣದ ಒತ್ತಡವನ್ನು ತಡೆಯಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಕಟ್ಟಡಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಎರಡು ಪಾತ್ರಗಳನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತದೆ; ರಚನೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಬಾಳಿಕೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಸೌಂದರ್ಯವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸುವುದು. ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಆಕಾರಗಳ ಸಮರ್ಪಕ ಬಳಕೆಯು ಕಟ್ಟಡಗಳು ಮತ್ತು ತಾಜ್‌ಮಹಲ್‌ಗಳಂತಹ ಇತರೆ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲರ ಮೆಚ್ಚುಗೆಗೆ ಪಾತ್ರವಾಗುವ ಹೆಗ್ಗುರುತುಗಳಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಹಲವಾರು ಶಾಖೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತರಿಸುವಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆಗಳು ಮಹತ್ವದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯವು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಥೇಲ್ಸ್‌ರ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್
(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 300)
ಗ್ರೀಕ್

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರ 'ಅಂಶಗಳು' (ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್) ಎಂಬುದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಪ್ರಬಲ ವರ್ಚಸ್ಸಿನ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸಲು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗಿದೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರ ಅಲ್ಗಾರಿದಮ್ ಎಂಬುದು ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಜಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಮರ್ಥವಾದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಯಾವುದೇ ಕೋನ XAY ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ ಮೂಲಮಾನ (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಆಗುವಂತೆ AX ಭುಜದ ಮೇಲೆ P_1, P_2, D, P_3 ಮತ್ತು B (ಐದು ಬಿಂದುಗಳೆಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿರಿ. B ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ AY ಭುಜವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. D ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ AC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

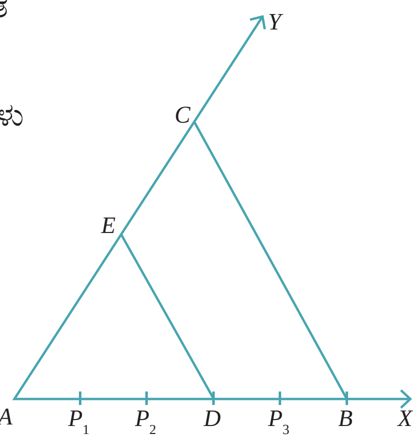
ಮತ್ತು $DB = DP_3 + P_3B = 2$ ಮೂಲಮಾನಗಳು

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$

AE ಮತ್ತು EC ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔABC ಯಲ್ಲಿ $DE \parallel BC$ ಆದರೆ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



ಚಿತ್ರ 6.1

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವಾ ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಾವು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

6.2 ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಮತ್ತು ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳು (Basic proportionality and Angle Bisector theorems)

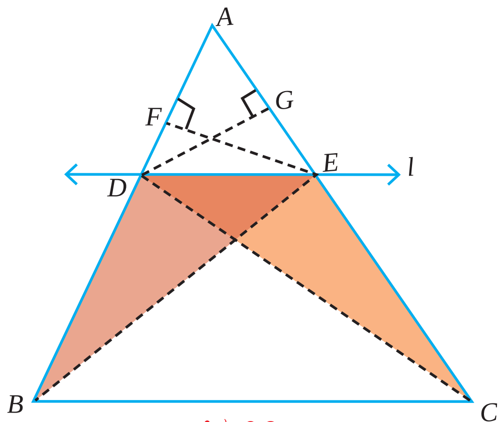
ಪ್ರಮೇಯ 6.1 **ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವಾ ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ**

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ: ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ l ಸರಳ ರೇಖೆಯು ABಯನ್ನು Dನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು Eನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ರಚನೆ: BE, CD ಸೇರಿಸಿರಿ. $EF \perp AB$ ಮತ್ತು $DG \perp CA$ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.2

ಸಾಧನೆ

$EF \perp AB$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ADE ಮತ್ತು DBE ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಎತ್ತರವು EF ಆಗಿದೆ.

(ΔADE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ $= \frac{1}{2} AD \times EF$ ಮತ್ತು

(ΔDBE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ $= \frac{1}{2} DB \times EF$

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DBE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EF}{\frac{1}{2} DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

ಹೀಗೆಯೇ,

$$\frac{\Delta ADE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta DCE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

ಆದರೆ ΔDBE ಮತ್ತು ΔDCE ಗಳು DE ಎಂಬ ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿವೆ ಹಾಗೂ BC ಮತ್ತು DE ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇವೆ.

$\therefore$ (ΔDBE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $=$ (ΔDCE) ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉಪ ಪ್ರಮೇಯ

ΔABC ಯಲ್ಲಿ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ DE ಸರಳರೇಖೆಯು AB ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, (i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

ಸಾಧನೆ

(i) ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಆದರೆ, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

ಇದನ್ನು ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

$\Rightarrow \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$

ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊದಿಂದ

(ii) ಹೀಗೆಯೇ,

$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ ಎಂದು ನಾವು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗುವುದೇ? ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

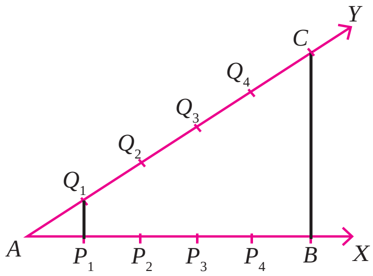
ಯಾವುದೇ ಕೋನ XAY ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ ಮೂಲಮಾನ (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಆಗಿರುವಂತೆ AX ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P_1, P_2, P_3, P_4 ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಹೀಗೆಯೇ, $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ ಮೂಲಮಾನಗಳು (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಆಗಿರುವಂತೆ AY ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಈಗ P_1Q_1 ಮತ್ತು BC ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\dfrac{AQ_1}{Q_1C} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{AP_1}{P_1B} = \dfrac{AQ_1}{Q_1C}$



ಚಿತ್ರ 6.3

P_1Q_1 ಮತ್ತು BC ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, $P_1Q_1 \parallel BC$. (1)

ಹೀಗೆಯೇ, P_2Q_2, P_3Q_3 ಮತ್ತು P_4Q_4 ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ

$\dfrac{AP_2}{P_2B} = \dfrac{AQ_2}{Q_2C} = \dfrac{2}{3}$ ಮತ್ತು $P_2Q_2 \parallel BC$ (2)

$\dfrac{AP_3}{P_3B} = \dfrac{AQ_3}{Q_3C} = \dfrac{3}{2}$ ಮತ್ತು $P_3Q_3 \parallel BC$ (3)

$\dfrac{AP_4}{P_4B} = \dfrac{AQ_4}{Q_4C} = \dfrac{4}{1}$ ಮತ್ತು $P_4Q_4 \parallel BC$ (4)

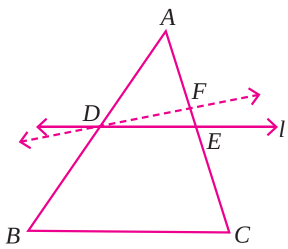
(1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವನ್ನು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.2

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ (ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.4

ದತ್ತ : l ರೇಖೆಯು ABC ತ್ರಿಭುಜದ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ಆಗುವಂತೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. (1)

ಸಾಧನೀಯ : $DE \parallel BC$

ರಚನೆ : DE ಎಂಬುದು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ DF ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $DF \parallel BC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,
$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$$

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore\ FC = EC$$

ಇದು F ಮತ್ತು E ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore\ DE \parallel BC$.

ಪ್ರಮೇಯ 6.3 ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ (Angle Bisector Theorem)

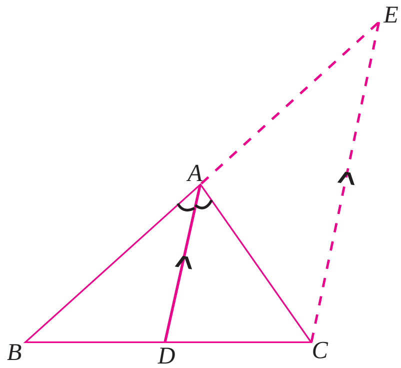
ತ್ರಿಭುಜದ ಆಂತರಿಕ (ಬಾಹ್ಯ) ಕೋನಾರ್ಧಕವು ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅನುಗುಣವಾದ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ *(i)* (ಆಂತರಿಕವಾಗಿ)

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು, D ನಲ್ಲಿ BC ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ : $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$

ರಚನೆ : CE ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ DA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.5

ಸಾಧನೆ

$CE \parallel DA$ ಮತ್ತು AC ಯು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle DAC = \angle ACE$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) (1)

ಮತ್ತು $\angle BAD = \angle AEC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) (2)

AD ಯು $\angle A$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\angle BAD = \angle DAC$ (3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ, $\angle ACE = \angle AEC$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ACE$ ಯಲ್ಲಿ $AE = AC$ (ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)

$\triangle BCE$ ಯಲ್ಲಿ, $CE \parallel DA$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

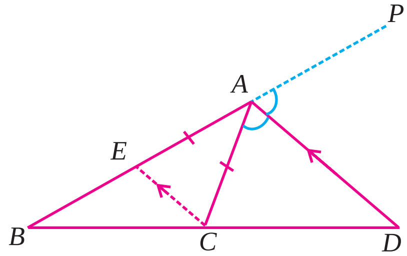
$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (AE = AC)$$

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಗತಿ *(ii)* (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) (ಈ ಭಾಗವು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ)

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕ ಮತ್ತು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$



ಚಿತ್ರ 6.6

ರಚನೆ : AB ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ, DA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $CE \parallel DA$ ಮತ್ತು AC ಯು ಅಡ್ಡರೇಖೆ (ಛೇದಕ) ಆಗಿದೆ.

$\angle ECA = \angle CAD$ (ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) (1)

$CE \parallel DA$ ಮತ್ತು BP ಯು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

$$\angle CEA = \angle DAP \qquad \text{(ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)} \qquad (2)$$

ಆದರೆ AD ಯು $\angle CAP$ ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$$\angle CAD = \angle DAP \qquad (3)$$

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ,

$$\angle CEA = \angle ECA$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ECA$ ಯಲ್ಲಿ, $AC = AE$ (ಸಮನಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)

$\triangle BDA$ ರಲ್ಲಿ, $EC \parallel AD$

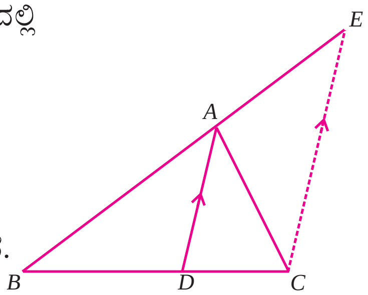
$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \qquad \text{(ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \qquad (AE = AC)$$

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.4

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ಇನ್ನುಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ರೇಖೆಯು ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ ಕೋನವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.7

ಸಂಗತಿ *(i)* : (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ)

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ಆಗುವಂತೆ BC ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

ಸಾಧನೀಯ : AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.
ಅಂದರೆ, $\angle BAD = \angle DAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

ರಚನೆ : ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ C ನ ಮೂಲಕವಾಗಿ AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $CE \parallel AD$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$$\therefore \quad AE = AC$$

$\triangle ACE$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle ACE = \angle AEC \qquad (AE = AC)$ (3)

AC ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle DAC = \angle ACE$ (ಒಳ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು ಸಮ) (4)

BE ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle BAD = \angle AEC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ) (5)

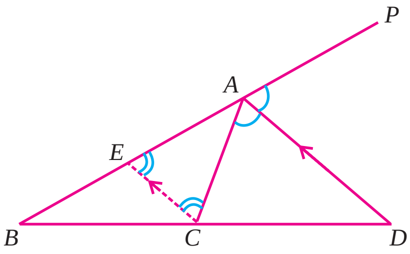
(3), (4) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ,

$\angle BAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ.

ಸಂಗತಿ ***(ii)*** (ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) (ಈ ಭಾಗವು ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ)



ಚಿತ್ರ 6.8

ದತ್ತ : $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ AD ರೇಖೆಯು ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ಆಗುವಂತೆ ವಿಭಾಗಸುತ್ತದೆ. (1)

ಸಾಧನೀಯ: AD ಯು $\angle PAC$ ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\angle PAD = \angle DAC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

ರಚನೆ : C ನ ಮುಖಾಂತರವಾಗಿ BA ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ AD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ CE ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ $CE \parallel DA$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{EA}$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \quad \therefore\ AE = AC$$

$\triangle ACE$ ರಲ್ಲಿ, $\angle ACE = \angle AEC$ $(AE = AC)$ (3)

AC ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle ACE = \angle DAC$ (ಒಳ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು) (4)

BA ಯು AD ಮತ್ತು CE ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$\angle PAD = \angle AEC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) (5)

(3), (4) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ,

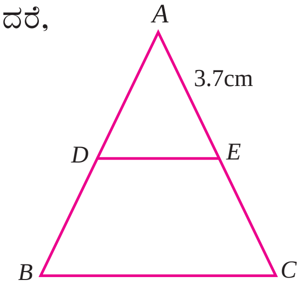
$\angle PAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD ಯು $\angle PAC$ ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.1

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಮತ್ತು $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$. $AE = 3.7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, EC ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.9

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$.

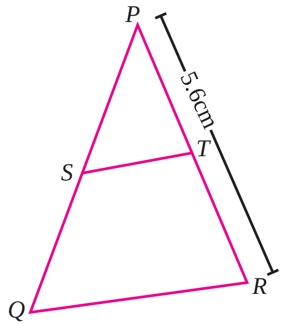
$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ)

$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.2

$\triangle PQR$ ರಲ್ಲಿ, $ST \parallel QR$ ಮತ್ತು $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ ಆಗಿರುವಂತೆ PQ ಮೇಲಿನ S ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. $PR = 5.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PT ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.10

ಪರಿಹಾರ $\triangle PQR$ ರಲ್ಲಿ, $ST \parallel QR$

ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ (1)

$PT = x$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1) ರಿಂದ, $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

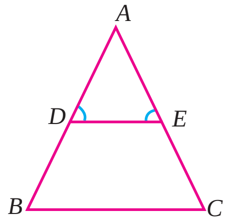
$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$

$5x = 16.8 - 3x$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{16.8}{8} = 2.1$ ಅಂದರೆ, PT = 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.3

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಮತ್ತು $\angle ADE = \angle DEA$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $\triangle ABC$ ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.11

ಪರಿಹಾರ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದಿಂದ, $DE \parallel BC$.

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC$ (1)

ಮತ್ತು $\angle DEA = \angle BCA$ (2)

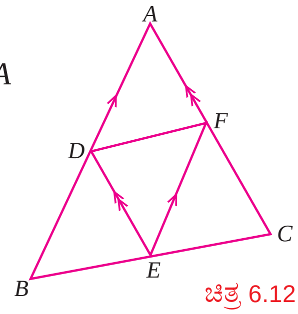
ಆದರೆ $\angle ADE = \angle DEA$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (3)

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ, $\angle ABC = \angle BCA$

$\therefore \quad AC = AB$ (ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\triangle ABC$ ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.4



ಚಿತ್ರ 6.12

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, D, E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC ಮತ್ತು CA ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ $DE \parallel AC$ ಮತ್ತು $FE \parallel AB$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel AC$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \quad \text{(ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ)} \qquad (1)$$

$FE \parallel AB$ ಎಂದು ಕೂಡ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FC} \quad \text{(ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯ)} \qquad (2)$$

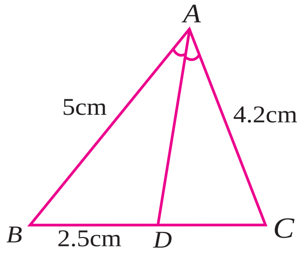
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{BD + AD}{AD} = \frac{AF + FC}{FC} \quad \text{(ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊ ನಿಯಮದಿಂದ)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.5



ಚಿತ್ರ 6.13

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕ AD ಯು BC ಬಾಹುವನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $BD = 2.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AC = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, DC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{(ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ)}$$

$$\Longrightarrow \quad DC = \frac{BD \times AC}{AB}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $DC = \frac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.6

$\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AE ಯು $\angle A$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $AB = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $BC = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, CE ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

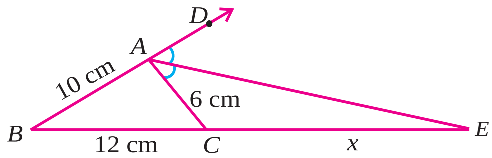
ಪರಿಹಾರ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AE ಯು $\angle A$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

$CE = x$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ. ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{12 + x}{x} = \frac{10}{6}$$

$3(12 + x) = 5x$. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 18$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $CE = 18$ ಸೆಂ.ಮೀ.

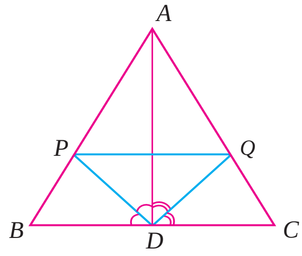


ಚಿತ್ರ 6.14

ಉದಾಹರಣೆ 6.7

$\triangle ABC$ ಯ BC ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು D ಆಗಿದೆ. DP ಯು $\angle BDA$ ವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತು DQ ಯು $\angle ADC$ ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವಂತೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, $PQ \parallel BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ $\triangle ABD$ ಯಲ್ಲಿ, DP ಯು $\angle BDA$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.15

$\therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BD}$ (ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ) (1)

$\triangle ADC$ ಯಲ್ಲಿ, DQ ಯು $\angle ADC$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ.

$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{DC}$ (ಕೋನಾರ್ಧಕ ಪ್ರಮೇಯ) (2)

ಆದರೆ $BD = DC$ (D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು)

(2) $\Longrightarrow \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AD}{BD}$ (3)

(1) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ,

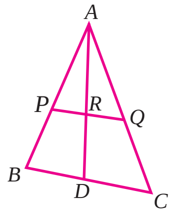
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $PQ \parallel BC$. (ಥೇಲ್ಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

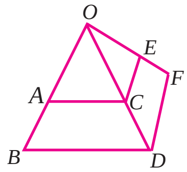
1. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು.
   (i) $AD = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $DB = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AC ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $AD = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ ಆದರೆ, CE ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iii) $AD = 4x–3, BD = 3x–1, AE = 8x–7$ ಮತ್ತು $EC = 5x–3$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AP = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AR = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AC = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AD ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

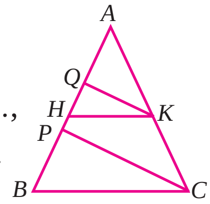


3. $\triangle PQR$ ನ PQ ಮತ್ತು PR ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ E ಮತ್ತು F ಆಗಿವೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ $EF \parallel QR$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
   (i) $PE = 3.9$ ಸೆಂ.ಮೀ., $EQ = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PF = 3.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $FR = 2.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.
   (ii) $PE = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QE = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PF = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $RF = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ.

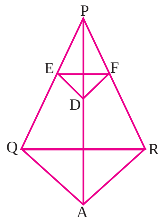
4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AC \parallel BD$ ಮತ್ತು $CE \parallel DF$. $OA = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ., $OC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $EF = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, FO ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



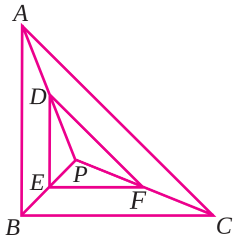
5. $ABCD$ ಯು ಒಂದು ಚತುಭುಜವಾಗಿದ್ದು AB ಯು CD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು AD ಯನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



6. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $PC \parallel QK$ ಮತ್ತು $BC \parallel HK$. $AQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QH = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $HP = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $KC = 18$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AK ಮತ್ತು PB ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



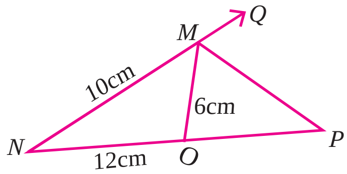
7. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $DE \parallel AQ$ ಮತ್ತು $DF \parallel AR$ ಆದರೆ, $EF \parallel QR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



8. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $DE \parallel AB$ ಮತ್ತು $DF \parallel AC$ ಆದರೆ, $EF \parallel BC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, AD ಯು $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು, BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.
   (i) $BD = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $DC = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (ii) $AB = 5.6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $DC = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, BC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (iii) $AB = x$, $AC = x–2$, $BD = x+2$ ಮತ್ತು $DC = x–1$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ $\triangle ABC$ ಯ $\angle A$ ನ ಅರ್ಧಕವು AD ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.
   (i) $AB = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BD = 1.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 2.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.
   (ii) $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AC = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BD = 1.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ.



11. $\triangle MNO$ ರಲ್ಲಿ, MP ಯು $\angle M$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದ್ದು, ವೃದ್ಧಿಸಿದ NO ವನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $MN = 10$ ಸೆಂ.ಮೀ., $MO = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $NO = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, OP ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $\angle B$ ಮತ್ತು $\angle D$ ಗಳ ಅರ್ಧಕಗಳು AC ಯ ಮೇಲೆ E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

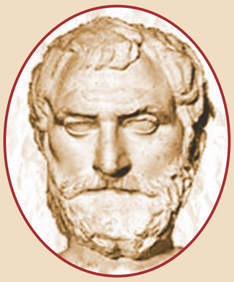
13. ΔABC ಯ $\angle A$ ನ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕವು BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\angle A$ ನ ಬಾಹ್ಯ ಅರ್ಧಕವು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $ABCD$ ಯು $AB = AD$ ಆಗುವುದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. AE ಮತ್ತು AF ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle DAC$ ಗಳ ಆಂತರಿಕ ಅರ್ಧಕಗಳಾದರೆ, $EF \parallel BD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6.3 ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (Similar triangles)

8 ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾವು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಎರಡು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕಾದ ಕಡ್ಡಾಯವಿಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಮರೂಪಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

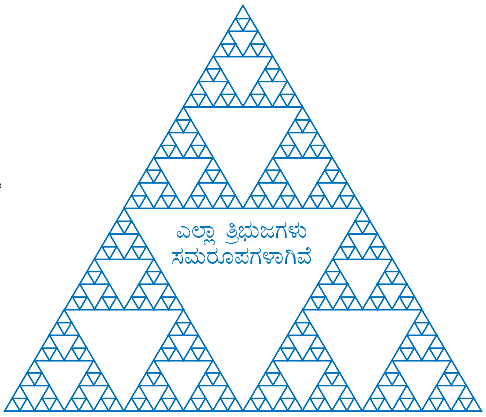
ನಮ್ಮ ಸುತ್ತಮುತ್ತಲೂ, ನಾವು ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಅಥವಾ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳುಳ್ಳ ಹಲವಾರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಮರದ ಎಲೆಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಆದರೆ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಅಥವಾ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಒಂದೇ ನೆಗೆಟಿವ್‌ನಿಂದ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರಗಳ ಚಿತ್ರಪಟಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಆದರೆ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಆದರೆ ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು **ಸಮರೂಪ ವಸ್ತುಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.



ಮಿಲೆಟಸ್‌ನ ಥೇಲ್ಸ್
(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 624-546) ಗ್ರೀಕ್

ಥೇಲ್ಸ್ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿ, ವಿಜ್ಞಾನಿ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿರುವ ನಿಗಮನ ತರ್ಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಬಳಸಿದ ಕೀರ್ತಿಗೆ ಪಾತ್ರರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಪ್ರತಿಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಇವರ ವಿಧಾನವು ಹಲವಾರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಗಮನವನ್ನು ಸೆಳೆದಿದೆ. ಇವರು ಕ್ರಿ.ಪೂ. 585 ರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಸೂರ್ಯಗ್ರಹಣವನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ತಿಳಿಸಿದ್ದರು.

ಥೇಲ್ಸ್ರವರನ್ನು ಗ್ರೀಕ್‌ನಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದವರು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ತತ್ವ ಮತ್ತು ನೆರಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಥೇಲ್ಸ್‌ರವರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ನಂಬಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಳಕೆಯು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸಿದೆ. ಇವರು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದದ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿದರು. ಇವರು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ.



ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ ಹಾಗೂ ಈ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಸರಳವಾದ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಲು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

- ಒಂದು ರಟ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನೀಯ ರಂಧ್ರವನ್ನು ಮಾಡಿ.
- ನೆಲದಿಂದ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಮೇಲೆ ಈ ರಟ್ಟನ್ನು ಸೂರ್ಯನ ಬೆಳಕಿಗೆ ಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ನೆಲದ ಮೇಲೆ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ಆಕಾರಗಳು ರಚನೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡಲು ರಟ್ಟನ್ನು ನೆಲದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ.
- ನೆಲಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕದಾಗುತ್ತದೆ. ನೆಲದಿಂದ ದೂರ ಹೋದಂತೆ, ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತದೆ.
- ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಾತ್ರಗಳು ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೂ ಕೂಡ, ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳ ಗಾತ್ರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

(i) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ (ಅಥವಾ)

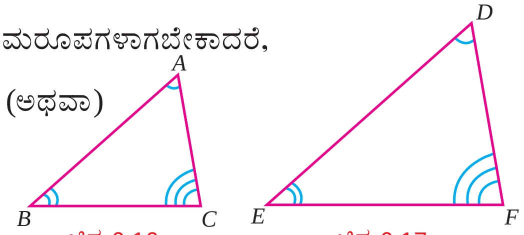
(ii) ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದ (ಸಮಾನುಪಾತದ) ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ,

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ABC ಮತ್ತು DEF ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ,

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$ (ಅಥವಾ)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ ಆಗಿರಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 6.16 ಚಿತ್ರ 6.17

ಇಲ್ಲಿ, A, B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ D, E ಮತ್ತು F ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ, ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ಎಂಬಂತೆ ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\triangle ABC$ ಯು $\triangle DEF$ ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. '$\sim$' ಸಂಕೇತವು 'ಸಮರೂಪ' ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$\triangle ABC$ ಮತ್ತು $\triangle DEF$ ಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪವಾದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\triangle BCA \sim \triangle EFD$ ಮತ್ತು $\Delta CAB \sim \Delta FDE$ ಎಂಬಂತೆಯೂ ಕೂಡ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು.

6.3.1 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಮಾನದಂಡ (Criteria for similarity of triangles)

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಮಾನದಂಡಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ.

(i) ಕೋಕೋ (ಕೋನ–ಕೋನ) ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಗಮನಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳು ಕೂಡ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡವನ್ನು ಕೋಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಕೂಡ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಬಾಬಾಬಾ (ಬಾಹು–ಬಾಹು–ಬಾಹು) ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡ

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ (ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ) ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

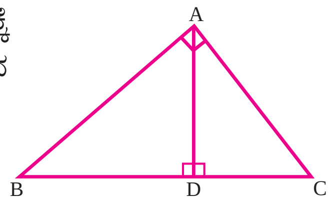
(iii) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಬಾಕೋಬಾ (ಬಾಹು–ಕೋನ–ಬಾಹು) ಸಮರೂಪತೆಯ ಮಾನದಂಡ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ ಮತ್ತು ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧನೆರಹಿತವಾಗಿ ನಾವು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

(i) ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಶೃಂಗದಿಂದ ಅದರ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪೂರ್ಣ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



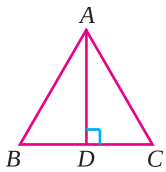
ಚಿತ್ರ 6.18

ಇಲ್ಲಿ, (a) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, ABC$

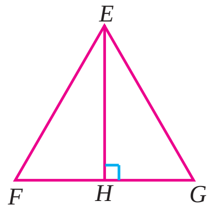
(b) $\Delta\, DAC \sim \Delta\, ABC$

(c) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, DAC$

(iii) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾದರೆ, ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಔನ್ನತ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.19



ಚಿತ್ರ 6.20

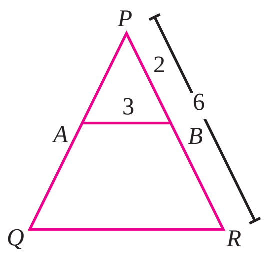
ಅಂದರೆ, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ ಆದರೆ, $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{CA}{GE} = \dfrac{AD}{EH}$

(iv) ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾದರೆ, ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅನುರೂಪ ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ ಆದರೆ, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.8

ΔPQR ರಲ್ಲಿ, $AB \parallel QR$. AB ಯು 3ಸೆಂ.ಮೀ., PB ಯು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು PR ಯು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, QR ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.21

ಪರಿಹಾರ AB ಯು 3ಸೆಂ.ಮೀ., PB ಯು 2 ಸೆಂ.ಮೀ., PR ಯು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel QR$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ΔPAB ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle PAB = \angle PQR$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle P$ ಯು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ.

$\therefore\ \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{PB}{PR}$$

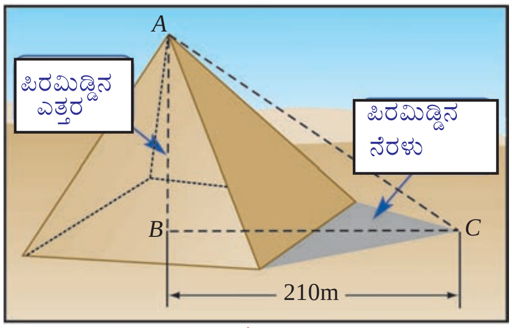
$$QR = \frac{AB \times PR}{PB}$$

$$= \frac{3 \times 6}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $QR = 9$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.9

1.8 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ. ಮನುಷ್ಯನ ನೆರಳು 2.7 ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ನೆರಳು 210 ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.22

ಪರಿಹಾರ AB ಮತ್ತು DE ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಿರಮಿಡ್ ಮತ್ತು ಮನುಷ್ಯನ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

BC ಮತ್ತು EF ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಿರಮಿಡ್ ಮತ್ತು ಮನುಷ್ಯನ ನೆರಳುಗಳ ಉದ್ದಗಳಾಗಿರಲಿ.

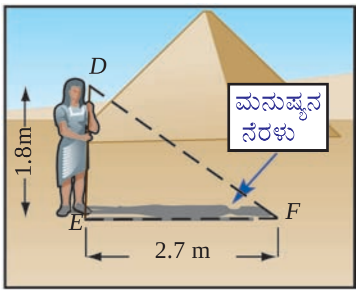
ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ,

$$\angle ABC = \angle DEF = 90^{\circ}$$

$$\angle BCA = \angle EFD$$

(ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)



ಚಿತ್ರ 6.23

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

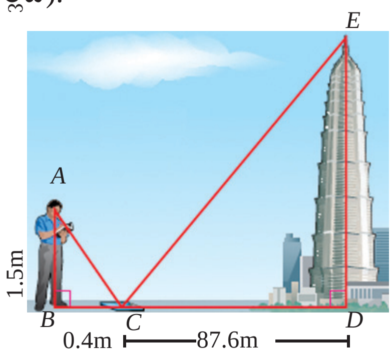
$$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪಿರಮಿಡ್‌ನ ಎತ್ತರವು 140 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.10

ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಗೋಪುರದಿಂದ 87.6 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಮನುಷ್ಯನು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ 0.4 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದು, ನೆಲದಿಂದ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವು 1.5 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? (ಮನುಷ್ಯನ ಪಾದ, ಕನ್ನಡಿ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಪಾದವು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ).

ಪರಿಹಾರ AB ಮತ್ತು ED ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮನುಷ್ಯನ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ. C ಯು ಕನ್ನಡಿಯಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ಪತನ ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 6.24

ΔABC ಮತ್ತು ΔEDC ಗಳಲ್ಲಿ,

$$\angle ABC = \angle EDC = 90^{\circ}$$

$$\angle BCA = \angle DCE$$

(ಒಂದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಪತನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲನ ಕೋನ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.)

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta EDC$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

$\therefore \quad \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತೀಯವಾಗಿವೆ)

$$ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{87.6}{0.4} \times 1.5 = 328.5$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 328.5 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 6.11

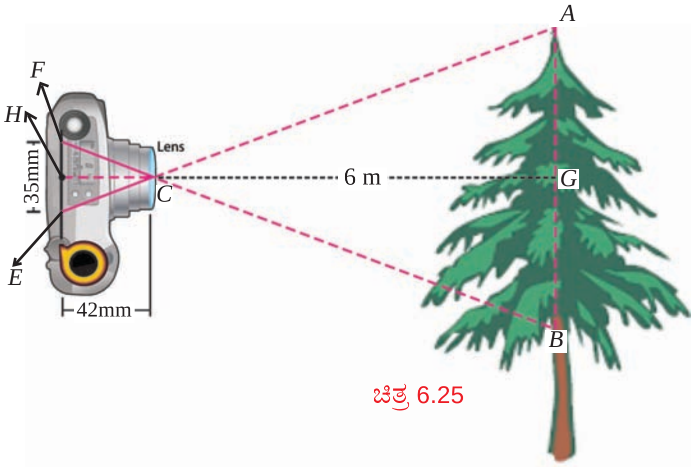
ಒಂದು ಮರದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಕ್ಯಾಮರಾದ ಫಿಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿ 35ಮಿ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ. ಮಸೂರದಿಂದ ಫಿಲ್ಮ್ ಗೆ ಇರುವ ದೂರವು 42 ಮಿ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಮಸೂರದಿಂದ ಮರಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವು 6 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಮರದ ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಭಾಗವನ್ನು ಕ್ಯಾಮರಾವು ಸೆರೆಹಿಡಿದಿದೆ?

ಪರಿಹಾರ AB ಮತ್ತು EF ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮರದ ಭಾಗದ ಮತ್ತು ಫಿಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಇದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

C ಬಿಂದುವು ಮಸೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

CG ಮತ್ತು CH ಗಳು ΔACB ಮತ್ತು ΔFEC ಗಳ ಔನ್ನತ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

AB || FE ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.25

ΔACB ಮತ್ತು ΔFEC ಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle BAC = \angle FEC$

$\angle ECF = \angle ACB$ (ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

$\therefore\ \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

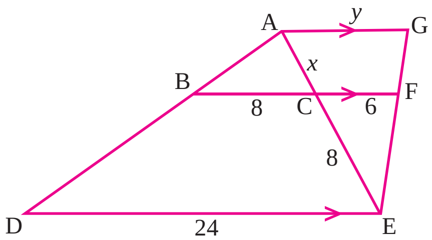
ಆದ್ದರಿಂದ, $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{CG}{CH}$

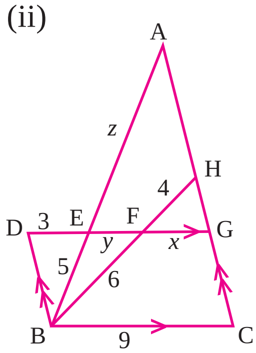
$\Longrightarrow \quad AB = \dfrac{CG}{CH} \times EF = \dfrac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$

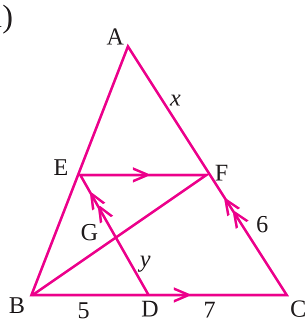
ಆದ್ದರಿಂದ, ಕ್ಯಾಮರಾವು ಸೆರೆಹಿಡಿದಿರುವ ಮರದ ಎತ್ತರವು 5ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ)

(i) 

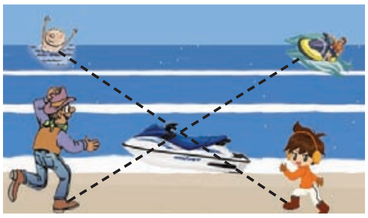
(ii) 

(iii) 

2. 1.8ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು ಕ್ಯಾಮರಾದ ಫಿಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿ 1.5ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿದೆ. ಕ್ಯಾಮರಾದ ಮಸೂರದಿಂದ 3ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಫಿಲ್ಮ್ ಇದ್ದರೆ, ಕ್ಯಾಮರಾದಿಂದ ಮನುಷ್ಯನು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ?

3. 120 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಹುಡುಗಿಯು ದೀಪದ ಕಂಬದ ಪಾದದಿಂದ ದೂರಕ್ಕೆ 0.6 ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್ ವೇಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ದೀಪವು ನೆಲ ಮಟ್ಟದಿಂದ 3.6 ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದರೆ, 4 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಅವಳ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿಯು ತನ್ನ ತಂದೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಮುದ್ರ ತೀರದಲ್ಲಿದ್ದಾಳೆ. ಅವಳು ಒಬ್ಬ ಈಜುಗಾರನು ಮುಳುಗುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಅವಳಿಂದ 50 ಮೀ. ಪಶ್ಚಿಮದಲ್ಲಿರುವ ತನ್ನ ತಂದೆಗೆ ಕಿರುಚಿ ತಿಳಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳ ತಂದೆಯು ದೋಣಿಗೆ ಅವಳಿಗಿಂತ 10 ಮೀ. ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ. ಅವಳ ತಂದೆಯು ಈಜುಗಾರನನ್ನು ತಲುಪಲು ದೋಣಿಯನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ದೋಣಿಯಿಂದ 126 ಮೀ. ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕು. ಇದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, ದೋಣಿಯಿಂದ 98 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ಜಲ ನೌಕೆಯನ್ನು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಹುಡುಗಿಯು ಗುರುತಿಸಿದಳು. ಜಲ ನೌಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮನುಷ್ಯನು ಈಜುಗಾರನ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ. ಈಜುಗಾರನನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು ಮನುಷ್ಯನು ಎಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕು? (ಸುಳಿವು: ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ).



5. P ಮತ್ತು Q ಗಳು ΔABC ಯ ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. $AP = 3$ಸೆಂ.ಮೀ., $PB = 6$ಸೆಂ.ಮೀ., $AQ = 5$ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $QC = 10$ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $BC = 3\,PQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

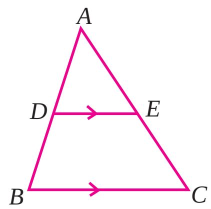
6. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $AB = AC$ ಹಾಗೂ $BC = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ.. $AD = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ D ಬಿಂದುವು AC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿದೆ. $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಇದರಿಂದ BD ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಆಗುವಂತೆ D ಮತ್ತು E ಕ್ರಮವಾಗಿ AB ಮತ್ತು AC ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $AB = 3\,AD$ ಮತ್ತು ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 72 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $DBCE$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

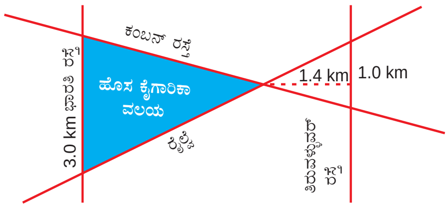
8. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು 6 ಸೆಂ.ಮೀ., 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ ಹಾಗೂ $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. $\triangle PQR$ ನ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. $\triangle PQR$ ಗೆ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆ ಏನು?

9. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $DE \parallel BC$ ಮತ್ತು $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{3}{5}$. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

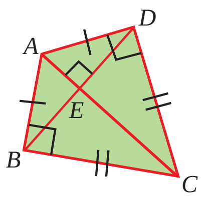
(i) $\dfrac{\Delta ADE \text{ ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta ABC \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$ (ii) $\dfrac{BCED \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{\Delta ABC \text{ ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}$



10. ಸರ್ಕಾರವು ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿರುವ ಬಳಕೆಯಾಗದ ಜಮೀನಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಕೈಗಾರಿಕಾ ವಲಯವನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲು ಯೋಜನೆ ಹಾಕುತ್ತಿದೆ. ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ಭಾಗವು ಹೊಸ ಕೈಗಾರಿಕಾ ವಲಯದ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹೊಸ ಕೈಗಾರಿಕಾ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



11. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $AE = 16$ ಸೆಂ.ಮೀ., $EC = 81$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ವಜ್ರಾಕಾರದ ಗಾಳಿಪಟದ ಮಾದರಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನು BD ಅಡ್ಡರೇಖೆಯನ್ನು ಬಳಸಲು ಬಯಸಿದ್ದಾನೆ. ಇದು ಎಷ್ಟು ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು?

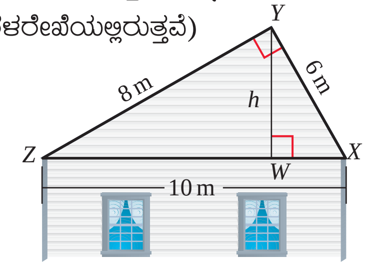


12. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಒಂದು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಬಯಸಿ, ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ತಾನು ನೋಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಕನ್ನಡಿಯನ್ನು ಇಟ್ಟನು. ಅವನಿಂದ ಕನ್ನಡಿಗೆ ಇರುವ ದೂರವು 0.5ಮೀ. ಮತ್ತು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ ಬಾವುಟ ಕಂಬಕ್ಕಿರುವ ದೂರವು 3ಮೀ.. ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳು ನೆಲ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.5ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಪಾದ, ಕನ್ನಡಿ ಮತ್ತು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಪಾದಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ)

13. ಒಂದು ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಸೀಳು ನೋಟವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತಿದೆ.

(i) ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(ii) ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಎತ್ತರ h ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



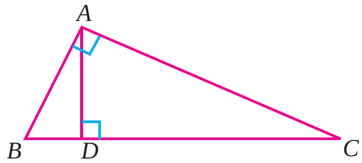
ಪ್ರಮೇಯ 6.5 ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ (ಬೌಧ್ಯಾಯನ ಪ್ರಮೇಯ)

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, $\angle A = 90^\circ$.

ಸಾಧನೀಯ : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

ರಚನೆ : $AD \perp BC$ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.26

ಸಾಧನೆ

ABC ಮತ್ತು DBA ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle B$ ಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗೂ, $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (ಕೋಕೋ ಮಾನದಂಡ)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA}$

$\therefore \quad AB^2 = DB \times BC$ (1)

ಹೀಗೆಯೇ, $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\therefore \quad AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$$

$$= BC(BD + DC)$$

$$= BC \times BC = BC^2$$

ಆಗ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. ಇದರಿಂದ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯವು ಎರಡು ಮೂಲಭೂತ ನೋಟಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ; ಒಂದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಉದ್ದಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಸೆಯುತ್ತದೆ. ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಮೊದಲು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ರವರು ತಿಳಿಸಿ, ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ.

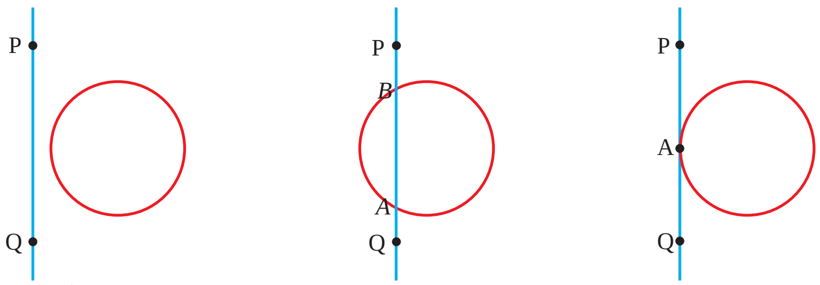
ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.)

ಪ್ರಮೇಯ 6.6 **ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ**

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, ಮೊದಲ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6.4 ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು (Circles and Tangents)

ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ, ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರಚನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಗಳು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತವಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸೋಣ. ನಾವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ – ಅವು ಎಲ್ಲೂ ಛೇದಿಸದಂತಿರಬಹುದು, ಅವು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಅವು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.27 ಚಿತ್ರ 6.28 ಚಿತ್ರ 6.29

ಚಿತ್ರ 6.27 ರಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತ ಮತ್ತು PQ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 6.28 ರಲ್ಲಿ, PQ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, PQ ಎಂಬುದನ್ನು ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 6.29 ರಲ್ಲಿ, PQ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ತತ್ಸಮಾನವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. PQ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಆಧಾರಿತವಾಗಿರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು (ಸಾಧನೆಗಳ ರಹಿತವಾಗಿ)

1. ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
2. ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.
3. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.
4. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ವೃತ್ತಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
5. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

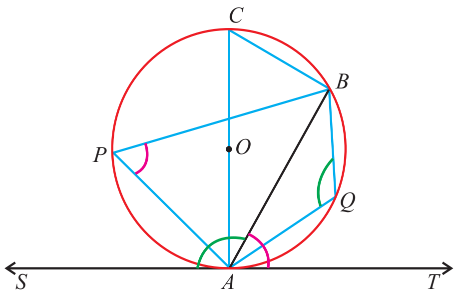
ಪ್ರಮೇಯ 6.7 ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ (Tangent-Chord theorem)

ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶಕ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜ್ಯಾವು ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : O ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ . ST ಯು A ನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು AB ಯು ಜ್ಯಾ. AB ಜ್ಯಾದ ಅಭಿಮುಖ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು.

