अध्याय

1 वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

1.1 प्रस्तावना : (Introduction)

"पूर्णांको को ईश्वर ने बनाया है, बाकी सब मानविक कार्य है।" ..... लियोपोल्ड क्रोनेकर (Leopold Kronecker)

जीवन संख्याओं से भरा हैं। अपने जीवन के पहले क्षण की कल्पना कीजिए। आपके माता पिता उस समय शायद जन्म का समय, भार लंबाई तथा उससे भी महत्वपूर्ण आपके हाथ और पैरों के उँगलियों को गिन रहे होंगे। **उसके बाद** संख्यायें आपके जीवन: पर्यंत आपके साथ चलते है।

ऐसे दूसरे कौनसे संदर्भ है जिसमें आप संख्याओं का उपयोग करते है?

हम संख्याओं का उपयोग अपनी आयु, आय तथा पूर्ण खर्च के बाद शेष बचे बचत को मापने के लिए करते है। **उसी प्रकार** अपनी धन संपत्ति के आकलन में भी संख्याओं का उपयोग करते है।

इस अध्याय में हम संख्याओं के कुछ नये रूपों की जानकारी प्राप्त करेंगे। गणितीय क्षेत्र में संख्याओं की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। हम संख्याओं की अतिशयोक्ति को जानकर उसके आश्चर्यजनक प्रतिकों को उजागर व्यवस्थित हो जाता है कि वह स्थूल तथा सौंदर्य भाव को अभिव्यक्त करता है।

चलिए अब हम एक पहेली को दखेंगे।

जब आप किसी बगिचे में टहलते है तो देखा ही होगा कि मधुमक्खियों का झुण्ड फूलों पर बैठता है।

इस पहेली को देखिए : एक फुलों के बगिचे में मधुमक्खियों का झुण्ड समान रुप से फुलों पर बैठता है। जब दो फुलों पर बैठती है तो एक मक्खि शेष रहती। जब तीन फुलों पर बैठती है तो दो मक्खियाँ शेष रहती है। जब चार फुलों पर बैठती है तो ती मक्खीयाँ शेष रहती है। उसी प्रकार पाँच फुलों पर बैठती है तो एक मक्खि भी रेष नही बचती।

यदि वहाँ अधिकतम 50 मधुमक्खियाँ हो तो झुण्ड में कितनी मक्खियाँ होंगी?

चलिए अब हम इस पहेली को सुलझायेंगें।

मान लो मधुमक्खियों की संख्या 'x' है। दियें गयें तथ्य के आधार पर $x \leq 50$ होगा।

यदि झुण्ड को पाँच भागों में बाँट दिया जाय तो शेष एक भी मक्खि नहीं बचती हैं जिसे हम $x = 5a + 0$ के रूप में दर्शा सकते है। 'a' कोई भी एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यदि झुण्ड को चार भागों में बाँटा जाय तो शेष 3 रहता है। इसे हम $x = 4b + 3$ के रूप में लिख सकते है। b कोई भी एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यदि झुण्ड को 3 भागों में बाँटा जाय तो शेष 2 रहता है। इसे हम $x = 3c + 2$ के रूप में दर्शा सकते है। जहाँ c एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यदि झुण्ड को 2 भागों में बाँटा जाय तो शेष एक रहता है। इसे हम $x = 2d + 1$ के रूप में लिख सकते है। जहाँ d एक प्राकृतिक संख्या होगी।

यहाँ प्रत्येक स्थिति में x तथा y एक धनात्मक पूर्णांक है। (इस उदाहरण में y का मूल्य क्रमशः 5, 4, 3 तथा 2 होगा) जो x को विभाजित करता है तथा शेष 'r' रखता है (उपरोक्त उदाहरण में r क्रमशः 0, 3, 2 तथा 1 है।), अर्थात् y से छोटा है। इस प्रकार के समीकरणों को लिखते समय **अनजाने में** युक्लिद के विभाजन पद्धति का उपयोग करते है।

फिर से अपनी पहेली की ओर जायेंगे। क्या आपके पास इसे हल करने के लिए कोई सुझाव है? आपको 5 के गुणक लेने होंगे जो दिये गये समीकरण को संतृप्त करते हैं क्योंकि $x = 5a + 0$.

यदि 2 से विभाजित करने पर शेष 1 रहता है तो अवश्य ही आपको विषम संख्या लेनी होगी। यहाँ 5, 15, 25, 35, 45 आदि है। उसी प्रकार यदि आप दूसरे दो स्थितियों को लेंगे तो आपको 35 प्राप्त होगा।

इसलिए झुण्ड में 35 मधुमक्खियाँ होंगी।

अब हम प्राप्त उत्तर की जाँच करेंगे।

जब हम 35 को 2 से भाग देते है तो शेष 1 बचता है। जिसे हम

$$35 = 2 \times 17 + 1$$

जब हम 35 को 3 से विभाजित करते है तो शेष 2 बचता है। जिसे हम

$$35 = 3 \times 11 + 2$$

जब हम 35 को 4 से विभाजित करते है तो शेष 3 बचता है। जिसे हम

$$35 = 4 \times 8 + 3$$

तथा जब हम 35 को 5 से विभाजित करते है तो शेष '0' रहता है। जिसे हम

$35 = 5 \times 7 + 0$ के रूप में लिख सकते है।

अब हम इसका निष्कर्ष कुछ इस प्रकार निकालेंगे। प्रत्येक a तथा b के धनात्मक पूर्णांक की जोडी के लिए (क्रमशः भाज्य तथा भाजक) हमें पूर्ण संख्यायें q तथा r प्राप्त होंगे (क्रमशः भागफल तथा शेष) जो इस संबंध को संतृप्त करता है।

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

यह कीजिए।

निम्नलिखित a तथा b की धनात्मक पूर्णांकों की जोडी के लिए q तथा r का मूल्य ज्ञात कीजिए जो $a = bq + r$ को संतृप्त करता हो।

(i) $a = 13, \quad b = 3$ (ii) $a = 80, \ b = 8$ (iii) $a = 125, \ b = 5$

(iv) $a = 132, \ b = 11$

विचार - विमर्श कीजिए और लिखिए

उपरोक्त प्रश्नों में q तथा r के लक्षण क्या है?

प्रमेय - 1.1 : युक्लिद की भाजक पद्धति : दिए गए a तथा b के धनात्मक पूर्णांकों के लिए एकल युग्म q तथा r जो $a = bq + r, \ 0 \leq r < b$ को संतृप्त करता है।

इस निष्कर्ष को सबसे पहले युक्लिद तत्व के VII वे पुस्तक में बताया गया है। युक्लिद के लघुगणकीय विभाजन इसी सिद्धान्त पर आधारीत है। चलिए अब हम युक्लिद के विभाजन पद्धति का उपयोग करेंगे।

युक्लिद का लघुगणकिय विभाजन दो पूर्णांकों का महत्तम समापवर्त्य भाजक (म.स.भा.) ज्ञात करने की तकनीक है। याद कीजिए a तथा b दो धनात्मक पूर्णांकों का म.स.भा. (H.C.F.) d वह सबसे बडी धनात्मक संख्या है जो a तथा b को विभाजित करती है।