ಸಾಧನೀಯ : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$

ರಚನೆ: ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ AC ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. B ಮತ್ತು C ಸೇರಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6.30

ಸಾಧನೆ

ಹೇಳಿಕೆ	ಕಾರಣ	
$\angle ABC = 90^\circ$	ಅರ್ಧ–ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕೋನವು 90°	
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯ ಎರಡು ಲಘುಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ	(1)
$\angle CAT = 90^\circ$	ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ವ್ಯಾಸ $\perp$ ಸ್ಪರ್ಶಕ	
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$		(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ	
$\Longrightarrow \angle BCA = \angle BAT$		(3)

$\angle BCA = \angle BPA$ ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು (4)

$\angle BAT = \angle BPA$. ಇದರಿಂದ (i). (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ (5)

ಈಗ $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು

$\Longrightarrow \angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$ (5) ರಿಂದ (6)

Also $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$ ಸರಳಯುಗ್ಮ (7)

$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$ (6) ಮತ್ತು (7) ರಿಂದ

$\angle BAS = \angle AQB$. ಇದರಿಂದ (ii).

ಇದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.8 ಸ್ಪರ್ಶಕ – ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ

ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವಂತೆ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

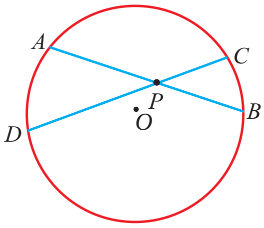
P ಯು AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$PA \times PB$ ಗುಣಲಬ್ಧವು PA ಮತ್ತು PB ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

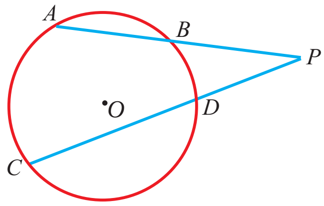
ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು AB ರೇಖಾಖಂಡದ PA ಮತ್ತು PB ಭಾಗಗಳಿಂದಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6.9

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.31



ಚಿತ್ರ 6.32

ಚಿತ್ರ 6.31 ರಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆಗ $PA \times PB = PC \times PD$. ಚಿತ್ರ 6.32 ರಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆಗ $PA \times PB = PC \times PD$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.12

PQ ಎಂಬುದು A ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು AB ಯು ಜ್ಯಾ ಆಗಿರಲಿ. $\angle BAC = 54^\circ$ ಆಗುವಂತೆ C ಯು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು $\angle BAQ = 62^\circ$ ಆಗಿರಲಿ. $\angle ABC$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ PQ ಎಂಬುದು A ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು AB ಯು ಜ್ಯಾ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

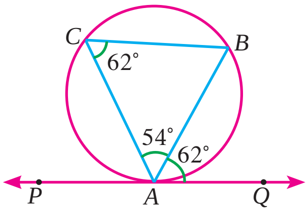
$\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ$. (ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ)

ಹಾಗೂ, $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$.

(ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180°)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$

$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ$.

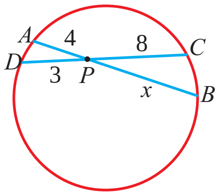


ಚಿತ್ರ 6.33

ಉದಾಹರಣೆ 6.13

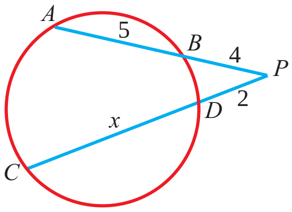
ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)



ಚಿತ್ರ 6.34

(ii)



ಚಿತ್ರ 6.35

ಪರಿಹಾರ (i)

$PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

$PB = \dfrac{PC.PD}{PA}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \dfrac{8 \times 3}{4} = 6$.

(ii)

$PC \,.\, PD = PA.\, PB$

$(2+x)\, 2 = 9 \times 4$

$x + 2 = 18$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 16$.

ಉದಾಹರಣೆ 6.14

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PA ಮತ್ತು PB ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. CD ಯು E ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು $AP = 15$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ΔPCD ಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE$ ಮತ್ತು $PA = PB$.

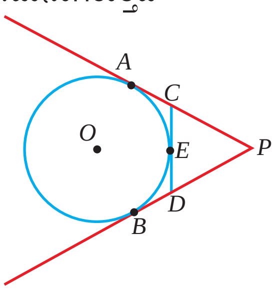
$\therefore \Delta\, PCD$ ಯ ಸುತ್ತಳತೆ $= PC + CD + DP$

$= PC + CE + ED + DP$

$= PC + CA + DB + DP$

$= PA + PB = 2\,PA \qquad (PB = PA\,)$

$= 2 \times 15 = 30$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 6.36

ಉದಾಹರಣೆ 6.15

$ABCD$ ಯು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AD ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವೃತ್ತವು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು P, Q, R ಮತ್ತು S ಆಗಿರಲಿ. ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

$\therefore$ $AP = AS$ (1), $BP = BQ$ (2), $CR = CQ$ (3), $DR = DS$ (4).

(1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ,

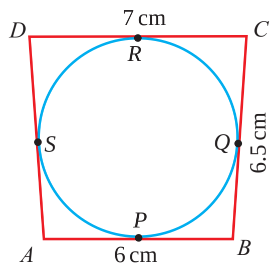
$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$= AS + DS + BQ + CQ$

$\Longrightarrow$ $AB + CD = AD + BC$.

$AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$

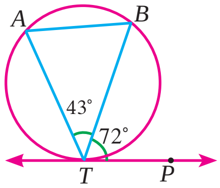
ಆದ್ದರಿಂದ, $AD = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 6.37

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, TP ಯು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. A ಮತ್ತು B ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. $\angle BTP = 72^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ATB = 43^\circ$ ಆದರೆ, $\angle ABT$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



2. AB ಮತ್ತು CD ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು. (i) $CP = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AP = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PB = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ii) $AP = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB = 15$ ಸೆಂ.ಮೀ., $CP = PD$ ಆದರೆ, CD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿದ್ದು ಪರಸ್ಪರ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.
(i) $AB = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BP = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $PD = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, CD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ii) $BP = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $CP = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AB ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ವೃತ್ತವು ΔABC ಯ BC ಬಾಹುವನ್ನು P ನಲ್ಲಿ, ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ, ವೃದ್ಧಿಸಿದ AC ಯನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. $AQ = AR = \frac{1}{2}$ (ΔABC ಯ ಸುತ್ತಳತೆ) ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. ಒಂದು ತಾವರೆ ಹೂವು ಕೊಳದಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮೇಲೆ ಇದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಕಾಂಡವು ಭಾಗಶಃ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಕೆಳಗೆ ಇದೆ. ಗಾಳಿ ಬೀಸಿದ ಕಾರಣ ತಾವರೆಯ ಕಾಂಡವು ಪಕ್ಕಕ್ಕೆ ತಳ್ಳಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ತಾವರೆ ಹೂವು ಕಾಂಡದ ಮೊದಲಿನ ಸ್ಥಳದಿಂದ 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ತಾವರೆಯ ಕಾಂಡದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವು ನೀರಿನ ಕೆಳಗಿತ್ತು?

7. $ABCD$ ಆಯತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ O ಬಿಂದುವನ್ನು A, B, C ಮತ್ತು D ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೃಂಗಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

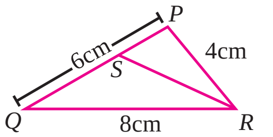
1. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು $\triangle ABC$ ಯ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{AE}{AC} =$

(A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

2. $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ, DE ಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ AB ಮತ್ತು AC ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $AD = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ., $DB = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = 2.7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $AC =$

(A) 6.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

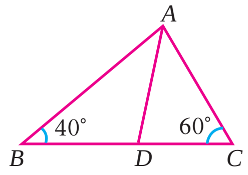
3. $\triangle PQR$ ರಲ್ಲಿ, RS ಎಂಬುದು $\angle R$ ನ ಅರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. $PQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $RP = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PS ಗೆ ಸಮನಾದುದು



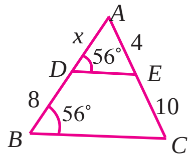
(A) 2 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 3 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

4. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, $\angle B = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle C = 60^\circ$ ಆದರೆ, $\angle BAD =$

(A) 30° (B) 50° (C) 80° (D) 40°



5. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, x ನ ಬೆಲೆಯು



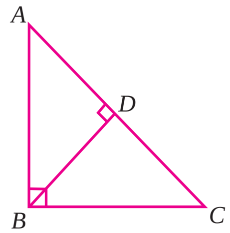
(A) $4 \cdot 2$ (B) $3 \cdot 2$

(C) $0 \cdot 8$ (D) $0 \cdot 4$

6. ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ಆದರೆ,

(A) $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{EF}$ (B) $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{FD}$ (C) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (D) $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{EF}$

7. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದ, ತಪ್ಪಾದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. 12 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಲಂಬವಾದ ಕಡ್ಡಿಯು ನೆಲದ ಮೇಲೆ 8 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೋಪುರವು 40 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು

(A) 40 ಮೀ. (B) 50 ಮೀ. (C) 75 ಮೀ. (D) 60 ಮೀ.

9. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳು 2:3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 9:4 (B) 4:9 (C) 2:3 (D) 3:2

10. ABC ಮತ್ತು DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಗಳಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 100 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 49 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. BC ಯು 8.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, $EF =$

(A) 5.47 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 5.74 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 6.47 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6.74 ಸೆಂ.ಮೀ.

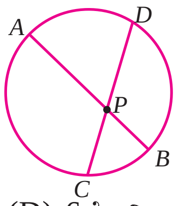
11. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಮೊದಲ ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವು

(A) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 3 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 9 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6 ಸೆಂ.ಮೀ.

12. AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿದ್ದು, AB = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., AP = 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು CD = 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು P ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ PD =

(A) 12 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 4 ಸೆಂ.ಮೀ.

13. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳು P ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. AB = 16ಸೆಂ.ಮೀ., PD = 8ಸೆಂ.ಮೀ., PC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AP >PB ಆದರೆ, AP =

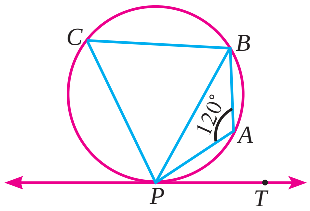


(A) 8ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 4ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 12ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 6ಸೆಂ.ಮೀ.

14. ವೃತ್ತದ O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ P ಬಿಂದುವು 26ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ PT ಸ್ಪರ್ಶಕವು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. OT ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) 36ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 20ಸೆಂ.ಮೀ.

(C) 18ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 24ಸೆಂ.ಮೀ.



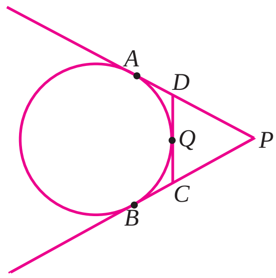
15. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle PAB = 120^\circ$ ಆದರೆ, $\angle BPT =$

(A) 120^o (B) 30^o (C) 40^o (D) 60^o

16. O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ PA ಮತ್ತು PB ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ 40^o ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ, $\angle POA$ =

(A) 70^o (B) 80^o

(C) 50^o (D) 60^o



17. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, PA ಮತ್ತು PB ಗಳು P ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು. CD ಯು Q ನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. PA = 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು CQ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, PC ಗೆ ಸಮನಾದುದು

(A) 11 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 24 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 38 ಸೆಂ.ಮೀ.

18. ΔABC ಯು $\angle B = 90^\circ$ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $BD \perp AC$. BD = 8 ಸೆಂ.ಮೀ., AD = 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, CD ಯು

(A) 24 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 16 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 32 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 8 ಸೆಂ.ಮೀ.

19. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 16 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 36 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಮೊದಲ ತ್ರಿಭುಜದ ಔನ್ನತ್ಯವು 3ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪವಾದ ಔನ್ನತ್ಯವು

(A) 6.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 4 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ.

20. ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 36ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 24ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. DE = 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, AB ಯು

(A) 12 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 15 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 18 ಸೆಂ.ಮೀ.

7

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

- ಪೀಠಿಕೆ
- ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು
- ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು

ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ. 190 - 120) ಗ್ರೀಕ್

ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್‌ರವರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದರು. ಇವರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರು ಮತ್ತು ಗೋಳೀಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದರು. ಇವರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಸೂರ್ಯಗ್ರಹಣ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರಗ್ರಹಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳೊಂದಿಗೆ ಸೂರ್ಯ ಗ್ರಹಣಗಳನ್ನು ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯಲು ನಂಬಲರ್ಹ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಇವರು ಪ್ರಥಮರಾಗಿರಬಹುದು. ಬರಿಗಣ್ಣಿನ ವೀಕ್ಷಣೆಗೆ ದೀರ್ಘ ಕಾಲದವರೆಗೆ ಬಳಕೆ ಮಾಡಿದ ಹಲವಾರು ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಉಪಕರಣಗಳ ಸಂಶೋಧನೆ ಅಥವಾ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿದ ಕೀರ್ತಿಯು ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್‌ರವರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕಂಸಗಳ ಗಾತ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಆ ಕಂಸಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವ ಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಲಾಯಿತು. 15 ನೇ ಶತಮಾನದ ನಂತರ, ಇದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಲು ಬಳಸಲಾಯಿತು. ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದ ಗ್ರೀಕ್ ಹಿಪ್ಪಾರ್ಖಸ್‌ರವರನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಸೃಷ್ಟಿಕರ್ತ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ತ್ರಿಭುಜದ ಅಳತೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವ **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ** ಎಂಬ ಪದವು ಬಾರ್ತಲೋಮಸ್ ಪಿಟಿಸ್ಕಸ್ (1561-1613) ರ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿದೆ.

ನಾವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳು, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ ಮತ್ತು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಿಖರವಾಗಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ ಕಟ್ಟಡಗಳ, ಬೆಟ್ಟಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಅನ್ವಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

7.2 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (Trigonometric identities)

ಸಮೀಕರಣವು ಅರ್ಥವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುವಂತೆ ಚರಾಕ್ಷರದ(ಗಳ) ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣವು ಸತ್ಯವಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು a ಮತ್ತು b ನ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು, ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನದ(ಗಳ) ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾದರೆ, ಇದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$ ಸಮೀಕರಣವು θದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ.

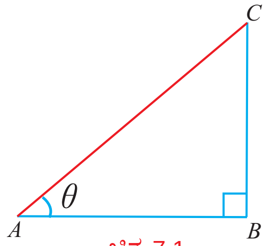
ಆದಾಗ್ಯೂ, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$ ಸಮೀಕರಣವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇದು $\theta = 0^\circ$ ಆದಾಗ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, $\theta = 45^\circ$ ಆದಾಗ $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸತ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ.

> ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅರ್ಥಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಮೂರು ಉಪಯುಕ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$



ಚಿತ್ರ 7.1

(1) ರ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು AC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\angle A = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಎಲ್ಲಾ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ಗಳಿಗೆ,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \qquad (2)$$

ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರವಾಗಿ, $\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$ ಮತ್ತು $\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ = 1.$

ಇದರಿಂದ, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ಆಗುವಂತಹ θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ (2) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(1) ನ್ನು AB^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because AB \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\tan\theta$ ಮತ್ತು $\sec\theta$ ಗಳು $\theta = 90^\circ$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ಆಗುವಂತಹ θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ (3) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ (1) ರ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು BC^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because BC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \text{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\cot\theta$ ಮತ್ತು $\text{cosec}\,\theta$ ಗಳು $\theta = 0^\circ$ ಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ ಆಗಿರುವಂತಹ θ ದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ (4) ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

(2) ರಿಂದ (4) ರವರೆಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಸಮಾನ ರೂಪಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

	ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ	ಸಮಾನ ರೂಪಗಳು
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (ಅಥವಾ) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (ಅಥವಾ) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$	$\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (ಅಥವಾ) $\cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - 1$

ಗಮನಿಸಿ

ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಲಘುಕೋನ θ ಗೆ ನಾವು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಅರ್ಥಬದ್ಧವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ θ ಕೋನಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಲಘುಕೋನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನಮ್ಮನ್ನು ನಾವು ನಿರ್ಬಂಧಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನಗಳಿಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವ ಕೆಲವು ತಂತ್ರಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಬಹುದು.

(i) ಏನನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಯಾವುದನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ.

(ii) ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಧಿಗ್ಧ ಭಾಗವನ್ನು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ, ಸರಳವಾಗಿರುವುದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಸಂಧಿಗ್ಧವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಂಧಿಗ್ಧ ಭಾಗವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

(iii) ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು ಸಂಧಿಗ್ಧವಾಗಿದ್ದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಬಹುದು.

(iv) ಸಂಕಲನದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿ.

(v) ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತೀ ಪದವನ್ನು ಅವುಗಳ ಸೈನ್(sine) ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್(cosine) ಸಮಾನಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

(vi) $\tan^2\theta, \cot^2\theta, \mathrm{cosec}^2\theta, \sec^2\theta$, ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ಮತ್ತು $\mathrm{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$. ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದು ತುಂಬಾ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.1

$\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $$\frac{\sin\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\,.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.2

$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} \times \frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad (1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\,.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.3

$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad \because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta, \ \because \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.4

$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad \because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad \because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.5

$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta} \qquad (\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.6

$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮೊದಲು ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.7

$(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\sin^6\theta + \cos^6\theta$

$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \qquad (a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.8

$\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \dfrac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.9

$\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮೊದಲು ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right)\times\left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$

$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.10

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ನಾವು ಮೊದಲು ಎಡ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{1+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.11

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಈಗ, $(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

ನಂತರ, $\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$

$$= \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

ಸೂಚನೆ

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ,

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.12

$\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ ಮತ್ತು $m \neq n$ ಆದರೆ, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ

$m = \tan\theta + \sin\theta$ ಮತ್ತು $n = \tan\theta - \sin\theta$. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2 \\ &= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta) \\ &= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1) \end{aligned}$$

ಹಾಗೂ, $$\begin{aligned} 4\sqrt{mn} &= 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)} \\ &= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)} \\ &= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)} \\ &= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)} = 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta) \\ &= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2) \end{aligned}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

ಉದಾಹರಣೆ 7.13

$\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ ಆದರೆ, $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ನಮಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

> ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ ಮತ್ತು ಡಿವಿಡೆಂಡೋ ನಿಯಮ
>
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಆದರೆ, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ ಮತ್ತು ಡಿವಿಡೆಂಡೋ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

ಸೂಚನೆ: ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ ಮತ್ತು ಡಿವಿಡೆಂಡೋ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸದೆಯೂ ಕೂಡ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ.

   (i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2 + \sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2. ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (i) $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

   (iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

   (v) $\sqrt{\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

   (vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta+\cot\theta} = 1-\cos\theta$

3. ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (i) $\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ-\theta)} = 2\sec\theta$

   (ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

   (iii) $\dfrac{\sin(90^0-\theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0-\theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

   (iv) $\dfrac{\tan(90^0-\theta)}{\text{cosec}\,\theta+1} + \dfrac{\text{cosec}\,\theta+1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

   (v) $\dfrac{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta-1}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta+1} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta.$

   (vi) $(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)(1+\tan\theta+\sec\theta) = 2$

   (vii) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

   (viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0-\theta)}{2\sin^2(90^0-\theta)-1}$

   (ix) $\dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta-\cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\text{cosec}\,\theta+\cot\theta}.$

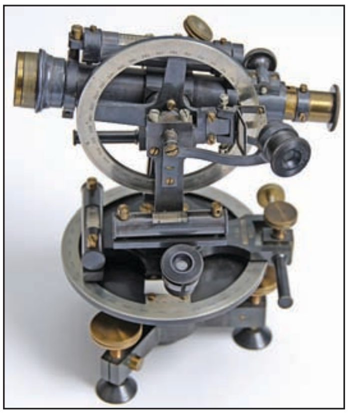
   (x) $\dfrac{\cot^2\theta+\sec^2\theta}{\tan^2\theta+\text{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta).$

4. $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ ಮತ್ತು $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ ಆದರೆ, $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $\tan\theta = n\tan\alpha$ ಮತ್ತು $\sin\theta = m\sin\alpha$ ಆದರೆ, $\cos^2\theta = \dfrac{m^2-1}{n^2-1}$, $n \neq \pm 1$, ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. $\sin\theta$, $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\tan\theta$ ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7.3 ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳು (Heights and Distances)


ಚಿತ್ರ 7.2

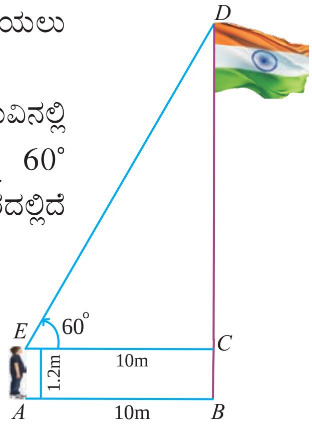
ಗ್ರಹಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ, ಹಿಮಾಲಯ ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರ, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಸೂರ್ಯನಂತೆ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಳೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಳತೆಯ ಟೇಪುಗಳಿಂದ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆ ರೀತಿಯ ಅಂತರಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾಗಿದೆ. ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಅಕ್ಷಾಂಶ ಮತ್ತು ರೇಖಾಂಶಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ದ್ವೀಪದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಕೂಡಾ ಈ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಮೋಜಣಿದರ್ಶಕವು (ಥಿಯೋಡೊಲೈಟ್) (ಚಿತ್ರ 7.2) ಒಂದು ವಸ್ತು ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕರ ಕಣ್ಣಿನ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸುವ ಉಪಕರಣವಾಗಿದೆ. ಮೋಜಣಿದರ್ಶಕವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರುವ ಎರಡು ಅಳತೆ ಮಾಪನವಿರುವ ಚಕ್ರಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ದೂರದರ್ಶಕವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಚಕ್ರಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡ ಮತ್ತು ಲಂಬವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ದೂರದರ್ಶಕವನ್ನು ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಿ ಅಳೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೋನವನ್ನು ದೂರದರ್ಶಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಓದಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೈಜವಾಗಿ ಅಳೆಯದೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಬಯಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಪಾದ B ನಿಂದ 10 ಮೀ. ದೂರದ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇವನು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ತುದಿಯನ್ನು 60° ಕೋನದಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟ E ಯು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.2 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 7.3 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 7.3

ಲಂಬಕೋನ ΔDEC ಯಲ್ಲಿ, $\angle DEC = 60^\circ$.

ಈಗ, $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 60^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, $CD = 10\sqrt{3} = 10\times 1.732$

$= 17.32$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರ, $BD = BC + CD$

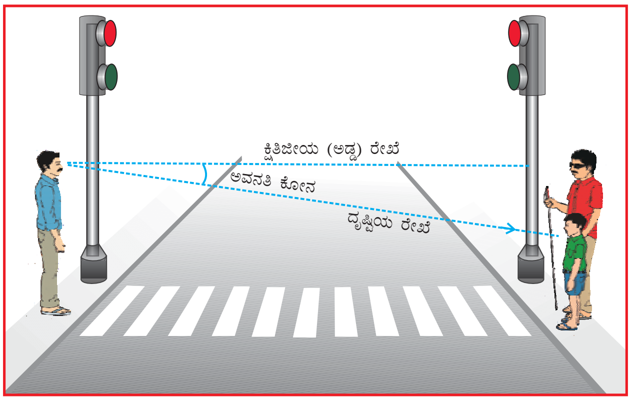
$= 1.2 + 17.32 = 18.52$ ಮೀ.

ಹೀಗೆ, ನೈಜವಾಗಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ, ನಾವು ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಒಂದು ಲಘುಕೋನವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಬೇರೆ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೆಚ್ಚು ಬಳಸುವ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆ (Line of sight)

ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ನಾವು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಿರುವಾಗ, ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ವಸ್ತುವಿಗೆ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

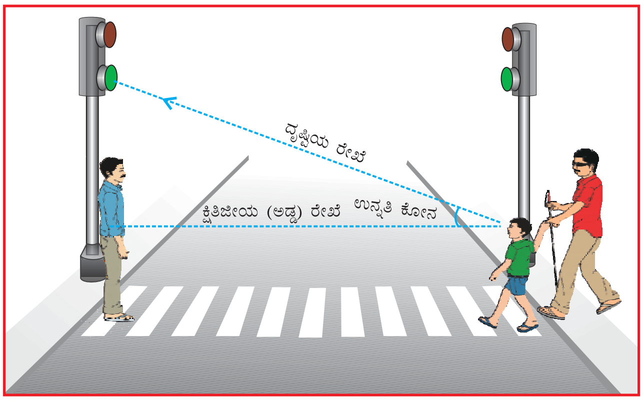
ಅವನತಿ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ ಕೋನ (Angle of depression and angle of elevation)



ಚಿತ್ರ 7.4

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕಣ್ಣುಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆಗಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಾವು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬಾಗಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳು ಒಂದು ಕೋನದ ಮೂಲಕ ಚಲಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಕೋನವನ್ನು **ಅವನತಿ ಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ವಸ್ತುವು ಅಡ್ಡರೇಖೆಗಿಂತ ಕೆಳಗೆ ಇದ್ದಾಗ, ಅಡ್ಡರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆಯು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಅವನತಿ ಕೋನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 7.4 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕಣ್ಣುಗಳ ಅಡ್ಡರೇಖೆಗಿಂತ ಮೇಲೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ವಸ್ತುವನ್ನು ನೋಡಲು ನಾವು ನಮ್ಮ ತಲೆಯನ್ನು ಮೇಲೆತ್ತಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ನಮ್ಮ ಕಣ್ಣುಗಳು ಚಲಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಕೋನವನ್ನು **ಉನ್ನತಿ ಕೋನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಚಿತ್ರ 7.5 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 7.5

ಸೂಚನೆ

(i) ವೀಕ್ಷಕರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರದಿದ್ದರೆ, ವೀಕ್ಷಕರನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ವೀಕ್ಷಕರಿಂದ ನೋಡಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು ವಸ್ತುವಿನಿಂದ ನೋಡಲ್ಪಟ್ಟ ವೀಕ್ಷಕರ ಅವನತಿ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಕೌಶಲಗಳು ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.

(i) ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಗಮನವಿಟ್ಟು ಓದಿರಿ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

(iii) ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ 'h' ಮತ್ತು ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ 'x' (ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಎಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರಿ.

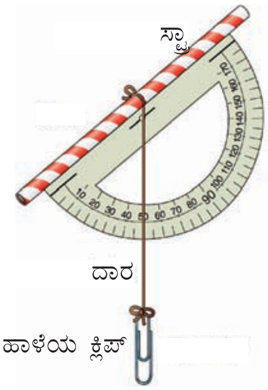
(iv) ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿರಿ.

(v) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಿರಿ.

ಅಳೆಯಲು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಅಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ನಮಗೆ ಸಹಾಯಕವಾಗಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ

- ದಾರದ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಮಧ್ಯಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಹಾಳೆಯ ಕ್ಲಿಪ್ಪಿಗೆ ಕಟ್ಟಿರಿ.
- ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಮಧ್ಯ ಭಾಗವು ಕೋನಮಾಪಕದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಣೆಯಾಗುವಂತೆ ಕೋನಮಾಪಕದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ. ದಾರವು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಲು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೂಗುವಂತೆ ಎಚ್ಚರವಹಿಸಿರಿ.
- ನೇರವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ತುಂಬಾ ಎತ್ತರವಾಗಿರುವ ಬಾವುಟ ಕಂಬ, ಬ್ಯಾಸ್ಕೆಟ್ ಬಾಲ್ ಬಳೆ ಅಥವಾ ಶಾಲಾ ಕಟ್ಟಡಗಳಂತಹ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿ.
- ಸ್ಟ್ರಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಮುಲಕ ವಸ್ತುವಿನ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ದಾರ ಮತ್ತು ಕೋನಮಾಪಕವು ಛೇದಿಸುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಅಳತೆಯನ್ನು 90° ಯಿಂದ ಕಳೆದು ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ಇದು θ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.6

- ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ ನೆಲಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಪಾದದಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ವಸ್ತುವಿನ ಪಾದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು y ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ.
- ನಿಮ್ಮ ಅಳತೆಗಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.
- ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು (h) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ.

  $h = x + y\tan\theta$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ನಿಮ್ಮ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ ನೆಲಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.14

ಒಂದು ಗಾಳಿಪಟವು 200 ಮೀ. ಉದ್ದದ ದಾರದಿಂದ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದೆ. ದಾರವು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುವಮಾಡಿದರೆ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಗಾಳಿಪಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಇಲ್ಲಿ, ದಾರವು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ h ಎಂಬುದು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಗಾಳಿಪಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

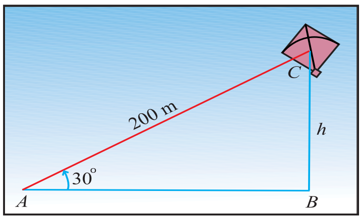
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AC ಎಂಬುದು ದಾರವಾಗಿದೆ.

$\angle CAB = 30^\circ$ ಮತ್ತು $AC = 200$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\sin 30^\circ = \frac{h}{200}$

$$\Longrightarrow \quad h = 200\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad h = 200\times\frac{1}{2} = 100 \text{ ಮೀ.}$$



ಚಿತ್ರ 7.7

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಗಾಳಿಪಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವು 100 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.15

ಒಂದು ಲಂಬೀಯ ಗೋಡೆಗೆ ಓರೆಯಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಏಣಿಯು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 60° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಏಣಿಯ ಪಾದವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 3.5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಏಣಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ AC ಯು ಏಣಿಯನ್ನು ಮತ್ತು B ಯು ಗೋಡೆಯ ಪಾದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

AC ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು x ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

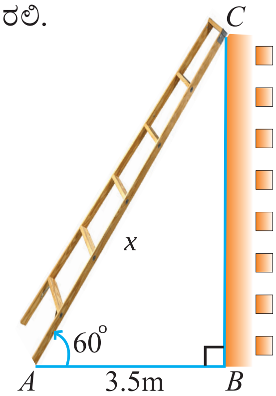
$\angle CAB = 60^\circ$ ಮತ್ತು $AB = 3.5$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle\ CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\cos 60^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$\Longrightarrow \quad AC = \dfrac{AB}{\cos 60^\circ}$

$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು 7 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.8

ಉದಾಹರಣೆ 7.16

30 ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು $10\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿರುವಾಗ ಸೂರ್ಯನ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು (ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ S ಎಂಬುದು ಸೂರ್ಯನ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು BC ಯು ಕಂಬ ಆಗಿರಲಿ.

AB ಯು ಕಂಬದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

ಸೂರ್ಯನ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು θ ಆಗಿರಲಿ.

$AB = 10\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು

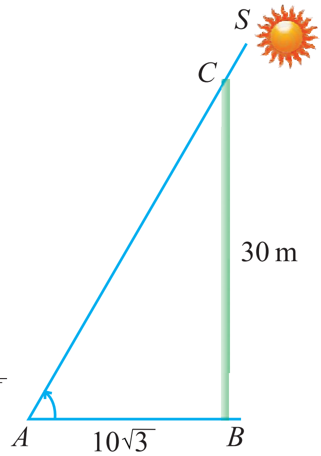
$BC = 30$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle\ CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{30}{10\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\Longrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \theta = 60^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಸೂರ್ಯನ ಕೋನೀಯ ಉನ್ನತಿಯು 60° ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.9

ಉದಾಹರಣೆ 7.17

ಒಬ್ಬ ವೀಕ್ಷಕನು ನೋಡಿದ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ. ವೀಕ್ಷಕನು ಗೋಪುರದಿಂದ $30\sqrt{3}$ ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ. ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟವು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.5 ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ BD ಯು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು AE ಯು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಆಗಿರಲಿ.

$AB = EC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ EC ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$AB = EC = 30\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$AE = BC = 1.5$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DEC$ ಯಲ್ಲಿ,

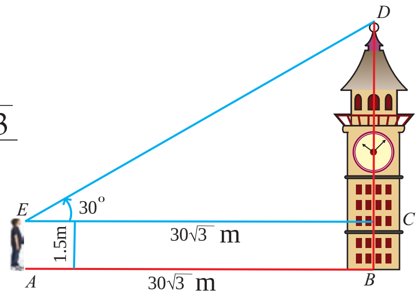
$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $BD = BC + CD$

$$= 1.5 + 30 = 31.5 \text{ ಮೀ.}$$



ಚಿತ್ರ 7.10

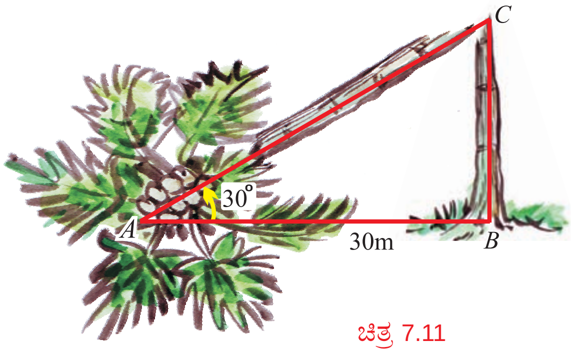
ಉದಾಹರಣೆ 7.18

ಒಂದು ಲಂಬವಾದ ಮರವು ಗಾಳಿಯಿಂದ ಮುರಿದಿದೆ. ಮರದ ತುದಿಯು ನೆಲವನ್ನು ಮುಟ್ಟುತ್ತಿದ್ದು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಮರದ ತುದಿಯು ಅದರ ಪಾದದಿಂದ 30 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲವನ್ನು ಮುಟ್ಟಿದರೆ, ಮರದ ನಿಜವಾದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮರವು ಮುರಿದಿರುವ ಬಿಂದು C ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಮರದ ತುದಿಯು ನೆಲವನ್ನು A ನಲ್ಲಿ ಮುಟ್ಟುವಂತಿರಲಿ. B ಯು ಮರದ ಪಾದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

$AB = 30$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$\angle CAB = 30^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.11

ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ ಮೀ.} \qquad (1)$$

ಈಗ, $\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AC = \frac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3}$ ಮೀ. (2)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮರದ ಎತ್ತರ $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$$= 30\sqrt{3} \text{ ಮೀ.}$$

ಉದಾಹರಣೆ 7.19

ಒಂದೇ ವೀಕ್ಷಣಾ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿರುವಾಗ ಒಂದು ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನವು ನೆಲದಿಂದ 3000ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನದ ಮೇಲೆ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತಿದೆ. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)

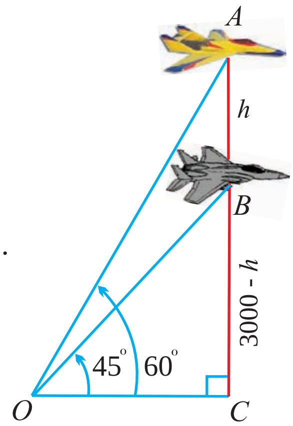
ಪರಿಹಾರ O ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದು ಆಗಿರಲಿ.

ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿ ಇರುವ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳು A ಮತ್ತು B ಆಗಿರಲಿ.

$AC = 3000$ ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವು C ಆಗಿರಲಿ.

$\angle AOC = 60^\circ$ ಮತ್ತು $\angle BOC = 45^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ, h ಎಂಬುದು ವಿಮಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.12

ಲಂಬಕೋನ $\triangle BOC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 45^\circ = \frac{BC}{OC}$

$\Longrightarrow OC = BC \qquad (\because \tan 45^\circ = 1)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $OC = 3000 - h \qquad (1)$

ಲಂಬಕೋನ $\triangle AOC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \frac{AC}{OC}$

$$\Longrightarrow OC = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$$

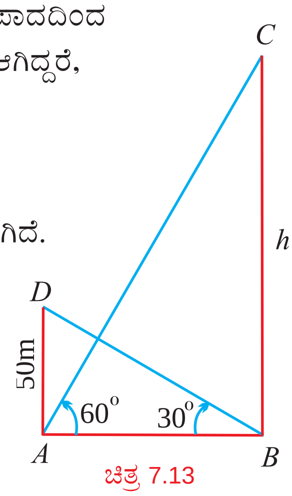
(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $3000 - h = 1000\sqrt{3}$

$\Longrightarrow h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268$ ಮೀ.

ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ವಿಮಾನದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಯುದ್ಧ ವಿಮಾನಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವು 1268 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.20

ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ಬೆಟ್ಟದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಮತ್ತು ಬೆಟ್ಟದ ಪಾದದಿಂದ ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 50 ಮೀ. ಆಗಿದ್ದರೆ, ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.13

ಪರಿಹಾರ AD ಯು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು BC ಯು ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ ಮತ್ತು $AD = 50$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

BC = h ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

ಲಂಬಕೋನ ΔDAB ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30^\circ = \frac{AD}{AB}$

$$\Longrightarrow AB = \frac{AD}{\tan 30^\circ}$$

$\therefore AB = 50\sqrt{3}$ ಮೀ. $\qquad (1)$

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$

$\Longrightarrow BC = AB \tan 60^\circ$

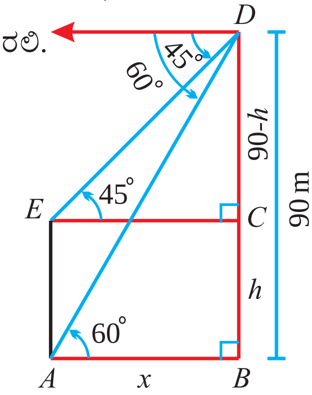
ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ, $h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವು 150 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.21

ಒಂದು ಲಂಬವಾದ ಗೋಡೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಗೋಪುರವು ನೆಲದ ಮೇಲಿವೆ. ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ, ಗೋಡೆಯ ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು 90 ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)

ಪರಿಹಾರ AE ಯು ಗೋಡೆಯನ್ನು ಮತ್ತು BD ಯು ಗೋಪುರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.14

$AB=EC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ EC ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $AE = BC$.

$AB = x$ ಮೀ. ಮತ್ತು $AE = h$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ. $BD = 90$ ಮೀ. ಮತ್ತು

$\angle DAB = 60^\circ, \angle DEC = 45^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $AE = BC = h$ ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $CD = BD - BC = 90 - h$.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAB$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{90}{x}$

$$\implies x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \quad (1)$$

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DEC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 45^\circ = \dfrac{DC}{EC} = \dfrac{90-h}{x}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 90 - h$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $90 - h = 30\sqrt{3}$

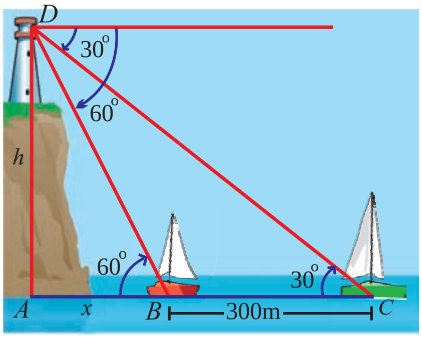
ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಡೆಯ ಎತ್ತರ, $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.22

ಸಮುದ್ರತೀರದಲ್ಲಿರುವ ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟಿರುವ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ದೀಪದ ಮನೆಯ ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ದೋಣಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಳು. ಎರಡು ದೋಣಿಗಳ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ದೋಣಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 300 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ದೀಪದ ಮನೆಯ ಪಾದ ಮತ್ತು ದೋಣಿಗಳು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ)

ಪರಿಹಾರ A ಮತ್ತು D ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಪಾದ ಮತ್ತು ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. B ಮತ್ತು C ಗಳು ಎರಡು ದೋಣಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಅಂತರವು h ಮೀಟರುಗಳು ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.15

$AB = x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

$\angle ABD = 60^\circ, \angle ACD = 30^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ΔABD ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$$

$$\implies AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ (1)

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle ACD$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\implies \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \implies x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 300 = h\sqrt{3}$. (2)

(2) ರಲ್ಲಿ (1) ನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$

$$\implies h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore$ $2h = 300\sqrt{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 150\sqrt{3}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮುದ್ರ ಮಟ್ಟದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ಎತ್ತರವು $150\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.23

ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ 88.2 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗಾಳಿಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಬಲೂನು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದನು. ನೆಲದಿಂದ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರ 1.2 ಮೀ. ಇದೆ. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ಬಲೂನಿನ ಅವನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಅದೇ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಬಲೂನಿನ ಅವನತಿ ಕೋನವು 30° ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸಿದೆ. ಆ ಕಾಲಾಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲೂನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

E ಮತ್ತು D ಗಳು ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿರುವಾಗ ಬಲೂನಿನ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಲಿ.

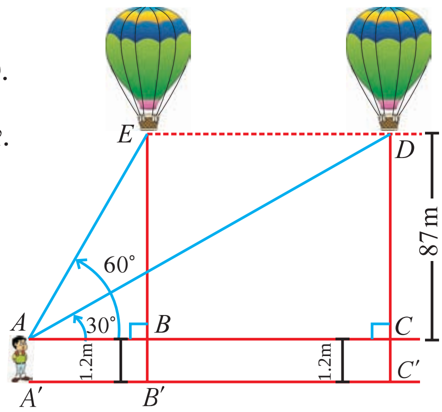
$BE = CD$ ಆಗುವಂತೆ B ಮತ್ತು C ಗಳು ಅಡ್ಡರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

$A'A = B'B = C'C = 1.2$ ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ

A', B' ಮತ್ತು C' ಗಳು ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

$\angle EAB = 60^\circ, \angle DAC = 30^\circ$, $BB' = CC' = 1.2$ ಮೀ.

ಮತ್ತು $C'D = 88.2$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.16

ಹಾಗೂ $BE = CD = 87$ ಮೀ.

ಈಗ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle EAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AC = \frac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಲೂನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವು

$$ED = BC = AC - AB$$

$$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.24

ಒಂದು ಬಾವುಟ ಕಂಬವನ್ನು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 45° ಆಗಿವೆ. ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವು 10 ಮೀ. ಆದರೆ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ನ್ನು ಬಳಸಿರಿ)

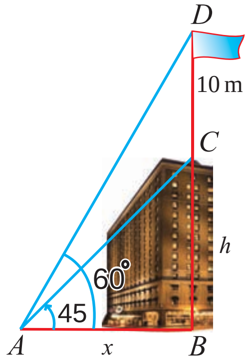
ಪರಿಹಾರ

ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಪಾದವು B ಆಗಿರಲಿ.