क्रियाकलाप

समान चौडाई वाले 60 से.मी. और 100 से.मी. लम्बी दो कागज की पट्टियाँ लो। बिना कोई भी भाग छुटे दोनों पट्टीयॉं की अधिकतम लम्बाई ज्ञात करो। 100 से.मी. पट्टी को 60 से.मी. पट्टी से मापो, शेष बचा हुआ भाग 40 से.मी. को काट दो। अब इस 20 से.मी. पट्टी से 40 से.मी. की पट्टी को मापो, बचा हुआ 20 से.मी. काट दो अब बची हुयी 20 से.मी. की पट्टी से पहलेवाली 20 से.मी. की पट्टी को मापो। जो एक दुसरे के समान होती है। इसका अर्थ यह हुआ की कुछ भी शेष नही बचा।

अर्थात हम इस निष्कर्ष पर आते है की पट्टी का अधिकतम माप 20 से.मी. है जिससे 60 से.मी. और 100 से.मी. दोनों पट्टीयों को बिना कोई शेष भाग बचे माप सकते है।

अब हम इस प्रक्रिया को

युक्लिद के सिद्धांत से जोडकर 60 और 100 का म.स.भा. प्राप्त करेंगें।

जब हम 100 को 60 से विभाजित करते है तो शेष 40 बचता है।

$$100 = (60 \times 1) + 40$$

अब हम 60 को 40 से विभाजित करने के लिए युक्लिद के सिद्धांत का उपयोग करेंगे।

$$60 = (40 \times 1) + 20$$

अब हम 40 को शेष बचे 20 से विभाजित करेंगे तो युक्लिद के सिद्धान्तानुसार

$$40 = (20 \times 2) + 0$$

देखिए शेष 0 बचता है और हम इस प्रक्रिया को आगे नहीं बढा सकते। इसलिए हम कह सकते हैं कि 60 तथा 100 का म.स.भा। इस चरण का भाजक 20 होगा। इसकी जाँच आप 60 तथा 100 के खण्डों को लिखकर सरलता पूर्वक कर सकते है।

यह कीजिए।

युक्लिद के विभाजन पद्धति से म.स.भा. ज्ञात कीजिए।(Euclid division lemma)

(i) 50 तथा 70 (ii) 96 तथा 72 (iii) 300 तथा 550

(iv) 1860 तथा 2015

विचार - विमर्श कीजिए और लिखिए

क्या आप 1.2 और 0.12 का म.स.भा **युक्लिद विभाजन पध्दती** ज्ञात कर सकते हैं? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

युक्लिद का लघुगणकीय विभाजक बडी संख्याओं का म.स.भा. ज्ञात करने में ही नहीं बल्कि यह सबसे पहला अल्गोरिदम है जिसे संगणक के प्रोग्राम में भी डाल गया है।

टिप्पणी :

1. युक्लिद की विभाजन पद्धति तथा अल्गोरिदम एक दूसरे से इतने सह संबंधित है कि कुछ लोग पहले वाले को ही विभाजन अल्गोरिदम कहते है।

2. जबकि युक्लिद का अल्गोरिदम विभाजन केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए ही दिया गया है जिसे हम a तथा $b \neq 0$ के सभी पूर्णांकों के लिए विस्तृत कर सकते है। यहाँ हमें इस बात की चर्चा नहीं करनी है।

युक्लिद की विभाजन पद्धति/अल्गोरिदम का उपयोग कुछ संख्याओं के लक्षणों को ज्ञात करने में करते है। हम इसके कुछ उदाहरण देखेंगे ।

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सम धन पूर्णांक $2q$ रूप में तथा प्रत्येक विषम धन पूर्णांक $2q + 1$ रूप में पाया जाता है; जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : मानलों a एक धन पूर्णांक तथा $b = 2$ है तो युक्लिद अल्गोरिदम से $a = 2q + r$ कुछ पूर्णांकों के लिए $q \geq 0$ तथा $r = 0$ या $r = 1$, क्योंकि $0 \leq r < 2$ हो तो $a = 2q$ या $2q + 1$ होगा।

यदि a, $2q$ रूप में हो तो a एक सम संख्या होगी और धन पूर्णांक सम या विषम भी हो सकता है। इसलिए कोई भी धन विषम संख्या $2q + 1$ के रूप में होगी।

उदाहरण 2 : बताइए कि सभी धन विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ रूप में ही होंगी जबकी q कोई धन पूर्णांक है।

हल : मानलो a एक विषम धन पुर्णांक है, और $b = 4$ हम विभाजन अल्गोरीदम का उपयोग a तथा $b = 4$ से करेंगे।

हमें प्राप्त होगा $a = 4q + r$, $q \geq 0$, और $0 \leq r < 4$ प्राप्त शेषांक 0, 1, 2 और 3 होंगे।

अर्थात् a का मूल्य $4q$ या $4q + 1$ या $4q + 2$ या $4q + 3$ होगा। जहाँ q भागफल है। जैसे कि a एक विषम संख्या होने के कारण a का मूल्य $4q$ या $4q + 2$ **या 2 (2q+1)** नहीं होगा। (क्योंकि ये दोनों संख्याएँ 2 से विभाजित है).

इसलिए, कोई भी विषम संख्या $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप में होगी।

अभ्यास - 1.1

1. युक्लिद की विभाजन पद्धति से म.स.भा. ज्ञात कीजिए।

   (i) 900 तथा 270 (ii) 196 तथा 38220 (iii) 1651 तथा 2032

2. युक्लिद के विभाजन पद्धति से बताइए की कोई भी धनात्मक विषम संख्या $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप में होगी। जहाँ q एक पूर्णांक है।

3. युक्लिद के विभाजन पद्धति से बताइए की धनात्मक पूर्णांकों का वर्ग $3p$, $3p + 1$ या $3p + 2$ के रूप में होगा।

4. युक्लिद के विभाजन पद्धति के उपयोग से बताइए की धनात्मक पूर्णांकों का धन $9\,m$, $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप में होगा।

5. सिद्ध कीजिए की n, $n + 2$ या $n + 4$ में से केवल एक ही संख्या 3 से विभाजित है जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

1.2 अंकगणित के मौलिक प्रमेय (The Fundamental theorem of Arithmetic)

युक्लिद के विभाजन पद्धति से हम जानते है कि दिए गए धनात्मक संख्याएँ a तथा b के लिए q तथा r का एक अप्रतिम युग्म होता है। $a = bq + r$, $0 \leq r \leq b$

विचार - विमर्श कीजिए और लिखिए

यदि $r = 0$ हो तो $a = bq + r$ में a, b तथा q के मध्य युक्लिद विभाजन पद्धति से क्या संबंध होगा?

उपरोक्त चर्चा के अनुसार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचेगे कि यदि $a = bq$, 'a' को 'b' से विभाजित करते है तो 'b' को 'a' का खण्ड कहा जाएगा।

उदाहरण के लिए $24 = 2 \times 12$

$$24 = 2 \times 2 \times 6$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

हम जानते है कि यदि $24 = 2 \times 12$ हो तो हम कह सकते है कि 2 तथा 12, 24 के खण्ड होंगे इसे हम $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ के रूप में लिख सकते है और हम जानते है कि यही 24 के रूढी गुणनखण्ड होंगे।

चलिए अब हम कुछ रूढी संख्याओं को लिखते हैं जैसे 2, 3, 7, 11 तथा 23। इनमें से कुछ या सभी संख्याओं का गुणनफल इस प्रकार ज्ञात करेंगे कि कोई भी संख्या कितनी बार भी दोहराई जा सकती है। इसे हम अनंत पदों तक बढा सकते है। इनमें से कुछ उदाहरण दिए गए है।

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $\qquad$ $7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$ $\qquad$ $2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$ $\qquad$ $2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