BC ಯು ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮತ್ತು CD ಯು ಬಾವುಟ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

$\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$ ಮತ್ತು $CD = 10$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$BC = h$ ಮೀ. ಮತ್ತು $AB = x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.17

ಈಗ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle CAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AB = BC.$ ಅಂದರೆ, $x = h$ (1)

ಹಾಗೆಯೇ, ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \quad \Longrightarrow x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $h = \dfrac{h+10}{\sqrt{3}}$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}h - h = 10$$

$$\Longrightarrow \quad h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 5(2.732) = 13.66 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವು 13.66 ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.25

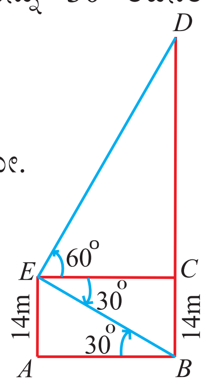
ಒಂದು ಹಡಗಿನ ಮೇಲಂತಸ್ತು ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ 14 ಮೀ. ಮೇಲಿದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬನು ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ತುದಿಯನ್ನು 60° ಉನ್ನತಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಪಾದವನ್ನು 30° ಅವನತಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ BD ಯು ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಹಡಗಿನ ಸ್ಥಾನವು A ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವು E ಆಗಿರಲಿ. ಇದರಿಂದ, $AE = 14$ ಮೀ.

$AB = EC$ ಆಗುವಂತೆ AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ EC ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$\angle ABE = 30^\circ, \angle DEC = 60^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.18

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABE$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 30^\circ = \dfrac{AE}{AB}$

$$\therefore \quad AB = \frac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $EC = 14\sqrt{3}$ $(\because AB = EC)$

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DEC$ ಯಲ್ಲಿ, $\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$

$$\therefore \quad CD = EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42 \text{ ಮೀ.}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕಡಿದಾದ ಬಂಡೆಯ ಎತ್ತರ, $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$ ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 7.26

ನೆಲದ ಮೇಲಿನ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. 15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಅಡ್ಡವಾದ ಹಾರಾಟದ ನಂತರ, ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಮಾನವು 200 ಮೀ./ಸೆ. ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಹಾರಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ವಿಮಾನವು ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವು A ಆಗಿರಲಿ.

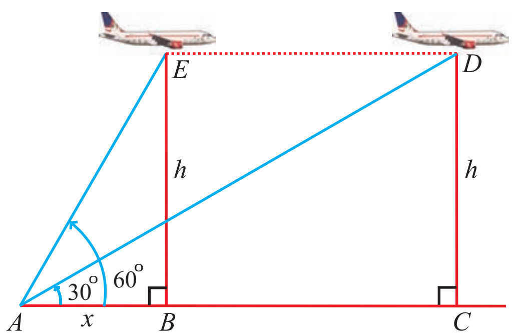
E ಮತ್ತು D ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆರಂಭದ ಮತ್ತು 15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರದ ವಿಮಾನದ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಲಿ.

BE ಮತ್ತು CD ಗಳು ವಿಮಾನವು ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ.

$\angle DAC = 30^\circ$, $\angle EAB = 60^\circ$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$BE = CD = h$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

$AB = x$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.19

15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ,

$ED = 200 \times 15 = 3000$ ಮೀ. (ಚಲಿಸಿದ ದೂರ = ವೇಗ $\times$ ಕಾಲ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $BC = 3000$ ಮೀ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle DAC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\implies CD = AC \tan 30^\circ$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = (x + 3000)\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

ಲಂಬಕೋನ $\triangle EAB$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$\implies BE = AB \tan 60^\circ \implies h = \sqrt{3}\,x$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, $\sqrt{3}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$\implies 3x = x + 3000 \implies x = 1500$ ಮೀ.

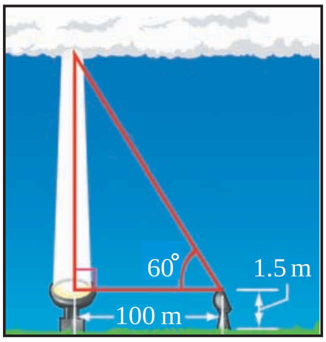
ಆಗ, (2) ರಿಂದ, $h = 1500\sqrt{3}$ ಮೀ.

ವಿಮಾನವು ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರವು $1500\sqrt{3}$ ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. ಒಂದು ಚಲಿಸುವ ಟ್ರಕ್ಕಿನ ಹೊರೆಯನ್ನು ಇಳಿಸಲು ಬಳಸಿದ ಇಳಿಪೋರೆಯು 30° ಉನ್ನತಿ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇಳಿಪೋರೆಯ ತುದಿಯು ನೆಲಮಟ್ಟದಿಂದ 0.9ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಇಳಿಪೋರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ದೀಪ ಕಂಬದ ಮುಂದೆ 150ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರದ ಹುಡುಗಿಯು ನಿಂತಿದ್ದು, $150\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಅವಳ ನೆರಳು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತಿದೆ. ದೀಪ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. A ಮತ್ತು B ಕೀಟಗಳೆರಡು 2ಮೀ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯವರೆಗೆ ಶಬ್ದವನ್ನು ಆಲಿಸಬಲ್ಲವು ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. A ಕೀಟವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 1ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೆಲದ ಮೇಲಿದ್ದು, ಗೋಡೆಯ ಮೇಲಿರುವ B ಕೀಟವನ್ನು ಒಂದು ಜೇಡವು ತಿನ್ನಲು ಹವಣಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿತು. A ಯು B ಗೆ ಎಚ್ಚರಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಮತ್ತು A ನಿಂದ B ನ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆದರೆ, ಜೇಡಕ್ಕೆ ಆಹಾರ ದೊರಕುವುದೇ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೇ? (A ಯು ಎಚ್ಚರಿಸುವುದನ್ನು B ಯು ಆಲಿಸಿದರೆ ಅದು ತಪ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)
4. ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಒಬ್ಬ ವೀಕ್ಷಕರು ಒಂದು ರಾತ್ರಿ ಮೋಡಗಳ ಮೇಲೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆ ದೀಪವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರು. ಚುಕ್ಕೆ ದೀಪದಿಂದ 100ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ನೆಲದಿಂದ 1.5ಮೀ. ಮೇಲೆ ಜೋಡಿಸಿರುವ ಮೋಜಣಿದರ್ಶಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಎಂಬುದಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದರು. ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ? (ಸುಳಿವು : ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿ)

   (**ಟಿಪ್ಪಣಿ:** ಘನ ಮೋಡಗಳು ಇರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಎತ್ತರವನ್ನು ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಮಾನ ನಿಲ್ದಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಸುರಕ್ಷಿತ ಹಾರಾಟಕ್ಕಾಗಿ ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯು ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ರಾತ್ರಿಯ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಚುಕ್ಕೆಯ ದೀಪವನ್ನು ಮೋಡಗಳ ಪಾದಕ್ಕೆ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಪ್ರಕಾಶಿಸುವುದರಿಂದ ಮೋಡದ ಒಳಮಾಳಿಗೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಬಹುದು.)



ಚಿತ್ರ 7.20

5. 40ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಲೋಲಕವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂದೋಲನದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗದಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಗುಂಡಿನ ಆರಂಭಿಕ ಮತ್ತು ಅಂತಿಮ ಸ್ಥಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಅಂತರವೇನು?
6. ಪರಸ್ಪರ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಮರಗಳಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಕಾಗೆಗಳು 15 ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿವೆ. ಅವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವಡೆಯನ್ನು (ಒಂದು ತಿನಿಸು) ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 60° ಅವನತಿ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡುತ್ತವೆ. ಅವು ಒಂದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಸರಳ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ವಡೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಹಾರಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪಕ್ಷಿಯು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುತ್ತದೆ? (**ಸುಳಿವು**: ಎರಡು ಮರಗಳ ಬುಡಗಳು, ವಡೆ ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ)
7. ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಉದ್ಯಾನವನದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪ ಕಂಬವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. PQ ರೇಖೆಯು ದೀಪ ಕಂಬದ ಪಾದದಲ್ಲಿ 90° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವಂತೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳು ಸರಹದ್ದಿನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗೂ P ನಿಂದ ದೀಪ ಕಂಬದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿರಲಿ. $PQ = 30$ ಮೀ. ಆದರೆ, ದೀಪ ಕಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 700 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿಮಾನದಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ನದಿಯ ಎರಡು ದಡಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದನು. ವಸ್ತುಗಳ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 45° ಆದರೆ, ನದಿಯ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)
9. ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ X ವ್ಯಕ್ತಿಯು 30° ಉನ್ನತಿ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಅವನಿಂದ 100 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಕ್ಷಿಯು ಹಾರುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. 20 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ಛಾವಣಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಇನ್ನೊಬ್ಬ Y ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ 45°

ಉನ್ನತಿ ಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಪಕ್ಷಿಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. X ಮತ್ತು Y ಗಳಿಬ್ಬರೂ ಪಕ್ಷಿಯ ಎರಡೂ ಕಡೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿದ್ದರೆ, Y ನಿಂದ ಪಕ್ಷಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುವ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ದೃಷ್ಟಿಯ ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಯಿಂದ 1.5 ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪುಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾನೆ. ಚಿತ್ರದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30°. ಚಿತ್ರವು ಈತನಿಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣದಿರುವುದರಿಂದ, ಇವನು ಕಪ್ಪುಹಲಗೆಯ ಕಡೆಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾನೆ ಮತ್ತು 45° ಉನ್ನತಿ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾನೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು 30 ಮೀ. ಎತ್ತರದ ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿದ್ದಾನೆ ಮತ್ತು ನೆಲದಿಂದ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟವು 1.5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ ಅವನ ಕಣ್ಣಿನಿಂದ ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಗಿರುವ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಯಿಂದ 60° ಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಅವನು ಕಟ್ಟಡದ ಕಡೆಗೆ ನಡೆದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. 200 ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಯಿಂದ, ದೀಪದ ಮನೆಯನ್ನು ಕಾಯುವವನು ಒಂದೇ ದೃಷ್ಟಿಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾ ನೌಕೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ದೋಣಿಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕ್ರೀಡಾ ನೌಕೆ ಮತ್ತು ದೋಣಿಗಳಿಗೆ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 45° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿವೆ. ಸುರಕ್ಷತೆಗಾಗಿ ಎರಡು ಸಮುದ್ರ ಕಾಯಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು ಕನಿಷ್ಠ 300 ಅಡಿ ಇರಲೇಬೇಕು. ಅವು 300 ಅಡಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೆ, ಕಾಯುವವನು ಗಂಟೆಯನ್ನು ಬಾರಿಸಬೇಕು. ಈಗ ಕಾಯುವವನು ಗಂಟೆಯನ್ನು ಬಾರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆಯೇ?

13. ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ಒಂದು ಬಲೂನು ಸ್ಥಿರ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗಾಳಿಯೊಂದಿಗೆ ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದನು. ಒಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಹುಡುಗನಿಂದ ಬಲೂನಿನ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. 2 ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ, ಅದೇ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆ. ಗಾಳಿಯ ವೇಗವು $29\sqrt{3}$ ಮೀ./ನಿಮಿಷ ಆದರೆ, ನೆಲದ ಮಟ್ಟದಿಂದ ಬಲೂನಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ನೇರ ರಸ್ತೆಯು ಗೋಪುರದ ಪಾದಕ್ಕೆ ತಲುಪುತ್ತದೆ. ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬನು ಒಂದು ವ್ಯಾನನ್ನು 30° ಅವನತಿ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸುತ್ತಾನೆ. ವ್ಯಾನು ಏಕರೂಪ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಗೋಪುರದ ಕಡೆಗೆ ಬರುತ್ತಿದೆ. 6 ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ, ವ್ಯಾನಿನ ಅವನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾನು ಗೋಪುರವನ್ನು ತಲುಪಲು ಇನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ನಿಮಿಷಗಳ ಕಾಲ ಬೇಕಿದೆ?

15. ಉಪಗ್ರಹದ ಒಂದೇ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎರಡು ಭೂ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದ ಅಳೆಯಲಾದ ಭೂಮಿಯ ಒಂದು ಕೃತಕ ಉಪಗ್ರಹದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಉಪಗ್ರಹ ಮತ್ತು ಎರಡು ಭೂ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಲಂಬ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ. ಭೂ ಕೇಂದ್ರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 4000 ಕಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಉಪಗ್ರಹ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\sqrt{3} = 1.732$ ಬಳಸಿರಿ)

16. 60 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. 40 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ತುದಿ ಮತ್ತು ಪಾದದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿವೆ. ದೀಪದ ಮನೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಗೋಪುರದ ಪಾದದಿಂದ ದೀಪದ ಮನೆಯ ತುದಿಗೆ ಇರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಒಂದು ಸರೋವರದ 45 ಮೀ. ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಹಾರಾಡುತ್ತಿರುವ ವಿಮಾನದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 30° ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಅದರ ಪ್ರತಿಫಲನದ ಅವನತಿ ಕೋನವು 60° ಆಗಿದೆ. ಸರೋವರದ ಮೇಲ್ಮೈನಿಂದ ವಿಮಾನಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. $(1 - \sin^2\theta)\sec^2\theta =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

2. $(1 + \tan^2\theta)\sin^2\theta =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

3. $(1 - \cos^2\theta)(1 + \cot^2\theta) =$

(A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

4. $\sin(90° - \theta)\cos\theta + \cos(90° - \theta)\sin\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

5. $1 - \dfrac{\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} =$

(A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\cos^4 x - \sin^4 x =$

(A) $2\sin^2 x - 1$ (B) $2\cos^2 x - 1$ (C) $1 + 2\sin^2 x$ (D) $1 - 2\cos^2 x$.

7. $\tan\theta = \dfrac{a}{x}$ ಆದರೆ, $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ನ ಬೆಲೆಯು

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

8. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ ಆದರೆ, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ ನ ಬೆಲೆಯು

(A) 1 (B) –1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

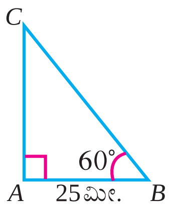
9. $\dfrac{\sec\theta}{\cot\theta + \tan\theta} =$

(A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

10. $\dfrac{\sin(90° - \theta)\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos(90° - \theta)\cos\theta}{\cot\theta} =$

(A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) –1 (D) $\sin\theta$

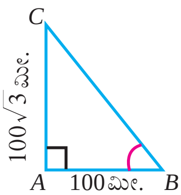
11. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AC =$



(A) 25 ಮೀ. (B) $25\sqrt{3}$ ಮೀ.

(C) $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ ಮೀ. (D) $25\sqrt{2}$ ಮೀ.

12. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\angle ABC =$



(A) 45° (B) 30°

(C) 60° (D) 50°

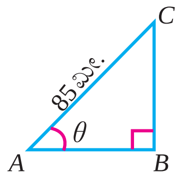
13. ಒಬ್ಬನು ಒಂದು ಗೋಪುರದಿಂದ 28.5 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣಿನ ಮಟ್ಟವು ನೆಲದಿಂದ 1.5 ಮೀ. ಮೇಲಿದೆ. ಅವನ ಕಣ್ಣುಗಳಿಂದ ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತಿ ಕೋನವು 45° ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು

(A) 30 ಮೀ. (B) 27.5 ಮೀ. (C) 28.5 ಮೀ. (D) 27 ಮೀ.

14. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $\sin\theta = \frac{15}{17}$ ಆದರೆ, $BC =$

(A) 85 ಮೀ. (B) 65 ಮೀ.

(C) 95 ಮೀ. (D) 75 ಮೀ.



15. $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1 + \cot^2\theta)(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) 0

18. $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{1 + \cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1 + \tan^2\theta} =$

(A) $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) –9

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

ಪಾಲ್ ಎಡ್ರೋಸ್ (26 ಮಾರ್ಚ್, 1913 – 20 ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್, 1996) ರವರು ಹಂಗೇರಿಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಎಡ್ರೋಸ್‌ರವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿನ ಸಂಶೋಧನಾ ಬರಹಗಳ ಸಮೃದ್ಧಿಶೀಲ ಪ್ರಕಾಶಕರುಗಳಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರಾಗಿದ್ದು, ಅವರನ್ನು ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಯೂಲರ್‌ರವರೊಂದಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಹೋಲಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇವರು ತಮ್ಮ ಜೀವಿತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 1,475 ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಬರಹಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ, ಯೂಲರ್‌ರವರು ಸುಮಾರು 800 ಸಂಶೋಧನಾ ಬರಹಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆ ಎಂದು ಬಲವಾಗಿ ನಂಬಿದ್ದರು ಮತ್ತು ಆಚರಣೆಯಲ್ಲಿಟ್ಟಿದ್ದರು. ಇವರು ತಮ್ಮ ಜೀವಿತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ 511 ವಿಭಿನ್ನ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರು.

8

ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ

Measure what is measurable, and make measurable what is not so

-Galileo Galilei

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲ
  - ❖ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ
  - ❖ ಶಂಕು
  - ❖ ಗೋಳ
- ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಘನಫಲಗಳು

ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್

(ಕ್ರಿ.ಪೂ.287 - ಕ್ರಿ.ಪೂ.212) ಗ್ರೀಕ್

ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್‌ರನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅವರು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

8.1 ಪೀಠಿಕೆ

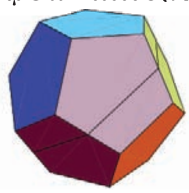
ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು, ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹಾಗೂ ಘನವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸುವ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಭಾಗವನ್ನು "ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವಸ್ತುಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವು ಅವಶ್ಯಕವಾದುದು. ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಅನೇಕ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಮತಲ, ಬಹುಮುಖ ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಹಾಗೂ ಘನಗಳ ಕೆಲವು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗಳನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಗೋಳ) ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು ನ್ಯಾನೋ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ತಂತ್ರಜ್ಞಾನವನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವ ಗಾತ್ರದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಆಧಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನ್ಯಾನೋ ವಿಜ್ಞಾನದ ಬಹುದೊಡ್ಡ ಕಲ್ಪನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ, ಶಂಕು, ಗೋಳಗಳಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮತ್ತು ಸಂಯೋಜಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿಯೋಣ.

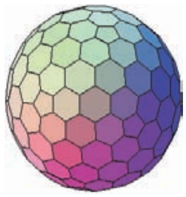
8.2 ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Surface Area)

ಸಿರಾಕ್ಯೂಸ್‌ನ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್, ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾಗಿದ್ದು, ಅವರು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಸುತ್ತುವರಿದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲದ ಮೂರನೇ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಇದನ್ನು ತನ್ನ ಅತೀ ಮಹತ್ವದ ಸಾಧನೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರು. ಅವರು ಪರವಲಯದ ಕಂಸದ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಳಲಿಕೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು.



ಚಿತ್ರ 8.1

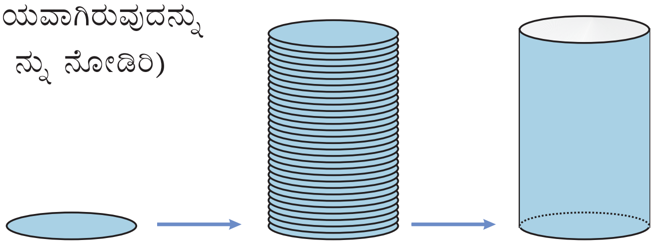
ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯ ತೆರೆದಿಟ್ಟ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 3–ಆಯಾಮ ವಸ್ತುವಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹೊರಭಾಗದ ಮೇಲ್ಮೈಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರಗಳು ಕೆಲವು ಘನಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.2

8.2.1 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ (Right Circular Cylinder)

ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಅಳತೆಯ ಹಲವು ವೃತ್ತೀಯ ಹಾಳೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ರಟ್ಟುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಜೋಡಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರುವುದನ್ನು ಮತ್ತು ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 8.3 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



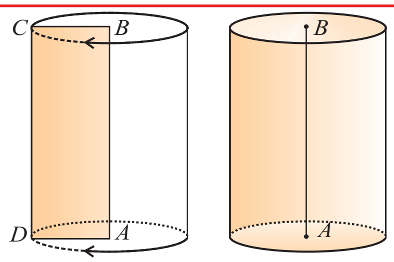
ಚಿತ್ರ 8.3

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಆಯತವು ತನ್ನ ಒಂದು ತಟಸ್ಥ ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

$ABCD$ ಯು ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿರಲಿ. ಇದು ತನ್ನ AB ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸುತ್ತನ್ನು ಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. AB ಯನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಅಕ್ಷ (axis) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. AB ಯ ಉದ್ದವು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಉದ್ದ ಅಥವಾ ಎತ್ತರವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು AD ಅಥವಾ BC ಯನ್ನು ಇದರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



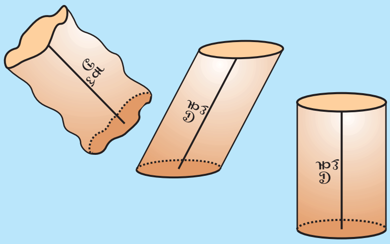
ಚಿತ್ರ 8.4

ಸೂಚನೆ

(i) ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಓರೆ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿದ್ದು ಆದರೆ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

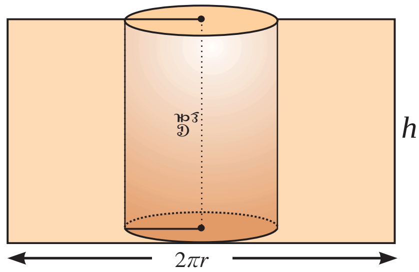
(iii) ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವೃತ್ತೀಯ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅದರ ಅಕ್ಷವು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.5

(i) ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ (ಪಾರ್ಶ್ವ) ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮುಖ ಮತ್ತು ಕೆಳಮುಖಗಳು ಏಕಸಂಪಾತ ವೃತ್ತೀಯ ವಲಯಗಳಾಗಿದ್ದು, ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ನೇರ ಮೇಲ್ಮೈಯು ವಕ್ರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೇರ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ಅಥವಾ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.6

ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA = ಪಾದದ ಪರಿಧಿ $\times$ ಎತ್ತರ $= 2\pi r \times h$

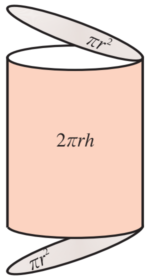
$= 2\pi rh$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

(ii) ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA $= $ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $+ 2\times$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh + 2\times \pi r^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, TSA $= 2\pi r(h+r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.7

(iii) ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ (Right circular hollow cylinder)

ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆ, ರಬ್ಬರ್ ನಳಿಕೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಂತಹ ಘನಗಳು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿವೆ. ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ R ಮತ್ತು r ಗಳೊಂದಿಗೆ h ಎತ್ತರದ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗೆ,

ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA $=$ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $+$ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

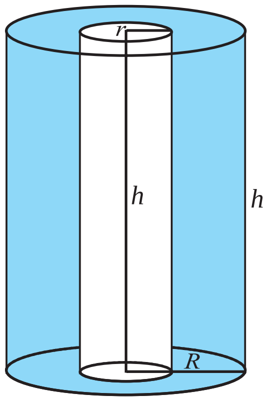
ಆದ್ದರಿಂದ, CSA $= 2\pi h(R+r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA $=$ CSA $+ 2\times$ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$

$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$

$\therefore$ TSA $= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.8

ಗಮನಿಸಿ

ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ದಟ್ಟತೆ (ಮಂದತೆ), w $= R - r$.

> **ಸೂಚನೆ**
> ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, π ಗೆ ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $\frac{22}{7}$ ಎಂಬ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.1

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ (i) ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು (ii) ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

$r = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 20$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA $= 2\pi rh$

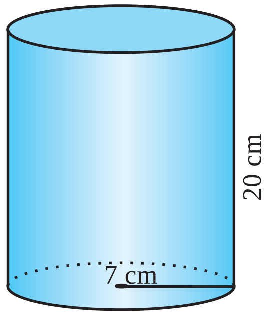
$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 880$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 1188$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.



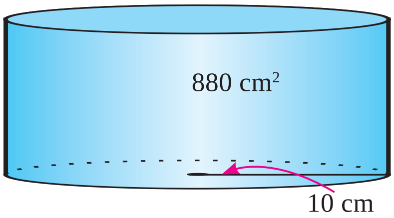
ಚಿತ್ರ 8.9

ಉದಾಹರಣೆ 8.2

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 880 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಇದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

S ಎಂಬುದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.10

$r = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $S = 880$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $S = 880 \implies 2\pi r[h + r] = 880$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h + 10] = 880$$

$$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$$

$$\implies h + 10 = 14$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ, $h = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4 = \frac{1760}{7}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 251\frac{3}{7}$ ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ :

CSA = TSA – 2 × ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 880 - 2 \times \pi r^2$

$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$

$= \frac{1760}{7} = 251\frac{3}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.3

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 2 : 5 ಮತ್ತು ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{3960}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $r : h = 2 : 5 \implies \frac{r}{h} = \frac{2}{5}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $r = \frac{2}{5}h$

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ , CSA $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 15 \implies r = \frac{2}{5}h = 6.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರವು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.4

120 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ರೋಡ್ ರೋಲರ್‌ನ ವ್ಯಾಸವು 84 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದು ಒಂದು ಆಟದ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿಸಲು 500 ಪೂರ್ಣ ಸುತ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರಿಗೆ 75 ಪೈಸೆಯಂತೆ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

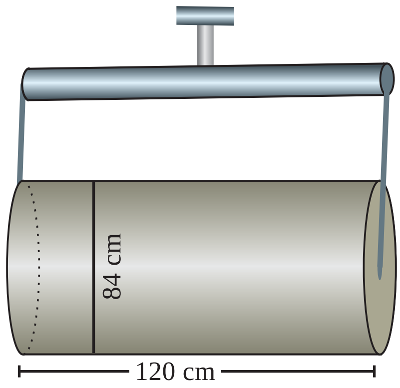
ಪರಿಹಾರ $r = 42$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 120$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸುತ್ತಿನಲ್ಲಿ ರೋಲರ್ ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ರೋಡ್ ರೋಲರ್‌ನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$

$= 31680$ ಸೆಂ.ಮೀ^{2}.



ಚಿತ್ರ 8.11

500 ಸುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ರೋಲರ್ ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 31680 \times 500$

$= 15840000$ ಸೆಂ.ಮೀ^{2}.

$= \frac{15840000}{10000} = 1584$ಸೆಂ.ಮೀ^{2}. (10,000 ಸೆಂ. ಮೀ^{2} = 1 ಚ.ಮೀ)

1 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟಾಗಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ $\frac{75}{100}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಆಟದ ಮೈದಾನವನ್ನು ಸಮತಟ್ಟು ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ $= \frac{1584 \times 75}{100}$ = ₹ 1188.

ಉದಾಹರಣೆ 8.5

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಒಳ ಮತ್ತು ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

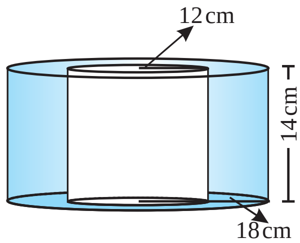
ಪರಿಹಾರ r, R ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

$r = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ., $R = 18$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA $= 2\pi h(R+r)$

ಆದ್ದರಿಂದ, CSA $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18 + 12)$

$= 2640$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.12

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA $= 2\pi(R + r)(R - r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18 + 12)(18 - 12 + 14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 3771\frac{3}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

8.2.2 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು (Right Circular Cone)

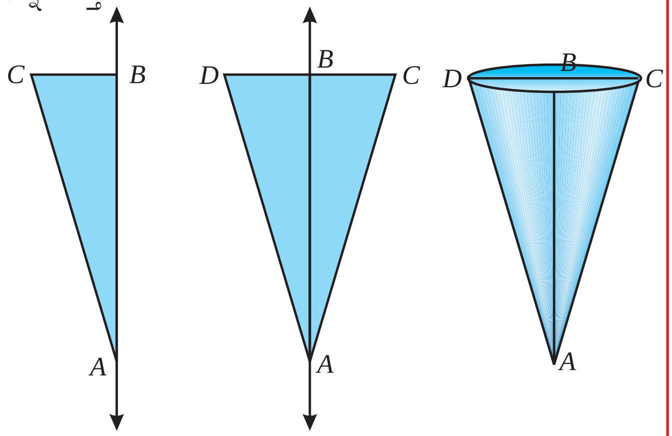
ನಮ್ಮ ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಐಸ್ ಕ್ರೀಮ್ ಜಾಡಿ, ತೇರಿನ ಮೇಲ್ತುದಿ, ಸರ್ಕಸ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಹಾಸ್ಯಗಾರನ ಟೋಪಿ, ಮೆಹೆಂದಿ ಜಾಡಿಗಳಂತಹ ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಬಹುಶಃ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು ನೇರ ಶಂಕುವಿನ ಆಕಾರದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಶಂಕುವು ಒಂದು ಸಮತಟ್ಟಾದ ಪಾದದಿಂದ ಶೃಂಗ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ನಯವಾಗಿ ಗೋಪುರಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಶಂಕುಗಳನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ನೇರ ಎಂದರೆ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಅಕ್ಷವು ಅದರ ಸಮತಲದೊಂದಿಗೆ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತೀಯ ಎಂದರೆ ಪಾದವು ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂಬರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ಶಂಕುವಿನ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಚಟುವಟಿಕೆ ಒಂದು ಮಂದವಾದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯನ್ನು B ನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವಾಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮೂಲಕ (AB ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ) ಒಂದು ಉದ್ದವಾದ ದಪ್ಪನೆಯ ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮ ಕೈಗಳಿಂದ ತಂತಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ತಂತಿಯ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸುತ್ತಿರಿ.

ಏನಾಯಿತು? ತಂತಿಯ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸುತ್ತಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಆಕಾರವನ್ನು ನೀವು ಗುರುತಿಸುವಿರಾ?. ಉಂಟಾದ ಆಕಾರವು ಲಂಬ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯನ್ನು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ AB ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ 360° ಗೆ ಸುತ್ತಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನವನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.13

AB ಉದ್ದವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

BC ಉದ್ದವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ($BC = r$).

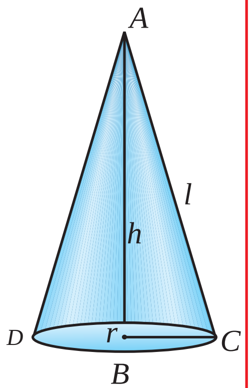
AC ಉದ್ದವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ l ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ($AC = AD = l$).

ಲಂಬಕೋನ $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} \quad \text{(ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯ)}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 - h^2}$$



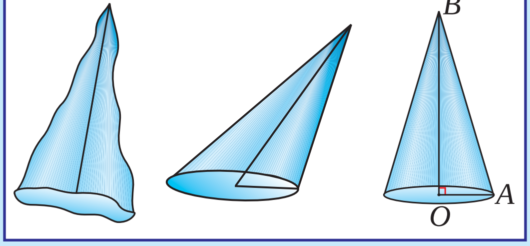
ಚಿತ್ರ 8.14

ಸೂಚನೆ

(i) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು **ಓರೆ ಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದವು ವೃತ್ತೀಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು **ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iii) ಶೃಂಗವು ವೃತ್ತೀಯ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೇಲೆ ನೇರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದು **ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

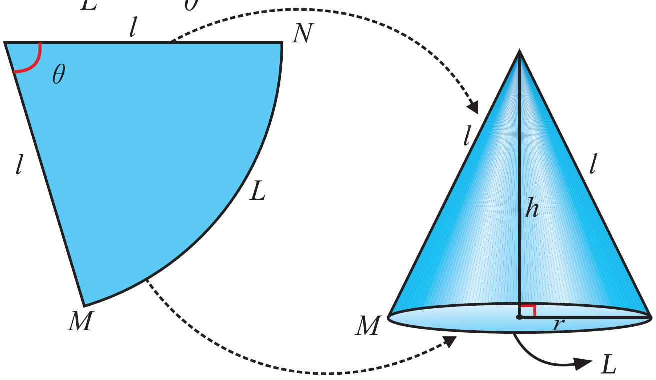


ಚಿತ್ರ 8.15

(i) ಒಂದು ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಜ್ಯ l ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ θ° ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. L ಎಂಬುದು ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಆಗ, $\dfrac{2\pi l}{L} = \dfrac{360^\circ}{\theta^\circ}$

$$\Longrightarrow \quad L = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \qquad (1)$$



ಚಿತ್ರ 8.16

ಈಗ, ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

r ಎಂಬುದು ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

ಇದರಿಂದ, $L = 2\pi r$

(1) ರಿಂದ,

$$2\pi r = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\Longrightarrow \quad r = l\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

ಗಮನಿಸಿ

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಮಡಚಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ:

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ		ಶಂಕು
ತ್ರಿಜ್ಯ (l)	→	ಓರೆ ಎತ್ತರ (l)
ಕಂಸದ ಉದ್ದ (L)	→	ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ $2\pi r$
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	→	ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ πrl

A ಎಂಬುದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \qquad (2)$$

ಆಗ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $A = \pi l^2\left(\dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) = \pi l^2\left(\dfrac{r}{l}\right)$.

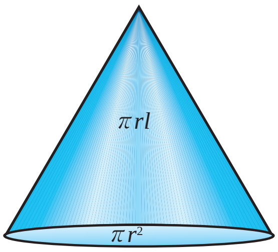
ಇದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $A = \pi rl$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

(ii) ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = { ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \pi rl + \pi r^2$

ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r(l + r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.17

ಉದಾಹರಣೆ 8.6

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 37 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \dfrac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು l ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $r = 35$ ಸೆಂ.ಮೀ., $l = 37$ ಸೆಂ.ಮೀ.

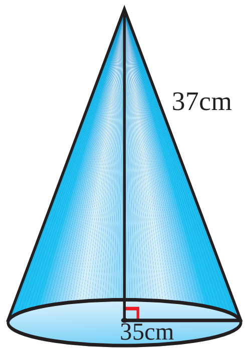
ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ , $\text{CSA} = \pi rl = \pi(35)(37)$

$\text{CSA} = 4070$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $\text{TSA} = \pi r[l + r]$

$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37 + 35]$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\text{TSA} = 7920$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.18

ಉದಾಹರಣೆ 8.7

O ಮತ್ತು C ಗಳು ನೇರ ವೃತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ಆಗಿರಲಿ. B ಎಂಬುದು ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle OBC = 60^o$ ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

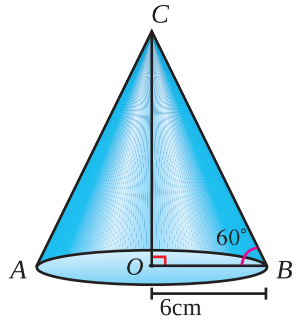
ಪರಿಹಾರ ತ್ರಿಜ್ಯ OB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle OBC = 60^o$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle OBC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$



ಚಿತ್ರ 8.19

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ $l = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಲಂಬಕೋನ $\triangle OBC$ ಯಲ್ಲಿ,

$$\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ, OC = $6\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi rl = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.8

120^0 ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಮಡಚಲಾಗಿದೆ. ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಎಂಬುದು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಕೋನ, $\theta = 120^\circ$

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $R = 21$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಾಗಿ ಮಡಚಿದಾಗ,

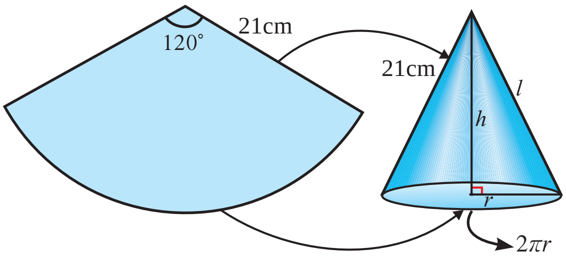
ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ= ಕಂಸದ ಉದ್ದ

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{\theta}{360^\circ} \times R$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 21$

$= 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.20

ಹಾಗೂ, ಶಂಕುವಿನ ಓರೆ ಎತ್ತರ,

$l =$ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯ

ಆದ್ದರಿಂದ, $l = R \Longrightarrow l = 21$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\text{CSA} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462.$$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ :

ಶಂಕುವಿನ CSA = ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi \times R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$= 462$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 462 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

8.2.3 ಗೋಳ (Sphere)

ಒಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆ(ತಟ್ಟೆ)ಯನ್ನು ಅದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಮೂಲಕ ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು **ಗೋಳ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗೋಳವು 3–ಆಯಾಮದ ವಸ್ತುವಾಗಿದ್ದು, ಇದು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

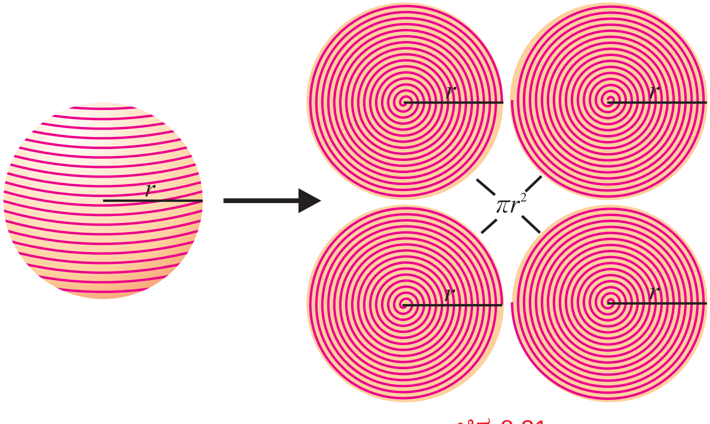
(i) ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (Curved surface area of a solid sphere)

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಬಿಲ್ಲೆಯ ವ್ಯಾಸದ ಮೂಲಕ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಂಟಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 360^0 ಗೆ ಸುತ್ತಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವ ವಸ್ತುವು ನೋಡಲು ಚೆಂಡಿನಂತಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಹೊಸ ಘನವನ್ನು **ಗೋಳ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.

- ಒಂದು ಪ್ಲಾಸ್ಟಿಕ್ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.
- ಚೆಂಡಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸೂಜಿಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗೊಳಿಸಿ.
- ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ದಾರವನ್ನು ಚೆಂಡಿನ ಸಂಪೂರ್ಣ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸುತ್ತುವರಿಯುವಂತೆ ಸುತ್ತಿರಿ.
- ದಾರವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಬಳಸಿದ ದಾರದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.
- ದಾರವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ.
- ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ತಂತಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.
- ರಚಿತವಾದ ಗೋಳ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.



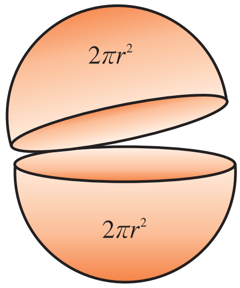
ಚಿತ್ರ 8.21

ಈಗ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = ನಾಲ್ಕು ಸಮ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA = $4 \times$ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $4 \times \pi r^2$

$\therefore$ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $4\pi r^2$ ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

(ii) ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳ (Solid hemisphere)



ಚಿತ್ರ 8.22

ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸಮತಲವು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಗೋಳದ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವನ್ನು ಘನ **ಅರ್ಧ ಗೋಳ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

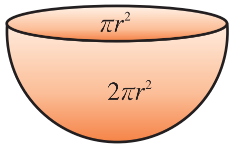
ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\dfrac{\text{ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ}}{2}$

$= \dfrac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, TSA = ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.23

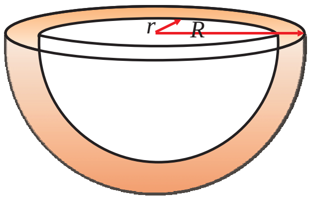
(iii) ಟೊಳ್ಳಾದ ಅರ್ಧ ಗೋಳ (Hollow hemisphere)

R ಮತ್ತು r ಗಳು ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2$

$= 2\pi(R^2 + r^2)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.24

ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = { ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r)$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 8.9

7 ಮೀ. ಒಳ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ಸರ್ಕಸ್ ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನು ತನ್ನ ಸಾಹಸವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತಾನೆ. ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗೆ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \dfrac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಒಳ ವ್ಯಾಸ, $2r = 7$ ಮೀ.

ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಗೋಳದ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2$

$= \dfrac{22}{7} \times 7^2$

ಮೋಟಾರ್ ಸವಾರನಿಗೆ ಸವಾರಿಗಾಗಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 154 ಚ.ಮೀ.

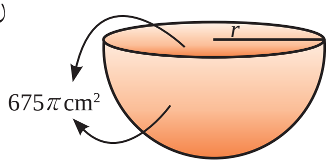
ಉದಾಹರಣೆ 8.10

ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 675π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$3\pi r^2 = 675\pi \text{ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 = 225$$



ಚಿತ್ರ 8.25

ಈಗ, ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\text{CSA} = 2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\pi \text{ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.}$$

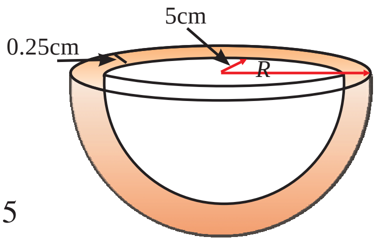
ಉದಾಹರಣೆ 8.11

ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಟ್ಟಲಿನ ಮಂದವು 0.25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಬಟ್ಟಲಿನ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಬಟ್ಟಲಿನ ಹೊರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r, R ಮತ್ತು w ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಟ್ಟಲಿನ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಮಂದ ಆಗಿರಲಿ.

$r = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $w = 0.25$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad R = r + w = 5 + 0.25 = 5.25 \text{ ಸೆಂ.ಮೀ.}$$



ಚಿತ್ರ 8.26

ಈಗ, ಬಟ್ಟಲಿನ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಟ್ಟಲಿನ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 173.25$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 660 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4400 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 110 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಭವನವು 12 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 50 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 3.5 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 20 ರಂತೆ ಸ್ಥಂಭಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 231 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೂರನೇ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1540 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರವು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತವು 3:2 ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 5:3 ಆಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಹೊರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 540π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಆಂತರಿಕ ವ್ಯಾಸವು 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಾಕಾರದ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯ ಬಾಹ್ಯ ವ್ಯಾಸವು 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಇದರ ಉದ್ದವು 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಕೊಳವೆಯ ಮಂದವು 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಕೊಳವೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60^0 ಮತ್ತು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 236 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ಭತ್ತದ ರಾಶಿಯು ಶಂಕುವಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿದ್ದು ಇದರ ವ್ಯಾಸವು 4.2 ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 2.8 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ರಾಶಿಯನ್ನು ಮಳೆಯಿಂದ ರಕ್ಷಿಸಲು ಬಟ್ಟೆಯಿಂದ ನಿಖರವಾಗಿ ಮುಚ್ಚಬೇಕಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಯ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 180^0 ಮತ್ತು 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಸೇರಿಸಿ ಟೊಳ್ಳು ಶಂಕುವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 3:5 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 60π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 2772 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 98.56 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಎರಡು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತವು 3:5 ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 2.1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಅರ್ಧ ಗೋಳೀಯ ಗುಮ್ಮಟದ ಒಳ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದರ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 17.6 ಮೀ. ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹5 ರ ದರದಂತೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8.3 ಘನಫಲ (Volume)

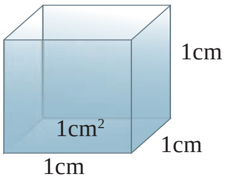
ನಾವು ಇದುವರೆಗೆ ಕೆಲವು ಘನ ವಸ್ತುಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ಕೆಲವು ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವ ಘನ ವಸ್ತುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಕಲಿಯೋಣ. ಘನಫಲವು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ 'ತುಂಬಿದ ಪ್ರದೇಶದ ಪರಿಮಾಣ' ಆಗಿದೆ. ಘನ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವು ಘನದ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಏಕಮಾನ ಘನದ (ಏಕಮಾನ ಬಾಹುವಿನ ಘನ) ಪರಿಮಿತಿ ಗಣಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಘನಫಲವು ಈ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಘನದ ಘನಫಲ

= ಉದ್ದ $\times$ ಅಗಲ$\times$ ಎತ್ತರ

= 1ಸೆಂ.ಮೀ. $\times$1ಸೆಂ.ಮೀ. $\times$1 ಸೆಂ.ಮೀ. = 1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.27

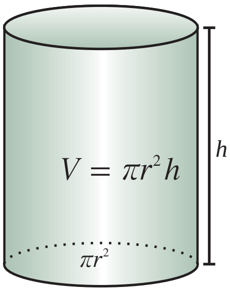
ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲವು 100 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಿದರೆ ಅದು ನಮಗೆ ಈ ವಸ್ತುವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಲು 1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಘನಫಲವಿರುವ 100 ಘನಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಂತೆಯೇ, ಘನಫಲವು ಧನಾತ್ಮಕ ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

8.3.1 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ (Volume of a right circular cylinder)

(i) ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.28

ಅಂದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ, V = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ

$= \pi r^2 \times h$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ,$V = \pi r^2 h$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

(ii) ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ (ಬಳಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲ)

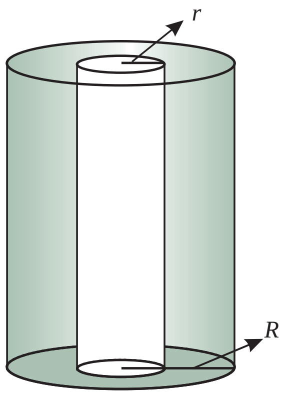
R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು h ಎಂಬುದು ಇದರ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಘನಫಲ, V = ಹೊರ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ - ಒಳ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

ಇದರಿಂದ, ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ,

$V = \pi h (R^2 - r^2)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.29

ಉದಾಹರಣೆ 8.12

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

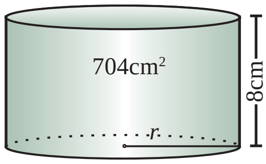
h = 8ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು CSA = 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ, CSA = 704

$\Longrightarrow \quad 2\pi rh = 704$

$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$

$\therefore \quad r = \frac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14$ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.30

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ, $V = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$

$= 4928$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಇದರಿಂದ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $= 4.928$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು. (1000 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. = 1 ಲೀಟರ್)

ಉದಾಹರಣೆ 8.13

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವು 28 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ವ್ಯಾಸಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು 1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಬ್ಬಿಣದ ತೂಕವು 7 ಗ್ರಾಂ ಆದರೆ, ಕೊಳವೆಯ ತೂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r, R ಮತ್ತು h ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕೊಳವೆಯ ಒಳ, ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿರಲಿ.