अब हम मानते है कि रूढी संख्याओं के समूह में सभी रूढी संख्याओं को लिया गया है। **इस समुह में से जब हम दो या दो से अधिक रुढी संख्यांए लेकर उन्हें गुणा करते है तो क्या हमें फिर से रुढी संख्या प्राप्त होती है या संयुक्त संख्या?** इसलिए यदि हम इन्हें सभी संभावित पद्धतियों से गुणा करेंगे तो हमें अनंत संयुक्त संख्याओं का समूह प्राप्त होगा।

प्रमेय-1.2 : (अंकगणित का मूलभूत प्रमेय) : प्रत्येक संयुक्त संख्या को रूढी गुणनखण्डों के रूप में दर्शाया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड अद्वितीय होगा। जहाँ संख्याओं का क्रम बदल सकता है।

अंकगणित का मौलिक प्रमेय हमें यह बताता है कि प्रत्येक संयुक्त संख्या को रूढ़ी गुणनखण्ड के रूप में लिख सकते है। वास्तव में यह बहुत कुछ दर्शाता है। यह प्रमेय बताता है कि संयुक्त संख्या को रूढी गुणनखण्ड के अद्वितीय ढंग से दर्शा सकते है। जबकि उसका क्रम अलग हो सकता है। उदाहरण के लिए जब हम 210 के खण्ड ज्ञात करेंगे तो हमें $2 \times 3 \times 5 \times 7$ उसी प्रकार $3 \times 5 \times 7 \times 2$ या कोई और संभावित क्रम जिसमें इन रूढी संख्याओं को लिखा जा सकता है। अर्थात् किसी भी संयुक्त संख्या को केवल एक ही रूढी गुणनखण्ड प्राप्त होगा, अर्थात् हम उसके क्रम का विचार नहीं करेंगे।

सामान्यतः यदि संयुक्त संख्या x दी हुई है जब हम उसके गुणनखण्ड प्राप्त करते है जैसे $x = p_1 \times p_2 \times p_3 \ldots p_n$, जहाँ $p_1, p_2 \ldots, p_n$ अभाज्य है। जब इसे आरोही क्रम में लिखते है, अर्थात् $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$। जब हम सम गुणनखण्डों को संयुक्त करते है तो, हमें अभाज्य के घातांक प्राप्त होते है जब हम खण्डों का आरोही क्रम लिखने का निर्णय लेते है। तव संख्या के गुणनखण्डों का प्रकार भी अद्‌वितीय रहता है। उदाहरण के लिए

$$27300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$$

यह कीजिए

2310 को रूढी गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए। यह भी देखिए की आपके मित्र को प्राप्त गुणनखण्ड किस प्रकार के है। क्या उसके खण्ड आपके खण्डों के समान ही है? आपकें गुणनखण्ड और आपके मित्र को प्राप्त परिणाम की जाँच कीजिए। ऐसे ही और 3, 4 संख्याओं के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए। इससे क्या निष्कर्ष निकलता है बताइए।

चलिए अब हम अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का उपयोग करें।

उदाहरण 3. मान लजिए संख्या 4^n है जहाँ n प्राकृतिक संख्या है। क्या n का कोई मान इस प्रकार है कि 4^n का अंतिम अंक शून्य आता हो, इसकी जाँच कीजिए।

हल : किसी भी प्राकृतिक संख्या n के लिए संख्या 4^n का अंतिम अंक शून्य होने के लिए वह संख्या 5 से विभाजित होनी चाहिए। इसका अर्थ है कि 4^n के रूढी गुणनखण्डों में 5 होना चाहिए। किंतु यह असंभव है क्योंकि $4^n = (2)^{2n}$ अतः 4^n के गुणनखण्डों में केवल 2 रूढी संख्या है। चूँकि गुणनखण्डों में 5 नहीं है, प्राकृतिक संख्या n अस्तित्व में है। जिसमें 4^n का अंतिम अंक शून्य रहता है।

आपने पिछली कक्षा में पढा है कि अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का उपयोग करते हुए, दो धन पूर्णांकों का महत्तम समापवर्त्य भाजक (HCF) और लघुत्तम समापवर्त्य भाजक (LCM) कैसे ज्ञात करते हैं। इस पद्धति को रूढीं गुमनखण्ड पद्धति भी कहते है। नीचे दिये गये उदाहरण द्वारा हम इस पद्धति को फिर से याद करेंगे।

उदाहरण-4. रूढी गुणनखण्ड पद्धति द्वारा 12 और 18 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$

ध्यान दीजिए म.स.भा.(12, 18) $= 2^1 \times 3^1 = 6$ = (संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ रूढी गुणनखण्ड के न्यूनतम घातांक का गुणनफल)

ल.स.भा. (12, 18) $= 2^2 \times 3^2 = 36$ = संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ रूढी गुणनखण्डों के अधिकतम घातांक का गुणनफल

उपरोक्त उदाहरण से आपको समझ में आया होगा कि HCF (12, 18) × LCM (12, 18) $= 12 \times 18$। वस्तुतः हम कोई भी दो धन पूर्णांक a और b के लिए जाँच कर सकते है। अर्थात् HCF $(a, b) \times$ LCM$(a, b) = a \times b$ इसका उपयोग हम दो धन पूर्णांकों का LCM ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं। यदि उन दो धन पूर्णांकों का HCF ज्ञात हो।

यह कीजिए

रूढी गुणनखण्ड पद्धति से दिए गए संख्याओं का HCF तथा LCM (म.स.भा तथा ल.स.भा.) ज्ञात कीजिए। (i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

प्रयत्न कीजिए

सिद्ध किजिए कि n तथा m के किसी भी प्राकृतिक मूल्य के लिए $3^n \times 4^m$ का अंतिम अंक 0 या 5 नहीं होगा। **आपके उत्तर की जाँच किजिए।**

अभ्यास - 1.2

1. निम्न संख्याओं को रूढी गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. रूढी गुणनखण्ड पद्धति द्वारा निम्न पूर्णांकों का ल.स.भा. (LCM) तथा म.स.भा. (HCF) ज्ञात कीजिए।

   (i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29 (iii) 8, 9 और 25

   (iv) 72 और 108 (v) 306 और 657

3. जाँच कीजिए कि किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए क्या 6^n का अंतिम अंक शून्य होगा?

4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ को संयुक्त संख्याएँ क्यों कहते है, स्पष्ट कीजिए।

5. आप कैसे बताएँगे कि $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ संयुक्त संख्या है? स्पष्ट कीजिए।

6. 6^{100} **के इकाई स्थान पर इनमें से कौनसा अंक आएगा?**

अब और आगे वास्तविक संख्याओं की खोज करने के लिए अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का उपयोग करेंगे। सर्वप्रथम, हम इसका उपयोग, 'अपरिमेय संख्याओं का दशमलव रुप कब आवर्त, अनावर्त और पुनरावर्त रहता है इसे ज्ञात करने के लिए करेंगे। इसके अतिरिक्त अनेक संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करने के लिए इसका उपयोग करते है, जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$.