$2r = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $2R = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $h = 28$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ, $r = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $R = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲ, $V = \pi \times h \times (R + r)(R - r)$

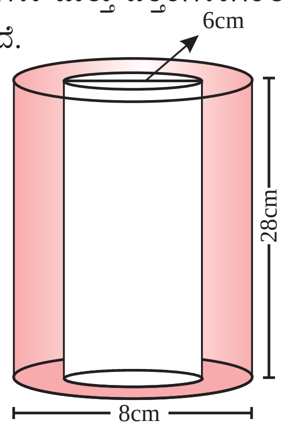
$= \frac{22}{7} \times 28 \times (4 + 3)(4 - 3)$

$\therefore$ ಘನಫಲ, $V = 616$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

1 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಲೋಹದ ತೂಕ $= 7$ ಗ್ರಾಂ

616 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಲೋಹದ ತೂಕ $= 7 \times 616$ ಗ್ರಾಂ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಳವೆಯ ತೂಕ $= 4.312$ ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂಗಳು



ಚಿತ್ರ 8.31

ಉದಾಹರಣೆ 8.14

ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 13.86 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 69.3 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ A ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

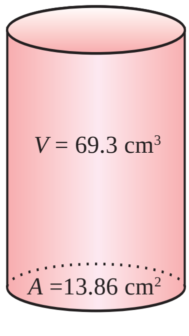
ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $A = \pi r^2 = 13.86$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಮತ್ತು ಘನಫಲ, $V = \pi r^2 h = 69.3$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\pi r^2 h = 69.3$

$\Longrightarrow 13.86 \times h = 69.3$

$\therefore$ $h = \frac{69.3}{13.86} = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.32

ಈಗ, ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = 13.86$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$

$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41 \Longrightarrow r = \sqrt{4.41} = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಈಗ, ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, CSA $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 5$

ಆದ್ದರಿಂದ, CSA = 66 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

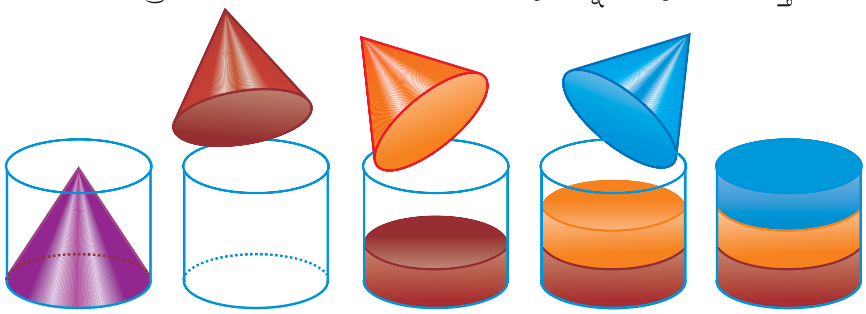
8.3.2 ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ (Volume of a right circular cone)

r ಮತ್ತು h ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದೇ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಎತ್ತರವಿರುವ ಟೊಳ್ಳಾದ ಶಂಕು ಮತ್ತು ಟೊಳ್ಳಾದ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈಗ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮರಳು ಅಥವಾ ದ್ರವದಿಂದ ಶಂಕುವನ್ನು ತುಂಬಿರಿ ಮತ್ತು ನಂತರ ಅದನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸುರಿಯಿರಿ. ಈ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದಾಗ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮರಳು / ದ್ರವದಿಂದ ಮೂರನೇ ಬಾರಿ ತುಂಬುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 8.33

ಈ ಸರಳ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ, r ಮತ್ತು h ಗಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾದರೆ,

$3 \times$ (ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ) = ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲ $= \pi r^2 h$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

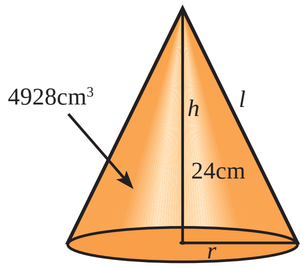
ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 8.15

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 4928 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಎತ್ತರ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r, h ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

$V = 4928$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 24$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.34

ಆಗ, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$

$\Longrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 4928$

$\Longrightarrow r^2 = \frac{4928 \times 3 \times 7}{22 \times 24} = 196.$

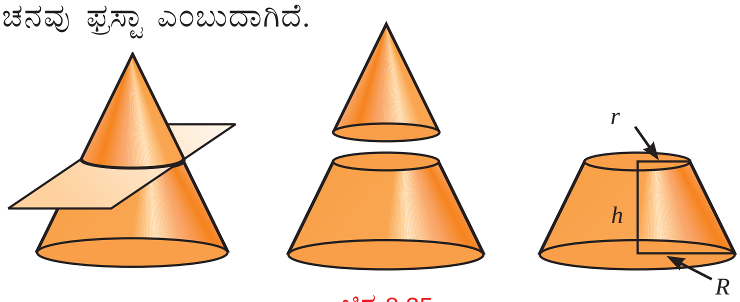
ആ ಆದ್ದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = \sqrt{196} = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

8.3.3 ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ (Volume of a Frustum of a Cone)

ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಎರಡು ಘನಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

ಸ್ವಲ್ಪ ಜೇಡಿಮಣ್ಣನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಚಾಕುವಿನಿಂದ ಅದರ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, ಉಳಿಯುವುದೇನು? ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಫ್ರಸ್ಟಮ್ ಎಂಬ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದದ ಅರ್ಥವು "ಕತ್ತರಿಸಿದ ತುಂಡು" ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಬಹುವಚನವು ಫ್ರಸ್ಟಾ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8.35

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮತಲದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಪಾದವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಶಂಕುವಿನ ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಛಿನ್ನಕವು ಎರಡು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ.

ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ ಎಂಬುದು ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 8.35ನ್ನು ನೋಡಿ). ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಒಂದು ಛಿನ್ನಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

R ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

r ಮತ್ತು x ಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನಿಂದ ಛಿನ್ನಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದ ನಂತರ ಪಡೆದ ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

h ಎಂಬುದು ಛಿನ್ನಕದ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ, V = ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ – ಚಿಕ್ಕ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$$= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times(x+h) - \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times x$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2 h]$. (1)

ಚಿತ್ರ 8.36 ರಿಂದ, $\Delta BFE \sim \Delta DGE$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \quad \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$$

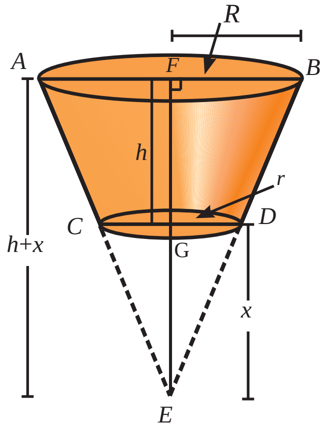
$$\Longrightarrow \quad x(R-r) = rh$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \dfrac{rh}{R-r}$ (2)

ಈಗ, (1) $\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2h]$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2h]$$ (2) ನ್ನು ಬಳಸಿ



ಚಿತ್ರ 8.36

ಇದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಘನಫಲ,

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

ಸೂಚನೆ

* ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi(R+r)l$. ಇಲ್ಲಿ, $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

* ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$. ಇಲ್ಲಿ, $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

* (ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಬಳಸುವಂತಿಲ್ಲ)

ಉದಾಹರಣೆ 8.16

ಛಿನ್ನಕ ಆಕಾರದ ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಎರಡು ವೃತ್ತೀಯ ತುದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಆಳವು 63 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತೀಯ ತುದಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು h ಎಂಬುದು ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಆಳ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 8.37

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $R = 15$ ಸೆಂ.ಮೀ., $r = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $h = 63$ ಸೆಂ.ಮೀ.

(ಛಿನ್ನಕ) ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಘನಫಲ $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$$

$= 26994$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$= \frac{26994}{1000}$ ಲೀಟರ್‌ಗಳು (1000 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.= 1 ಲೀಟರ್)

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ= 26.994 ಲೀಟರ್‌ಗಳು.

8.3.4 ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a sphere)

(i) ಘನ ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a Solid Sphere)

ಕೆಳಗಿನ ಸರಳ ಪ್ರಯೋಗವು ಗೋಳದ ಘನಫಲ, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ

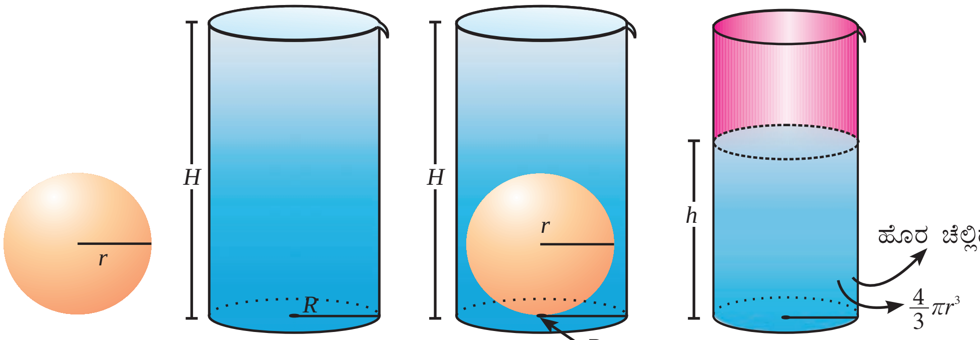
R ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು H ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಒಂದು ಜಾಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಜಾಡಿಗೆ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿರಿ. $R > r$ ಆಗಿರುವಂತೆ r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರನ್ನು r ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು H ಎತ್ತರವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದ ಜಾಡಿಗೆ ತುಂಬಿರಿ. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{4}{3}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ $(h = \frac{4}{3} r)$. ಈಗ, ಘನಗೋಳದ ಘನಫಲವು ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೊರ ಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ, V = ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಎತ್ತರ

$= \pi r^2 \times \frac{4}{3} r$ (ಇಲ್ಲಿ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರ $h = \frac{4}{3} r$)

$= \frac{4}{3} \pi r^3$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ಘನಫಲ, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.38

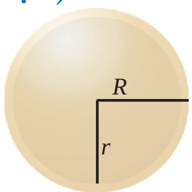
(ii) ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a hollow sphere) (ಬಳಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲ)

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಒಳ ಮತ್ತು ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ r ಮತ್ತು R ಆದರೆ,

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ = ಹೊರ ಗೋಳದ ಘನಫಲ – ಒಳ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



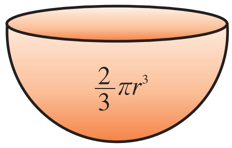
ಚಿತ್ರ 8.39

(iii) ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a solid hemisphere)

ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ $= \frac{1}{2} \times$ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 8.40

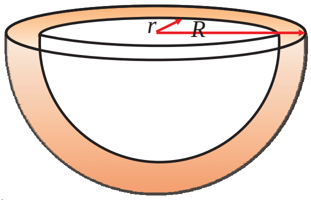
(iv) ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ (Volume of a hollow hemisphere) (ಬಳಸಿದ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಫಲ)

ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ = ಹೊರ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

– ಒಳ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$= \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times r^3$

$= \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$ ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳು.

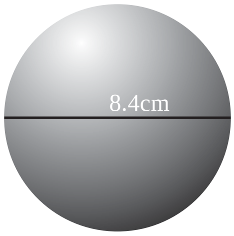


ಚಿತ್ರ 8.41

ಉದಾಹರಣೆ 8.17

ಗೋಳಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಲೋಹದ ಗುಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವು 8.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಎಂಬುದು ಲೋಹದ ಗುಂಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.42

ಈಗ, $2r = 8.4$ ಸೆಂ.ಮೀ. $\Longrightarrow r = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಗುಂಡಿನ ಘನಫಲ, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಗುಂಡಿನ ಘನಫಲ $= 310.464$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.18

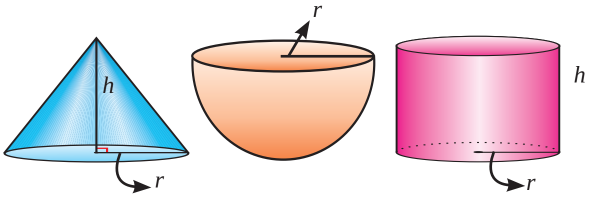
ಒಂದು ಶಂಕು, ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳು ಸಮನಾದ ಪಾದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಶಂಕು ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ r ಎಂಬುದು ಶಂಕು, ಅರ್ಧ ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರಲಿ.

h ಎಂಬುದು ಶಂಕು ಮತ್ತು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

$r = h$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

V_1, V_2 ಮತ್ತು V_3 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶಂಕು, ಅರ್ಧ ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.43

ಈಗ, $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$

$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3$ (ಇಲ್ಲಿ, $r = h$)

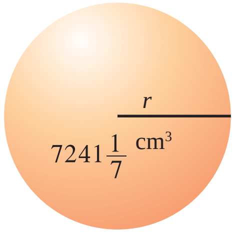
$\Longrightarrow V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$

ಇದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ಅನುಪಾತವು $1 : 2 : 3$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.19

ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $7241\frac{1}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ r ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಘನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.44

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $V = 7241\frac{1}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$$\Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$r^3 = \frac{50688}{7} \times \frac{3 \times 7}{4 \times 22}$$

$$= 1728 = 4^3 \times 3^3$$

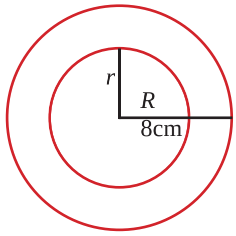
ಆದ್ದರಿಂದ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 12$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.20

ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $\frac{11352}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಳದ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

V ಯು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8.45

ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, $V = \frac{11352}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \Longrightarrow r^3 = 125 = 5^3$$

ಇದರಿಂದ, ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಆಸ್ಪತ್ರೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ರೋಗಿಗೆ ಪ್ರತಿ ನಿತ್ಯ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಬಟ್ಟಲಿನಲ್ಲಿ ಕಷಾಯವನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಆ ಬಟ್ಟಲಿನಲ್ಲಿ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರದವರೆಗೆ ಕಷಾಯವನ್ನು ತುಂಬಿದರೆ, ಪ್ರತಿ ದಿನ ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ 250 ರೋಗಿಗಳಿಗೆ ನೀಡಲು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಮಾಣದ ಕಷಾಯವನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?
3. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಮೊತ್ತವು 37 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1628 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು 62.37 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತವು 2:3 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 5:3 ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 5:7 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಘನಫಲವು 4400 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. 66 ಸೆಂ.ಮೀ. $\times$ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯಿರುವ ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಲೋಹದ ತಗಡನ್ನು ಸುತ್ತಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲ್ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನ ಉದ್ದವು 28 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 3 ಮಿ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಮರದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 29 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. 12 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಮರದ ಘನ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿಯು 44 ಮೀ. ಆದರೆ, ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯು ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವು $\frac{5676}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಛಿನ್ನಕದ ತುದಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು 44 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8.4π ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಆಳವು 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. 5 ಸೆಂ.ಮೀ., 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯನ್ನು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಾಹುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ, ಸೃಷ್ಟಿಯಾಗುವ ಘನದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಅನುಪಾತವು 2:3 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಘನಫಲವು 100.48 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಓರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

15. ವೃತ್ತೀಯ ಪಾದದೊಂದಿಗಿರುವ ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು 216π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 9 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 0.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ 200 ಉಕ್ಕಿನ ಗೋಳೀಯ ಗುಂಡುಗಳ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಉಕ್ಕಿನ ಸಾಂದ್ರತೆಯು 7.95 ಗ್ರಾಂ/ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.
(ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ = ಘನಫಲ $\times$ ಸಾಂದ್ರತೆ)

17. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು 1152π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

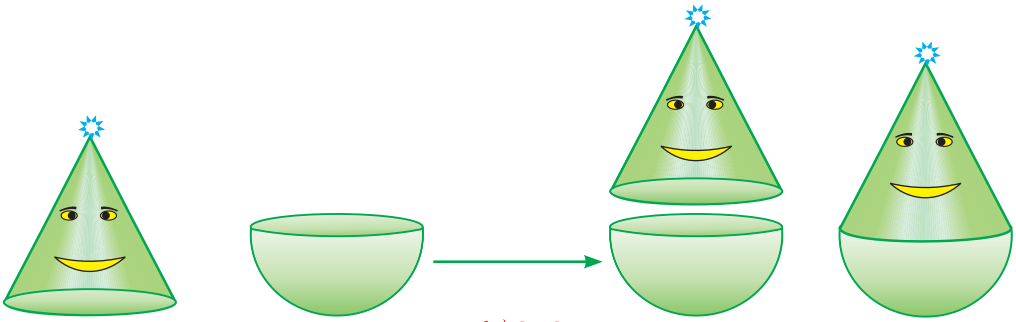
19. 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಂಚನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದಾದ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬಲೂನಿಗೆ ಗಾಳಿಯನ್ನು ತುಂಬಿದಾಗ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಿಂದ 14 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಸಂಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಲೂನಿನ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8.4 ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆ (Combination of Solids)

ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿರುವ ಗೊಂಬೆಗಳು, ವಾಹನಗಳು, ಪಾತ್ರೆಗಳು, ಸಾಮಗ್ರಿಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳಂತಹ ಹಲವಾರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?



ಚಿತ್ರ 8.46

ಘನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಯೋಜಿಸಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರಬೇಕೆಂದೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸಂಯೋಜಿತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಂಯೋಜಿತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಯೋಜಿಸಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ,

ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
+ ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಘನದ ಪೂರ್ಣ ಘನಫಲ = ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ + ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.21

ಒಂದು ಮರದ ಘನ ಗೊಂಬೆಯು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 3.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹಾಗೂ ಗೊಂಬೆಯ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 17.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೊಂಬೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಮರದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

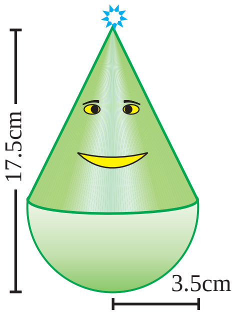
ಪರಿಹಾರ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯ $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

ತ್ರಿಜ್ಯ , $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಎತ್ತರ, $h = 17.5 - 3.5 = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.47

ಮರದ ಘನಫಲ = ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಘನಫಲ + ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

ಇದರಿಂದ, ಗೊಂಬೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಮರದ ಘನಫಲ = 269.5 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.22

ಒಂದು ಲೋಟವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿದ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 11.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

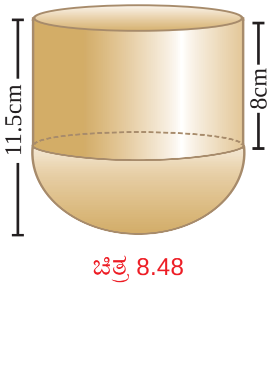
ತ್ರಿಜ್ಯ , r = ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ $- 8$

$\Longrightarrow r = 11.5 - 8 = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ

ಎತ್ತರ , $h = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= \frac{7}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.48

ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = { ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರ ಭಾಗದ CSA + ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ ಭಾಗದ CSA

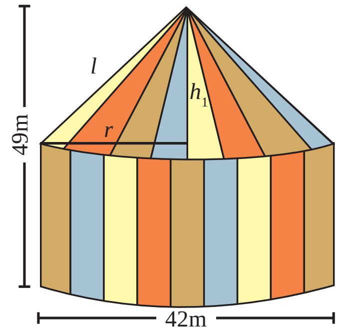
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

$\therefore$ ಲೋಟದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 253 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.23

ಒಂದು ಸರ್ಕಸ್ ಡೇರೆಯನ್ನು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಡೇರೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 49 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು 42ಮೀ. ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಎತ್ತರವು 21 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಚ.ಮೀ. ಬಟ್ಟೆಗೆ ₹12.50 ರಂತೆ ಖರ್ಚಾದರೆ, ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಗೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 8.49

ಪರಿಹಾರ

ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ	ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ಭಾಗ
ವ್ಯಾಸ, $2r = 42$ ಮೀ.	ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 21$ ಮೀ.
ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = 21$ ಮೀ.	ಎತ್ತರ, $h_1 = 49 - 21 = 28$ ಮೀ.
ಎತ್ತರ, $h = 21$ ಮೀ.	ಓರೆ ಎತ್ತರ, $l = \sqrt{h_1^2 + r^2} = \sqrt{28^2 + 21^2} = 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35$ ಮೀ.

ಬೇಕಾಗುವ ಬಟ್ಟೆಯ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ CSA + ಶಂಕಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ CSA

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

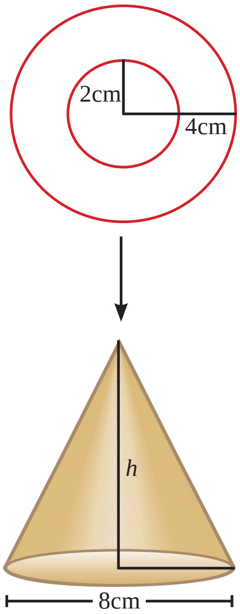
$\therefore$ ಬಟ್ಟೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 5082 ಚ.ಮೀ.

ಈಗ, ಪ್ರತಿ ಚ.ಮೀ. ಬಟ್ಟೆಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು = ₹12.50

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬಟ್ಟೆಯ ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ = 5082×12.5 = ₹63525.

ಉದಾಹರಣೆ 8.24

ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ವ್ಯಾಸಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಹೊಂದಿರುವ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಇನ್ನೊಂದು ಘನವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 8.50

ಪರಿಹಾರ R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

h ಮತ್ತು r_1 ಗಳು ತಯಾರಿಸಿದ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಆಗಿರಲಿ.

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳ		ಶಂಕು
ಹೊರಗಿನ	ಒಳಗಿನ	
$2R = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$2r = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$2r_1 = 8$
$\Longrightarrow R = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$\Longrightarrow r = 2$ ಸೆಂ.ಮೀ.	$\Longrightarrow r_1 = 4$

ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿದಾಗ ಮತ್ತು ಘನ ಶಂಕುವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, ನಮಗೆ

ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ = ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳದ ಘನಫಲ

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\implies \frac{1}{3}\times\pi\times 4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3-2^3)$$

$$\implies h = \frac{64-8}{4} = 14$$

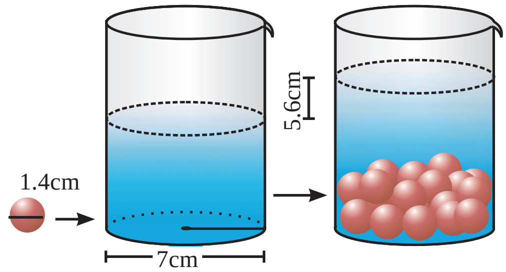
ಇದರಿಂದ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ, $h = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.25

ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವ್ಯಾಸವು 1.4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಗೋಳಾಕಾರದ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿರುವ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಬೀಕರ್‌ಗೆ ಬೀಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬೀಕರ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು 5.6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಏರಿಕೆಯಾಗಲು ಬೀಕರ್‌ನೊಳಗೆ ಬೀಳಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ n ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. r_1 ಮತ್ತು r_2 ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗೋಲಿಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಬೀಕರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಗೋಲಿಗಳು	ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಬೀಕರ್
ವ್ಯಾಸ, $2r_1 = 1.4$ ಸೆಂ.ಮೀ.	ವ್ಯಾಸ, $2r_2 = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.
ತ್ರಿಜ್ಯ, $r_1 = 0.7$ ಸೆಂ.ಮೀ.	ತ್ರಿಜ್ಯ, $r_2 = \frac{7}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.51

h ಎಂಬುದು ಏರಿಕೆಯಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $h = 5.6$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಬೀಕರ್‌ನೊಳಗೆ ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಬೀಳಿಸಿದ ನಂತರ,

ಏರಿಕೆಯಾದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = n ಗೋಲಿಗಳ ಘನಫಲ

$$\implies \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$n = \frac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$$

$$n = \frac{3\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times 5.6}{4\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}} = 150.$$

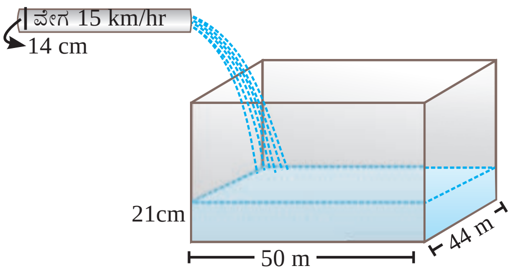
$\therefore$ ಅಗತ್ಯವಾದ ಗೋಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 150 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.26

14 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ 50 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 44 ಮೀ. ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆಯ ವೇಗದಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಹರಿಯಬಿಡಲಾಗಿದೆ. ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿನ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು 21 ಸೆಂ.ಮೀ. ಏರಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ ನೀರಿನ ವೇಗ = 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆ

= 15000 ಮೀ./ಗಂಟೆ



ಚಿತ್ರ 8.52

ಕೊಳವೆಯ ವ್ಯಾಸ, $2r = 14$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $r = \frac{7}{100}$ ಮೀ.

h ಎಂಬುದು ಏರಿಕೆಯಾಗಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವಾಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $h = 21$ ಸೆಂ.ಮೀ. $= \frac{21}{100}$ ಮೀ.

ಈಗ, ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = ಕೊಳವೆಯ ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\times$ ಗಂಟೆ $\times$ ವೇಗ

$$= \pi r^2 \times 1 \times 15000$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000 \text{ ಘ.ಮೀ.}$$

ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬೇಕಾಗಿರುವ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣದ ಘನಫಲವು,

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ಅಗತ್ಯವಾದ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಪಡೆಯಲು T ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

$\therefore$ T ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರಚೆಲ್ಲಿದ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬೇಕಾದ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣ

$$\Longrightarrow \quad \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $T = 2$ ಗಂಟೆಗಳು.

ಇದರಿಂದ, ಅಗತ್ಯವಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಏರಿಸಲು 2 ಗಂಟೆಗಳ ಕಾಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8.27

55 ಸೆಂ.ಮೀ.$\times$40 ಸೆಂ.ಮೀ.$\times$15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಳತೆಯಿರುವ ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಚಪ್ಪಡಿಯನ್ನು ಕರಗಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಕೊಳವೆಯಂತೆ ಹೊಸ ರೂಪ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಕೊಳವೆಯ ಹೊರ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಮಂದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

ಪರಿಹಾರ h_1 ಎಂಬುದು ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದವಾಗಿರಲಿ.

R ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೊಳವೆಯ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಕಬ್ಬಿಣದ ಚಪ್ಪಡಿ: $lbh = 55 \times 40 \times 15$.

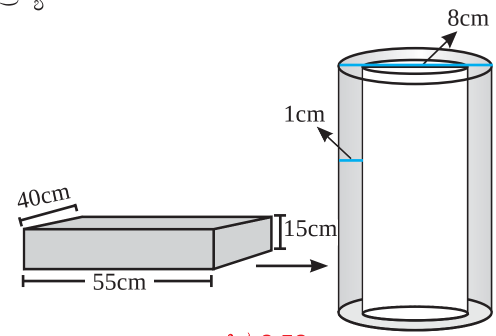
ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆ:

ಹೊರ ವ್ಯಾಸ, $2R = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಹೊರ ತ್ರಿಜ್ಯ, $R = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಮಂದ, $w = 1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$\therefore$ ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯ, $r = R - w = 4 - 1 = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 8.53

ಈಗ, ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯ ಘನಫಲ = ಕಬ್ಬಿಣದ ಚಪ್ಪಡಿಯ ಘನಫಲ

$$\Longrightarrow \quad \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

ಅಂದರೆ, $\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದ, $h_1 = 1500$ ಸೆಂ.ಮೀ. = 15 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. ಒಂದು ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯು ಶಂಕುವಿನ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ಗೋಳವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು 3.6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಆಟದ ಗೊಂಬೆಯ ಪೂರ್ಣ ಮೆಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಘನವು ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಘನದ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 21 ಸೆಂ.ಮೀ., 25.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಇದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಮಾತ್ರೆಯು ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಅಂಟಿಸಿರುವುದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಮಾತ್ರೆಯ ಪೂರ್ಣ ಎತ್ತರವು 14 ಮಿ.ಮೀ. ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸವು 5 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಡೇರೆಯು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಮೇಲೆ ಶಂಕುವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಇದರ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 13.5 ಮೀ. ಮತ್ತು 28 ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ ಎತ್ತರವು 3 ಮೀ. ಆದರೆ, ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಜೇಡಿಮಣ್ಣನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಎತ್ತರವು 48 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು. ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅದನ್ನು ಗೋಳಾಕಾರವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದನು. ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಏಕರೂಪ ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತದ ಉದ್ದವಾದ ತಂತಿಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1.2 ಮಿ.ಮೀ. ಆದರೆ, ತಂತಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಆಂತರಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಪಾತ್ರೆಗೆ ನೀರನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಗೋಳವನ್ನು ಆಂಶಿಕವಾಗಿ ನೀರು ತುಂಬಿರುವ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಬೀಳಿಸಲಾಯಿತು. ಗೋಳವು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿದರೆ, ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು ಏರಿಕೆಯಾಯಿತು?
9. 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಒಳ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ 5 ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡಿನ ದರದಲ್ಲಿ ನೀರು ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅರ್ಧ ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ಹೊರ ಚೆಲ್ಲುವ ನೀರಿನ(ಲೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. 4 ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 10 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರನ್ನು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ 2.5 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ದರದಲ್ಲಿ ಬಿಡುಗಡೆಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ತೊಟ್ಟಿಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ನೀರನ್ನು ಖಾಲಿಗೊಳಿಸಲು ತಗಲುವ ಸಮಯವೆಷ್ಟು? ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನೀರು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತುಂಬಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.
11. 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಘನ ವಸ್ತುವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ವಿವಿಧ ಗಾತ್ರದ ಮೂರು ಘನ ಗೋಳಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. ಒಂದು ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದ 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಆಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿವೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಘನ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಹೊಸ ಘನದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ

ಪ್ರತಿಯೊಂದು 4 ಮಿ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗೋಳಾಕಾರದ ಸತುವಿನ ಗುಂಡುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಸತುವಿನ ಗುಂಡುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು?

14. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಐಸ್ ಕ್ರೀಂ ತುಂಬಿದೆ. ಐಸ್ ಕ್ರೀಮನ್ನು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಶಂಕುಗಳಿಗೆ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕಾರದಂತೆ ತುಂಬಬೇಕಿದೆ. ಲಭ್ಯವಾದ ಐಸ್ ಕ್ರೀಮನ್ನು ತುಂಬಬಹುದಾದ ಶಂಕುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. 4.4 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2 ಮೀ. ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಪಾದವಿರುವ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯನ್ನು ಮಳೆ ನೀರನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತೀಯ ಪಾತ್ರೆಗೆ ನೀರನ್ನು ವರ್ಗಾಯಿಸಿದರೆ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವೇನು?

16. 32 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಬಕೆಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿದೆ. ಬಕೆಟ್ಟಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರಳನ್ನು ನೆಲಕ್ಕೆ ಸುರಿದಾಗ ಮರಳಿನ ರಾಶಿಯು ಶಂಕುವಿನಾಕಾರವಾಗುತ್ತದೆ. ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ರಾಶಿಯ ಎತ್ತರವು 24 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ರಾಶಿಯ ಓರೆ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. 20 ಮೀ. ಆಳ ಮತ್ತು 14 ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಥಂಭಾಕಾರದ ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡಲಾಗಿದೆ. ತೋಡಿದ ಮಣ್ಣನ್ನು 20ಮೀ. $\times$ 14ಮೀ. ಅಳತೆಯ ಪಾದದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಆಯತ ಘನಾಕೃತಿಯ ಜಗಲಿಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಜಗಲಿಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

ಸೂಕ್ತವಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 2π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 3π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 2 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

2. ಎತ್ತರ h ನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) $\frac{3}{2}\pi h$ ಚ.ಮಾ. (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ ಚ.ಮಾ. (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ ಚ.ಮಾ. (D) $\frac{2}{3}\pi h$ ಚ.ಮಾ.

3. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 80 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಘನಫಲವು

(A) 400 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 16 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 200 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) $\frac{400}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

4. ಒಂದು ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 200π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮೊತ್ತವು

(A) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 25 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 30 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 15 ಸೆಂ.ಮೀ.

5. ತ್ರಿಜ್ಯ a ಮೂಲಮಾನ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ b ಮೂಲಮಾನವಿರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) $\pi a^2 b$ ಚ.ಮಾ. (B) $2\pi ab$ ಚ.ಮಾ. (C) 2π ಚ.ಮಾ. (D) 2 ಚ.ಮಾ.

6. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು ಮತ್ತು ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿವೆ. ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು 120 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು

(A) 1200 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 360 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 40 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 90 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

7. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಓರೆ ಎತ್ತರವು

(A) 10 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 30 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 96 ಸೆಂ.ಮೀ.

8. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 120π ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 1200π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 600π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 300π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 600 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

9. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 48π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು

(A) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 8 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 10 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 12 ಸೆಂ.ಮೀ.

10. ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 48 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಶಂಕುವಿನ ಘನಫಲವು

(A) 240 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 120 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 80 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 480 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

11. ಎರಡು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1:2 ಮತ್ತು 2:1 ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

12. ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 8π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 16 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 16π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

13. 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 12 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 4π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 3π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

14. ಒಂದು ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $\frac{9}{16}\pi$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು

(A) $\frac{4}{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ. (B) $\frac{3}{4}$ ಸೆಂ.ಮೀ. (C) $\frac{3}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ. (D) $\frac{2}{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

15. ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು 9:25 ಆದರೆ, ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125

16. ತ್ರಿಜ್ಯವು a ಮೂಲಮಾನ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) $2\pi a^2$ ಚ.ಮಾ. (B) $3\pi a^2$ ಚ.ಮಾ. (C) $3\pi a$ ಚ.ಮಾ. (D) $3a^2$ ಚ.ಮಾ.

17. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 100π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು

(A) 25 ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 100 ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 10 ಸೆಂ.ಮೀ.

18. ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 36π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವು

(A) 12π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 36π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 72π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 108π ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

19. ಒಂದು ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 12π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 6π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 24π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 36π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 8π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

20. ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಇನ್ನೊಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ಘನಫಲಗಳ ಅನುಪಾತವು

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

21. ಒಂದು ಘನ ಗೋಳದ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 24 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ. ಈ ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧ ಗೋಳಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

(A) 12 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (B) 8 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (C) 16 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (D) 18 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.

22. ಎರಡು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುಗಳು ಸಮ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇವುಗಳ ಓರೆ ಎತ್ತರಗಳ ಅನುಪಾತವು 4:3 ಆದರೆ, ಇವುಗಳ ಅನುಕ್ರಮ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು

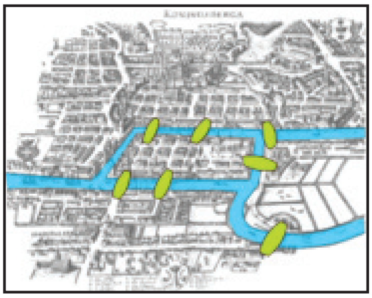
(A) 16 : 9 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

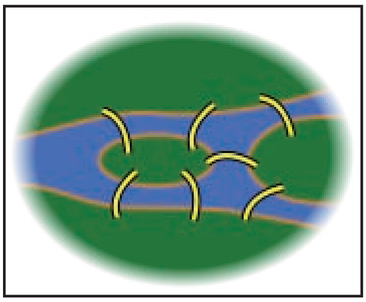
ಕೋನಿಗ್ಸ್‌ಬರ್ಗ್‌ನ ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ಐತಿಹಾಸಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಪ್ರಷಿಯಾದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಿಗ್ಸ್‌ಬರ್ಗ್ ಪಟ್ಟಣವು (ಈಗ ಕಲಿನಿಂಗ್ರ್ಯಾಡ್, ರಷ್ಯಾ) ಪ್ರೆಗೆಲ್ ನದಿಯ ಎರಡೂ ಕಡೆಯಲ್ಲಿದ್ದು, ಪರಸ್ಪರ ಸಂಪರ್ಕವಿರುವ ಮತ್ತು ಪ್ರಮುಖ ಭೂಮಿಯೊಂದಿಗೆ ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳಿಂದ ಸಂಪರ್ಕ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ದೊಡ್ಡ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. (ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ)

ಸಮಸ್ಯೆಯು ಪಟ್ಟಣದ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಮಾತ್ರ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ. ಸೇತುವೆಗಳಿಂದಲ್ಲದೆ ಯಾವುದೇ ಮಾರ್ಗದಿಂದ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ತಲುಪಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಹಾದುಹೋಗಲೇಬೇಕು (ಸೇತುವೆಯ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿ ನಂತರ ಹಿಂದೆ ಬಂದು ಉಳಿದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಚಲಿಸುವಂತಿಲ್ಲ).

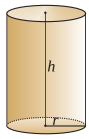
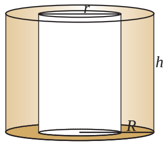
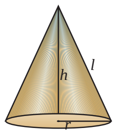
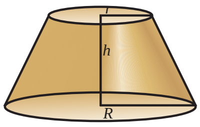
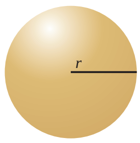
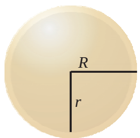
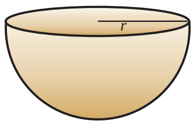
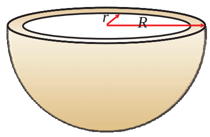
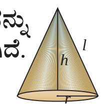
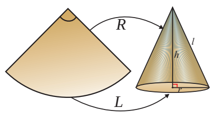
ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್(ಯೂಲರ್)ರವರು 1735 ರಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದರು. ಆಯ್ಲರ್‌ರವರಿಂದಾದ ಇದರ ಋಣಾತ್ಮಕ ಕ್ರಾಂತಿಯು ನಕ್ಷಾ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ (graph theory) ನಾಂದಿಯಾಯಿತು ಮತ್ತು ಟೊಪಾಲಜಿ (Topology) ಯ ಕಲ್ಪನೆಗೆ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯನ್ನು ನೀಡಿತು.



$\Longleftrightarrow$



ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

ಕ್ರ. ಸಂ	ಹೆಸರು	ಆಕೃತಿ	ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಥವಾ ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ(ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)	ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ(ಚದರ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)	ಘನಫಲ (ಘನ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ)
1.	ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2.	ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಟೊಳ್ಳು ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿ		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	$\pi R^2 h - \pi r^2 h$ $\pi h(R^2 - r^2)$ $\pi h(R+r)(R-r)$
3.	ಘನ ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕು		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4.	ಛಿನ್ನಕ (ಫ್ರಸ್ಟಮ್)		- - - - - - -	- - - - - - - - - - - - - - -	$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$
5.	ಗೋಳ		$4\pi r^2$	- - -	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6.	ಟೊಳ್ಳು ಗೋಳ		- - -	- - -	$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$
7.	ಘನ ಅರ್ಧ ಗೋಳ		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8.	ಟೊಳ್ಳು ಅರ್ಧ ಗೋಳ		$2\pi(R^2 + r^2)$	$2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$ $= \pi(3R^2 + r^2)$	$\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$
9.	ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡವನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ.  ಶಂಕುವಿನ CSA = ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi rl = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡದ ಉದ್ದ = ಶಂಕುವಿನ ಪಾದದ ಪರಿಧಿ		$l = \sqrt{h^2 + r^2}$ $h = \sqrt{l^2 - r^2}$ $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ 	10. ಕೊಳವೆಯ ಮೂಲಕ ಹರಿದು ಹೋಗುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ = { ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ × ವೇಗ × ಕಾಲ } 11. ಪುನರ್ ರೂಪಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಹೊಸ ಘನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= \frac{\text{ಕರಗಿಸಿದ ಘನದ ಘನಫಲ}}{\text{ರೂಪಿಸಿದ ಒಂದು ಘನದ ಘನಫಲ}}$	
12.	ಪರಿವರ್ತನೆಗಳು: 1 ಮೀ.^{3} =1000 ಲೀಟರ್‌ಗಳು, 1 ಡೆಸಿ.ಮೀ.^{3} = 1ಲೀ., 1000 ಸೆಂ.ಮೀ.^{3} = 1 ಲೀ., 1000 ಲೀ. = 1 ಕಿಲೋ ಲೀ..				

9

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

Give me a place to stand, and I shall move the earth

-Archimedes

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು
- ತ್ರಿಭುಜಗಳು
- ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ

(ಕ್ರಿ.ಶ. 598-668) ಭಾರತ

(ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ವಿಜ್ಞಾನಿ)

ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತರವರು “ಬ್ರಹ್ಮಸ್ಫುಟ ಸಿದ್ಧಾಂತ” ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಸೂತ್ರವು ಅವರ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳಾದ p, q, r ಮತ್ತು s ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಅಂದಾಜು ಸೂತ್ರ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅವರು ಕೊಟ್ಟರು.

ಅಂದಾಜು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$ ಮತ್ತು ನಿಖರವಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $2t = p+q+r+s$.