1.2.2 परिमेय संख्याएँ और उनके दशमलव विस्तार (Rational numbers and their decimal expansions)

पिछली कक्षाओं में हमने पूर्णांकों के कुछ गुणों की चर्चा की है। दिए गए पूर्णांकों का उत्तरपद एवं पूर्वपद कैसे ज्ञात करेंगे? आप जानते हैं कि पूर्णांकों के पूर्वपद एवं उत्तरपद का अंतर 1 होता है। **आपने अगला या पिछला संख्या को जोड या घटाने से नई संख्या प्राप्त होती है।**

क्या आप 0 तथा 1 या 1 तथा 2 ..... etc. के बीच आने वाले संख्याओं के बारे में जानते है? उन्हें क्या कहेंगे? उन संख्याओं को परिमेय संख्याएँ कहते है।

IX वी कक्षा में आपने पढा था कि परिमेय संख्याओं का दशमलव विस्तार या तो आवर्त होता है या फिर अनावर्त या पुनरावर्त होता है। इस कक्षा में हम यह जानकारी प्राप्त करेंगे कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ का दशमलव विस्तार कब आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त होगा। इसके बारे में कुछ उदाहरणों द्वारा जानकारी प्राप्त करेंगे।

कुछ परिमेय संख्याओं के दशमलव रूप नीचे दिए गए है।

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5

अब हम इन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करेंगे।

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

हमने देखा कि ऊपर लिये गए सभी आवर्त दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं के रूप में व्यक्त कर सकते है। जिनके हर 10 के घातांकों में है। अब हम अंश तथा हर के गुणनखण्ड ज्ञात करेंगे और उन्हें सरल परिमेय के रूप में व्यक्त करेंगे।

अब (i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7}{80}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2}$

क्या आप हर में कुछ विशेषता (pattern) देख रहें है। ऐसा प्रतीत होता है कि जब दशमलव व्यंजक को उसके सरलतम परिमेय के रूप में व्यक्त करते हैं तब p और q सह-अभाज्य (co prime) रहते हैं और हर (i.e., q) में केवल 2 अंक के घातांक अथवा 5 के घातांक अथवा दोनों रहते है। यह इसलिए कि 10 के केवल 2 और 5 गुणनखण्ड होते हैं। जैसा कि हमने अंकगणित के मूलभूत प्रमेय में देखा।

हम ने निष्कर्ष प्राप्त किया

ऊपर दिए गए उदाहरणों में आप देख सकते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या जिसका दशमलव विस्तार आवर्त हैं । उसके हर में 2 या 5 या दोनों के घातांक रूप प्राप्त होंगे। जब परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में है जिसके हर को 10 के घातांक में व्यक्त कर सकते है जहाँ q के गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में रहते हैं, n और m कोई अ-ऋणात्मक (non-negative) पूर्णांक होते हैं। औपचारिक रूप से हम अपने परिणाम को इस प्रकार लिख सकते है।

नीचे दिए अनुसार हम अपने परिणामों की जाँच कर सकते है।

प्रमेय-1.3 : ***"माना कि x परिमेय संख्या है जिसका दशमलव विस्तार आवर्त है। x को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है, जहाँ p और q सह-अभाज्य (co-prime) रहते हैं, और q के गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में रहते हैं, जहाँ n और m अ-ऋणात्मक पूर्णांक रहते हैं।"***

यह कीजिए

निम्न आवर्त दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए जहाँ $q \neq 0$ तथा p, q असहभाज्य है।

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

इस प्रक्रिया द्वारा आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

अब यदि छात्र परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में लेते हैं, जहाँ q के रूढी गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में है, (जहाँ n और m अऋणात्मक पूर्णांक हो) तो क्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव विस्तार अनावर्त रहेगा?

इसलिए $\frac{p}{q}$ रूप की संख्या जहाँ 2^n5^m के रूप में q है की समरूप परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के रूप में होगी। जहाँ b 10 के घातांक में होगा दोबारा पिछले उदाहरणों को हल करेंगे।

(i) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$ (ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$ (iv) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

इसलिये, ये उदाहरण हमें बताते हैं कि $\frac{p}{q}$ रूप की परिमेय संख्या जहाँ q, 2^n5^m रूप में हो तो इसकी समतुल्य परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ के रूप में होगी जहाँ b, 10 के घातांक रूप में होगा तो ऐसी परिमेय संख्या का दशमलव विस्तार आवर्त रहता है। इससे यह ज्ञात होता है कि $\frac{p}{q}$ रूप की परिमेय संख्या जहाँ q, 10 के घातांक में हो तो उसका दशमलव विस्तार आवर्त होता है।

अतः हमें ज्ञात हुआ कि प्रमेय 1.2 का व्युत्क्रम (converse) भी सत्य ही है और औपचारिक रूप से इसे इस प्रकार लिख सकते है :-

प्रमेय 1.4 : माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q के रूढी गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में हो जहाँ n, m अऋणात्मक पूर्णांक हो तो x का दशमलव विस्तार आवर्त रहता है।

यह कीजिए

निम्न परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए, जहाँ q, 2^n5^m के रूप में हो, तथा n और m अऋणात्मक पूर्णांक होने चाहिए तत्पश्चात संख्याओं को उनके दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{25}$ (v) $\frac{80}{100}$

1.2.3 परिमेय संख्याओं के अनावर्त, पुनरावर्त दशमलव

अब, हम ऐसे परिमेय संख्याएँ समझेंगे जिसका दशमलव विस्तार अनावर्त और पुनरावर्त रहते है। एक बार फिर, उदाहरण लेकर उसका अवलोकन करेंगे।

$\frac{1}{7}$ के दशमलव रूपांतरण की ओर देखेंगे।

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... जो अनावर्त और पुनरावर्त दशमलव है।

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)1.0000000} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}
$$

ध्यान दीजिए, भागफल के अंकों का समूह '142857' बार-बार दोहराया जा है। **ध्यान दीजिए कि यहाँ हर के स्थान पर 7 है जिसे 2^n5^m के रूप में नहीं लिख सकते है।**

यह कीजिए

निम्न लिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव में लिखकर भागफल में दोहराये जाने वाले अंकों के समूह को ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

ऊपर दिये गये उदाहरण से हम कथन को इस प्रकार लिख सकते है :-

प्रमेय-1.5 : माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q के गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में नहीं है, जहाँ n और m अऋणात्मक पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव विस्तार अनावर्त और पुनरावर्त (recurring) रहता है।

ऊपर की गई चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव रूप आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त रहता है।

उदाहरण-5. ऊपर दिये गए प्रमेयों के आधार पर बिना भाग किए बताइए कि निम्न में कौनसी परिमेय संख्याएँ आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त दशमलव है?

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

हल : (i) $\frac{16}{125} = \frac{16}{5 \times 5 \times 5} = \frac{16}{5^3}$ आवर्त दशमलव हैं।

(ii) $\frac{25}{32} = \frac{25}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{25}{2^5}$ आवर्त दशमलव हैं।

(iii) $\frac{100}{81} = \frac{100}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{10}{3^4}$ अनावर्त और पुनरावर्त दशमलव है।

(iv) $\frac{41}{75} = \frac{41}{3 \times 5 \times 5} = \frac{41}{3 \times 5^2}$ अनावर्त और पुनरावर्त दशमलव है।

उदाहरण-6. निम्न परिमेय संख्याओं को बिना भाग किए दशमलव विस्तार लिखिए।

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

हल : (i) $\frac{35}{50} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10^1} = 0.7$

(ii) $\frac{21}{25} = \frac{21}{5 \times 5} = \frac{21 \times 2^2}{5 \times 5 \times 2^2} = \frac{21 \times 4}{5^2 \times 2^2} = \frac{84}{10^2} = 0.84$

(iii) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{2^3} = \frac{7 \times 5^3}{(2^3 \times 5^3)} = \frac{7 \times 25}{(2 \times 5)^3} = \frac{875}{(10)^3} = 0.875$

अभ्यास - 1.3

1. निम्न लिखित परिमेय संख्याओं को उनके दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि कौनसे दशमलव आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त होंगे।

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. बिना भाग किए बताइए कि निम्न परिमेय संख्याओं में कौन-से आवर्त, अनावर्त या पुनरावर्त दशमलव होंगे ।

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 \cdot 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 \cdot 5^7 \cdot 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. प्रमेय 1.1 का उपयोग करते हुए निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव के रूप में लिखिए।

   (i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. निम्नलिखीत दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रुप में लिखो, और q के रुढ खण्डों को लिखों. आपने क्या देखा ?