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

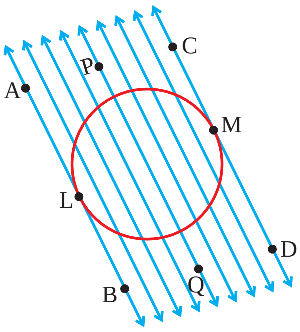
ಕ್ರಿ.ಪೂ.3000 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮೊದಲೇ ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಉಗಮವಾಗಿದ್ದ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆರಂಭದ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಉದ್ದಗಳು, ಕೋನಗಳು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಅನುಭವಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದುದರ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕ್ಷೆ, ನಿರ್ಮಾಣ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಹಲವಾರು ಇನ್ನಿತರ ಕರಕುಶಲಗಳಲ್ಲಿನ ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ಇದನ್ನು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲಾಯಿತು.

ಬೀಜಗಣಿತ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮುಂತಾದ ಸಹ ವಿಭಾಗಗಳಿಗಿಂತ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಸುಧಾರಣೆಗಾಗಿ ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಹಲವಾರು ಹೊಸ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಿವೆ. ಆದರೆ ಹಲವಾರು ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ಸುಧಾರಣೆಯನ್ನು ತೀವ್ರವಾಗಿ ಖಂಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ರೇಖಾಗಣಿತವು ಗಣಿತದ ಇತರೆ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿನ ಹಲವಾರು ಗಣಿತೀಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಜವಾದ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು, ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳೋಣ.

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಜ್ಯಾ, ರೇಖಾಖಂಡ, ವೃತ್ತಖಂಡ, ಮುಂತಾದ ಹಲವಾರು ಪದಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ ವೃತ್ತದ ಛೇದಕ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಂತಹ ಕೆಲವು ಪದಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

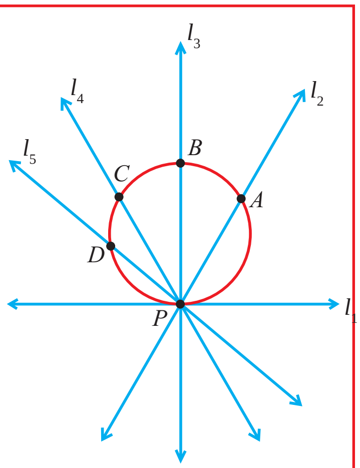
ಚಟುವಟಿಕೆ

ಒಂದು ಹಾಳೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PQ ಎಂಬ ಛೇದಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ PQ ನ ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಛೇದಕಗಳನ್ನು PQ ಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲಿಯು ಛೇದಕಗಳ ಛೇದನಾ ಬಿಂದುಗಳು



ತುಂಬಾ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಡೆಯ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ. PQಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಛೇದಕಗಳಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಸರಳರೇಖೆಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ವೃತ್ತದ L ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಈ AB ಮತ್ತು CD ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ L ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ **ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ABಯು CDಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚಟುವಟಿಕೆ



ನಾವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು, ಆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಹಲವಾರು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. P ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. l_2, l_3, l_4 ಮತ್ತು l_5 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, l_2, l_3, l_4, l_5 ಸರಳರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಛೇದಕಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ l_1 ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. l_1 ರೇಖೆಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ **ಸ್ಪರ್ಶಕ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

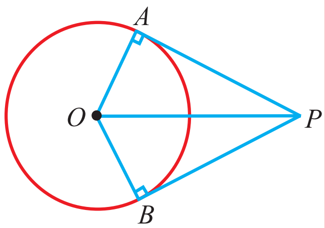
ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಆ ಬಿಂದುವನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

AP ಎಂಬುದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು P ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರಲಿ.

ಲಂಬಕೋನ ΔOPAನಲ್ಲಿ, $OA \perp AP$

$$OP^2 = OA^2 + AP^2 \quad \text{[ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ]}$$

$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}.$$



9.2 ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of tangents to a circle)

ಈಗ ನಾವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ

(i) ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು,

(ii) ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು,

ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

9.2.1 ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು)

ಫಲಿತಾಂಶ

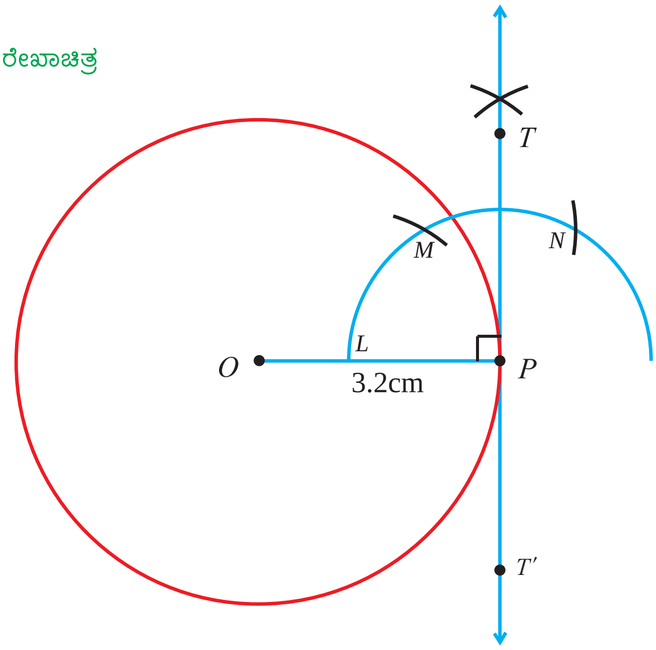
ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.1

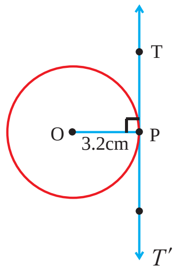
3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು P ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು)

ದತ್ತ : ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iii) P ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, OP ಯನ್ನು L ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) $\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MN}$ ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಸದ ಮೇಲೆ M ಮತ್ತು N ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(v) $\angle MPN$ ಗೆ PT ಎಂಬ ಅರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ಅಗತ್ಯವಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕ $T'PT$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು, TP ಯನ್ನು T'ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

ಗಮನಿಸಿ

ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ OP ಸರಳರೇಖೆಗೆ PT ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. PT ಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.

9.2.2 ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of a tangent to a circle using the tangent-chord theorem)

ಫಲಿತಾಂಶ ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ

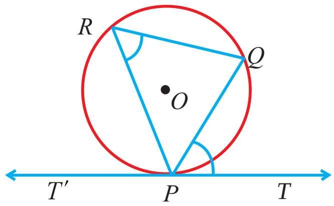
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಆ ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಜ್ಯಾವು ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.2

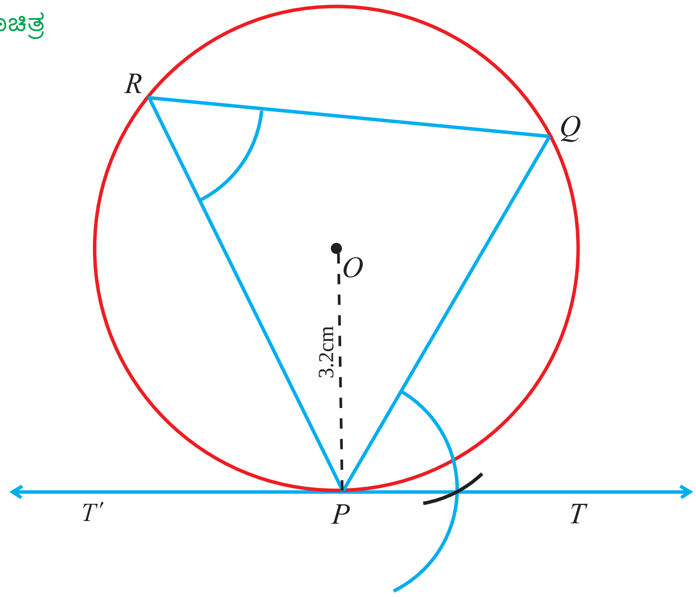
3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ : ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(iii) P ನ ಮೂಲಕ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾ PQ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) P, Q ಮತ್ತು R ಗಳು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣಾ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ R ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(v) PR ಮತ್ತು QR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(vi) P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\angle QPT = \angle PRQ$ ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(vii) ಅಗತ್ಯವಾದ $T'PT$ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, TP ಯನ್ನು T' ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

9.2.3 ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು (Construction of pair of tangents to a circle from an external point)

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

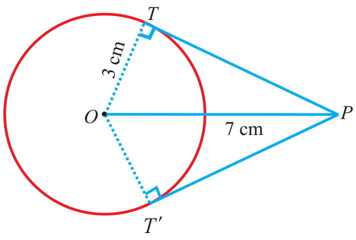
(ii) ವ್ಯಾಸಗಳು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ 90° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.3

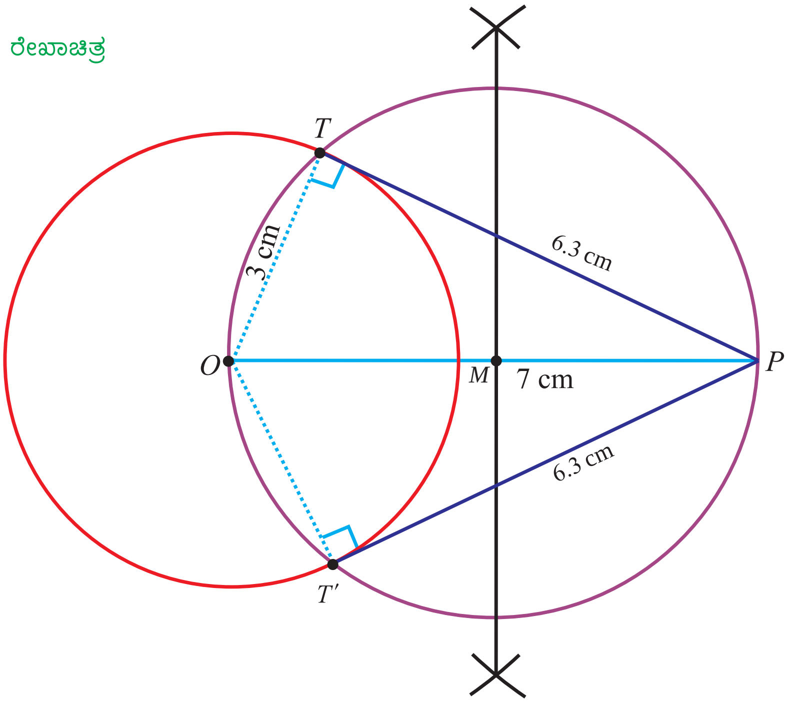
3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ: ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) O ನಿಂದ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iii) OP ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು OP ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತಿರಲಿ.

(iv) M ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು MO ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(v) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು T ಮತ್ತು T' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತಿರಲಿ.

(vi) PT ಮತ್ತು PT' ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇವು ಅಗತ್ಯವಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ, $PT = 6.3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಪರಿಶೀಲನೆ

ಲಂಬಕೋನ ΔOPT ರಲ್ಲಿ, $PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$

$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}$ $\therefore$ $PT = 6.3$ ಸೆಂ.ಮೀ. (ಅಂದಾಜು).

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. 4.8 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
3. 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 13 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PA ಮತ್ತು PB ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಅವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.
4. 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.
5. 3ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ 9ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

9.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ರಚನೆ (Construction of triangles)

ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

(i) ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಔನ್ನತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ

(ii) ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ

ಮೊದಲು, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

θ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $\overline{BC}$ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

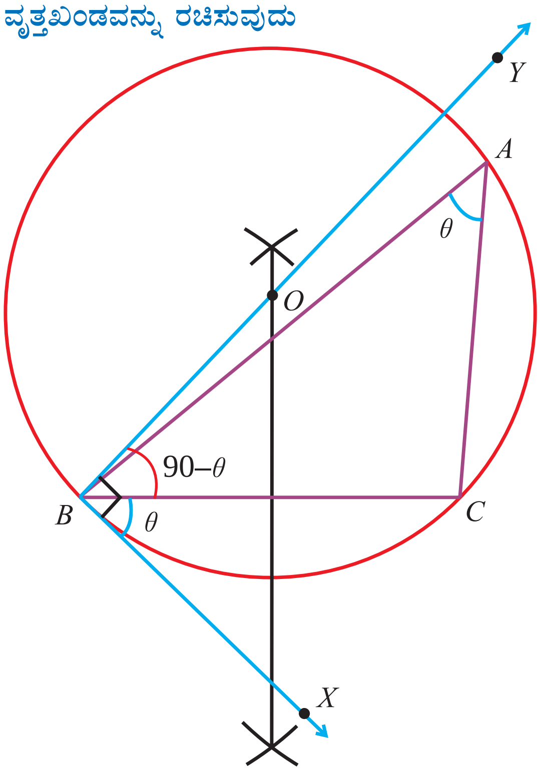
(ii) B ನಲ್ಲಿ, $\angle CBX = \theta$ ರಚಿಸಿರಿ.

(iii) $BY \perp BX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) BC ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OB ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು A ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, BAC ಅಧಿಕ ಕಂಸವು θ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಅಗತ್ಯವಾದ ವೃತ್ತಖಂಡವಾಗಿದೆ.



ಪಾದ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಪಾದ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಹಲವಾರು ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) A ನಲ್ಲಿ, $\angle BAX = \theta$ ಎಂಬ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

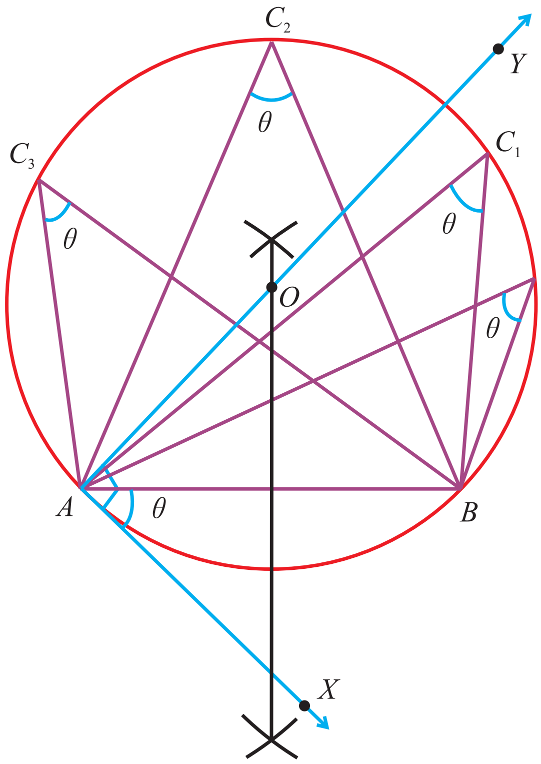
(iii) $AY \perp AX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) AB ಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು AY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಪರ್ಯಾಯ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಮೇಲೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಹಾಗೂ AC ಮತ್ತು BC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(vii) $\triangle ABC$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.



ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಾದ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $\triangle ABC$ ಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

$AX \perp AY$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle XAY = 90^\circ$.

ಹಾಗೂ, $OB = OA$. (ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)

AX ಎಂಬುದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ A ನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು C ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle BAX = \angle ACB$. (ಸ್ಪರ್ಶಕ–ಜ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ).

ಗಮನಿಸಿ

$C_1, C_2, C_3, \ldots$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ΔABC_1, ΔABC_2, ΔABC_3, $\cdots$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

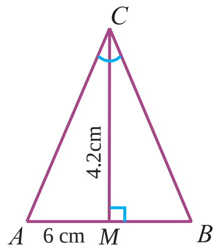
9.3.1 ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9.4

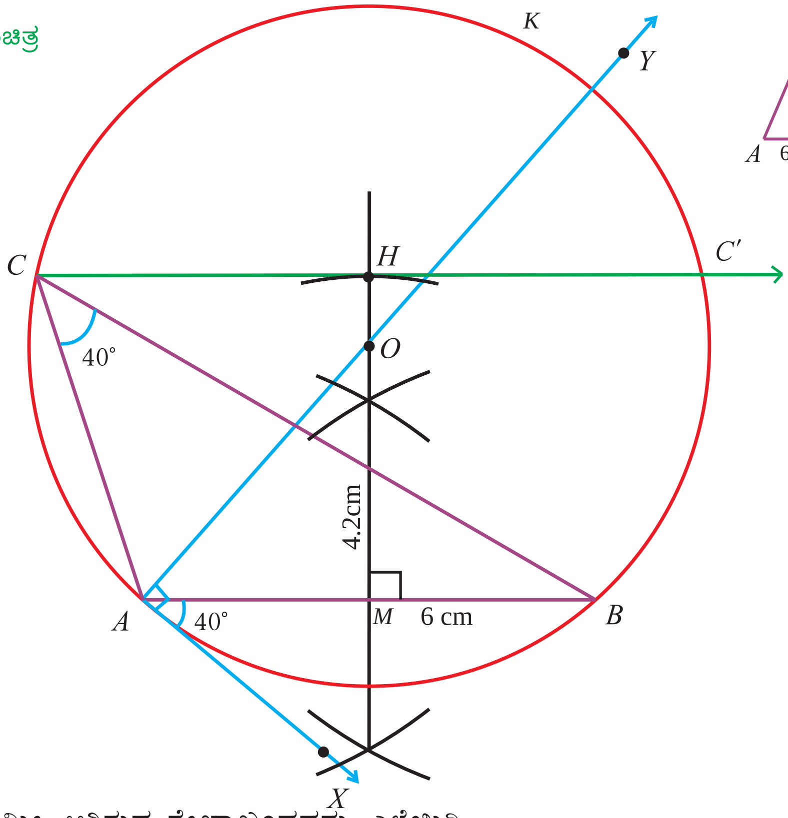
$AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle C = 40^\circ$ ಮತ್ತು C ಯಿಂದ AB ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle C = 40^\circ$,
C ಯಿಂದ AB ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $\angle BAX = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ AX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) $AY \perp AX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು AY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು AB ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) AKB ವೃತ್ತಖಂಡವು 40° ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) MO ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲೆ $MH = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ H ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

(viii) CHC' ನ್ನು AB ಗೆ ಸಮನಾಂತರವಾಗಿ ವೃತ್ತವನ್ನು C ಮತ್ತು C' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

(ix) ΔABC ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ. ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

$\Delta ABC'$ ಕೂಡ ಅಗತ್ಯವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

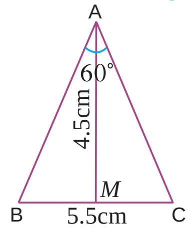
9.3.2 ಪಾದ, ಶೃಂಗಕೋನ ಮತ್ತು ಶೃಂಗದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಉದಾಹರಣೆ 9.5

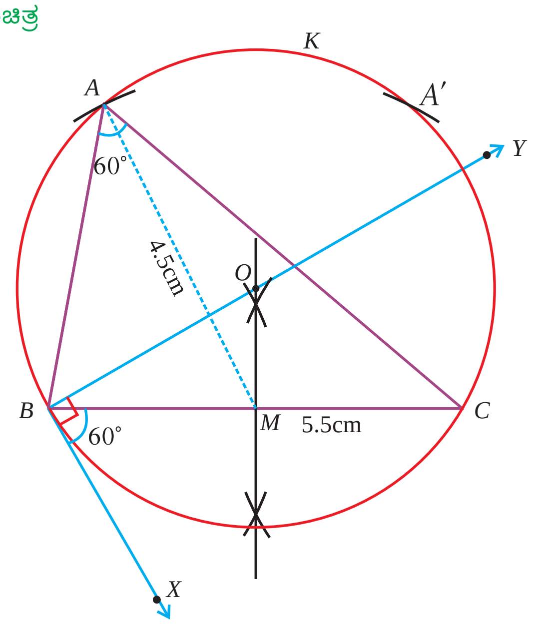
$BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 60^\circ$ ಮತ್ತು A ಶೃಂಗದಿಂದಿರುವ AM ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 60^\circ$, ಮಧ್ಯರೇಖೆ $AM = 4.5$ಸೆಂ.ಮೀ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $\angle CBX = 60^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ನ ಮೂಲಕ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) $BY \perp BX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BC ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OB ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಅಧಿಕ ಕಂಸ BKC ಯು 60° ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) M ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಮತ್ತು A' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

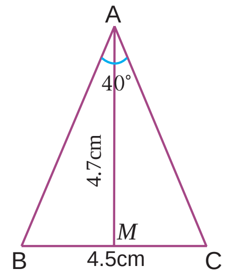
(viii) $\triangle ABC$ ಅಥವಾ $\Delta A'BC$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9.6

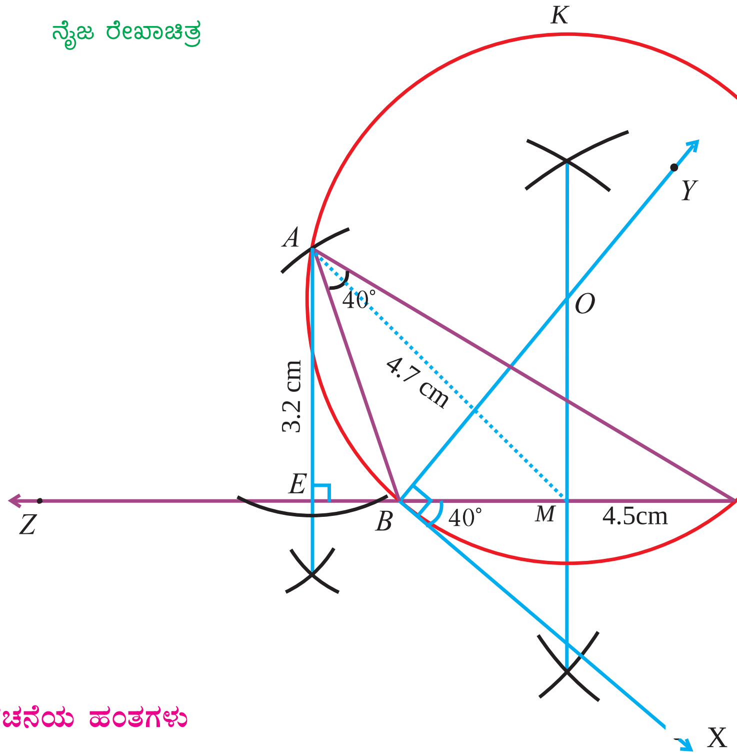
$BC = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 40^\circ$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ AM ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ : ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $BC = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 40^\circ$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ AM ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) $BC = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $\angle CBX = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) $BY \perp BX$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) BC ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು BY ನ್ನು O ನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು BC ನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OB ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) ವೃತ್ತದ ಅಧಿಕ ಕಂಸ BKC ಯು 40° ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

(vii) M ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 4.7 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಮತ್ತು A' ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

(viii) ΔABC ಅಥವಾ $\Delta A'BC$ ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿರಿ. ಇದು ಅಗತ್ಯವಾದ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

(ix) CB ಯನ್ನು CZ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

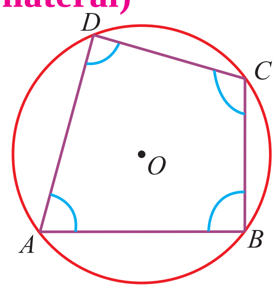
(x) $AE \perp CZ$ ಎಳೆಯಿರಿ.

(xi) AE ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವು 3.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

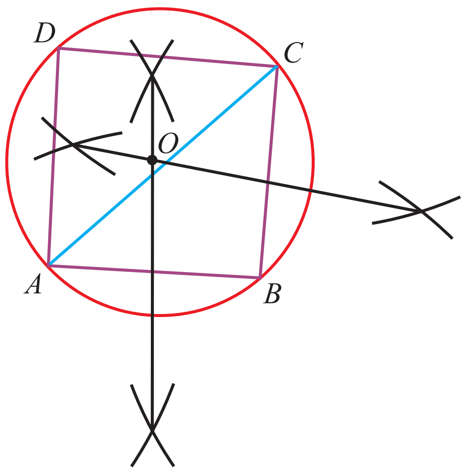
1. ಕೊಟ್ಟಿರುವ $AB=5.2$ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ 48°ಕೋನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
2. ಪಾದ $PQ = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle R = 60^{\circ}$ ಮತ್ತು R ನಿಂದ PQ ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔPQR ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
3. $PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle R = 25^{\circ}$ ಮತ್ತು R ನಿಂದ PQ ಗಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯವು 4.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔPQR ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
4. $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 45^{\circ}$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 4ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
5. ಪಾದ $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle BAC = 40^{\circ}$ ಮತ್ತು A ಯಿಂದ BC ಗಿರುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಹಾಗೂ, A ನಿಂದಿರುವ ಔನ್ನತ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

9.4 ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ರಚನೆ (Construction of cyclic quadrilateral)



ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಾಲ್ಕು ಅಳತೆಗಳು (ಐದು ಅಳತೆಗಳ ಬದಲಾಗಿ) ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ.

ಅಗತ್ಯವಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.



(i) ಕರಡು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\triangle ABC$ ಅಥವಾ $\triangle ABD$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) AB ಮತ್ತು BC ಗಳಿಗೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ($\triangle ABC$ ಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು)

(iii) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು, $\triangle ABC$ ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು, ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗ D ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಹಾಗೂ AD ಮತ್ತು CD ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(v) ಈಗ, $ABCD$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳ ವಿಭಿನ್ನ ಗಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ.

(i) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣ (ii) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು (iii) ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ (iv) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳು (v) ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು (vi) ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು, ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮನಾಂತರ ರೇಖೆ.

ವಿಧ I (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)

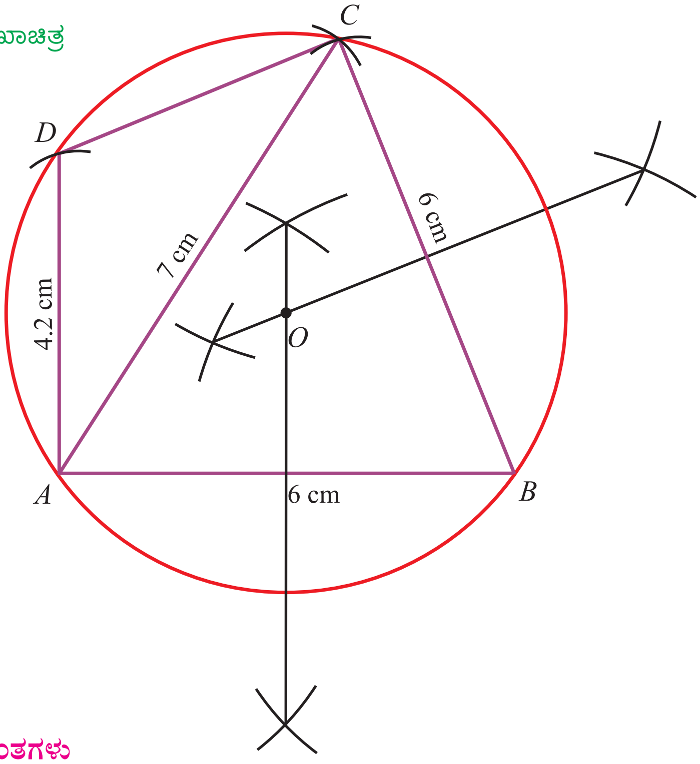
(Three sides and one diagonal of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.7

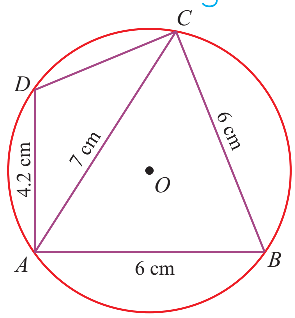
AB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ., AC = 7 ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AD = 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, AB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ., AC = 7 ಸೆಂ.ಮೀ., BC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು AD = 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
AB = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ ಕಂಸಗಳನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. AC ಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iii) AB ಮತ್ತು BC ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(iv) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OA\ (= OB = OC)$ ನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಸಿಕೊಂಡು ΔABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(v) A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) AD ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.
ಈಗ, $ABCD$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ವಿಧ II (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)

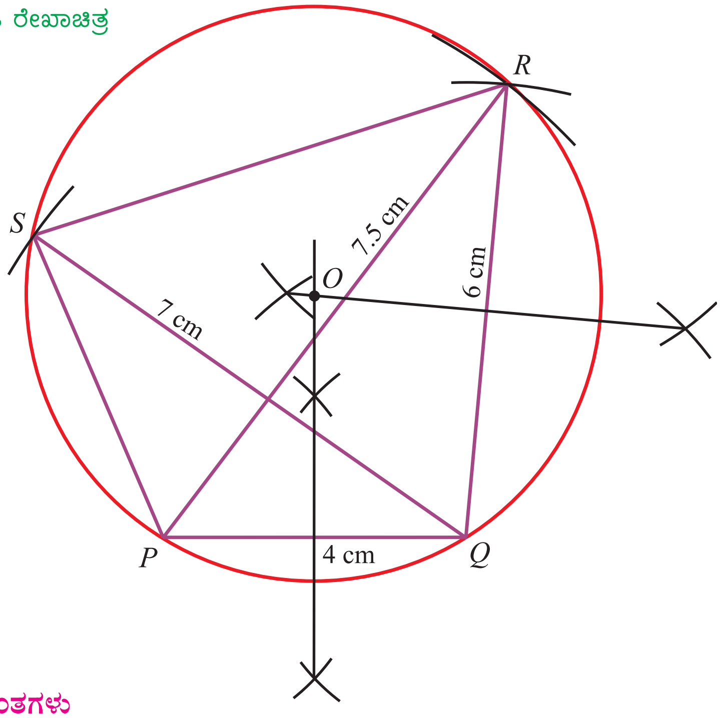
(Two sides and two diagonals of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.8

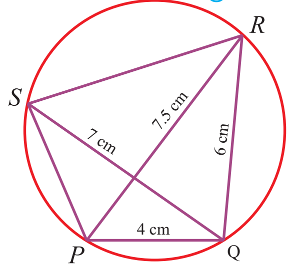
$PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PR = 7.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $QS = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PR = 7.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $QS = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
$PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) P ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) Q ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲಿನ ಕಂಸವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ R ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) PR ಮತ್ತು QR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(v) PQ ಮತ್ತು QR ನ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(vi) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OP(=OQ=OR)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔPQR ನ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vii) Q ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು S ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(viii) PS ಮತ್ತು RS ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

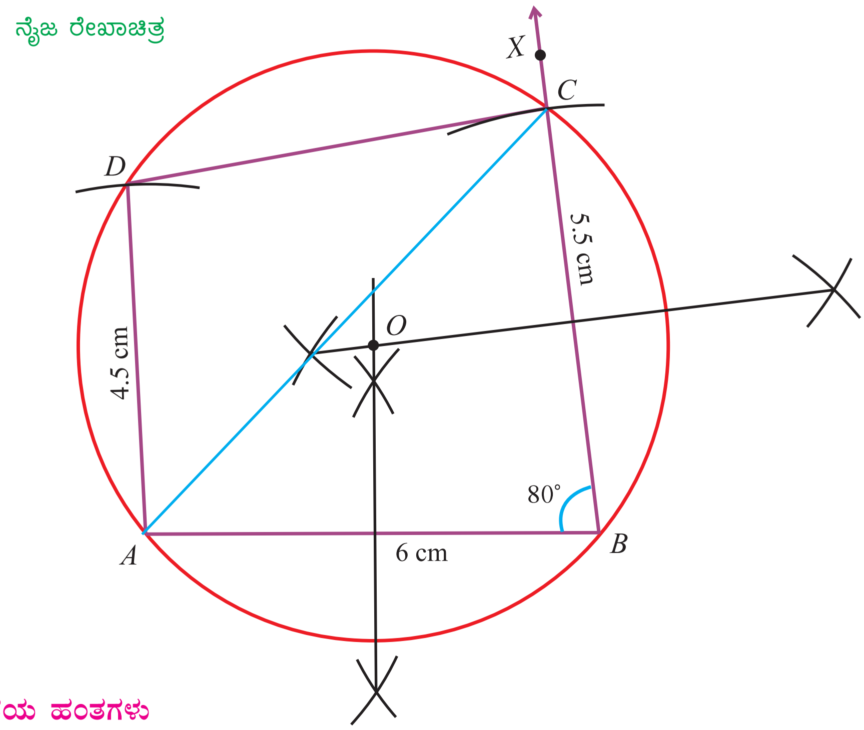
ಈಗ, $PQRS$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

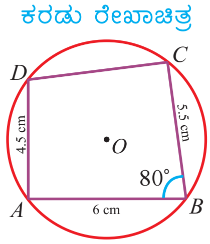
ವಿಧ III (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Three sides and one angle of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.9

$AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 80^\circ$ ಮತ್ತು $AD = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ: $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 80^\circ$ ಮತ್ತು $AD = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ.





ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) B ಮೂಲಕವಾಗಿ $\angle ABX = 80^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) B ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 5.5 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ BX ನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(iv) AB ಮತ್ತು BC ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು OA $(= OB = OC)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔABC ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 4.5ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vii) AD ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $ABCD$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

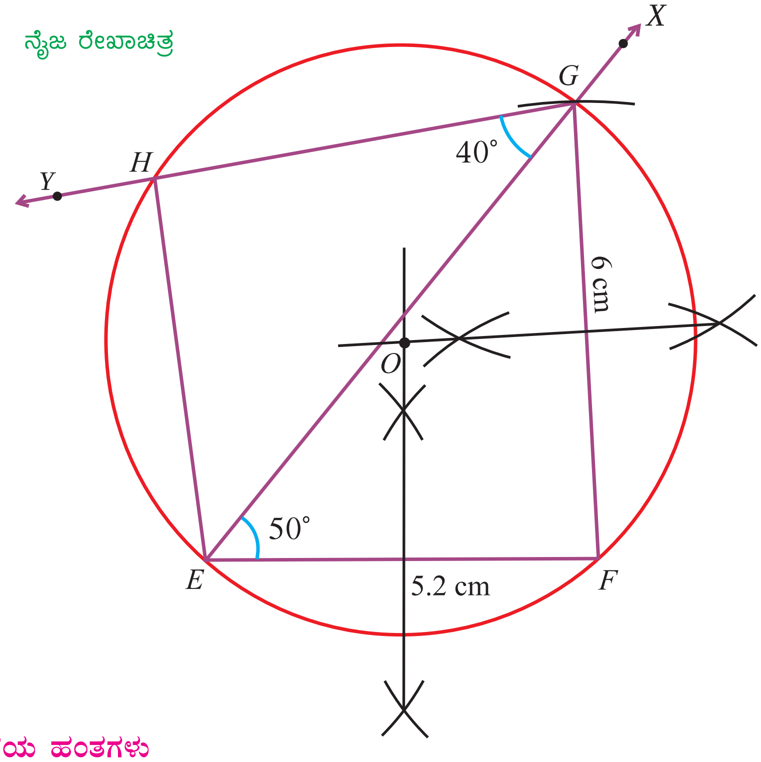
ವಿಧ IV (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Two sides and two angles of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.10

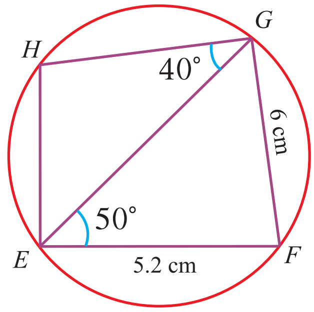
$EF = 5.2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle EGH = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ $EFGH$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ: $EFGH$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $EF = 5.2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle EGH = 40^\circ$.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. $EF = 5.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) E ನಿಂದ, $\angle FEX = 50^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ EX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) F ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ EX ನ್ನು G ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) FG ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

(v) EF ಮತ್ತು FG ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(vi) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OE\ (= OF = OG)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vii) G ನಿಂದ, $\angle EGY = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ GY ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು H ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(viii) EH ನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $EFGH$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

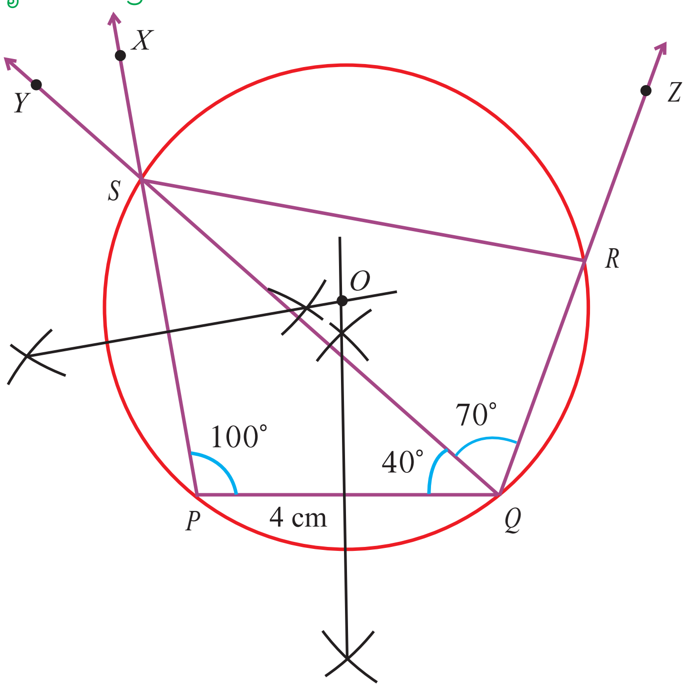
ವಿಧ V (ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(One side and three angles of a cyclic quadrilateral are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.11

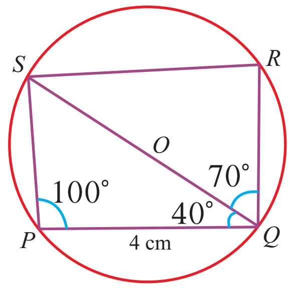
$PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle SQR = 70^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ: $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ ಮತ್ತು $\angle SQR = 70^\circ$.

ನೈಜ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
$PQ = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) P ನಿಂದ $\angle QPX = 100^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ PXನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) Q ನಿಂದ $\angle PQY = 40^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ QY ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. QY ಎಂಬುದು PX ನ್ನು S ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತಿರಲಿ.

(iv) PQ ಮತ್ತು PS ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OP(=OQ=OS)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔPQS ನ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) Q ನಿಂದ $\angle SQZ = 70^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ QZ ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃತ್ತವನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

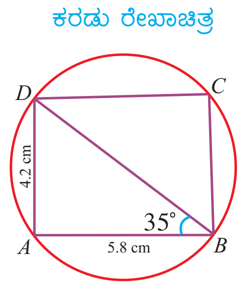
(vii) RS ನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.
ಈಗ, $PQRS$ ಎಂಬುದು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

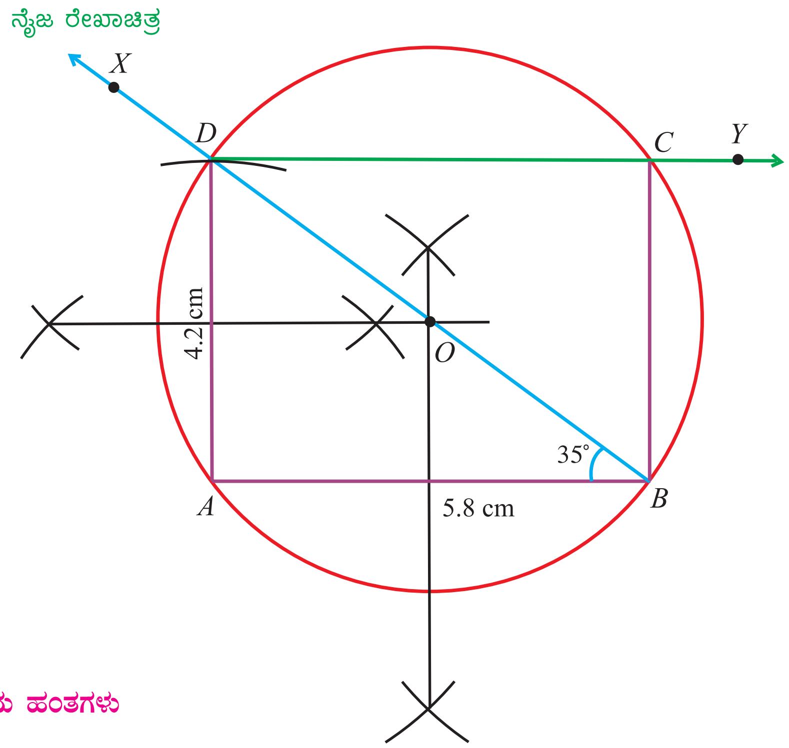
ವಿಧ VI (ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು, ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಮನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ)
(Two sides , one angle and one parallel line are given)

ಉದಾಹರಣೆ 9.12

$AB = 5.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel CD$ ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ : $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ, $AB = 5.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel CD$.





ರಚನೆಯ ಹಂತಗಳು

(i) ಕರಡು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. $AB = 5.8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) B ನಿಂದ, $\angle ABX = 35^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ BXನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) A ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು 4.2 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ BX ನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iv) AB ಮತ್ತು AD ಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವು ಪರಸ್ಪರ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(v) O ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು $OA\ (= OB = OD)$ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ΔABD ಯ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(vi) DY ನ್ನು $DY \parallel AB$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(vii) BC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $ABCD$ ಯು ಅಗತ್ಯವಾದ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. $PQ = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $PR = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $PS = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

2. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., AD = 4.8 ಸೆಂ.ಮೀ., $BD = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $CD = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

3. $PQ = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle QPR = 45^\circ$ ಮತ್ತು $PS = 3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

4. $AB = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle A = 80^\circ$, $AD = 4.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

5. $KL = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $KM = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $LM = 4.2$ ಸೆಂ.ಮೀ., ಮತ್ತು $LN = 5.3$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ $KLMN$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

6. $EF = 7$ ಸೆಂ.ಮೀ., $EH = 4.8$ ಸೆಂ.ಮೀ., $FH = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., ಮತ್ತು $EG = 6.6$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ $EFGH$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

7. $AB = 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 70^\circ$, $BC = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $\angle ACD = 30^\circ$ ಆಗಿರುವ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

8. $PQ = 5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $QR = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle QPR = 35^\circ$ ಮತ್ತು $\angle PRS = 70^\circ$ ಆಗಿರುವ $PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

9. $AB = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ ಮತ್ತು $\angle ACD = 30^\circ$ ಆಗಿರುವ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

10. $AB = 6.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., $\angle ABC = 110^\circ$, $BC = 5.5$ ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು $AB \parallel CD$ ಆಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯೇ?

1901 ರಿಂದ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಶರೀರ ವಿಜ್ಞಾನ ಅಥವಾ ಔಷಧಿ, ಸಾಹಿತ್ಯ ಮತ್ತು ಶಾಂತಿ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧನೆಗೈದ ಸಾಧಕರಿಗೆ ಪ್ರತಿಷ್ಠಿತ ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಗೌರವಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪುರಸ್ಕಾರವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಸ್ವೀಡನ್ನಿನ ಸ್ಟಾಕ್‌ಹಾಲ್ಮ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ನೊಬೆಲ್ ಫೌಂಡೇಶನ್ ರವರು ನಿರ್ವಹಿಸಿಕೊಂಡು ಬರುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರತಿ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಸಭೆ ಸೇರುವ ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಒಕ್ಕೂಟ (IMU) ದ ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 40 ವರ್ಷಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರದ ಎರಡು, ಮೂರು ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಫೀಲ್ಡ್ಸ್ ಪದಕವೆಂಬ ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ಗೌರವಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಫೀಲ್ಡ್ಸ್ ಪದಕವನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ನೊಬೆಲ್ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

10

ನಕ್ಷೆಗಳು

- ಪೀಠಿಕೆ
- ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು
- ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು

ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆ

(1596-1650)

ಫ್ರಾನ್ಸ್

ಡೆಕಾರ್ಟೆರವರು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾಗಿರುವಾಗ ಕೊಠಡಿಯ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಝೇಂಕರಿಸುವ ಒಂದು ಕೀಟವನ್ನು ನೋಡಿ ಕಾರ್ಟೀಷಿಯನ್ ಸಮತಲವನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿದರು.

ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುವ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾತ್ಮಕ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಇವರು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದರು.

I think, therefore I am

- Rene Descartes

10.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನಕ್ಷೆಗಳು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ತೋರಿಸುವ ಚಿತ್ರಗಳಾಗಿವೆ. ತೂಕವು ಎತ್ತರದೊಡನೆ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಹೇಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಕಠಿಣವಾಗಬಹುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿನ ಕಲಿಕೆಯು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಅರಿವಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಲು ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆರೆಯುತ್ತವೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಹವ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಳಿಸಬೇಕು. ಗಮನವಿಟ್ಟು ರಚಿಸಿದ ನಕ್ಷೆಯು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥೈಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವುದಲ್ಲದೇ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಕಾರ್ಯದ ನಿಖರತೆಯ ಮೇಲೆ ಮೌಲ್ಯಯುತವಾದ ಪರೀಕ್ಷೆಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ನಕ್ಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಉತ್ತಮವಾದ ಅಂದಾಜಿಸುವಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಬೆಲೆಯು ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದ ನಿಖರತೆಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಯಾರೂ ಮರೆಯಬಾರದು.

10.2 ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಗಳು (Quadratic Graphs)

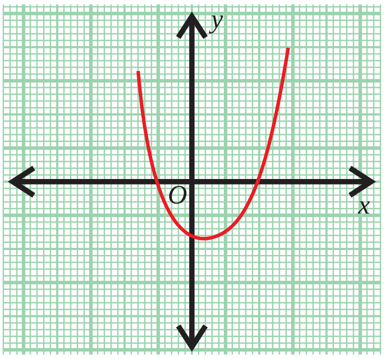
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

A ಮತ್ತು B ಗಳು $\mathbb{R}$ ನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು, $f: A \to B$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಎಲ್ಲಾ (x, y) ಸರಳಯುಗ್ಮಗಳ $\{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\}$ ಗಣವನ್ನು f ನ ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

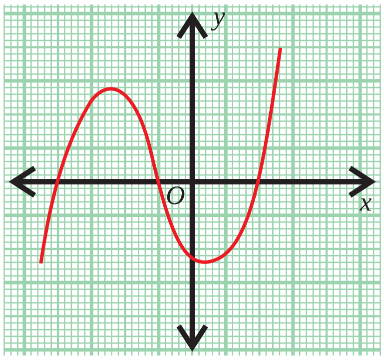
x ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ ಪ್ರಥಮ ಘಾತದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ನಕ್ಷೆಯು a ಪ್ರವಣತೆಯೊಂದಿಗೆ ಬಾಗಿದ ರೇಖೆ ಆಗಿದೆ.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ನಕ್ಷೆಯು ನಿರಂತರವಾದ ರೇಖೀಯವಲ್ಲದ ವಕ್ರ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಪರವಲಯ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

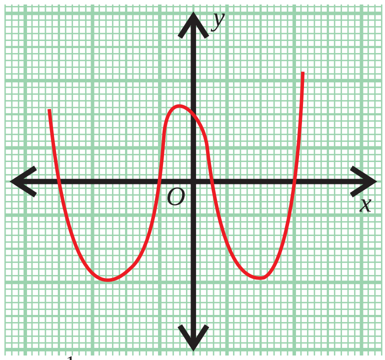
ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.



$y = (x+1)(x-2)$,
ಘಾತ 2 ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,
ಘಾತ 3 ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$
ಘಾತ 4 ರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ

ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾವು $y = ax + b, a \neq 0$ ರೂಪದ ರೇಖೀಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು a, b ಮತ್ತು c ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು, $a \neq 0$ ಆಗಿರುವ $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸೋಣ ಮತ್ತು ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಯ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

$y = ax^2 + bx + c$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

ಇದರಿಂದ $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0$. (ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ವರ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.)

ವಕ್ರ(ಪರವಲಯ)ದ ಶೃಂಗವು $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ಆಗಿದೆ.

$a > 0$ ಆದರೆ, ವಕ್ರವು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ; ಇದು $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು $x = -\frac{b}{2a}$ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$a < 0$ ಆದರೆ, ವಕ್ರವು ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ; ಇದು $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು $x = -\frac{b}{2a}$ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳ ಸ್ವರೂಪವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕ್ರ.ಸಂ.	ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ($y = ax^2 + bx + c$)	ಶೃಂಗ	a ನ ಚಿಹ್ನೆ	ವಕ್ರದ ಸ್ವರೂಪ
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ಧನಾತ್ಮಕ	(i) ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ. (ii) $y = 0$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (iii) x=0, ಅಂದರೆ y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	ಋಣಾತ್ಮಕ	(i) ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ. (ii) $y = 0$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (iii) x=0, ಅಂದರೆ y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	ಧನಾತ್ಮಕ	(i) ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ತೆರೆದಿರುತ್ತದೆ. (ii) $y = -4$ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (iii) $x = 1$ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.

$y = ax^2 + bx + c$ ವರ್ಗ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಕ್ರಮಗಳು

(i) $y = ax^2 + bx + c$ ಬಳಸಿಕೊಂಡು x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) ಸೂಕ್ತವಾದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಿ.

x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಳಸಿದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಳಸಿದ ಅಳತೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬಾರದು. ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಳತೆಯು ದೊಡ್ಡ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಿರಬೇಕು. ನಕ್ಷೆಯು ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ, ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ ಮತ್ತು $y = ax^2 + bx + c$ ನ ನಕ್ಷೆಯು ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.1

$y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

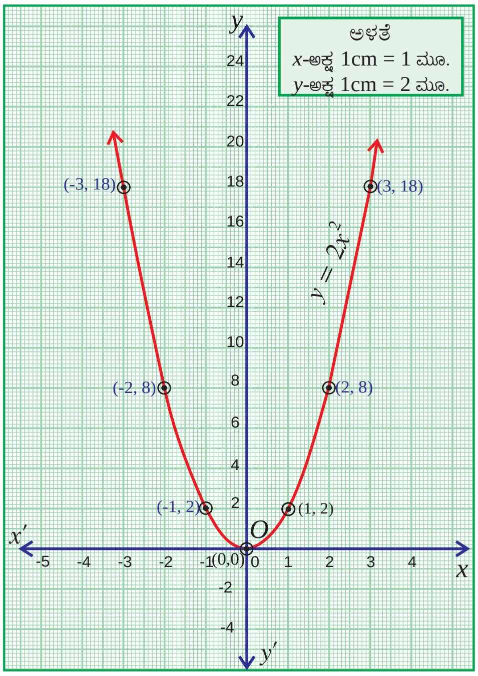
ಮೊದಲು x ಗೆ -3 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡೋಣ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

$(-3, 18), (-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.1

ಸೂಚನೆ

(i) ಇದು y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, y-ಅಕ್ಷದ ಎಡ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ನಕ್ಷೆಯ ಭಾಗವು y-ಅಕ್ಷದ ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ನಕ್ಷೆಯ ಭಾಗದ ಕನ್ನಡಿಯ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವಾಗಿದೆ.

(ii) y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.2

$y = -3x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

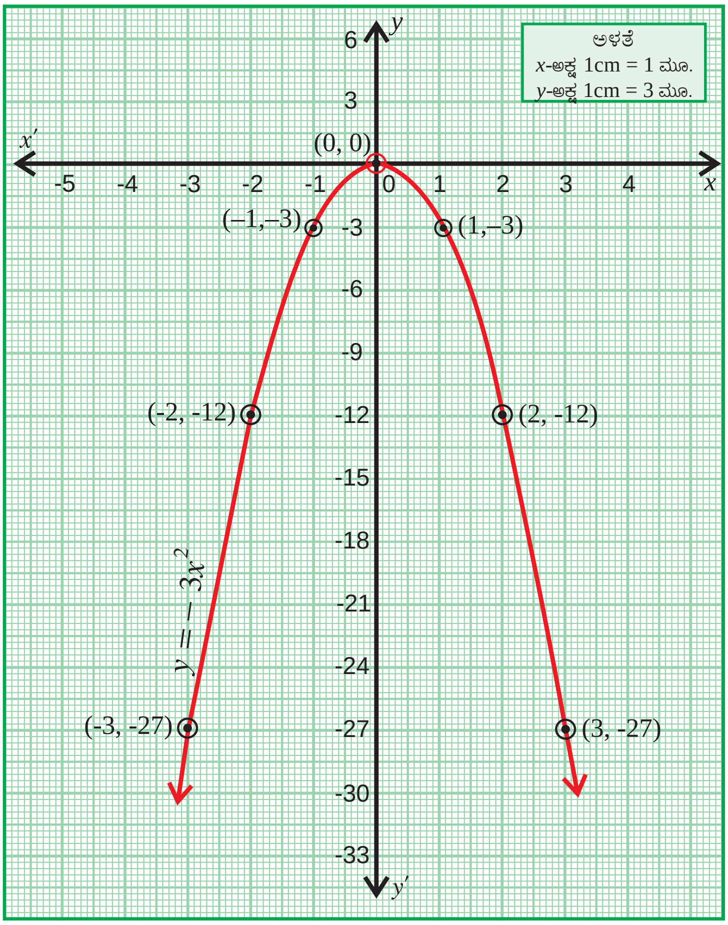
x ಗೆ -3 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡೋಣ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27

$(-3, -27)$, $(-2, -12)$, $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -12)$ ಮತ್ತು $(3, -27)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = -3x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.2

ಸೂಚನೆ

(i) y ನ ಬೆಲೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುವುದರಿಂದ, $y = -3x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಂಡುಬರುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ನಕ್ಷೆಯು y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ.

10.2.1 $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದು. (To solve the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ graphically.)

$ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $y = ax^2 + bx + c$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯೋಣ. x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ವಕ್ರವು ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.3

$x^2 - 2x - 3 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

$y = x^2 - 2x - 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.

x ಗೆ -3 ರಿಂದ 4 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ $y = x^2 - 2x - 3$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

(–3, 12), (–2, 5), (–1, 0), (0, –3), (1, –4), (2, –3), (3, 0), (4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ.

ವಕ್ರವು X-ಅಕ್ಷವನ್ನು (–1, 0) ಮತ್ತು (3, 0) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ X-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –1 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ.

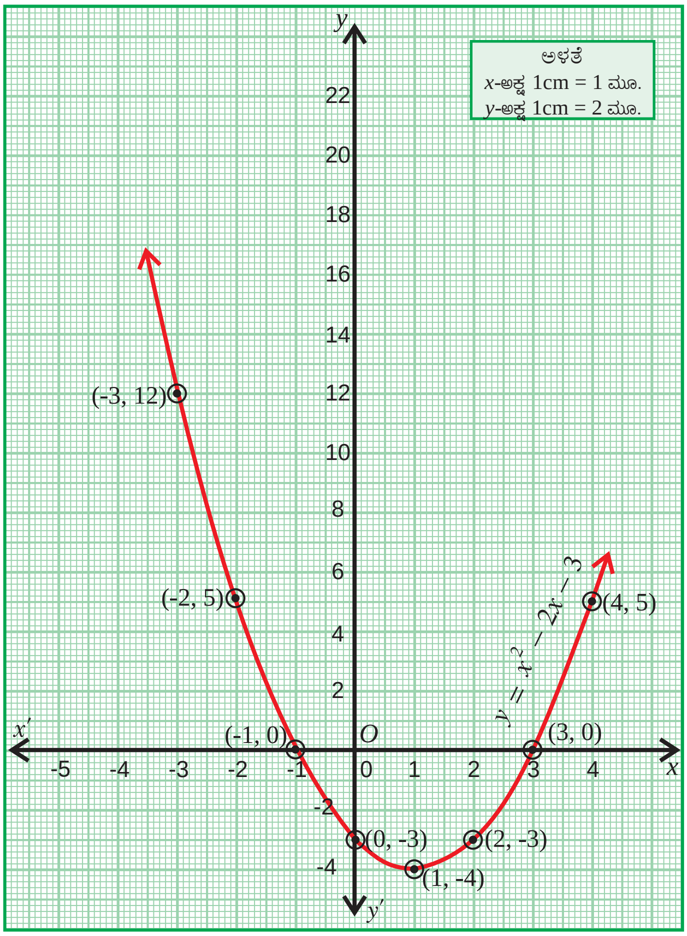
ಇದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು {–1, 3} ಆಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಯಾವಾಗಲೂ $y = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕಗಳೆರಡೂ ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಕ್ರವು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

(iii) ವಕ್ರವು $x=1$ ರೇಖೆಯ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿದೆ. (ಇದು y-ಅಕ್ಷದ ಮೂಲಕ ಸಮಮಿತಿಯಾಗಿಲ್ಲ.)



ಚಿತ್ರ 10.3

ಉದಾಹರಣೆ 10.4

$2x^2 + x - 6 = 0$ ನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

x ಗೆ -3 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಿ ಮತ್ತು ಅನುಗುಣವಾದ $y = 2x^2 + x - 6$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
y	9	0	-5	-6	-3	4	15

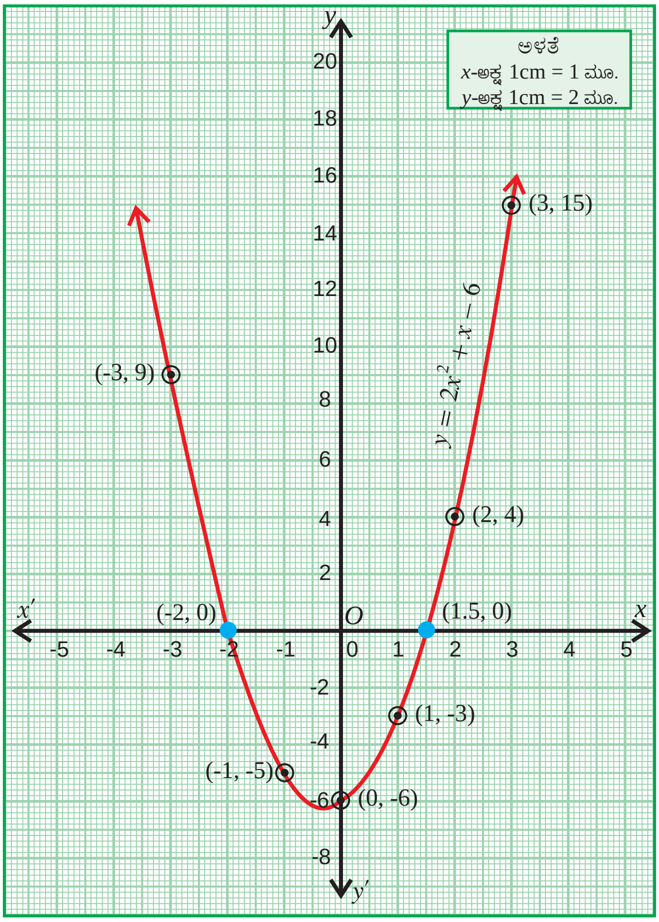
$(-3, 9), (-2, 0), (-1, -5), (0, -6), (1, -3), (2, 4)$ ಮತ್ತು $(3, 15)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = 2x^2 + x - 6$ ನ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ.

ವಕ್ರವು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು $(-2\ ,\ 0)$ ಮತ್ತು $(1.5\ ,\ 0)$ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು -2 ಮತ್ತು 1.5 ಆಗಿವೆ.

ಇದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{-2\ ,\ 1.5\ \}$ ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.4

ಗಮನಿಸಿ

$y = 2x^2 + x - 6$ ನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸಲು, ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

(i) $y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(ii) $y = 6 - x$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(iii) ಎರಡು ನಕ್ಷೆಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $2x^2 + x - 6 = 0$ ರ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.5

$y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $2x^2 + x - 6 = 0$ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೊದಲು, $y = 2x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

(–3, 18), (–2, 8), (–1,2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

$2x^2 + x - 6 = 0$ ಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $y = 2x^2$ ಮತ್ತು $2x^2 + x - 6 = 0$ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

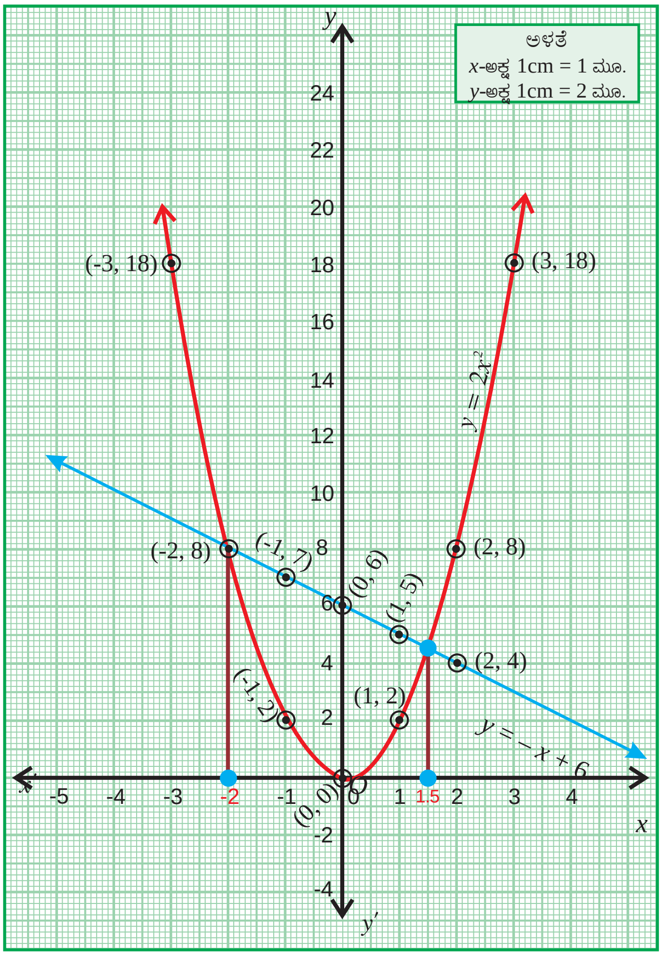
ಈಗ, $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\Longrightarrow$ $y + x - 6 = 0$, $y = 2x^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = -x + 6$

ಇದರಿಂದ, $y = 2x^2$ ಮತ್ತು $y = -x + 6$ ರ ನಕ್ಷೆಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $2x^2 + x - 6 = 0$ ಯ ಮೂಲಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ, $y = -x + 6$ ಸರಳರೇಖೆಗಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.5

x	–1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಪರವಲಯದ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳು (–2 , 8) ಮತ್ತು (1.5 , 4.5) ಆಗಿವೆ. ಬಿಂದುಗಳ x-ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು –2 ಮತ್ತು 1.5 ಆಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $2x^2 + x - 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ ಗಣವು $\{-2 , 1.5\}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 + 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಮೊದಲು, $y = x^2 + 3x + 2$ ಕ್ಕಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

(–4, 6), (–3, 2), (–2, 0), (–1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12) ಮತ್ತು (3, 20) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಪಡೆದ ವಕ್ರವು $y = x^2 + 3x + 2$ ರ ನಕ್ಷೆಯಾಗಿದೆ..

ಈಗ, $x^2 + 2x + 4 = 0$

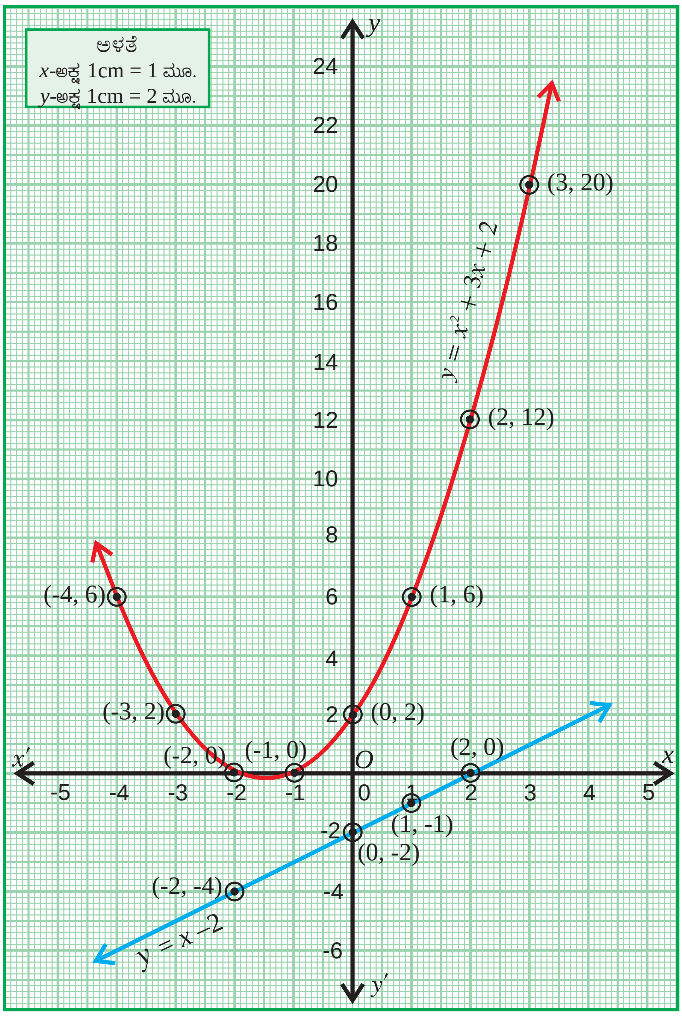
$\Longrightarrow$ $x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

$\Longrightarrow$ $y = x - 2$ $\because$ $y = x^2 + 3x + 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು $y = x - 2$ ಮತ್ತು $y = x^2 + 3x + 2$ ರ ಛೇದಕ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$y = x - 2$ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ, $y = x - 2$ ರ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	–2	0	1	2
$y = x - 2$	–4	–2	–1	0



ಚಿತ್ರ 10.6

$y = x - 2$ ಸರಳರೇಖೆಯು $y = x^2 + 3x + 2$ ವಕ್ರವನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + 2x + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

   (i) $y = 3x^2$ (ii) $y = -4x^2$

   (iii) $y = (x+2)(x+4)$ (iv) $y = 2x^2 - x + 3$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೀಯವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   (i) $x^2 - 4 = 0$ (ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$

   (iii) $(x-5)(x-1) = 0$ (iv) $(2x+1)(x-3) = 0$

3. $y = x^2$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 - 4x - 5 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
4. $y = x^2 + 2x - 3$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $x^2 - x - 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $y = 2x^2 + x - 6$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $2x^2 + x - 10 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
6. $y = x^2 - x - 8$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $x^2 - 2x - 15 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $y = x^2 + x - 12$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ $x^2 + 2x + 2 = 0$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

10.3 ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ನಕ್ಷೆಗಳು (Some Special Graphs)

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು (i) ನೇರ ಅನುಪಾತ (ii) ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

y ಎಂಬುದು x ಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಲವು ಧನಾತ್ಮಕ k ಗೆ, $y = kx$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯು ಸರಳರೇಖೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

y ಎಂಬುದು x ಗೆ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಲವು ಧನಾತ್ಮಕ k ಗೆ, $y = \frac{k}{x}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಚರಾಕ್ಷರಗಳು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯು ನಯವಾದ ವಕ್ರವಾಗಿದ್ದು, ಅದನ್ನು ಆಯತಾಕಾರದ ಅತಿಪರವಲಯ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. (ಆಯತಾಕಾರದ ಅತಿಪರವಲಯದ ಸಮೀಕರಣವು $xy = k,\ k > 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.)

ಉದಾಹರಣೆ 10.7

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅನುಪಾತವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿರಿ.

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

ಇದರಿಂದ, $x = 4$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ, x ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, y ಕೂಡ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅನುಪಾತವು ನೇರ ಅನುಪಾತವಾಗಿದೆ.

$y = kx$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{y}{x} = k$$

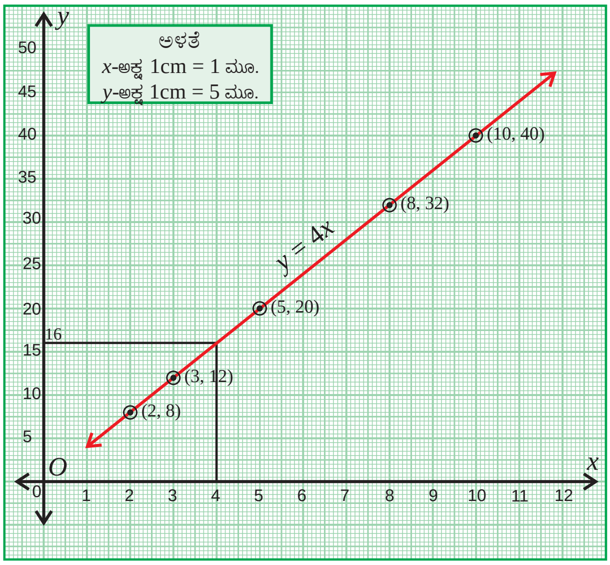
ಇಲ್ಲಿ, k ಎಂಬುದು ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ,

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. \qquad \therefore\ k = 4$$

$y = 4x$ ಸಂಬಂಧವು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ.

(2, 8), (3, 12), (5, 20), (8, 32) ಮತ್ತು (10, 40) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.7

$x = 4$ ಆದಾಗ $y = 4x = 16$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.8

ಒಬ್ಬ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನು A ಸ್ಥಳದಿಂದ B ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಅವನ ಚಲನೆಯ ವೇಗ ಮತ್ತು ಅವನು ಚಲಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಅನುಗುಣವಾದ ಕಾಲಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ವೇಗ ಕಿ.ಮೀ / ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ x	2	4	6	10	12
ಕಾಲ ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ y	60	30	20	12	10

ವೇಗ–ಕಾಲ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ, (i) 5 ಕಿ.ಮೀ / ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಅವನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕಾಲ ಮತ್ತು (ii) 40 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಚಲಿಸಬೇಕಾದ ವೇಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

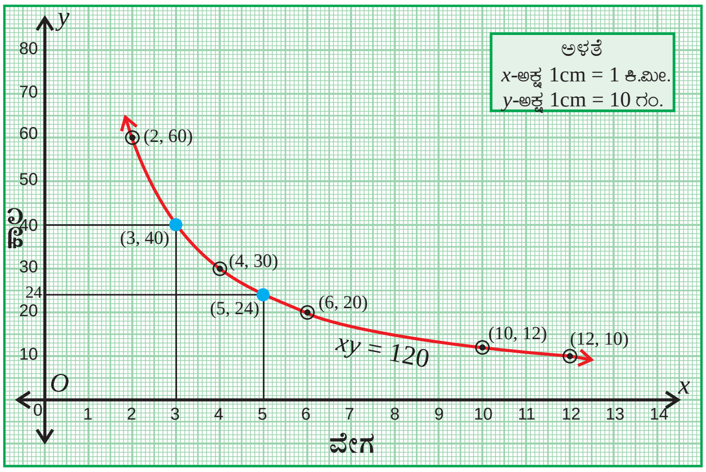
ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ, x ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, y ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಧದ ಅನುಪಾತವನ್ನು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $xy = 120$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \frac{120}{x}$.

(2 , 60), (4 , 30), (6 , 20), (10 , 12) ಮತ್ತು (12 , 10) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಯವಾದ ವಕ್ರದಿಂದ ಸೇರಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 10.8

ನಕ್ಷೆಯಿಂದ,

(i) 5 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಅವನಿಗೆ 24 ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ.

(ii) 40 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅವನು ಚಲಿಸಬೇಕಾದ ವೇಗವು 3 ಕಿ.ಮೀ/ಗಂಟೆ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10.9

ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕು ಹಿರಿಯ ನಾಗರೀಕರಿಗೆ ಅವರ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲೆ 10% ಸರಳಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಠೇವಣಿ ಹೂಡಿದ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಗಳಿಸಿದ ಬಡ್ಡಿಯ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಕ್ಕಾಗಿ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ, (i) ₹650 ರ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮತ್ತು (ii) ₹45 ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಗಳಿಸಲು ಠೇವಣಿ ಹೂಡಬೇಕಾದ ಮೊಬಲಗುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ.

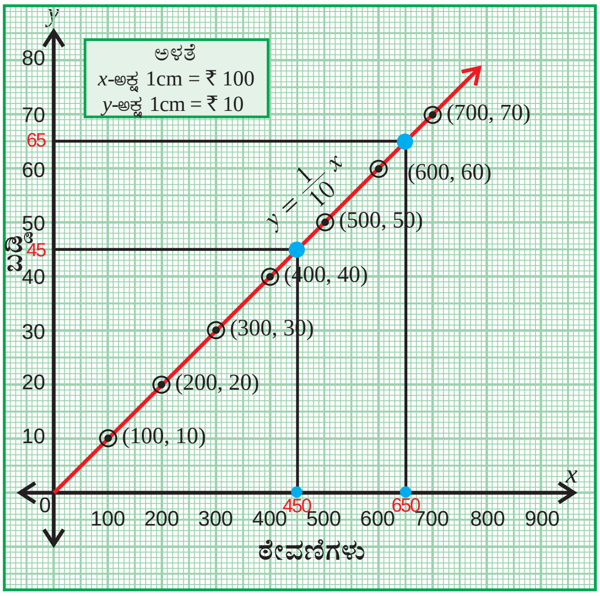
ಠೇವಣಿ ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
ಗಳಿಸಿದ ಸರಳಬಡ್ಡಿ ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

$y = \frac{1}{10}x$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆಯು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಕ್ಷೆಯಿಂದ ನಾವು ತಿಳಿಯುವುದೇನೆಂದರೆ,

(i) ₹650 ರ ಠೇವಣಿಯ ಮೇಲಿನ ಬಡ್ಡಿಯು ₹65 ಆಗಿದೆ.

(ii) ₹ 45 ರ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಗಳಿಸಲು ಠೇವಣಿ ಹೂಡಬೇಕಾದ ಮೊಬಲಗುವು ₹450 ಆಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.9

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಒಂದು ಬಸ್ಸು 40 ಕಿ.ಮೀ. / ಗಂಟೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ದೂರ–ಕಾಲ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರ ಸಹಾಯದಿಂದ, 3 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಸ್ಸು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಖರೀದಿಸಿದ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x	2	4	6	8	10	12
ಬೆಲೆ ₹ y	30	60	90	120	150	180

ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ (i) ಏಳು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ii) ₹ 165 ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಬಹುದು?

3.

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ,

(i) $x = 4$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆ ಮತ್ತು

(ii) $y = 12$ ಆದಾಗ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯು ₹ 15. ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ,

(i) ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮತ್ತು

(ii) 3 ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $xy = 20$, $x, y > 0$ ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಕ್ಷೆಯಿಂದ $x = 5$ ಆದಾಗ y ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮತ್ತು $y = 10$ ಆದಾಗ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.

ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ x	3	4	6	8	9	16
ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ y	96	72	48	36	32	18

ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ 12 ಕೆಲಸಗಾರರು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳು

1. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವ ಕಲೆಯು ಅದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಉನ್ನತವಾಗಿರಬೇಕು
   - **ಜಾರ್ಜ್ ಕ್ಯಾಂಟರ್**
2. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವು ವಿಶೇಷವಾದ ಪ್ರಶಂಸೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಒಂದು ಕಾರಣವೆಂದರೆ, ಇನ್ನುಳಿದ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಿಗಿಂತ ಇದರ ನಿಯಮಗಳು ನಿರಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿರುವಂತಹವು ಮತ್ತು ವಿವಾದರಹಿತವಾದವು. ಆದರೆ, ಇನ್ನುಳಿದ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ನಿಯಮಗಳು ಕೆಲವು ಮಿತಿಯವರೆಗೆ ವಿವಾದಾಸ್ಪದವಾಗಿರುವಂತಹವು ಮತ್ತು ಹೊಸ ಸಂಶೋಧನಾ ಸಂಗತಿಗಳಿಂದ ನಶಿಸಿಹೋಗುವ ಸ್ಥಿರ ಅಪಾಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತಹವು - **ಆಲ್ಬರ್ಟ್ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್**

11

ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು
  - ವ್ಯಾಪ್ತಿ
  - ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ
  - ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ
- ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ

ಕಾರ್ಲ್ ಪೀಯರ್‌ಸನ್

(1857-1936)

ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್

ಕಾರ್ಲ್ ಪೀಯರ್‌ಸನ್‌ರವರು ಬ್ರಿಟೀಷ್ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರರಾಗಿದ್ದು, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಧುನಿಕ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಮುಂಚೂಣಿಯ ಸ್ಥಾಪಕರಾಗಿದ್ದಾರೆ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತನ್ನು ನೆಲೆಗೊಳಿಸಿದವರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ಸ್ವೀಕರಿಸಿದ ಮಹತ್ವ ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಇವರು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು.

ಐನ್‌ಸ್ಟೀನ್ ಮತ್ತು ಇತರೆ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಹಲವಾರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಇವರ 'ವಿಜ್ಞಾನದ ವ್ಯಾಕರಣ' ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವು ಮೊದಲೇ ಒಳಗೊಂಡಿತ್ತು.

11.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಕ್ರಾಕ್ಸ್‌ಟನ್ ಮತ್ತು ಕೌಡನ್‌ರವರ ಪ್ರಕಾರ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆರ್.ಎ.ಫಿಷರ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಜ್ಞಾನವು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿರುವುದು ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಹೊರೇಸ್ ಸೆಕ್ರಿಸ್ಟ್‌ರವರು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದಾರೆ.

"ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ಪೂರ್ವ ನಿಯೋಜಿತ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗಾಗಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರವಾಗಿ ಸಂಬಂಧೀಕರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ, ನಿಖರತೆಯ ಯುಕ್ತ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎಣಿಸಿದ ಅಥವಾ ಅಂದಾಜಿಸಿದ, ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದ, ಕಾರಣಗಳ ವೈವಿಧ್ಯತೆಯಿಂದ ಗುರುತರವಾದ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಿದ ನಿಜ ಸಂಗತಿಗಳ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಅರ್ಥೈಸುತ್ತೇವೆ".

'ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ' ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ಜೆ.ಎಫ್.ಬ್ಯಾರನ್ ರವರು ತಮ್ಮ "ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ವಿದ್ವತ್ತಿನ ಅಂಶಗಳು" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಆಧುನಿಕ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಪಟ ಹಾಗೂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಸುತ್ತುವರಿಯಲು ಮತ್ತು ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯ ಮುಖದಲ್ಲಿ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವ ಪೂರ್ಣ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳಾದ ಸರಾಸರಿ, ಮಧ್ಯಾಂಕ ಮತ್ತು ಬಹುಲಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಅವು ವಿತರಣೆಯ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಭಾಗದ ಬಗ್ಗೆ ದತ್ತಾಂಶದ ದಟ್ಟಣೆಯ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನಮಗೆ ನೀಡುತ್ತವೆ.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳ ಜ್ಞಾನವು ವಿತರಣೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಪೂರ್ಣ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (i) 82, 74, 89, 95 ಮತ್ತು

(ii) 120, 62, 28, 130. ಮೇಲಿನ ಎರಡು ವಿತರಣೆಗಳು ಒಂದೇ ಸರಾಸರಿ 85 ನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಾಸರಿ 85 ಕ್ಕೆ ಸಾಮೀಪ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಾಸರಿ 85 ರಿಂದ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಚದುರಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ನಮ್ಮನ್ನು ಹಾದಿ ತಪ್ಪಿಸಬಹುದು. ಸರಾಸರಿಯ ಸುತ್ತಲೂ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಹೇಗೆ ಚದುರಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸುವ ಅಳತೆಯ ಅಗತ್ಯತೆಯು ನಮಗಿದೆ.

11.2 ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು (Measures of dispersion)

ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳು ವಿತರಣೆಯ ದತ್ತಾಂಶದ ಚದುರುವಿಕೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತವೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿ (R), ಚತುರ್ಥಕ ವಿಚಲನೆ (Q.D), ಸರಾಸರಿ ವಿಚಲನೆ (M.D) ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (S.D) ಗಳು ಹರವಿನ ಅಳತೆಗಳಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡೋಣ.

11.2.1 ವ್ಯಾಪ್ತಿ (Range)

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಸರಳವಾದ ಹರವಿನ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ − ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ

$= L - S.$

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು $\dfrac{L-S}{L+S}$ ರಿಂದ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.1

43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 ರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಾವು ಜೋಡಿಸೋಣ.

22, 24, 38, 39, 43, 45, 56.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ, $L = 56$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ, $S = 22$.

$\therefore$ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕ $= \dfrac{L-S}{L+S}$

$= \dfrac{56-22}{56+22} = \dfrac{34}{78} = 0.436.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.2

ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ 13 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ತೂಕಗಳು (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಗಳಲ್ಲಿ) 42.5, 47.5, 48.6, 50.5, 49, 46.2, 49.8, 45.8, 43.2, 48, 44.7, 46.9, 42.4 ಆಗಿವೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಾವು ಜೋಡಿಸೋಣ.

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ, ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $L = 50.5$ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $S = 42.4$.

ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= L - S$

$= 50.5 - 42.4 = 8.1.$

ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕ $= \dfrac{L-S}{L+S} = \dfrac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \dfrac{8.1}{92.9}$

$= 0.087.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.3

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 7.44 ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 2.26 ಆದರೆ, ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ − ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ

$\Longrightarrow$ 7.44 − ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ = 2.26

$\therefore$ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ = 7.44 − 2.26 = 5.18.

11.2.2 ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (Standard deviation)

ಹರವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಪ್ರತಿ ದತ್ತಾಂಶ ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿಯ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸುವುದು ಉತ್ತಮವಾದ ಮಾರ್ಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಹರವಿನ ಅಳತೆಯನ್ನು ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಾಸ್‌ರವರು ಬಳಸಿದ್ದ 'ಸರಾಸರಿ ದೋಷ' ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ 'ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ' ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ಕಾರ್ಲ್ ಪೀಯರ್‌ಸನ್‌ರವರು 1894 ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದರು.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ದತ್ತಾಂಶಗಳಂತೆ ಅದೇ ಮೂಲಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ಎಷ್ಟು ಚದುರಿದೆ ಅಥವಾ ಹರಡಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಕಡಿಮೆ ಬೆಲೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ದತ್ತಾಂಶವು ಸರಾಸರಿಗೆ ತುಂಬಾ ಸಾಮೀಪ್ಯವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಬೆಲೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ದತ್ತಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹರಡಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ವಿತರಣೆಯ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\overline{x}$ ಮತ್ತು σ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿ, (ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಏರಿಕೆ ಅಥವಾ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದ ನಂತರ) ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ σ ವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ದತ್ತಾಂಶ	ನೇರ ವಿಧಾನ	ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ	ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ	ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ
ಅವರ್ಗೀಕೃತ	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ $d = x-\overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ $d = x-A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}\times c$ $d=\frac{x-A}{c}$
ವರ್ಗೀಕೃತ		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}\times c$

ಸೂಚನೆ

n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ (ಸಂಖ್ಯೆಗಳ) ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ $\sum(x-\overline{x}) = 0$, $\sum x = n x$ ಮತ್ತು $\sum \overline{x} = n\overline{x}$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(i) ನೇರ ವಿಧಾನ (Direct method)

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಾಗ ಬಳಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11.4

ಒಂದು ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ 8 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಓದಿದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10 ಆಗಿವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x = 68$	$\sum x^2 = 690$

ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ , $n = 8$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{14} \simeq 3.74.$

(ii) ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Actual mean method)

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸರಾಸರಿಯು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ ಬಳಸಬಹುದು.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ , $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}$ ಅಥವಾ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$. ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.5

ಒಂದು ತರಗತಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಞಾನದ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಯಿತು. 6 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು 40 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು 20, 14, 16, 30, 21 ಮತ್ತು 25 ಆಗಿವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ $= \frac{\sum x}{n} = \frac{20+14+16+30+21+25}{6}$

$\Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸೋಣ.

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	-7	49
16	-5	25
20	-1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

$\therefore \quad \sigma \simeq 5.36.$

(iii) ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Assumed mean method)

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. $x-A$ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೆಲ್ಲವೂ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗುವಂತೆ ಸೂಕ್ತ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ A ನ್ನು ನಾವು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ A ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, ಸರಾಸರಿಗೆ ಸಾಮೀಪ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

$d = x - A$ ನ್ನು ಬಳಸಿ ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$.

ಸೂಚನೆ

ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನಗಳು ನೇರ ವಿಧಾನದ ಸಂಕ್ಷೇಪಿತ ರೂಪಗಳಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.6

62, 58, 53, 50, 63, 52, 55 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $A=55$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	$d = x - A = x - 55$	d^2
50	-5	25
52	-3	9
53	-2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$

$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma \simeq 4.64$

(iv) ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ (Step deviation method)

ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಾಗ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ನಾವು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡು $d = \frac{x-A}{c}$ ಬಳಸಿ d ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ, c ಎಂಬುದು $x-A$ ನ ಬೆಲೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.7

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳು 80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80 ಆಗಿವೆ. ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳು 10 ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$A = 70$ ನ್ನು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n = 10$.

$c = 10$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $d = \frac{x-A}{10}$. ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

x	$d = \frac{x-70}{10}$	d^2
30	−4	16
40	−3	9
50	−2	4
60	−1	1
60	−1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d = -4$	$\sum d^2 = 46$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \left(\frac{-4}{10}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \frac{16}{100}} \times 10 = \sqrt{\frac{460-16}{100}} \times 10$$

$\therefore$ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma \simeq 21.07$.

ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳೆಂದರೆ, ನೇರ ವಿಧಾನ, ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ, ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಹಂತ ವಿಚಲನೆಯ ವಿಧಾನ.

ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿದಂತೆ, ಒಂದೇ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳು σ ದ ವಿಭಿನ್ನ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಲಹೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು

(i) ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ವಿತರಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರಾಂಕ k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಅದೇ ಪರಿಮಾಣ k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿ ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 11.8

3, 5, 6, 7 ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ 4 ನ್ನು ಕೂಡಿರಿ ಮತ್ತು ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶ 3, 5, 6, 7.

$A = 6$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x	$d = x - 6$	d^2
3	-3	9
5	-1	1
6	0	0
7	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ 4 ನ್ನು ಕೂಡಿ 7, 9, 10, 11 ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. $A = 10$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

x	$d = x - 10$	d^2
7	-3	9
9	-1	1
10	0	0
11	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 4 ನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ ಕೂಡ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.9

40, 42 ಮತ್ತು 48 ರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶ 40, 42, 48 ಆಗಿದೆ. ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 44 ಆಗಿರಲಿ.

x	$d = x - 44$	d^2
40	-4	16
42	-2	4
48	4	16
	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 36$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$

$\sigma = \frac{\sqrt{104}}{3}$

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ 120,126,144 ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 132 ಆಗಿರಲಿ. ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು σ_1 ಆಗಿರಲಿ.

x	$d = x - 132$	d^2
120	-12	144
126	-6	36
144	12	144
	$\sum d = -6$	$\sum d^2 = 324$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಕೂಡ 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.10

ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ $1,2,3,\cdots,n$.

ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ಆಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ತುಂಬಾ ಆಸಕ್ತಿಯುತವಾದ ಅಂಶಗಳಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವುದೇ n ಕ್ರಮಾನುಗತ ಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆದರೆ, $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

(i) $i, i+1, i+2, \cdots, i+n$ ರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$, $i \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.

(ii) ಯಾವುದೇ n ಅನುಕ್ರಮ ಸಮ(ಸರಿ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.