   (i) 43.123 (ii) 0.120112001120001.... (iii) $43.\overline{12}$ (iv) $0.\overline{63}$

1.3 अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

IX वी कक्षा में अपरिमेय संख्याओं के गुणों का परिचय दिया गया था। आपने अध्ययन किया था कि परिमेय तथा अपरिमेय संख्यायें मिलकर वास्तविक संख्याएँ बनती है। अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर डालना भी सीखा था। जबकि यह सिद्ध नहीं किया गया था कि वे अपरिमेय होगी। इस कक्षा में, अंकगणित के मूल सिद्धांत की सहायता से हम सिद्ध करेंगे कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ और सामान्यतः $\sqrt{p}$ अपरिमेय रहती है। जहां p अभाज्य रहता है।

स्मरण कीजिए, वास्तविक संख्या अपरिमेय कहलाती है जब हम इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिख सकते हैं जिसमें p और q पूर्णांक होंगे और $q \neq 0$। यहाँ अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण दिए गए है जिनसे आप पहले से ही परिचित है।

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110…, आदि

$\sqrt{2}$ को अपरिमेय सिद्ध करने से पूर्व हम उस कथन की ओर देखेंगे जिसकी उपपत्ति अंकगणित के मूलभूत प्रमेय पर आधारित है।

प्रमेय-1.6 : *मानलो p एक अभाज्य (रूढ़ी) संख्या है और p से a^2 विभाजित हो (जहाँ a धन पूर्णांक है) तो p से a विभाजित है।*

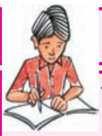
उपपत्ति : माना कि a एक धन पूर्णांक है तब a का अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार से होगा।

$a = p_1p_2 \ldots p_n$, जहाँ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ रूढी (अभाज्य) हैं,

इसलिए $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p^2_1p^2_2 \ldots p^2_n$.

अब हमें दिया गया है कि p से a^2 विभाजित है। अंकगणित के मूलभूत प्रमेय से पता चलता है कि a^2 के रूढी गुणनखण्डो में से p एक है। अंकगणित के मूलभूत प्रमेय के अद्वितीय रूप का उपयोग करते हुए हम समझते है कि a^2 के रूढी गुणनखण्ड केवल $p_1 p_2 \ldots p_n$ रहते है। इसलिए $p_1, p_2, \ldots p_n$ में से कोई एक p है।

अब $p_1p_2 \ldots p_n$ में कोई एक संख्या p है अतः इससे a विभाजित है।



यह कीजिए

ऊपर दिए गए कथन की जाँच दिए गए मूल्यों से कीजिए p= 2, p = 5 और a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64 और 81 है।

अब हम $\sqrt{2}$ को अपरिमेय संख्या प्रमाणित करने का प्रयत्न करेंगे है। इसको हम ऋणात्मक (contradiction) कथन से प्रमाणित करेंगे।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति : वैसे तो इसे हम परस्पर विरोधी कथन द्वारा सिद्ध कर रहे हैं, हम इसका विलोम लेंगे अर्थात् मान लीजिए $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

यदि यह परिमेय संख्या है तो दो पूर्णांक r और s का अस्तित्व इस प्रकार रहना चाहिए जिससे $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ $(s \neq 0)$.

मान लीजिए r और s में 1 के अलावा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है तत्पश्चात हम इसे उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देते है ताकि हमें $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ प्राप्त हो, जहाँ a औप b असहभाज्य है। अतः $b\sqrt{2} = a$.

दोनों ओर वर्ग करने पर हमें $2b^2 = a^2$ प्राप्त होगा इसलिए 2 से a^2 विभाजित है।

अब हम प्रमेय 1.6 से यह समझते है कि यदि 2 से a^2 विभाजित हो तो 2 से a भी विभाजित है।

अतः किसी पूर्णांक c के लिए हम $a = 2c$ लिख सकते है । **दोनों ओर वर्ग लेने पर** $a^2 = (2c^2)$

a का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर हमें $2b^2 = (2c^2)$ प्राप्त होता है, अर्थात् $2b^2 = 4c^2$

इसका अर्थ यह है कि 2 से b^2 विभाजित है, इसलिए 2 से b विभाजित है (पुनः p= 2 के लिए कथन 1 का उपयोग करने पर)

इसलिए a और b दोनों में उभयनिष्ठ 2 है।

लेकिन यह a तथा b अभाज्य है कथन का ऋणात्मक होगा।

यह कथन हमारी कल्पना $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या के आधार पर उत्पन्न होती है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य सिद्ध होती है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

सामान्यतः यह बात कह सकते है कि $\sqrt{d}$ अपरिमेय होगा यदि d एक धन पूर्णांक है जो किसी पूर्णांक का वर्ग नहीं है। जैसे कि $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ $\sqrt{24}$ आदि सभी अपरिमेय संख्याएँ है।

पिछली कक्षाओं में उल्लेख किया गया है कि :

- परिमेय और अपरिमेय संख्या का योग अथवा अंतर अपरिमेय रहता है।
- अशून्य परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का गुणा या भाग अपरिमेय ही होता है।

यहाँ हम कुछ विशेष उदाहरणों से सिद्ध करेंगे।

उदाहरण-8. बताइए कि $5-\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए $5-\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम a और b के दो असहभाज्य खण्ड ज्ञात करेंगे जिसमें $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$.

इसलिए, $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

समीकरण को व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है, $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}=\frac{5b-a}{b}$ ... (1)

क्योंकि a और b पूर्णांक हो तो $5-\frac{a}{b}$ परिमेय हैं अतः $\sqrt{3}$ परिमेय है।

परन्तु यह इस वास्तविकता का विलोम होगा कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हमारी कल्पना जो कि $5-\sqrt{3}$ परिमेय है यह असत्य सिद्ध होती है।

अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $5-\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण-9. बताइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लो $3\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है।

हम a तथा b असहभाज्य संख्याएँ ज्ञात करेंगे ($b\neq 0$) अर्थात् $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

अर्थात् $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$

व्यवस्थित करने पर $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ प्राप्त होता है।

क्योंकि 3, a और b पूर्णांक है, चूँकि $\frac{a}{3b}$ परिमेय होने के कारण $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या होगी

लेकिन यह $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है कथन का विलोम होगा।

अतः यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि $3\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण-10. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है।

माना कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ वहाँ a और b पूर्णांक हैं, जहाँ $b\neq 0$

इसलिए $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$.

दोनो ओर वर्ग लेने पर हमें प्राप्त होता है।

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2\frac{a}{b}\sqrt{3}$$

पुनः प्रस्थापित करने पर

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$

$$= \frac{a^2}{b^2} + 1$$

$$\sqrt{3} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

क्योंकि a, b पूर्णांक है, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ परिमेय है। अतः $\sqrt{3}$ परिमेय है।

यह वास्तविकता $\sqrt{3}$ अपरिमेय है का विलोम है।

अतः $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

सुचना :

1. दो अपरिमेय संख्याओं का योग अपरिमेय रहना आवश्यक नहीं है।
   उदाहरण के लिए $a = \sqrt{2}$ और $b = -\sqrt{2}$ हो तो a और b दोनों अपरिमेय है किंतु $a + b = 0$ जो परिमेय है।
2. दो अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल अपरिमेय रहना आवश्यक नहीं है।
   उदाहरण के लिए $a = \sqrt{2}$ और $b = \sqrt{8}$ हो तो a और b दोनों अपरिमेय संख्याएँ है। किन्तु $ab = \sqrt{16} = 4$ जो परिमेय संख्या है।

अभ्यास - 1.4

1. सिद्ध कीजिए कि निम्न संख्याएँ अपरिमेय है।
   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3 + 2\sqrt{5}$
2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ अपरिमेय हैं जहाँ p, q अभाज्य है।

1.4 घातोंको का पुनरविचार (Exponentials Revised)

हमें मालुम है की,

एक संख्या 'a^n' का 'n' घातांक प्राकृतीक संख्या 'a' के साथ जो 'n' का गुणनखण्ड है।

प्रत्येक दिए गए 'a' के समान है । $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n-\text{factors}}$

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ .... 2 का घातांक है

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ .... 3 का घातांक है

हमे मालुम है की,81 को 3^4, लिख सकते है, $81 = 3^4$ यह घातांकीय रुप कहलाता है। '4' यह संख्या घातांक या सुचक है 3 आधार है। " 81 को 3 की चौथी"इस तरह पढते है। घातांकों के नियम का स्मरण करेंगे।

यदि a, b वास्तविक संख्याएँ जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$ और m, n पुर्णांक हो तब

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; (ii) $(ab)^m = a^m.b^m$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$

(v) $a^0 = 1$ (vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

यह किजिए

1. हल करो।

(i) 2^1 (ii) $(4.73)^0$ (iii) 0^3 (iv) $(-1)^4$ (v) $(0.25)^{-1}$ (vi) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (vii) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

2. (a) 10, 100, 1000, 10000, 100000 को घातांक के रुप में प्रकट करो।

(b) निम्न लिखीत को संक्षिप्त लघुगणक रुप में प्रकट करो।

(i) 16×64 (ii) 25×125 (iii) $128 \div 32$

घातांक Exponential and Logarithms

घातांक परिमेय संख्याओं के साथ कुछ घातांकीय संख्याएँ होती है ।

5^2 , 5, का वर्ग दर्शाता है तथा 5 को 5^2 का वर्गमुल है।

5^3 , 5 का घन दर्शाता है तथा 5, को 5^3 का घनमुल कहते है ।

$5^{1.73} = 5^{173/100}$ यह '5' का 100^{th} वॉ मुल दर्शाता है।

निम्न को निरिक्षण किजिए।

$2^x = 4 = 2^2$ दर्शाता है $x = 2$

$3^y = 81 = 3^4$ दर्शाता है $y = 4$

$10^z = 100000 = 10^5$ दर्शाता है $z = 5$

क्या हम निम्न में x का मूल्य ज्ञात कर सकते है?

$2^x = 5$, $3^x = 7$, $10^x = 5$

यदी हॉ तो x का मूल्य क्या होगा ?

$2^x = 5$ में 2 का घातांक कौनसी संख्या लिखने पर वह हमें 5 देता है ?

इसलिए हमें x तथा 5 का एक नया संबंध स्थापित करना पडेगा?

चलिए अब हम यह देखे, क्या हम x तथा 5 के संभव मूल्यों की कल्पना कर सकते है ?

इन स्थितियों में लघुगुणक के नये संबंधों का परिचय करा रहे है। $y = 2^x$ में 'x' 'y' के किन मुल्यों से 5 प्राप्त होगा? यदि 'x'= 1 हो तो $y = 2^1$=2 यदी 'x'= 2 हो तो $y = 2^2$=4 यदि 'x'= 3 हो तो $y = 2^3$=8 इनमें 'x' का मुल्य 2 या 3 के बिच आता है।

2^x का आलेख (Graph of exponential 2^x)

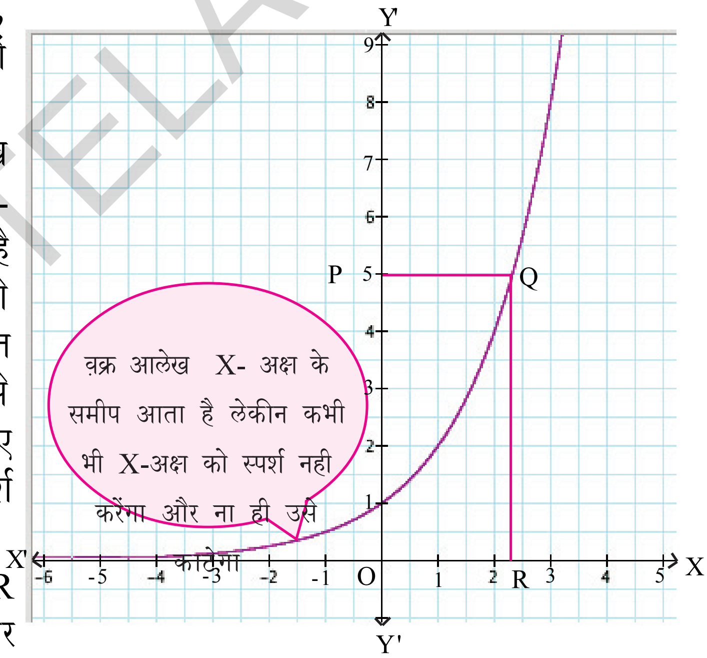
अब $y = 2^x$ का आलेख खिचेंगे

'x' के मुल्यों को 'y' के मुल्यों को ज्ञात करना।

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

आलेख में बिन्दुओं को डालकर उन्हें मीलाएँगे $y = 2$ के बढने से का मूल्य बढता है। वैसे ही 'x' के घटने से $y = 2^x$ का मूल्य घट कर 0 के नजदीक आ जाता है। लेकिन कभी भी 0 नही होता. है।

चलिए अब हम दखेंगे की, $y = 2^x$ में x, y के कौनसे मूल्यों पर हमें 5 प्राप्त होगा?



हम जानते है की, आलेख में Yअक्ष 2^x को दर्शाता है तो X - अक्ष किसे दर्शाता है? हम देखते है की, X – अक्ष x के मूल्यों को दर्शाता है। Y - अक्ष पर 5 को अंकीत किजिए जिसे "P" से Y –अक्ष के समानांतर रेखा खिचिंए जो आलेख को बिन्दु Q पर स्पर्श करता है।

अब X - अक्ष के लम्ब QR रेखा खिंचिए क्या हम आलेख पर OR की लंबाई ज्ञात कर सकते है? या वह बिन्दु कहाँ पाया जाता है इस सोचिए।

अब हम जानते हैं कि बिंदु R का x निर्देशांक $2^x = 5$ के लिए x का निर्धारित मूल्य होगा। x के इसी मूल्य को 5 का लघुगणक का आधार 2 पर है। इसे $\log_2 5$ के रूप में लिखते हैं।$y = 2^x$ में x, y के किन मूल्यों से 5 प्राप्त होगा ? यदी $x = 1$ हो तो $y = 2^1 = 2$, यदि $x = 2$ होतो $y = 2^2 = 4$, यदि $x = 3$ होतो $y = 2^3 = 8$ इनमें x का मूल्य 2 तथा 3 के बिच आता है। क्या x का मूल्य 2 तथा 3 के नजदीक है ? लेकीन हम देखते है की, x का मूल्य 2 के नजदिक होगा।