(iii) ಯಾವುದೇ n ಅನುಕ್ರಮ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$ ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.11

ಮೊದಲ 10 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

ಮೊದಲ 10 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

$$= \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87.$$

ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ (Standard Deviation of grouped data)

(i) ನೈಜ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Actual mean method)

ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ದತ್ತಾಂಶದಲ್ಲಿ, ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.12

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ 48 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತಾಂಶ x	6	7	8	9	10	11	12
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ f	3	6	9	13	8	5	4

ಪರಿಹಾರ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

x	f	fx	$d = x - \overline{x}$ $= x - 9$	fd	fd^2
6	3	18	−3	−9	27
7	6	42	−2	−12	24
8	9	72	−1	−9	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f = 48$	$\sum fx = 432$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum fd^2 = 124$

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{432}{48} = 9.$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}}$$

$$= \sqrt{2.58} \simeq 1.61.$$

(ii) ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ ವಿಧಾನ (Assumed mean method)

ವಿಚಲನೆಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವಾಗ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರವು

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2}$$ ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $d = x - A$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.13

ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

ಪರಿಹಾರ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು $A = 82$ ಎಂದು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	−12	−12	144
74	3	−8	−24	192
78	5	−4	−20	80
82	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$$

$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$

ಉದಾಹರಣೆ 11.14

ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	9	14	22	11	17

ಪರಿಹಾರ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 6 ಆಗಿರಲಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	x ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5-4.5	4	9	– 2	– 18	36
4.5-5.5	5	14	– 1	– 14	14
5.5-6.5	6	22	0	0	0
6.5-7.5	7	11	1	11	11
7.5-8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 \simeq 1.74$.

(iii) ಹಂತ ವಿಚಲನಾ ವಿಧಾನ (Step deviation method)

ಉದಾಹರಣೆ 11.15

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕವು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ 71 ಮುಂಚೂಣಿಯ ಆಟಗಾರರು ಗಳಿಸಿದ ಗೋಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	8	12	17	14	9	7	4

ಪರಿಹಾರ $A = 35$ ಆಗಿರಲಿ. 4 ನೆಯ ಕಂಬಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ, $c = 10$.

ವರ್ಗಾಂತರ	x ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ	f	$x–A$	$d = \frac{x - A}{c}$	fd	fd^2
0 – 10	5	8	–30	– 3	– 24	72
10 – 20	15	12	–20	– 2	– 24	48
20 – 30	25	17	–10	– 1	– 17	17
30 – 40	35	14	0	0	0	0
40 – 50	45	9	10	1	9	9
50 – 60	55	7	20	2	14	28
60 – 70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$

$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$

$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma \simeq 16.67$.

ಉದಾಹರಣೆ 11.16

ತಂತಿಯ 40 ತುಂಡುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹತ್ತಿರದ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕೆಳಗಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉದ್ದ ಸೆಂ.ಮೀ.	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
ತುಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	8	12	9	5	1

ಪರಿಹಾರ ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿ A ಎಂಬುದು 35.5 ಆಗಿರಲಿ.

ಉದ್ದ	ಮಧ್ಯ ಬೆಲೆ x	ತುಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (f)	$d = x - A$	fd	fd^2
1-10	5.5	2	-30	-60	1800
11-20	15.5	3	-20	-60	1200
21-30	25.5	8	-10	-80	800
31-40	35.5	12	0	0	0
41-50	45.5	9	10	90	900
51-60	55.5	5	20	100	2000
61-70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 = \frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \frac{7600}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2$

$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75.$

11.2.3 ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ (coefficient of variation)

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ, $\overline{x}$ ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು σ ಎಂಬುದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯಾಗಿದೆ.

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಸಾಪೇಕ್ಷ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ

(i) ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ನಮಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವು ಕಡಿಮೆ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(iii) ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶವು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.17

ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : 18, 20, 15, 12, 25.

ಪರಿಹಾರ

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x} = \frac{12+15+18+20+25}{5} = \frac{90}{5} = 18.$

x	$d = x - 18$	d^2
12	−6	36
15	−3	9
18	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$

$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.427.$$

∴ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$

$$= \frac{4.427}{18} \times 100 = \frac{442.7}{18} \quad .$$

∴ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 24.6 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.18

5 ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ದಾಂಡಿಗರು ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ. ಓಟಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾರೆ?

ದಾಂಡಿಗ A	38	47	34	18	33
ದಾಂಡಿಗ B	37	35	41	27	35

ಪರಿಹಾರ

ದಾಂಡಿಗ A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	– 16	256
33	– 1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

ಈಗ, $\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4}$$

$$\simeq 9.4 .$$

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ , C.V = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{9.4}{34} \times 100$$

$$= \frac{940}{34}$$

$$= 27.65 .$$

$\therefore$ ದಾಂಡಿಗ A ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 27.65 ಆಗಿದೆ. (1)

ದಾಂಡಿಗ B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	– 8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8}$$

$$\simeq 4.6.$$

ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ,C.V= $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{4.6}{35} \times 100$$

$$= \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14 .$$

$\therefore$ ದಾಂಡಿಗ B ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳಿಗೆ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 13.14 ಆಗಿದೆ. (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, B ನ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು A ನ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ.

$\therefore$ ಓಟಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ದಾಂಡಿಗ B ಯು ದಾಂಡಿಗ A ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯುಳ್ಳವರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11.19

30 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 18 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 3 ಆಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ

30 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ, $\bar{x} = 18$

30 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ , $\sum x = 30 \times 18 = 540$ $\quad \left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \right)$

ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ , $\sigma = 3$

ಈಗ, $$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 9720 = 270$$

$$\sum x^2 = 9990$$

$\therefore \quad \sum x = 540$ ಮತ್ತು $\sum x^2 = 9990.$

ಉದಾಹರಣೆ 11.20

20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 40 ಮತ್ತು 15 ಆಗಿವೆ. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 43 ನ್ನು 53 ಎಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂತು. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ , $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

ಈಗ, ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sum x = 800 + 43 - 53 = 790.$

$\therefore$ ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ $= \frac{790}{20} = 39.5$

ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ, $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$ (ಕೊಟ್ಟಿದೆ)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500.$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sum x^2 = 36500 - 53^2 + 43^2 = 36500 - 2809 + 1849$

$= 36500 - 960 = 35540.$

ಈಗ, ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sigma^2 = \frac{\text{ಸರಿಪಡಿಸಿದ } \sum x^2}{n} - (\text{ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ})^2$

$= \frac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75.$

ಸರಿಪಡಿಸಿದ $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72.$

$\therefore$ ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ = 39.95 ಮತ್ತು ಸರಿಪಡಿಸಿದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ $\simeq$ 14.72.

ಉದಾಹರಣೆ 11.21

ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ, $\sum x = 35, n = 5, \sum (x-9)^2 = 82$ ಆದರೆ, $\sum x^2$ ಮತ್ತು $\sum (x-\overline{x})^2$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $\sum x = 35$ ಮತ್ತು $n = 5$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ ನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ $\sum (x-9)^2 = 82$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x^2 - 18x + 81) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \because \sum x = 35 \text{ ಮತ್ತು } \sum 1 = 5$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 = 307.$$

$\sum (x-\overline{x})^2$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ,

$$\sum (x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-7-2)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum [(x-7)-2]^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-7)^2 - 2\sum [(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-\overline{x})^2 - 4\sum (x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5 \text{ ಮತ್ತು } \sum (x-\overline{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum (x-\overline{x})^2 = 62$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 307 \text{ ಮತ್ತು } \sum (x-\overline{x})^2 = 62.$$

ಉದಾಹರಣೆ 11.22

ಎರಡು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕಗಳು 58 ಮತ್ತು 69 ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳು 21.2 ಮತ್ತು 15.6 ಆಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಗಳೇನು?

ಪರಿಹಾರ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ, $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100..$$

ಮೊದಲ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x_1} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$

$$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 58 \text{ ಮತ್ತು } \sigma = 21.2$$

$$= \frac{2120}{58} = 36.6.$$

ಎರಡನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಾಸರಿ, $\overline{x_2} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$= \frac{15.6}{69} \times 100$ $\quad \because$ C.V = 69 ಮತ್ತು σ = 15.6

$= \frac{1560}{69}$

= 22.6.

ಮೊದಲ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ = 36.6 ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿ = 22.6.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52,35, 29

   (ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5

2. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 12 ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 59 ಆಗಿದೆ. ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 50 ಅಳತೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 3.84ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಆಗಿದೆ. ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 0.46ಕಿ.ಗ್ರಾಂ ಆದರೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. 20 ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $\sqrt{5}$ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಫಲಿತ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಮೊದಲ 13 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 10, 20, 15, 8, 3, 4 (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34

7. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ 200 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಪುಸ್ತಕ ಮೇಳದಲ್ಲಿ ಖರೀದಿಸಿದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	0	1	2	3	4
ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	35	64	68	18	15

9. ಕೆಳಗಿನ ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

10. ಒಂದು ಕಾಲುದಾರಿಯನ್ನು ನಡೆದು ಕ್ರಮಿಸಲು ಜನರ ಒಂದು ಗುಂಪು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲವನ್ನು (ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ) ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕಾಲ (ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ಜನರ ಸಂಖ್ಯೆ	4	8	15	12	11

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. 45 ಮನೆಗಳ ಮಾಲೀಕರ ಒಂದು ಗುಂಪು ತಮ್ಮ ಬೀದಿಯ ಪರಿಸರವನ್ನು ಹಸಿರುಗೊಳಿಸಲು ಹಣವನ್ನು ನೀಡಿದರು. ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಹಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹಣ (₹)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ಮನೆ ಮಾಲೀಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	2	7	12	19	5

ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಕೆಳಗಿನ ವಿತರಣೆಯ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವರ್ಗಾಂತರ	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ಆವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	15	25	28	12	12	8

13. 100 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿಯು 48 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 10 ಆಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. 20 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 10 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿವೆ. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕ 12 ನ್ನು 8 ಎಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ನಮೂದಿಸಿರುವುದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಸರಿಯಾದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $n = 10$, $\overline{x} = 12$ ಮತ್ತು $\sum x^2 = 1530$ ಆದರೆ, ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: 20, 18, 32, 24, 26.

17. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 57 ಮತ್ತು ಇದರ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 6.84 ಆದರೆ, ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಗುಂಪಿನ ಸರಾಸರಿ ಎತ್ತರವು 163.8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅವರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು 3.2 ಆಗಿವೆ. ಅವರ ಎತ್ತರಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯೇನು?

19. $\sum x = 99$, $n = 9$ ಮತ್ತು $\sum (x - 10)^2 = 79$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಿಂದ $\sum x^2$ ಮತ್ತು $\sum (x - \overline{x})^2$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ A , B ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವವರು ಯಾರು?

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 , 29 ಮೊದಲ 10 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು

   (A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 14.1 ಮತ್ತು ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು 28.4 ಆದರೆ, ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು

   (A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 72 ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು 28 ಆಗಿದೆ. ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕವು

   (A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4 11 ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ, $\Sigma x = 132$ ಆದರೆ, ಅಂಕಗಣಿತ ಸರಾಸರಿಯು

   (A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5. n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಯಾವುದೇ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ, $\Sigma(x - \overline{x}) =$

   (A) Σx (B) $\bar{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6. n ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕಗಳ ಯಾವುದೇ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗೆ, $(\Sigma x) - \overline{x} =$

   (A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7. $x, y. z$ ಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು t ಆದರೆ, $x+5,\ y+5,\ z+5$ ಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಗಣದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು 1.6 ಆದರೆ, ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು 12.25 ಆದರೆ, ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10. ಮೊದಲ 11 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11. 10, 10, 10, 10, 10 ರ ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12. 14, 18, 22, 26, 30 ರ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯು 32 ಆದರೆ, 28, 36, 44, 52, 60 ರ ಪ್ರಸರಣ ವಿಚಲನೆಯು

   (A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು $2\sqrt{2}$ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಹೊಸ ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14. $\sum(x-\overline{x})^2 = 48,\ \overline{x} = 20$ ಮತ್ತು $n = 12$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15. ಒಂದು ದತ್ತಾಂಶದ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 48 ಮತ್ತು 12 ಆಗಿವೆ. ದತ್ತಾಂಶದ ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕವು

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

- (i) ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= L - S$, ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.

  (ii) ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಗುಣಾಂಕ $= \frac{L-S}{L+S}$.

- ಅವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

  (i) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$ ಮತ್ತು $\overline{x}$ ಎಂಬುದು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

  (ii) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - A$ ಮತ್ತು A ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

- ವರ್ಗೀಕೃತ ದತ್ತಾಂಶಗಳಿಗೆ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ

  (i) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - \overline{x}$ ಮತ್ತು $\overline{x}$ ಎಂಬುದು ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

  (ii) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$ ಇಲ್ಲಿ, $d = x - A$ ಮತ್ತು A ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪಿತ ಸರಾಸರಿಯಾಗಿದೆ.

- ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ, ದತ್ತಾಂಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

- ಪ್ರತಿ ಪ್ರಾಪ್ತಾಂಕವನ್ನು k ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ದತ್ತಾಂಶದ ಸಂಗ್ರಹಣೆಯ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯು k ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

- ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆ, $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

- ಪ್ರಸರಣೆಯ ವಿಚಲನೆಯು ಮಾನಕ ವಿಚಲನೆಯ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

- ಮಾರ್ಪಿನ ಗುಣಾಂಕ, C.V $= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ದತ್ತಾಂಶ ಸಂಗ್ರಹಣೆಗಳ ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

12 ಸಂಭವನೀಯತೆ

It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge -P.D. Laplace

- ಪೀಠಿಕೆ
- ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
- ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ

ಪೀರೆ ಡಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್

(1749-1827)

ಫ್ರಾನ್ಸ್

ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್‌ರವರನ್ನು ಸರ್ವ ಕಾಲಿಕ ಶ್ರೇಷ್ಠ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಇವರನ್ನು ಫ್ರೆಂಚಿನ ನ್ಯೂಟನ್ ಎಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

1812 ರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್‌ರವರು ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಮೂಲಭೂತ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದರು. ಇವರು ಸಂಭವನೀಯತೆಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅನುಗಮನ ಚಿಂತನೆಯ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರು. ಇವರು ಮಾತ್ರ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು. ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದು "ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಪರವಾದ ಘಟನೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ಘಟನೆಗಳ ಅನುಪಾತ" ಆಗಿದೆ.

12.1 ಪೀಠಿಕೆ

ದಿನನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡುವ ಅಥವಾ ಮಾಡುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಯಗಳು ಅವಕಾಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳಾದ ಭೂಕಂಪಗಳು, ಚಂಡಮಾರುತಗಳು, ಸುನಾಮಿ, ಮಿಂಚು, ಸಾಂಕ್ರಾಮಿಕ ರೋಗಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿಯ ಹಲವಾರು ಘಟನೆಗಳು ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶವು ಮಾನವ ಜಗತ್ತಿಗೆ ನಷ್ಟವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ನಾವು ಹಿಂದೆ ಸಂಭವಿಸಿದ ಘಟನೆಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಇಂತಹ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದಾಗ ಮಾನವ ಸಮಾಜಕ್ಕೆ ಆಗಬಹುದಾದ ಅನಾಹುತಗಳನ್ನು ತಡೆಗಟ್ಟಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಅಧ್ಯಯನವು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ.

1654ರಲ್ಲಿ ಚವಲಿಯರ್ ಡಿ ಮೆರೆನಿಂದ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಜೂಜುಗಾರರ ವಿವಾದಾಸ್ಪದ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಬ್ಲೇಸಿ ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್ ಮತ್ತು ಪೀರೆ ಡಿ ಫರ್ಮಾಟ್ ಈರ್ವರ ನಡುವೆ ಪತ್ರಗಳನ್ನು ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿಸಿತು ಮತ್ತು ಇದು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರೀಯ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿತು. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಕೊಡುಗೆ ನೀಡಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೆಂದರೆ ಕ್ರಿಶ್ಚಿಯನ್ ಹಗ್ಗನ್ಸ್ (1629–1695), ಬರ್ನೌಲಿ (1654–1705), ಡಿ ಮಾಯಿರ್ (1667–1754), ಪೀರೆ ಡಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲ್ಯಾಸ್ (1749–1827), ಗಾಸ್ (1777–1855), ಪಾಯ್ಸನ್ (1781–1845), ಚೆಬಿಷೇವ್ (1821–1894), ಮಾರ್ಕೋವ್ (1856–1922). 1933 ರಲ್ಲಿ ರಷ್ಯಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಎ. ಕೊಲ್ಮೊಗೊರೋವ್‌ರವರು ಆಧುನಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಆಧಾರವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುವ ಸ್ವಯಂ ಪ್ರಮಾಣಿತ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿದರು.

ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಂಭವಿಸುವ ಅಥವಾ ಸಂಭವಿಸದ ಘಟನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ, ಪ್ರಯತ್ನ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಮತ್ತು ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸೋಣ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು 'ಪ್ರಯೋಗ' ಮತ್ತು 'ಫಲಿತಾಂಶ' ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ವಿಶಾಲ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಅಥವಾ ಅಳತೆಯ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಯೋಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ನವಜಾತ ಶಿಶುವು ಗಂಡೋ ಅಥವಾ ಹೆಣ್ಣೋ, ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವುದು, ವಿವಿಧ ಬಣ್ಣಗಳ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಅಪಘಾತಗಳನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುವುದು, ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವ ಮೊದಲೇ ನಿಖರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಯಲಾಗದ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವನ್ನು S ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಯೋಗದ ಪ್ರತಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ನ ಉಪಗಣವನ್ನು ಘಟನೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

A ಯು S ನ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಾಗ, A ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶವು ಬಂದರೆ, ಆಗ ನಾವು ಘಟನೆ A ಯು ಸಂಭವಿಸಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ, ಘಟನೆಗಳನ್ನು ನಾವು ದೃಷ್ಟಾಂತೀಕರಿಸೋಣ.

ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗ	ಫಲಿತಾಂಶಗಣ	ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳು
ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವುದು	$S=\{H,T\}$	ಶಿರ $\{H\}$ ಸಂಭವಿಸುವುದು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ. ಪುಚ್ಛ $\{T\}$ ಸಂಭವಿಸುವುದು ಇನ್ನೊಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.
ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮುವುದು	$S=\{HT,HH,TT,TH\}$	{HT,HH} ಮತ್ತು {TT} ಗಳು ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.
ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸುವುದು	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{3\}$ ಮತ್ತು $\{6\}$ ಕೆಲವು ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳು (Equally likely events)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮುವ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ, ಶಿರ ಮತ್ತು ಪುಚ್ಛ ಬರುವುದು ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು (Mutually exclusive events)

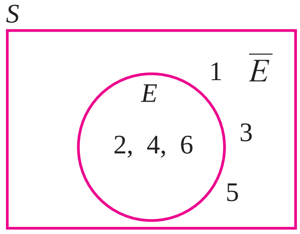
ಚಿತ್ರ 12.1

ಸಂಭವಿಸುವ ಒಂದು ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಇತರೆ ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಬಂಧಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಘಟನೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $A\cap B=\phi$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ, ಶಿರ ಬರುವುದು ಪುಚ್ಛ ಬರುವುದನ್ನು ಪ್ರತಿಬಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮುಖಗಳು ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಆರು ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು (Complementary events)

E ಎಂಬುದು ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಒಂದು ಘಟನೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವು S ಆಗಿರಲಿ. E ನಲ್ಲಿ ಇರದ ಆದರೆ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು E ನ ಪೂರಕ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು $\overline{E}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $\overline{E} = S - E$. E ಮತ್ತು $\overline{E}$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12.2

ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, $E = \{2, 4, 6\}$ ಎಂಬುದು 2ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ E ನ ಪೂರಕ ಘಟನೆಯು $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ ಆಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 12.2 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳು (Exhaustive events)

$E_1, E_2, \cdots, E_n$ ಘಟನೆಗಳು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಂಯೋಗವು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ಆಗಿರಬೇಕು.

ಖಚಿತ ಘಟನೆ (Sure event)

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಂಶವು ಪ್ರಯೋಗದ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಖಚಿತವಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಖಚಿತ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ರಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಖಚಿತ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ (Impossible event)

ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಭವಿಸದ ಘಟನೆಯನ್ನು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ϕ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ 7ನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯಾಗಿದೆ.

ಪರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (Favourable outcomes)

ಅಪೇಕ್ಷಣೀಯ ಘಟನೆಗೆ ಪೂರಕವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಘಟನೆಯ ಪರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ E ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯಾದರೆ, 1, 3, 5 ಫಲಿತಾಂಶಗಳು E ಘಟನೆಗೆ ಪರವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸಬಹುದಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣಗಳು ಪರಿಮಿತವಾಗಿರುವ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾಣ್ಯಗಳು ಅಥವಾ ದಾಳಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ, ಅವು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದವು ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

12.2 ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (Classical definition of probability)

ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವು n ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ m ಫಲಿತಾಂಶಗಳು A ಘಟನೆಯ ಪರವಾಗಿದ್ದರೆ, $n(S) = n$ ಮತ್ತು $n(A) = m$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು $P(A)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು m ಮತ್ತು n ಗಳ ನಡುವಿನ ಅನುಪಾತ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $$P(A) = \frac{A \text{ ಗೆ ಪರವಾಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ}}{\text{ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ}}$$

$$\therefore \; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}.$$

ಸೂಚನೆ

(i) ಸಾಧ್ಯತೆಯ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಪರಿಮಿತವಾದಾಗ ಮತ್ತು ಸಮನಾಗಿ ಸಂಭವಿಸದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾದರೆ, ಮೇಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಅಭಿಜಾತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(ii) A ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅವೆರಡನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $0 \le P(A) \le 1$.

(iii) ಖಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $P(S) = 1$.

(iv) ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $P(\phi) = 0$.

(v) A ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

$$\text{P(A ಸಂಭವಿಸದ)} = P(\overline{A}) \text{ ಅಥವಾ } P(A') = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} \text{ ಆಗಿದೆ.}$$

$$\Longrightarrow \; P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

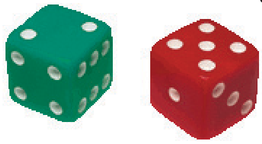
(vi) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.1

ಒಂದು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತದ ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಸಂಖ್ಯೆ 4 (ii) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ

(iii) 6 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (iv) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ


ಚಿತ್ರ 12.3

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$\therefore n(S) = 6$.

(i) ಸಂಖ್ಯೆ 4 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$A = \{4\} \; \therefore n(A) = 1$.

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.

(ii) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$B = \{2,4,6\} \quad \therefore \; n(B) = 3$.

ಇದರಿಂದ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(iii) 6 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

$C = \{2,3\} \quad \therefore\ n(C) = 2.$

ಇದರಿಂದ, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

(iv) 4 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು D ಆಗಿರಲಿ.

$D = \{5,6\} \quad n(D) = 2.$

ಇದರಿಂದ, $P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.2

ಒಂದು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಎರಡು ಶಿರಗಳು (ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರ (iii) ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪುಚ್ಛ

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

$\therefore \quad n(S) = 4.$

(i) ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $A = \{ HH \}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(A) = 1.$

$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$

(ii) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $B = \{ HH, HT, TH \}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(B) = 3.$

$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}.$

(iii) ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪುಚ್ಛವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $C = \{ HT, TH \}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(C) = 2.$

$\therefore \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.3

ಮೊದಲ ಇಪ್ಪತ್ತು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲಿ, $S = \{ 1, 2, 3, \cdots, 20 \}.$

$\therefore \quad n(S) = 20.$

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$

$n(A) = 8.$

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.4

35 ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 7 ವಸ್ತುಗಳು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ದೋಷರಹಿತವಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಒಟ್ಟು ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n(S) = 35$.

ದೋಷಯುಕ್ತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 7.

ದೋಷರಹಿತ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

ದೋಷರಹಿತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n(A) = 35 - 7 = 28$.

$\therefore$ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ವಸ್ತುವು ದೋಷರಹಿತ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}.$$

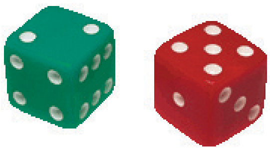
ಉದಾಹರಣೆ 12.5

ಎರಡು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಮೊತ್ತ 8 (ii) ದ್ವಿವಳಿ (iii) ಮೊತ್ತವು 8 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ

ಪರಿಹಾರ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ

$$S = \{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \}$$



ಚಿತ್ರ 12.4

$\therefore n(S) = 6 \times 6 = 36$

(i) ಮೊತ್ತ 8 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

ಆಗ, $n(A) = 5$.

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$.

(ii) ದ್ವಿವಳಿ ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

ಆಗ, $n(B) = 6$.

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(iii) ಮೊತ್ತವು 8 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $C = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(C) = 10$.

$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.6

52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳಿರುವ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಮಿಶ್ರಣ ಮಾಡಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ರಾಜ (ii) ಕಪ್ಪು ರಾಜ

(iii) ಸ್ಪೇಡ್ ಎಲೆ (iv) ಡೈಮಂಡ್ 10.

52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ಪೇಡ್ ♠	ಹಾರ್ಟ್ ♥	ಕ್ಲೇವರ್ ♣	ಡೈಮಂಡ್ ♦
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, $n(S) = 52$.

(i) ರಾಜ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore n(A) = 4.$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) ಕಪ್ಪು ರಾಜ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(B) = 2$.

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

(iii) ಸ್ಪೇಡ್ ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(C) = 13$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

(iv) ಡೈಮಂಡ್ 10 ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು D ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(D) = 1$.

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{52}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.7

35 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 20 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 15 ಹುಡುಗಿಯರಿದ್ದಾರೆ. ಇವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು (i) ಹುಡುಗ (ii) ಹುಡುಗಿ, ಆಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವು S ಆಗಿರಲಿ.

ಹುಡುಗ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಘಟನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ B ಮತ್ತು G ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore n(S) = 35, \; n(B) = 20 \text{ ಮತ್ತು } n(G) = 15.$$

(i) ಹುಡುಗನೊಬ್ಬನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{35}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{7}.$$

(ii) ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{15}{35}$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{3}{7}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.8

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಳೆ ಬೀಳುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.76 ಆದರೆ, ಆ ದಿನದಲ್ಲಿ ಮಳೆ ಬೀಳದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

ಪರಿಹಾರ ಮಳೆ ಬೀಳುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಮಳೆ ಬೀಳದಿರುವ ಘಟನೆಯು $\overline{A}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$P(A) = 0.76$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(\overline{A}) = 1 - 0.76 \quad \because P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$= 0.24.$

$\therefore$ ಮಳೆ ಬೀಳದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.24 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12.9

ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 5 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು ಕೆಲವು ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿರುವ ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು x ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ಒಟ್ಟು ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, $n(S) = 5 + x$.

ನೀಲಿ ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯುವ ಘಟನೆಯು R ಆಗಿರಲಿ.

$P(B) = 3P(R)$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 15$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನೀಲಿ ಚೆಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 15$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.10

ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕ ವರ್ಷವು 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು;

(ii) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕ ವರ್ಷವು 52 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವುದು;

(iii) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ವರ್ಷವು 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು;

ಪರಿಹಾರ (i) ಒಂದು ಅಧಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 366. ಅಂದರೆ, 52 ವಾರಗಳು ಮತ್ತು 2 ದಿನಗಳು.

ಈಗ, 52 ವಾರಗಳು 52 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ದಿನಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಏಳು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ಭಾನು, ಸೋಮ), (ಸೋಮ, ಮಂಗಳ), (ಮಂಗಳ, ಬುಧ), (ಬುಧ, ಗುರು), (ಗುರು, ಶುಕ್ರ), (ಶುಕ್ರ, ಶನಿ) ಮತ್ತು (ಶನಿ, ಭಾನು).

ಅಧಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಮೇಲಿನ ಏಳು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, S = {(ಭಾನು, ಸೋಮ), (ಸೋಮ, ಮಂಗಳ), (ಮಂಗಳ, ಬುಧ), (ಬುಧ, ಗುರು), (ಗುರು, ಶುಕ್ರ), (ಶುಕ್ರ, ಶನಿ), (ಶನಿ, ಭಾನು)}. ಆಗ, $n(S) = 7$.

ಉಳಿದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶುಕ್ರವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

A ={ (ಗುರು, ಶುಕ್ರ), (ಶುಕ್ರ, ಶನಿ)}. ಆಗ, $n(A) = 2$.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}.$$

(ii) ಒಂದು ಅಧಿಕ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 52 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಡೆಯಲು, ಉಳಿದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವು ಇರಬಾರದು.

ಉಳಿದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವು ಇರದ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

B ={(ಭಾನು, ಸೋಮ),(ಸೋಮ, ಮಂಗಳ),(ಮಂಗಳ, ಬುಧ), (ಬುಧ, ಗುರು), (ಶನಿ, ಭಾನು)}.

$n(B) = 5$.

ಈಗ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}$.

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪೂರಕ ಘಟನೆಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

(iii) ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಇರುವ ದಿನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 365. ಅಂದರೆ, 52 ವಾರಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನ.

ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ಏಳು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶುಕ್ರವಾರವು ಇರಲೇಬೇಕು. ಭಾನು, ಸೋಮ, ಮಂಗಳ, ಬುಧ, ಗುರು, ಶುಕ್ರ ಮತ್ತು ಶನಿ.

ಇಲ್ಲಿ, S = {ಭಾನು, ಸೋಮ, ಮಂಗಳ, ಬುಧ, ಗುರು, ಶುಕ್ರ, ಶನಿ}.

$\therefore \quad n(S) = 7$.

ಉಳಿದ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಶುಕ್ರವಾರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು C ಆಗಿರಲಿ.

C = {ಶುಕ್ರ} $\Longrightarrow n(C) = 1$.

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.11

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ ಆಗುವಂತೆ A ಯು ಒಂದು ಘಟನೆಯಾದರೆ, $P(A)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$P(A) = 7k$ ಮತ್ತು $P(\overline{A}) = 12k$, $k > 0$ ಆಗಿರಲಿ.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆಗ,

$7k + 12k = 1 \Longrightarrow 19k = 1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $k = \frac{1}{19}$

$\therefore \quad P(A) = 7k = \frac{7}{19}$.

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{7}{12}$$

$$12P(A) = 7 \times P(\overline{A})$$

$$= 7\,[1 - P(A)]$$

$$19P(A) = 7$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A) = \frac{7}{19}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12. 1

1. ಒಂದರಿಂದ ನೂರರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರುವ 100 ಚೀಟಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ ಒಂದು ಚೀಟಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು 10 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚೀಟಿಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೊತ್ತ 9 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಾದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 12 ಉತ್ತಮ ಮೊಟ್ಟೆಗಳೊಂದಿಗೆ 3 ಕೊಳೆತ ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಮೊಟ್ಟೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಕೊಳೆತ ಮೊಟ್ಟೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?
5. ಎರಡು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, ಗರಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?
6. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲಸಿದ 52 ಇಸ್ಪೀಟ್ ಎಲೆಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಅದು
   (i) ಡೈಮಂಡ್ (ii) ಡೈಮಂಡ್ ಅಲ್ಲದ (iii) ಏಸ್ ಅಲ್ಲದ ಎಲೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, (i) ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರ (ii) ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಪುಚ್ಛ (iii) ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಶಿರ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. 1 ರಿಂದ 6 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುವ 6 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತ 7 ರಿಂದ 10 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುವ 4 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದು
   (i) ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚೆಂಡು (ii) ಬಿಳಿ ಚೆಂಡು ಆಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. 1 ರಿಂದ 100 ರವರೆಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಅದು (i) ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗುವ (ii) ಪೂರ್ಣ ಘನವಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಒಬ್ಬ ಪ್ರವಾಸಿಗನು ದೃಶ್ಯಾವಳಿಯನ್ನು ನೋಡಲು ಪ್ರವಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಅರ್ಜೆಂಟೀನ, ಬಾಂಗ್ಲಾದೇಶ, ಚೀನ, ಅಂಗೋಲಾ, ರಷ್ಯಾ ಮತ್ತು ಅಲ್ಜೀರಿಯಾ ದೇಶಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ದೇಶವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡನು. ಆಯ್ಕೆಯಾದ ದೇಶವು 'ಅ' ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?
11. 4 ಹಸಿರು, 5 ನೀಲಿ ಮತ್ತು 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು (i) ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ (ii) ಹಸಿರು ಬಣ್ಣವಲ್ಲದ, ಚೆಂಡಾಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 1 ರಿಂದ 20 ರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರುವ 20 ಕಾರ್ಡುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು,
    (i) 4 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ (ii) 6 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. 3, 5 ಮತ್ತು 7 ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 57 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಅಂಕಿಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗಲು ಅವಕಾಶವಿರುವುದಿಲ್ಲ).
14. ಮೂರು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೂರು ದಾಳಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಫಲಿತಾಂಶಗಳ (ಸಂಖ್ಯೆಗಳ) ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಪಡೆಯುವ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

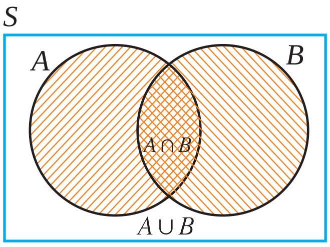
16. ಒಂದು ಜಾಡಿಯು ನೀಲಿ, ಹಸಿರು ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ 54 ಗೋಲಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ನೀಲಿ ಗೋಲಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಗೋಲಿಯನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{4}{9}$ ಆದರೆ, ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಳಿ ಗೋಲಿಗಳೆಷ್ಟು?

17. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 100 ಅಂಗಿಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 88 ಅಂಗಿಗಳು ಉತ್ತಮ, 8 ಅಂಗಿಗಳು ಕಡಿಮೆ ದೋಷಯುಕ್ತ ಮತ್ತು 4 ಅಂಗಿಗಳು ಅಧಿಕ ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. A ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಉತ್ತಮ ಅಂಗಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ವೀಕರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ B ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಅಧಿಕ ದೋಷಯುಕ್ತ ಅಂಗಿಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಅಂಗಿಯನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದನ್ನು (i) A (ii) B ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು?

18. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗಿನಲ್ಲಿ 12 ಚೆಂಡುಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ x ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. (i) ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಅದು ಬಿಳಿ ಚೆಂಡಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಏನು? (ii) ಬ್ಯಾಗಿನೊಳಗೆ ಪುನಃ 6 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು (i) ರಲ್ಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ, x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. ಪಿಗ್ಗಿ ಬ್ಯಾಂಕು 100 ಐವತ್ತು–ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, 50 ಒಂದು–ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು, 20 ಎರಡು –ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 10 ಐದು–ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದು (i) ಐವತ್ತು–ಪೈಸೆಯ ನಾಣ್ಯವಾಗಿರುವ (ii) ಐದು–ರೂಪಾಯಿಯ ನಾಣ್ಯವಾಗದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12.3 ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ (Addition theorem on probability)



ಚಿತ್ರ 12.5

A ಮತ್ತು B ಗಳು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಪರಿಮಿತ ಗಣ S ನ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

ಎರಡೂ ಕಡೆ $n(S)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \qquad (1)$$

ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಿಗೆ A ಮತ್ತು B ಉಪಗಣಗಳು ಅನುಗುಣವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ಗೆ S ಗಣವು ಅನುಗುಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (1)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ

(i) A ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ B ಘಟನೆಯು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, $A \cup B$ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿತು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಘಟನೆಗಳೂ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, $A \cap B$ ಘಟನೆ ಸಂಭವಿಸಿತು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

(ii) A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $A \cap B = \emptyset$ ಆಗುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \because P(A \cap B) = 0$.

(iii) ಗಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ, $A \cap \overline{B}$ ಎಂಬುದು $A \setminus B$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ.

ಫಲಿತಾಂಶಗಳು (ಸಾಧನೆ ರಹಿತವಾಗಿ)

(i) A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಒಂದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ S ನೊಂದಿಗೆ ಸಹವರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಯಾವುದೇ 3 ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

(ii) A_1, A_2 ಮತ್ತು A_3 ಗಳು ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

(iii) $A_1, A_2, A_3,\cdots, A_n$ ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ,

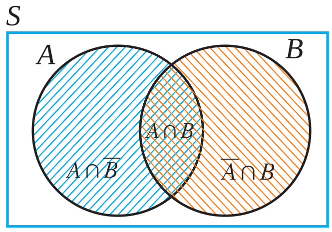
$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_n).$$

(iv) $P(A\cap\overline{B}) = P(A)-P(A\cap B)$,

$P(\overline{A}\cap B) = P(B)-P(A\cap B)$

ಇಲ್ಲಿ, $A\cap\overline{B}$ ಎಂದರೆ A ಮಾತ್ರ B ಅಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ;

ಇದೇ ರೀತಿ, $\overline{A}\cap B$ ಎಂದರೆ B ಮಾತ್ರ A ಅಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ;



ಚಿತ್ರ 12.6

ಉದಾಹರಣೆ 12.12

ಮೂರು ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲಿನ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳು ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ಈಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ, $S=\{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$.

ಇದರಿಂದ, $n(S)=8$.

ನಿಖರವಾಗಿ ಎರಡು ಪುಚ್ಛಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A=\{HTT, TTH, THT\}$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $n(A)=3$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}.$$

ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಶಿರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $B=\{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ, $n(B)=7$.

$$\therefore\quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{7}{8}.$$

ಈಗ, A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಲ್ಲ.

$A\cap B=A$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $P(A\cap B)=P(A)=\frac{3}{8}$.

$\therefore\ P(A$ ಅಥವಾ $B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A\cup B) = \frac{3}{8}+\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$.

ಸೂಚನೆ

ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ನಾವು ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, $A\cup B=B$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $P(A\cup B)=P(B)=\frac{7}{8}$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.13

ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿರಿ).

ಪರಿಹಾರ ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣದ ಗಾತ್ರ, $n(S) = 36$.

ಮೊದಲ ಎಸೆತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(A) = 6$ ಮತ್ತು $P(A) = \dfrac{6}{36}$.

ಎರಡನೇ ಎಸೆತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $n(B) = 6$ ಮತ್ತು $P(B) = \dfrac{6}{36}$.

A ಮತ್ತು B ಘಟನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $A \cap B = \{(5,5)\}$.

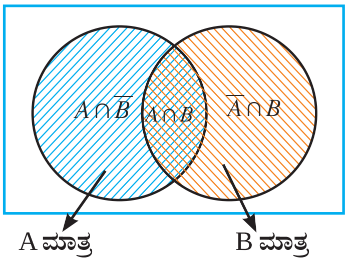
$\therefore \quad n(A \cap B) = 1$ ಮತ್ತು $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$.

$\therefore$ ಸಂಕಲನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.14



ಚಿತ್ರ 12.7

ಒಂದು ವೈದ್ಯಕೀಯ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು ದಾಖಲಾತಿಗೆ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.16, ಅವಳು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.24 ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.11 ಆದರೆ, ಅವಳು

(i) ಎರಡು ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ವೈದ್ಯಕೀಯ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅಥವಾ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ ವೈದ್ಯಕೀಯ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

(i) $P(A) = 0.16$, $P(B) = 0.24$ ಮತ್ತು $P(A \cap B) = 0.11$

ಎರಡು ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದರಲ್ಲಿ ಅವಳು ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29.$$

(ii) ಎರಡು ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಆಯ್ಕೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$= P$ (A ಮಾತ್ರ ಅಥವಾ B ಮಾತ್ರ)

$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$

$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.15

"ENTERTAINMENT" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಆರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದು ಸ್ವರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ ಅಥವಾ T ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಅಕ್ಷರಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಅವಕಾಶವಿರುತ್ತದೆ)

ಪರಿಹಾರ "ENTERTAINMENT" ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿ 13 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ.

$\therefore \quad n(S) = 13.$

ಸ್ವರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು A ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad n(A) = 5.$

ಇದರಿಂದ, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{13}.$

T ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಯು B ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad n(B) = 3$

ಇದರಿಂದ, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{13}.$

ಆಗ, $P(A$ ಅಥವಾ $B) = P(A) + P(B)$ $\quad \because A$ ಮತ್ತು B ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿವೆ.

$= \frac{5}{13} + \frac{3}{13} = \frac{8}{13}.$

ಉದಾಹರಣೆ 12.16

A, B ಮತ್ತು C ಗಳು $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$ ಮತ್ತು $P(C) = \frac{1}{2}P(B)$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮತ್ತು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ. $P(A)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ $P(A) = p$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $P(B) = \frac{3}{2}P(A) = \frac{3}{2}p.$

ಹಾಗೂ, $P(C) = \frac{1}{2}P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}p\right) = \frac{3}{4}p.$

A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮತ್ತು ಸರ್ವವ್ಯಾಪಕ ಘಟನೆಗಳು ಎಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ ಮತ್ತು $S = A \cup B \cup C$.

ಈಗ, $P(S) = 1.$

ಅಂದರೆ, $P(A)+P(B)+P(C)=1$

$\Longrightarrow \quad p+\frac{3}{2}p+\frac{3}{4}p=1$

$\Longrightarrow \quad 4p+6p+3p=4$

ಆದ್ದರಿಂದ, $p=\frac{4}{13}$.

ಇದರಿಂದ, $P(A)=\frac{4}{13}$.

ಉದಾಹರಣೆ 12.17

52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ರಾಜ ಅಥವಾ ಹಾರ್ಟ್ ಅಥವಾ ಕೆಂಪು ಎಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ರಾಜ ಎಲೆ, ಹಾರ್ಟ್ ಎಲೆ, ಕೆಂಪು ಎಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $n(S)=52,\ n(A)=4,\ n(B)=13,\ n(C)=26.$ ಹಾಗೂ,

$n(A\cap B)=1,\ n(B\cap C)=13,\ n(C\cap A)=2$ ಮತ್ತು $n(A\cap B\cap C)=1.$

$\therefore\ P(A)=\frac{4}{52},\ P(B)=\frac{13}{52},\ P(C)=\frac{26}{52}.$

$P(A\cap B)=\frac{1}{52},\ P(B\cap C)=\frac{13}{52},\ P(C\cap A)=\frac{2}{52}$ ಮತ್ತು $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{52}.$

ಈಗ, $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$$=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}+\frac{26}{52}-\frac{1}{52}-\frac{13}{52}-\frac{2}{52}+\frac{1}{52}=\frac{44-16}{52}$$

$$=\frac{7}{13}.$$

ಉದಾಹರಣೆ 12.18

ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 10 ಬಿಳಿ, 5 ಕಪ್ಪು, 3 ಹಸಿರು ಮತ್ತು 2 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ, ಅದು ಬಿಳಿ ಅಥವಾ ಕಪ್ಪು ಅಥವಾ ಹಸಿರು ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ S ಎಂಬುದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವಾಗಿರಲಿ.

$\therefore\ n(S)=20.$

W, B ಮತ್ತು G ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬಿಳಿ, ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಘಟನೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಬಿಳಿ ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(W)=\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{10}{20}.$

ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5}{20}.$

ಹಸಿರು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ, $P(G)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{3}{20}.$

$\therefore$ ಬಿಳಿ ಅಥವಾ ಕಪ್ಪು ಅಥವಾ ಹಸಿರು ಚೆಂಡನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆ,

$P(W\cup B\cup G)=P(W)+P(B)+P(G)$ $\quad\because W, B$ ಮತ್ತು G ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು.

$$=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{10}.$$

(**ಸೂಚನೆ :** $P(W\cup B\cup G)=P(R')=1-P(R)=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}$ ಎಂದು ಕೂಡ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು)

ಅಭ್ಯಾಸ 12.2

1. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A)=\frac{3}{5}$ ಮತ್ತು $P(B)=\frac{1}{5}$ ಆಗುವಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $P(A\cup B)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{2}{5}$ ಮತ್ತು $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, $P(A\cap B)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{7}{10}, P(A\cup B)=1$. ಆದರೆ, (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A'\cup B')$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ದಾಳವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ, ಮೊದಲ ಬಾರಿ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಅಥವಾ ಮೊತ್ತವು 8 ಆಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. 1 ರಿಂದ 50 ರವರೆಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಅದು 4 ಅಥವಾ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಒಂದು ಬ್ಯಾಗು 50 ಬೋಲ್ಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 150 ನಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಬೋಲ್ಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಅರ್ಧದಷ್ಟು ನಟ್ಟುಗಳು ತುಕ್ಕು ಹಿಡಿದಿವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ಅದು ತುಕ್ಕು ಹಿಡಿದಿರುವ ಅಥವಾ ಬೋಲ್ಟ್ ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ದಾಳಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 3 ಮತ್ತು 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
8. ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯು 20 ಸೇಬುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 10 ಕಿತ್ತಳೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 5 ಸೇಬುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕಿತ್ತಳೆಗಳು ಕೊಳೆತಿವೆ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಹಣ್ಣನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಸೇಬು ಆಗಿರುವ ಅಥವಾ ಒಳ್ಳೆಯ ಹಣ್ಣು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
9. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 40% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, 30% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿಜ್ಞಾನ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, 10% ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಎರಡೂ ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ್ದಾರೆ. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಣಿತ ಅಥವಾ ವಿಜ್ಞಾನ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
10. ಚೆನ್ನಾಗಿ ಕಲಸಿದ 52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ಸ್ಪೇಡ್ ಅಥವಾ ರಾಜ ಎಲೆ ಆಗಿರಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
11. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯು 10 ಬಿಳಿ, 6 ಕೆಂಪು ಮತ್ತು 10 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಬಿಳಿ ಅಥವಾ ಕೆಂಪು ಚೆಂಡು ಆಗಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
12. 2, 5, 9 ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ (ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೆ ಅವಕಾಶವಿರುತ್ತದೆ). ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
13. "ACCOMMODATION" ಎಂಬ ಪದದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ 13 ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಜಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಜಾಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    (i) 'A' ಅಥವಾ 'O' ಅಕ್ಷರದ ಆಯ್ಕೆ (ii) 'M' ಅಥವಾ 'C' ಅಕ್ಷರದ ಆಯ್ಕೆ.

14. ಒಂದು ಹೊಸ ಕಾರು ತನ್ನ ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.25, ಇದು ಇಂಧನವನ್ನು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.35 ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಪ್ರಶಸ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು 0.15 ಆಗಿದೆ. ಇದು

(i) ಎರಡರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನಾದರೂ ಪಡೆಯುವ;

(ii) ಒಂದು ಪ್ರಶಸ್ತಿಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಡೆಯುವ, ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು *A, B* ಮತ್ತು *C* ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{7}$ ಆಗಿವೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು *A* ಮತ್ತು *B* ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{8}{15}$, *B* ಮತ್ತು *C* ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{2}{7}$ ಹಾಗೂ *A* ಮತ್ತು *C* ಗಳು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{12}{35}$ ಆಗಿದೆ. ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮೂವರು ಸೇರಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{8}{35}$ ಆಗಿದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯು ಅವರಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಒಬ್ಬರಿಂದ ಪರಿಹಾರವಾಗಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12.3

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1. ϕ ಎಂಬುದು ಅಸಂಭವ ಘಟನೆಯಾದರೆ, $P(\phi) =$

(A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

2. *S* ಎಂಬುದು ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವಾದರೆ, $P(S) =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. *p* ಎಂಬುದು *A* ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯಾದರೆ, ಆಗ *p* ಯು

(A) $0 < p < 1$ (B) $0 \le p \le 1$ (C) $0 \le p < 1$ (D) $0 < p \le 1$

4. *A* ಮತ್ತು *B* ಗಳು ಎರಡು ಘಟನೆಗಳು ಹಾಗೂ *S* ಎಂಬುದು ಅನುಗುಣವಾದ ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $P(\overline{A} \cap B) =$

(A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$

(C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

5. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಶೇಕಡ 100 ರಷ್ಟು ಅಂಕವನ್ನು ಗಳಿಸುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು $\frac{4}{5}$ ಆಗಿದೆ. ಅವನು ಶೇಕಡ 100 ರಷ್ಟು ಅಂಕವನ್ನು ಗಳಿಸದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

6. *A* ಮತ್ತು *B* ಗಳು $P(A) = 0.25, P(B) = 0.05$ ಮತ್ತು $P(A \cap B) = 0.14$ ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಘಟನೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ $P(A \cup B) =$

(A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

7. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ 20 ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ 6 ವಸ್ತುಗಳು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿರದ (ದೋಷರಹಿತವಾಗಿರುವ) ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. A ಮತ್ತು B ಗಳು $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ ಮತ್ತು $S = A \cup B$ ಆಗುವಂತೆ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳು ಹಾಗೂ S ಎಂಬುದು ಫಲಿತಾಂಶ ಗಣವಾದರೆ, ಆಗ $P(A) =$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

9. A, B ಮತ್ತು C ಮೂರು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಘಟನೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳು $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ಮತ್ತು $\frac{5}{12}$ ಆಗಿವೆ. ಆಗ $P(A \cup B \cup C)$ ಯು

(A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

10. $P(A) = 0.25, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.14$ ಆದರೆ, $P(A$ ಮತ್ತು B ಎರಡೂ ಆಗಿರದ$) =$

(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

11. ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 5 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳು, 4 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಕೆಂಪು ಚೆಂಡಾಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಸೆದಾಗ, ದ್ವಿವಳಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

13. ಒಂದು ನಿಷ್ಪಕ್ಷಪಾತವಾದ ದಾಳವನ್ನು ಒಂದು ಬಾರಿ ಉರುಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

14. ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ, 3 ಶಿರ ಅಥವಾ 3 ಪುಚ್ಛಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

15. 52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ತೆಗೆದಾಗ, ಅದು ಏಸ್ ಎಲೆ ಮತ್ತು ರಾಜ ಎಲೆ ಆಗಿರದ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

16. ಒಂದು ಅಧಿಕ ವರ್ಷವು 53 ಶುಕ್ರವಾರಗಳನ್ನು ಅಥವಾ 53 ಶನಿವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

17. ಅಧಿಕ ವರ್ಷವಲ್ಲದ ಒಂದು ವರ್ಷವು 53 ಭಾನುವಾರಗಳನ್ನು ಅಥವಾ 53 ಸೋಮವಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

18. 52 ಎಲೆಗಳಿರುವ ಇಸ್ಪೀಟ್ ಪ್ಯಾಕಿನಿಂದ ಒಂದು ಎಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಅದು ಹಾರ್ಟ್‌ಗಳ ಒಂದು ರಾಣಿ ಎಲೆಯಾಗುವ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

19. ಖಚಿತ ಘಟನೆಯ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

20. ಒಂದು ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪ್ರಯೋಗದ ಪಲಿತಾಂಶವು ಗೆಲುವು ಅಥವಾ ಸೋಲು ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಗೆಲುವಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು ಸೋಲಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಗೆಲುವಿನ ಸಂಭವನೀಯತೆಯು

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

ಉತ್ತರಗಳು

1. ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

2. (i) A (ii) ϕ **3.** (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, ಸಹವರ್ತನೀಯವಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

2. (i) ರಿಂದ (iv) ಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ಉತ್ತರಗಳು ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ. ಅಂತಹವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉತ್ತರವು (i) $A' \cup (A \cap B)$ ಅಥವಾ $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. 300 **2.** 430 **3.** 35 **5.** 100 **6.** 10% **7.** (i) 10 (ii) 25 (iii) 15

8. (i) 450 (ii) 3550 (iii) 1850 **9.** 15

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4

1. (i) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (ii) ಉತ್ಪನ್ನ **2.** ಕ್ಷೇತ್ರ ={1, 2, 3, 4, 5}; ವ್ಯಾಪ್ತಿ ={1, 3, 5, 7, 9} **3.** (i) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಅಲ್ಲ, ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಅಲ್ಲ. (ii) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ

4. (i) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (ii) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (iv) ಉಭಯಕ್ಷೇಪ

5. $a = -2,\ b = -5,\ c = 8,\ d = -1$ **6.** ವ್ಯಾಪ್ತಿಯು $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$; f ಎಂಬುದು A ನಿಂದ A ಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

7. ಒಂದು–ಒಂದು ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ **8.** (i) 12 ಮತ್ತು 4 (ii) 13 ಮತ್ತು 15 **9.** $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5, -7), (6, -9), (7, -11), (8, -13)\}$

(ii) ಸಹ–ಕ್ಷೇತ್ರ $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$

(iii) ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) ಒಂದು–ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ

11. (i) ಉತ್ಪನ್ನ (ii) ಉತ್ಪನ್ನ (iii) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (iv) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (v) ಉತ್ಪನ್ನ

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6,1), (9,2), (15,4), (18,5), (21,6)\}$

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3),(6,4),(8,5),(10,6)\}$

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 16 (ii) –32 (iii) 5 (iv) $\frac{2}{3}$ **16.** (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

ಅಭ್ಯಾಸ 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	A	A	B	A	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	D	A	D	D	B	A	C

2. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27,\ 81,\ -243$ (iii) $-\frac{3}{4},\ 2,\ -\frac{15}{4}$

2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) –1536, 18432 (iii) 36, 78 (iv) –21,57

3. 378, $\frac{25}{313}$ **4.** 195, 256 **5.** 2, 5, 15, 35, 75 **6.** 1, 1, 1, 2, 3, 5

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. A.P : 6, 11, 16, $\cdots$; ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವು $5n+1$ ಆಗಿದೆ. **2.** ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ –5, $t_{15} = 55$

3. $t_{29} = 3$ **4.** $t_{12} = 23\sqrt{2}$ **5.** $t_{17} = 84$ **6.** (i) 27 ಪದಗಳು (ii) 34 ಪದಗಳು

8. $t_{27} = 109$ **9.** $n = 10$ **10.** 7 **11.** ಮೊದಲ ವರ್ಷ : 100, $t_{15} = 2200$

12. 2560 **13.** 10, 2, –6 ಅಥವಾ –6, 2, 10 **14.** 2, 6, 10 ಅಥವಾ 10, 6, 2 **16.** ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ, ₹95,000

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. (i) $r = 2$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (ii) $r = 5$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ

(iii) $r = \frac{2}{3}$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (iv) $r = \frac{1}{12}$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ

(v) $r = \frac{1}{2}$ ರೊಂದಿಗೆ ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ (vi) ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲ.

2. -2^7 **3.** 2, 6, 18 , $\cdots$ **4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ **5.** (i) $n = 8$ (ii) $n = 11$ **6.** $n = 5$ **7.** $r = 5$

8. $r = \frac{5}{2}$ (ಅಥವಾ) $\frac{2}{5}$; ಪದಗಳು : $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$. (ಅಥವಾ) $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. **9.** 18, 6, 2 (ಅಥವಾ) 2, 6, 18

10. 4,2,1(ಅಥವಾ)1,2,4 **11.** 1, 3, 9, $\cdots$ (ಅಥವಾ) 9, 3, 1, $\cdots$ **12.** ₹$1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ **13.** ₹$50,000 \times \left(\frac{55}{100}\right)^{15}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 **2.** 1020 **3.** (i) 260 (ii) –75 **4.** (i) 1890 (ii) 50 **5.** –820

6. $\frac{39}{11} + \frac{40}{11} + \frac{41}{11} + \cdots$ **7.** 8 ಅಥವಾ 23 ಪದಗಳು **8.** 55350 **9.** 740 **10.** 7227 **11.** 36

12. 12000 **13.** 15 ದಿನಗಳು **14.** ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ, ₹37,200 **16.** 156 ಬಾರಿ

20. 1225 ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. $s_{20} = \frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ **2.** $s_{27} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ **3.** (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12}-1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1)^{10}}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20}-1)-\frac{20}{9}$ **5.** (i) $n = 6$ (ii) $n = 6$ **6.** $\frac{75}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3+6+12+\cdots$ **8.** (i) $\frac{70}{81}[10^n-1]-\frac{7n}{9}$ (ii) $n-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15} = \frac{5(4^{15}-1)}{3}$ **10.** 2 ನೆಯ ಆಯ್ಕೆ ; ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1023. **11.** $r = 2$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10650 (vi) 382500

2. (i) $k = 12$ (ii) $k = 9$ **3.** 29241 **4.** 91 **5.** 3818 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** 201825 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	C	D	D	A	B	B	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	B	D	A	B	B	A	C	A

3. ಬೀಜಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. $4, \frac{3}{2}$ **2.** 1 , 5 **3.** 3 , 2 **4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ **5.** 1 , 5 **6.** $\frac{11}{23}, \frac{22}{31}$

7. 2 , 4 **8.** 2 , 1 **9.** $5, \frac{1}{7}$ **10.** 6 , – 4

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. (i) 4 , 3 (ii) 0.4, 0.3 (iii) 2 , 3 (iv) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. (vi) 720 ಕಿ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. (i) 4, – 2 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ (iv) 0, – 2 (v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3}, 1$

(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) – 13, 11

2. (i) x^2-3x+1 (ii) x^2-2x+4 (iii) x^2+4 (iv) $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{5}$

(v) $x^2-\frac{x}{3}+1$ (vi) $x^2-\frac{x}{2}-4$ (vii) $x^2-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$ (viii) $x^2-\sqrt{3}x+2$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. (i) $x^2+2x-1,\ 4$ (ii) $3x^2-11x+40,\ -125$ (iii) $x^2+2x-2,\ 2$

(iv) $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9},\ -\frac{50}{9}$ (v) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x+\frac{51}{32},\ -\frac{211}{32}$

(vi) $x^3-3x^2-8x+\frac{55}{2},\ -\frac{41}{2}$

2. $a = -6,\ b = 11,$ ಶೇಷವು 5. **3.** $p = -2,\ q = 0,$ ಶೇಷವು –10.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$
(iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$
(vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$
(x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$
2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$
(vi) $2x+1$ (vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$
3. (i) x^2-4x+3 (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

ಅಭ್ಯಾಸ 3.7

1. x^3y^2z 2. $12x^3y^3z$ 3. $a^2b^2c^2$ 4. $264a^4b^4c^4$ 5. a^{m+3}
6. $xy(x+y)$ 7. $6(a-1)^2(a+1)$ 8. $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$
9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ 10. $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$
(iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$
2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
(iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.9

1. (i) $\frac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$
(v) x^2-x+1 (vi) $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$
(ix) $\frac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\frac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\frac{x+9}{x-2}$ (iii) $\frac{1}{x+4}$ (iv) $\frac{1}{x-1}$ (v) $\frac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1
2. (i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-6}{x-7}$ (iii) $\frac{x+1}{x-5}$ (iv) $\frac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\frac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.11

1. (i) $x^2 + 2x + 4$ (ii) $\frac{2}{x+1}$ (iii) $\frac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\frac{2}{x-5}$

(v) $\frac{x+1}{x-2}$ (vi) $\frac{4}{x+4}$ (vii) $\frac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\frac{2x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 2}$ **3.** $\frac{5x^2 - 7x + 6}{2x - 1}$ **4.** 1

ಅಭ್ಯಾಸ 3.12

1. (i) $14|a^3 b^4 c^5|$ (ii) $17|(a-b)^2 (b-c)^3|$ (iii) $|x - 11|$

(iv) $|x + y|$ (v) $\frac{11}{9}\left|\frac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\frac{8}{5}\left|\frac{(a+b)^2 (x-y)^4 (b-c)^3}{(x+y)^2 (a-b)^3 (b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x - 3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x - 3y - 5z|$

(iv) $\left|x^2 + \frac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.13

1. (i) $|x^2 - 2x + 3|$ (ii) $|2x^2 + 2x + 1|$ (iii) $|3x^2 - x + 1|$ (iv) $|4x^2 - 3x + 2|$

2. (i) $a = -42, b = 49$ (ii) $a = 12, b = 9$ (iii) $a = 49, b = -70$ (iv) $a = 9,\ b = -12$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.14

1. $\{-6, 3\}$ **2.** $\left\{-\frac{4}{3}, 3\right\}$ **3.** $\left\{-\sqrt{5}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ **4.** $\left\{-\frac{3}{2}, 5\right\}$ 5. $\left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$

6. $\left\{5, \frac{1}{5}\right\}$ **7.** $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{5}{2}, 3\right\}$ 10. $\left\{7, \frac{8}{3}\right\}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.15

1. (i) $\{-7, 1\}$ (ii) $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\frac{a-b}{2}, -\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3}, 1\}$ (vi) $\{-1, 3\}$

2. (i) $\{4, 3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{2b}{3a}, \frac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\frac{1}{a}, a\right\}$ (vi) $\left\{\frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\left\{\frac{(9+\sqrt{769})}{8}, \frac{(9-\sqrt{769})}{8}\right\}$ (viii) $\left\{-1, \frac{b^2}{a^2}\right\}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.16

1. 8 ಅಥವಾ $\frac{1}{8}$ **2.** 9 ಮತ್ತು 6 **3.** 20 ಮೀ., 5 ಮೀ. ಅಥವಾ 10 ಮೀ., 10 ಮೀ. **4.** $\frac{3}{2}$ ಮೀ.

5. 45 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. **6.** 5 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. **7.** 49 ವರ್ಷಗಳು, 7 ವರ್ಷಗಳು **8.** 24 ಸೆಂ.ಮೀ. **9.** 12 ದಿನಗಳು

10. ಮೊದಲನೆಯ ರೈಲಿನ ವೇಗ = 20 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ರೈಲಿನ ವೇಗ = 15 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.17

1. (i) ವಾಸ್ತವ (ii) ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ (iii) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ (iv) ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ (v) ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ (vi) ವಾಸ್ತವ

2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 ಅಥವಾ 1 (iv) 0 ಅಥವಾ 3

ಅಭ್ಯಾಸ 3.18

1. (i) 6,5 (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$

2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$

3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ **4.** $\frac{4}{3}$ **5.** $4x^2 - 29x + 25 = 0$

6. $x^2 + 3x + 2 = 0$ **7.** $x^2 - 11x + 1 = 0$ **8.** (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$

(ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$ **9.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

10. $k = -18$ **11.** $a = \pm 24$ **12.** $p = \pm 3\sqrt{5}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4. ಮಾತ್ರಿಕೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}$, 3×2, 2×3 **2.** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2

4. 1×8, 8×1, 2×4, 4×2

5. $1\times 30, 30\times 1, 2\times 15, 15\times 2, 3\times 10, 10\times 3, 5\times 6, 6\times 5$.

6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **7.** (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

8. (i) 3×4 (ii) 4, 0 (iii) 2 ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು 3 ನೇ ಕಂಬಸಾಲು **9.** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. $x = 2, \ y = -4, \ z = -1$ **2.** $x = 4, \ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ **6.** $a = 3, \ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $x = -3, -3, \ y = -1, 4$

11.

	ಟಿವಿ	ಡಿವಿಡಿ	ವೀಡಿಯೋ	ಸೀಡಿ
ಮಳಿಗೆ I	55	27	20	16
ಮಳಿಗೆ II	72	30	25	27
ಮಳಿಗೆ III	47	33	18	22

12.

	ಮಕ್ಕಳು	ವಯಸ್ಕರು
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರೊಳಗೆ	5	5
ಅಪರಾಹ್ನ 2.00 ರ ನಂತರ	10	10

ಅಭ್ಯಾಸ 4.3

1. (i) 4×2 (ii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಲ್ಲ (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix}$ ದಿನ I, ದಿನ II, ದಿನ III, (5000) **4.** $x = 3, \ y = 0$ **5.** $x = 2, \ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}, \ AB \neq BA$ **11.** $x = -3, 5$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	A	D	B	D	B	C	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	B	C	B	A	C	B	D

5. ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. (i) (–2, 1) (ii) (0,2) **2.** (i) (5,–2) (ii) (2, –1) **3.** (–12, 8)

4. (2, –2) **6.** (–24,–2) **7.** (–2,3) **8.** (–6,–3) **9.** (–1,0), (–4, 2)

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), \ (-2, 3), \ \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ **11.** 4 : 7 ಆಂತರಿಕವಾಗಿ

12. 5:2 ಆಂತರಿಕವಾಗಿ, $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ **13.** $\frac{\sqrt{130}}{2}, \ \sqrt{13}, \ \frac{\sqrt{130}}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. (i) 3 ಚ. ಮಾನಗಳು (ii) 32 ಚ. ಮಾನಗಳು (iii) 19 ಚ. ಮಾನಗಳು

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ (ii) ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿಲ್ಲ (iii) ಏಕರೇಖಾಗತವಾಗಿವೆ

4. (i) k = 1 (ii) k = 2 (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 ಚ. ಮಾನಗಳು (ii) 43 ಚ. ಮಾನಗಳು (iii) 60.5 ಚ. ಮಾನಗಳು **7.** 1 ಚ. ಮಾನಗಳು, 1 : 4

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° **2.** (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ

3. (i) 1 (ii) –2 (iii) 1 **4.** (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ **6.** (i) 0 (ii) ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿತವಾಗಿಲ್ಲ (iii) 1 **7.** $\sqrt{3}$, 0 **10.** $a = -1$

11. $b = 6$ **12.** $-\frac{9}{10}$ **13.** $\frac{11}{7}, -13, -\frac{1}{4}$ **14.** $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ **2.** $y = -2$, $x = -5$ **3.** (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

4. $x - 2y + 6 = 0$ **5.** (i) ಪ್ರವಣತೆ 1, y-ಛೇದಕ 1 (ii) ಪ್ರವಣತೆ $\frac{5}{3}$, y-ಛೇದಕ 0

(iii) ಪ್ರವಣತೆ 2, y-ಛೇದಕ $\frac{1}{2}$ (iv) ಪ್ರವಣತೆ $-\frac{2}{3}$, y-ಛೇದಕ $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ **7.** $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ **9.** $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3,5 (ii) –8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$, **13.** $2x + 3y - 18 = 0$

14. $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ **15.** $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ **17.** $2x + 3y - 12 = 0$ **18.** $x + 2y - 10 = 0$, $6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ **20.** $3x - 2y + 4 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ **4.** $a = 6$ **5.** $a = 5$ **6.** $p = 1,2$ **7.** $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ **9.** $2x + y = 0$ **10.** $2x + y - 5 = 0$ **11.** $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ **13.** $x + 3y - 7 = 0$ **14.** $x - 3y + 6 = 0$

15. $x - 4y + 20 = 0$ **16.** (3, 2) **17.** 5 ಮೂಲಮಾನಗಳು **18.** $x + 2y - 5 = 0$

19. $2x + 3y - 9 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	A	B	D	A	D	C	C	B
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	C	C	D	B	B	D	A	A	B	B	

6. ರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. (i) 20 ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) 6 ಸೆಂ.ಮೀ. (iii) 1 **2.** 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. **3.** (i) ಇಲ್ಲ (ii) ಹೌದು

4. 10.5 ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** 12 ಸೆಂ.ಮೀ., 10 ಸೆಂ.ಮೀ. **9.** (i) 7.5 ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) 5.8 ಸೆಂ.ಮೀ. (iii) 4 ಸೆಂ.ಮೀ.

10. (i) ಹೌದು (ii) ಇಲ್ಲ **11.** 18 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. (i) $x = 4$ ಸೆಂ.ಮೀ. $y = 9$ಸೆಂ.ಮೀ. (ii) $x = 3.6$ಸೆಂ.ಮೀ., $y = 2.4$ಸೆಂ.ಮೀ., $z = 10$ಸೆಂ.ಮೀ.

(iii) $x = 8.4$ಸೆಂ.ಮೀ., $y = 2.5$ಸೆಂ.ಮೀ. **2.** 3.6 ಮೀ. **3.** 1.2 ಮೀ. **4.** 140 ಮೀ.

6. 6ಸೆಂ.ಮೀ. **7.** 64 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **8.** 166.25 ಸೆಂ.ಮೀ. **9.** (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ **10.** 6.3 ಚ.ಕಿ.ಮೀ.

11. 72ಸೆಂ.ಮೀ. **12.** 9 ಮೀ. **13.** (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. 65° **2.** (i) 4 (ii) 12 **3.** (i) 12 (ii) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** 30 ಸೆಂ.ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

7. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. (i) ಇಲ್ಲ (ii) ಇಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. 1.8 ಮೀ. **2.** 30° **3.** ಇಲ್ಲ **4.** 174.7 ಮೀ. **5.** 40 ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** B ಕಾಗೆ

7. $5\sqrt{6}$ ಮೀ. **8.** 1912.40 ಮೀ. **9.** $30\sqrt{2}$ ಮೀ. **10.** 1.098 ಮೀ. **11.** $19\sqrt{3}$ ಮೀ.

12. ಹೌದು **13.** 87 ಮೀ. **14.** 3 ನಿಮಿಷಗಳು **15.** 3464 ಕಿ.ಮೀ. **16.** 40 ಮೀ.

17. 60 ಮೀ. ; $40\sqrt{3}$ ಮೀ. **18.** 90 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	A	B	A	A	C	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	A	D	C	C	D	B	B	D

8. ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 1936 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **2.** $h = 8$ ಸೆಂ.ಮೀ., 352 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.
3. $h = 40$ ಸೆಂ.ಮೀ., d = 35 ಸೆಂ.ಮೀ. **4.** ₹2640 **5.** $r = 3.5$ ಸೆಂ.ಮೀ., h = 7 ಸೆಂ.ಮೀ.
6. $h = 28$ ಸೆಂ.ಮೀ. **7.** $C_1 : C_2 = 5 : 2$ **8.** 612π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.
9. 3168 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **10.** 550 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 704 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ.
11. $h = 15\sqrt{3}$ ಸೆಂ.ಮೀ., $l = 30$ ಸೆಂ.ಮೀ. **12.** 1416 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **13.** 23.1 ಚ.ಮೀ.
14. 10.5 ಸೆಂ.ಮೀ. **15.** $301\frac{5}{7}$ ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **16.** 2.8 ಸೆಂ.ಮೀ.
17. 4158 ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **18.** $C_1 : C_2 = 9 : 25$, $T_1 : T_2 = 9 : 25$
19. 44.1π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ., 57.33π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **20.** ₹246.40

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. 18480 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **2.** 38.5 ಲೀಟರ್‌ಗಳು **3.** 4620 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **4.** $r = 2.1$ ಸೆಂ.ಮೀ.
5. $V_1 : V_2 = 20 : 27$ **6.** 10 ಸೆಂ.ಮೀ. **7.** 4158 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **8.** 7.04 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.
9. 8800 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **10.** 616 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **11.** 5 ಸೆಂ.ಮೀ. **12.** 1408.6 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ.
13. $314\frac{2}{7}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **14.** $2\sqrt{13}$ ಸೆಂ.ಮೀ. **15.** 8 ಸೆಂ.ಮೀ. **16.** 2.29 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.
17. $3050\frac{2}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **18.** 288π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **19.** $718\frac{2}{3}$ ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **20.** 1: 8

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. 11.88π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. **2.** 7623 ಘ.ಸೆಂ.ಮೀ. **3.** 220 ಚ.ಮಿ.ಮೀ. **4.** 1034 ಚ.ಮೀ.
5. 12 ಸೆಂ.ಮೀ. **6.** 12.8 ಕಿ.ಮೀ. **7.** 2 ಸೆಂ.ಮೀ. **8.** 1 ಸೆಂ.ಮೀ.
9. 1386 ಲೀಟರ್‌ಗಳು **10.** 3 ಗಂ. 12 ನಿ. **11.** 16 ಸೆಂ.ಮೀ. **12.** 16 ಸೆಂ.ಮೀ.
13. 750 ಸತುವಿನ ಗುಂಡುಗಳು **14.** 10 ಶಂಕುಗಳು **15.** 70 ಸೆಂ.ಮೀ.
16. $r = 36$ ಸೆಂ.ಮೀ., $l = 12\sqrt{13}$ ಸೆಂ.ಮೀ. **17.** 11 ಮೀ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	A	A	B	C	A	B	D	C	C
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	D	B	D	B	C	B	D	A	D	C

10. ನಕ್ಷೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$
3. $\{-1, 5\}$ **4.** $\{-2, 3\}$ **5.** $\{-2.5, 2\}$ **6.** $\{-3, 5\}$ **7.** ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. 120 ಕಿ.ಮೀ.ಗಳು **2.** (i) ₹105 (ii) 11 ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕಗಳು **3.** (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$
4. (i) $k = 15$ (ii) ₹ 45 **5.** $y = 4; x = 2$ **6.** 24 ದಿನಗಳು

11. ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 **2.** 71 **3.** 3.38 ಕಿ.ಗ್ರಾಂ **4.** $2\sqrt{5}$, 20 **5.** 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 **7.** 6.32 **8.** 1.107 **9.** 15.08

10. 36.76, 6.06 **11.** 416, 20. 39 **12.** 54.19 **13.** 4800, 240400 **14.** 10.2, 1.99

15. 25 **16.** 20.41 **17.** 12 **18.** 5.24 **19.** 1159, 70

20. *A* ಯು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಿರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	C	B	D	C	C	B	A	D
11	12	13	14	15					
D	B	C	D	B					

12. ಸಂಭವನೀಯತೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. $\frac{1}{10}$ **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{5}$ **5.** $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ **7.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$

8. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$ **9.** (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{1}{36}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **18.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) 3 **19.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{5}{9}$ **5.** $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ **7.** $\frac{4}{9}$ **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{3}{5}$ **10.** $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ **14.** (i) 0.45 (ii) 0.3 **15.** $\frac{101}{105}$

ಅಭ್ಯಾಸ 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	D	B	A	A	B	A	A	D	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	B	B	C	D	A	A	B

ಇನ್ನಿತರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು (ಪರೀಕ್ಷೆಗೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ)

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$,ಆದರೆ, $f(2x) = \frac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. x ನ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
   $\left(\text{ಉತ್ತರ} : x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)$
3. x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $\log_{10} 2$, $\log_{10}(2^x - 1)$ ಮತ್ತು $\log_{10}(2^x + 3)$ ಎಂಬ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ? (ಉತ್ತರ : $x = \log_5 2$)
4. ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ r ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತದೊಂದಿಗೆ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 15 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು 85 ಆಗಿದೆ. $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
5. $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}$, $n > 1$ ಆದರೆ, $\{b_n\}$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
6. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $17, 21, \cdots$ ಮತ್ತು $16, 21, \cdots$ ಎಂಬ ಎರಡೂ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಎರಡೂ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n > 1$ ಆದರೆ, $\{a_n\}$ ಶ್ರೇಢಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿ ಹಾಗೂ ಇದರ ವಿಲೋಮವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
8. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
9. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
10. ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 4ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಮತ್ತು 3 ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಆ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಅದರ ಅಂಕಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, 3 ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿ ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ : 23)
11. 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ನ್ನು ನೀಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ : 1210)
12. ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ : $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \times \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$
    (ಉತ್ತರ : $\frac{1}{2bc}$)
13. $ax^2 + bx + c = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು $a + b + c < 0$. c ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಸುಳಿವು : $f(x) = 0$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ x ಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.) (ಉತ್ತರ: $c < 0$)
14. $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$ ಆಗುವಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ x ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ:$x > 1$)
15. $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.
    (ಉತ್ತರ : $x = 15$)
16. $\frac{6x_1^2x_2 - 4x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ. ಇಲ್ಲಿ, x_1 ಮತ್ತು x_2 ಗಳು $x^2 - 5x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿವೆ. (ಉತ್ತರ : $-\frac{320}{73}$)
17. $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sec\alpha - 1}{\sin\alpha} = -1$ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

18. ಒಂಟೆಗಳ ಹಿಂಡಿನ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದರಷ್ಟು ಒಂಟೆಗಳನ್ನು ಕಾಡಿನಲ್ಲಿ ನೋಡಲಾಯಿತು. ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿರುವ ಒಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲದ ಎರಡರಷ್ಟು ಒಂಟೆಗಳು ಪರ್ವತಗಳೆಡೆಗೆ ಹೋಗಿವೆ ಮತ್ತು ಉಳಿದ 15 ಒಂಟೆಗಳು ನದಿಯ ದಡದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಒಂಟೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: ಒಂಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 36 ಆಗಿದೆ)

19. ಸ್ಥಿರ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ 30 ಕಿ.ಮೀ. ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ನಂತರ ರೈಲಿನ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ದೋಷವು ಕಾಣಿಸಿಕೊಂಡು ಅದರ ವೇಗವು ಮೂಲ ವೇಗದ $\frac{4}{5}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತು. ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ, ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಳವನ್ನು ರೈಲು 45 ನಿಮಿಷಗಳು ತಡವಾಗಿ ತಲುಪಿತು. ದೋಷವು ಇನ್ನೂ 18 ಕಿ.ಮೀ. ಕ್ರಮಿಸಿದ ನಂತರ ಕಂಡುಬಂದಿದ್ದರೆ, ರೈಲು 9 ನಿಮಿಷಗಳು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ತಲುಪುತ್ತಿತ್ತು. ರೈಲಿನ ವೇಗ ಮತ್ತು ಪ್ರಯಾಣದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ಉತ್ತರ: ರೈಲಿನ ವೇಗವು 30 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂ. ಮತ್ತು ಪ್ರಯಾಣದ ದೂರವು 120 ಕಿ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.)

20. $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$ ಆದರೆ, $\cos^6 - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$ ಮತ್ತು $\sec\theta - \cos\theta = m$ ಆದರೆ, $l^2 m^2 (l^2 + m^2 + 3) = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

22. ಒಂದು ಪರ್ವತದ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಅದರ ತುದಿಯ ಉನ್ನತಿಯು 45° ಆಗಿದೆ; 30° ಅವನತಿಯ ಪ್ರವಣತೆಯಿಂದಿರುವ ಪರ್ವತವನ್ನು 1000 ಮೀ. ಏರಿದಾಗ ಉನ್ನತಿಯು 60° ಆಗಿದೆ. ಪರ್ವತದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
(ಉತ್ತರ : 1.366 ಕಿ.ಮೀ.)

23. ಒಂದು ಚೌಕದ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನೀಯ ಬಿಂದುಗಳು (3, 4) ಮತ್ತು (1, –1) ಆದರೆ, ಉಳಿದ ಕೋನೀಯ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$ ಮತ್ತು $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$)

24. ಏರಿಕೆಯಾಗುವ ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 66, ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 128 ಹಾಗೂ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 126 ಆದರೆ, ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿವೆ? (ಉತ್ತರ: 6)

25. ಒಂದು ಗೋಪುರವು ಅದರ ಪಾದದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ α ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು A ನ ಮೇಲಿರುವ b ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗೋಪುರದ ಪಾದದ ಅವನತಿ ಕೋನವು β ಆಗಿದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು $b\cot\beta\tan\alpha$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

26. ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದ ಈಜು ಕೊಳವು 40 ಅಡಿ × 20 ಅಡಿ ಅಳತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಈಜು ಕೊಳದ ಸುತ್ತಲೂ ಸ್ಥಿರ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಆಳವಿರುವ ಅಂಚನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ನಿಖರವಾಗಿ 99 ಘ.ಅಡಿಗಳಷ್ಟು ಕಾಂಕ್ರೀಟನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಿದೆ. ಅಂಚಿನ ಆಳವು 3 ಇಂಚುಗಳಿರಬೇಕಿದ್ದು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಕಾಂಕ್ರೀಟನ್ನು ನಾವು ಬಳಸಿದರೆ, ಅಂಚಿನ ಅಗಲವೇನು? (ಉತ್ತರ:3 ಅಡಿ)

27. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ: $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n})$. (ಉತ್ತರ: $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28. ಎರಡರ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಇಂಚುಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು $2r$ ಇಂಚುಗಳು ಆಗಿರುವ ಮೂರು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿವೆ. ಈ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಅಂಚು ಯಾವುದೇ ಇನ್ನೊಂದರ ಅಂಚಿನೊಂದಿಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಲ್ಲೆಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳಿಂದಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $2\sqrt{2}\,r^2$ ಚ.ಇಂಚುಗಳು)

29. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 8 ಇಂಚುಗಳಾಗಿರುವ ಆರು ವೃತ್ತೀಯ ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತೀಯ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಆರು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಏಳನೆಯ ಬಿಲ್ಲೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಲ್ಲೆಯು ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಿಲ್ಲೆಗಳನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಆರು ಬಿಲ್ಲೆಗಳಿಂದ ಮಧ್ಯ ಭಾಗದಲ್ಲಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (ಉತ್ತರ: $192\sqrt{3}$ ಚ.ಇಂಚುಗಳು)

30. ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಸ್ಥಂಭಾಕೃತಿಯ ಮರದ ತುಂಡಿನಿಂದ ಅದೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವ ಒಂದು ನೇರ ವೃತ್ತೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಕೊರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಮರದ ಪೂರ್ಣ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 76π ಚ.ಸೆಂ.ಮೀ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

31. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.
ಇಲ್ಲಿ, $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Bibliography (ಪರಾಮರ್ಶನ ಗ್ರಂಥಗಳು)

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007
2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009
3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications
4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976
5. Krishnan Namboodiri, Richard G. Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984
6. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications
7. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications
8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010
9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007
10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html
11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G.K. Publications 2010
12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007
13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009
14. D.Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ವಿನ್ಯಾಸ

ವಿಷಯ : ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ | ಸಮಯ: 2.30 ಗಂಟೆಗಳು

ತರಗತಿ : X | ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು: 100

ಕಲಿಕಾ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಳ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ

ಉದ್ದೇಶಗಳು	ಶೇಕಡಾವಾರು
ಜ್ಞಾನ	19
ತಿಳುವಳಿಕೆ	31
ಅನ್ವಯ	23
ಕೌಶಲ	27
ಒಟ್ಟು	100

ಪ್ರಶ್ನೆಯ ವಿಧಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ

ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ರೂಪ	ವಿಭಾಗ-A ಅತಿ ಕಿರು ಉತ್ತರ (VSA) (ವಸ್ತುನಿಷ್ಠ)	ವಿಭಾಗ-B ಕಿರು ಉತ್ತರ (SA)	ವಿಭಾಗ-C ದೀರ್ಘ ಉತ್ತರ (LA)	ವಿಭಾಗ-D ಅತಿ ದೀರ್ಘ ಉತ್ತರ (VLA)	ಒಟ್ಟು
ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	15	10	9	2	36
ಅಂಕಗಳು	15	20	45	20	100
ಸಮಯ (ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ)	20	35	65	30	2.30 ಗಂ.

ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆಯ ಮಟ್ಟ

ಮಟ್ಟ	ಶೇಕಡಾವಾರು ಅಂಕಗಳು
ಕ್ಲಿಷ್ಟ	12
ಸಾಧಾರಣ	28
ಸುಲಭ	60

ವಿಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ಆಯ್ಕೆಗಳು

ವಿಭಾಗಗಳು	ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು		ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	ಉತ್ತರಿಸಬೇಕಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು
	ರಿಂದ	ರವರೆಗೆ		
A	1	15	15	15
B	16	30	16 30 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	10
C	31	45	16 45 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	9
D	46		2 ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	1
	47		2 ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯು 'ಅಥವಾ' ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.	1

ವಸ್ತು ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆ

ಅಧ್ಯಾಯದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಅಧ್ಯಾಯ	ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ				ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು
		1 ಅಂಕ	**2** ಅಂಕಗಳು	**5** ಅಂಕಗಳು	**10** ಅಂಕಗಳು	
1	ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	1	2	2		15
2	ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು	2	1	2		14
3	ಬೀಜಗಣಿತ	2	2	3		21
4	ಮಾತೃಕೆಗಳು	1	2	1		10
5	ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ	2	2	2		16
6	ರೇಖಾಗಣಿತ	2	1	1		9
7	ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ	2	2	1		11
8	ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	1	2	2		15
9	ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ				2	20
10	ನಕ್ಷೆಗಳು				2	20
11	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	1	1	1		8
12	ಸಂಭವನೀಯತೆ	1	1	1		8
ಒಟ್ಟು		15	16	16	4	167

ಉದಾಹರಣೆಗಳ, ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಮತ್ತು ರಚಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ವಿತರಣೆ

	ವಿಭಾಗ A (1 ಅಂಕ)	ವಿಭಾಗ B (2 ಅಂಕಗಳು)	ವಿಭಾಗ C (5 ಅಂಕಗಳು)	ವಿಭಾಗ D (10 ಅಂಕಗಳು)	ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು	ಶೇಕಡಾವಾರು
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಂದ	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ರಚಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
ಒಟ್ಟು	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

- ಆವರಣದ ಒಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ವಿಭಾಗ - A

1. 1 ರಿಂದ 15 ರವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಬಹು ಆಯ್ಕೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಉತ್ತರಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಒಂದು ಅಂಕ.
2. 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹು ಆಯ್ಕೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ 5 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5, 6 ಮತ್ತು 7 ರ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಫಲಿತಾಂಶಗಳು, ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಭಾಗ - B

1. 16 ರಿಂದ 30 ರವರೆಗಿನ 15 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಎರಡು ಅಂಕಗಳು.
2. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ 9 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ. 30 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಅಥವಾ ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.
3. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕ್ರಮವು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
4. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಂದ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
5. 30 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5 ಮತ್ತು 8 ರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವಿಭಾಗ - C

1. 31 ರಿಂದ 45 ರವರೆಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ 9 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಐದು ಅಂಕಗಳು.
2. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಂದ ಯಾವುದೇ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿರಿ. 45 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಅಥವಾ ರೂಪದ್ದಾಗಿದೆ.
3. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಕ್ರಮವು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.
4. ಮೊದಲ 14 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ 6 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಂದ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ.
5. 45 ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5 ಮತ್ತು 8 ರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.
6. 30(a), 30(b), 45(a) ಮತ್ತು 45(b) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು 2, 3, 5 ಮತ್ತು 8 ರ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿಭಿನ್ನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿಂದಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯೊಂದಿಗೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವಿಭಾಗ - D

1. ಈ ವಿಭಾಗವು 46 ಮತ್ತು 47 ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದು, ಒಂದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 9 ರಿಂದ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 10 ರಿಂದ, ಒಂದೇ ಅಧ್ಯಾಯದಿಂದ ಇರುವ ಪರ್ಯಾಯ (ಅಥವಾ ರೂಪದ) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಹತ್ತು ಅಂಕಗಳು.
2. ಎರಡೂ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿರಿ.
3. 46(a), 47(a), 46(b) ಮತ್ತು 47(b) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಅಭ್ಯಾಸದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ನೀಲ ನಕ್ಷೆ - 10ನೆಯ ತರಗತಿ

ಅಧ್ಯಾಯ / ಉದ್ದೇಶ	ಜ್ಞಾನ				ತಿಳುವಳಿಕೆ				ಅನ್ವಯ				ಕೌಶಲ				ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳು
	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	VSA	SA	LA	VLA	
ಗಣಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	1(1)	2(1)	5(1)			2(1)					5(1)						15
ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಗಳು		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)		5(1)						14
ಬೀಜಗಣಿತ		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)	2(1)	5(1)				5(1)		21
ಮಾತೃಕೆಗಳು						4(2)	5(1)		1(1)								10
ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ		2(1)			1(1)	2(1)	5(1)		1(1)		5(1)						16
ರೇಖಾಗಣಿತ					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)								9
ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)	2(1)							11
ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	1(1)					2(1)	5(1)			2(1)	5(1)						15
ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ರೇಖಾಗಣಿತ																10(2)	20
ನಕ್ಷೆಗಳು																10(2)	20
ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ			5(1)			2(1)			1(1)								8
ಸಂಭವನೀಯತೆ		2(1)					5(1)		1(1)								8
ಒಟ್ಟು	2(2)	10(5)	20(4)		5(5)	16(8)	30(6)		8(8)	6(3)	25(5)				5(1)	40(4)	167

- ಆವರಣದ ಒಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.
- ಆವರಣದ ಹೊರಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.