यदि $2^x = 5$,में x को 5 लघुगणक जिसमें आधा 2 है परिभाषित करते है।

सांकेतिक रुप से इसे इस प्रकार लिखते है। $x = \log_2 5$

x का मुल्य ज्ञात करना कठिन होगा जब $2^x = 5$ या $3^x = 7$ या $10^x = 5$. तब हमें उपरोक्त समीकरण के लिए निम्नलिखित हल प्राप्त होगें।

यदि $\boldsymbol{2^x = 5}$ हो तो x 5 का लघुगुणक 2" के आधार के लिए होगा उसे $\boldsymbol{log_2 5}$ के रुप में लिखते है।

यदि $\boldsymbol{3^x = 7}$ हो तो x " 7 का लघुगुणक 3" के आधार के लिए होगा उसे $\boldsymbol{log_3 7}$ के रुप में लिखते है।

यदि $\boldsymbol{10^x = 5}$ हो तो x " 5 का लघुगुणक10" के आधार के लिए होगा उसे $\boldsymbol{log_{10} 5}$ के रुप में लिखते है।

सामान्यत: यदि $\boldsymbol{a}$ और **N** के रुपमें लिखते है $a \neq 1$ जहाँ $\boldsymbol{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$.

उपरोक्त तालिका को इस प्रकार लिखेंगे।

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

$y = 2^x$ के आलेख की परिभाषा द्वारा निरिक्षण किजिए।

यदि $y = \frac{1}{4}$; $x = -2$ अर्थात् $2^{-2} = \frac{1}{4}$ और $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2}$; $x = -1$ अर्थात् $2^{-1} = \frac{1}{2}$ और $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y = 2$; $x = 1$ अर्थात् $2^1 = 2$ और $1 = \log_2 2$

$y = 4$; $x = 2$ अर्थात् $2^2 = 4$ और $2 = \log_2 4$

$y = 8$; $x = 3$ अर्थात् $2^3 = 8$ और $3 = \log_2 8$

अर्थात, वर्क पर **y** - निर्देशांक का कोई भी बिंदु 2 का यदि **x** वाँ घातांक है तथा वक्र पर **x** - अक्ष का कोई भी बिंदु **y** - निर्देशांक का 2 आधार वाला लघुगणक होगा।

यदि $\boldsymbol{2^y = 25}$ हो तो इसे हम $\boldsymbol{y = \log_{10}{}^{25}}$ या $\boldsymbol{y = \log 25}$ या के रुप में लिखते है।

10 आधार वाले लघुगणक को सामान्य लघुगणक कहते है।

यह किजिए

(1) निम्नलिखीत पदों को लघुगणित रुप में लिखिए।

(i) $7 = 2^x$ (ii) $10 = 5^b$ (iii) $\frac{1}{81} = 3^c$ (iv) $100 = 10^z$ (iv) $\frac{1}{257} = 4^a$

(2) निम्नलिखित पदों को घातांक के रुप में लिखो।

(i) $\log_{10}100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$ घातांक

प्रयत्न कीजिए

निम्नलिखित हल किजिए।

(i) $\log_2 32 = x$ (ii) $\log_5 625 = y$ (iii) $\log_{10} 10000 = z$

सोचो और विचार किजिए

(1) $\log_2 0$ का अस्तित्व का होता है? कारण बताइए।

(2) Prove (i) $\log_b b = 1$ (ii) $\log_b 1 = 0$ (iii) $\log_x b^x = x$

लघुगणक के गुणधर्म (Properties of Logarithms)

अनेक अनुप्रयोंगा तथा उन्नत गणित में लघुगणक का अत्यधिक महत्व है। लघुगणित व्यंजको को कुशलता पुर्वक हल करने के लिए उपयोगी कुछ मुलभुत गुणधर्मो को अब हम स्थापित करेंगे।

(1) गुणनफल नियम

घातांक के गुणधर्म क्रमानुगत लघुगणक के गुणधर्म उदाहरर्णाथ जब हम समान आधार वाले संख्याओं को गुणा करते है तो उनके घातांकों को जोडा जाता है।

अर्थात $a^x . a^y = a^{x+y}$

घातांक के इस गुणधर्म को लघुगणक के घातांक से जोडकर उसे गुणनफल नियम कहा गया है।

मान लिजिए a, x तथा y घनात्मक वास्तविक संख्याएँ हो तो जहाँ $a \neq 1$.

प्रमेय (गुणनफल नियम):-

तब $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

अर्थात, लघुगणकों का गुणनफल उनका योग होता है।

मानलो $\log_a x = m$ तथा $\log_a y = n$ होतो $a^m = x$ तथा $a^n = y$ अब

$$xy = a^m\, a^n = a^{m+n}$$

$$\therefore \quad \log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$$

प्रयत्न कीजिए

हम जानते है कि, $\log_{10} 100000 = 5$

दर्शाइए कि हमें $100000 = 1000 \times 100$ लिखने से वही उत्तर प्राप्त होता है या गुणनफल नियम से उत्तर की जाँच किजिए?

यह कीजिए

निम्न लघुगणकों को योग के रुप में दर्शाइए।

(i) 35×46 (ii) 235×437 (iii) 2437×3568

(ii) भाग नियम

जब हम समान आधार वाले संख्याओं का भाग करते है तो उनके घातांको को घटाते है।

अर्थात $$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

इस गुणधर्म को भागफल नियम कहते है।

मान लिजिए *a, x* तथा *y* धनात्मक वास्तविक संख्या हो तो जहाँ $a \neq 1$.

प्रमेय (भाग नियम)

तब $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

उत्पत्ती: मानलो $\log_a x = m$ तथा $\log_a y = n$ हो तो $a^m = x$ तथा $a^n = y$

अब

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

यह कीजिए

निम्न लिखित को लघुगणक के अन्तर के रुप में दर्शाइए।

(i) $\frac{23}{34}$ (ii) $\frac{373}{275}$ (iii) $4325 \div 3734$ (iv) $5055 \div 3303$

सोचो और विचार किजिए

हम जानते है की, $(a^m)^n = a^{mn}$

मानलो $a^m = x$ हो तो $m = \log_a^x$

$x^n = a^{mn}$ हो तो $\log_a^{x^n} = mn$

$= n\log_a^x$ (क्यों ?)

(iii) घातांक नियम

जब घातांक के उपर एक और घातांक लिखा जाता है तो उन दोनों घातांको गुणा करते है।

उदा. $(a^m)^n = a^{m.n}$

इस गुणधर्म को घातांक नियम कहते है।

मान लिजिए a तथा x धनात्मक वास्तविक संख्याएँ है जहाँ $a \neq 0$ तथा n एक वास्तविक संख्या है।

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

एक घातांक वाली संख्या का लघुगणक घातांक तथा लघुगणकीय संख्या का गुणनफल होता है।

प्रयत्न कीजिए

$\log_2 32 = 5$ हो तो बताइए कि इसे $32 = 2^5$ लिखने पर वही उत्तर प्राप्त होगा। तथा इसकी घातांक नियम से जाँच किजिए।

$2^x = 3^5$ हो तो क्या हम x का मूल्य ज्ञात कर सकते है? ऐसे संदर्भो में $3^5 = 243$ हो तो हम x के मूल्य को प्राप्त कर सकते है। जो की, 2^x का मूल्य 243 के समान देगा।

लघुगणक के उपयोग तथा सुत्र के उपयोग से $\log_a x^n = n\log_a x$, हम $3^{25}, 3^{33}$ आदि का मूल्य सरलता से प्राप्त कर सकते है।

$2^x = 3^5$

दोनो ओर आधार 2 वाले लघ

$\log_2^{2^x} = \log_2^{3^5}$

$x\log_2^2 = 5\log_2 3$

$x = 5\ \log_2 3 \qquad \left(\because \log_a x^n = n\ \log_a x \text{ and } \log_a^a = 1\right)$

हमने देखा की, x का मूल्य 5 तथा $\log_2 3$ का गुणनफल होगा।

यह कीजिए

निम्नलिखित प्रश्नों को $\log_a x^n = n \log_a x$ विस्तार किजिए

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\text{logs}_5 8^{50}$ (iii) $\log 5^{23}$ (iv) $\log 1024$

नोट : $\log x = \log_{10} x$

प्रयत्न कीजिए

(i) $\log_2 32$ का मूल्य ज्ञात किजिए (ii) $\log_c \sqrt{c}$ का मूल्य ज्ञात किजिए

(iii) $\log_{10} 0.001$ का मूल्य ज्ञात किजिए (iv) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$ का मूल्य ज्ञात किजिए

सोचो और विचार किजिए

हमें मालुम है की, यदि $7 = 2^x$ तो $x = \log_2 7$ तब $2^{\log_2 7}$ का मूल्य क्या होगा। आपके उत्तर की सत्यता सिध्द किजिए। कुछ और उदाहरणों से $a^{\log_a N}$ का सामान्यीकरण किजिए।

उदाहरण-11. $\log \frac{343}{125}$ का विस्तार कीजिए

हल : जैसे कि आप जानते है, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ अतः $\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

चूँकि $\log_a x^n = m \log_a x$

$= 3\log 7 - 3\log 5$

$\log \frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5).$

उदाहरण-12. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ को केवल एक लघुगणक में लिखिए।

हल : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ (since in $n \log_a x = \log_a x^n$)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ (Since $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \frac{1125}{32}$ (Since $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$)

उदाहरण-13. $3^x = 5^{x-2}$.

हल : $3^x = 5^{x-2}$

दोनों ओर log लगाने पर $\quad \log(3^x) = \log(5^{x-2})$

$x \log_{10}3 = (x-2)\log_1 5$

$$x \log_{10}3 = x\log_{10}5 - 2\log_{10}5$$

$$x\log_{10}5 - 2\log_{10}5 = x \log_{10}3$$

$$x\log_{10}5 - x \log_{10}3 = 2\log_{10}5$$

$$x(\log_{10}5 - \log_{10}3) = 2\log_{10}5$$

$$x = \frac{2\log_{10}5}{\log_{10}5 - \log_{10}3}$$

उदाहरण-14. $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$ में x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : $\log x \quad = 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$

$$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log\sqrt{9} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log 3 - \log 3$$

$\log x \;= \log 25$

$\therefore \quad x = 25$

अभ्यास - 1.5

1. निम्नलिखित के मूल्यों को ज्ञात कीजिए।

(i)	$\log_{25}5$	(ii)	$\log_{81}3$	(iii)	$\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$
(iv)	$\log_7 1$	(v)	$\log_x\sqrt{x}$	(vi)	$\log_2 512$
(vii)	$\log_{10}0.01$	(viii)	$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$	(ix)	$2^{2+\log_2 3}$

2. नीचे दिए गए पदों को log N रूप में लिखकर उसके मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i)	$\log 2 + \log 5$	(ii)	$\log_2 16 - \log_2 2$	(iii) $3\log_{64}4$
(iv)	$2\log 3 - 3\log 2$	(v)	$\log 10 + 2\log 3 - \log 2$	

3. यदि $x = \log_2 3$ और $y = \log_2 5$ दिया गया हो तो निम्नलिखित पदों का मूल्यांकन x और y में कीजिए।
   (i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$
4. विस्तार कीजिए
   (i) $\log 10000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\left(\frac{p^2q^3}{r^4}\right)$ (v) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$
5. यदि $x^2 + y^2 = 25xy$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $2\log(x+y) = 3\log 3 + \log x + \log y$.
6. यदि $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ हो तो $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।
7. यदि $(2.3)^x = (0.23)^y = 1000$ हो तो $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।
8. यदि $2^{x+1} = 3^{1-x}$ हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. (i) $\log 2$ परिमेय है या अपरिमेय ? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।
   (ii) $\log 100$ परिमेय है या अपरिमेय? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

वैकल्पिक अभ्यास

[यह अभ्यास परीक्षा के लिए नहीं है]

1. क्या 6^n संख्या का अंतिम अंक 5 होगा जहाँ n प्राकृतिक संख्या हैं? कारण बताइए।
2. क्या $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ संयुक्त संख्या है? आपके उत्तर का औचित्य बताइए।
3. सिद्ध कीजिए कि $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$ अपरिमेय संख्या है। और यह भी जाँच कीजिए कि $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$ परिमेय है या अपरिमेय है।
4. यदि $x^2 + y^2 = 6xy$ सिद्ध कीजिए कि $2\log(x+y) = \log x + \log y + 3\log 2$
5. यदि $\log_{10} 2 = 0.3010$ हो तो 4^{2013} में अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

सूचना: संख्या के पूर्णांकीय भाग और दशमलव भाग के बारे में आपके अध्यापक से पूछिये।

प्रस्तावित परियोजना

युक्लिद अल्गोरिदम - (म.स.भा)

- रंगीन रीबनों से या ग्रीड पेपर की सहायता से युक्लिद अल्गोरिदम द्वारा म.स.भा ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की

1. युक्लिद की विभाजन पद्धति : a तथा b दिए गए पूर्णांक हो तो q तथा r पूर्ण संख्याएँ होगी जो $a = bq + r,\ 0 < r < b$ को संतृप्त करते है?
2. अंक गणित का मूलभूत प्रमेय कथित करता है कि प्रत्येक संयुक्त संख्या इसके रूढी गुणनखण्डों के गुणा में व्यक्त कर सकते है। यह गुणनखण्ड अद्‌वितीय रहता है, जहाँ गुणनखण्डों के क्रम विचारणीय नहीं है।
3. यदि p अभाज्य है और p से a^2 विभाजित है जहाँ a धन पूर्णांक है, तब p से a विभाजित है।
4. माना कि x परिमेय संख्या है जिसका दशमलव विस्तार आवर्त है। तब हम x को $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त कर सकते है, जहाँ p और q अभाज्य गुणन खण्ड 2^n5^m के रूप में रहता है जहाँ n, m अ-ऋणात्मक पूर्णांक है।
5. माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या है q के अभाज्य 2^n5^m के रूप में है। जहाँ n, m अऋणात्मक पूर्णांक है तब x का दशमलव विस्तार आवर्त रहता है।
6. माना कि $x = \frac{p}{q}$ परिमेय संख्या है इस प्रकार है कि q के अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में नही है जहाँ n, m अ-ऋणात्मक पूर्णांक है। तब x का दशमलव विस्तार अनावर्त, पुनरावर्त रहता है।
7. हम $\log_a x = n$ से परिभाषित करते है, यदि $a^n = x$, जहाँ a और x धन पूर्णांक है और $a \neq 1$.
8. लघुगणक के नियम :

   (i) $a^{\log_a N} = N$ (ii) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

   (iii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (iv) $\log_a x^m = m \log_a x$
9. अभियांत्रिकी, विज्ञान, व्यापार और अर्थशास्त्र में सभी प्रकार की गणना के लिए लघुगणक का उपयोग किया जाता है।