

घात और घातांक (EXPONENTS AND POWER)

11

11.0 परिचय

- 1- सन 2011 की जनगणना के अनुसार भारत की जनसंख्या लगभग 1,20,00,00,000 है।
- 2 - सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी लगभग 15,00,00,000 कि.मी है।
- 3 - शून्य में प्रकाश की गति 30,00,00,000 मी/सेकंड है। एक सेकंड में प्रकाश 30,00,00,000 मी. दूरी तय करता है।
- 4 - सन 2011 की जनगणना के अनुसार आन्ध्रप्रदेश की जनसंख्या लगभग 8,50,00,000 है।

ऊपर दी गई संख्याएँ सभी बड़ी हैं। क्या वे आसानी से पढ़ी, लिखी व समझी जा सकती हैं। कदापि नहीं।

घात और घातांक की सहायता से हम ऐसी बड़ी संख्याओं को आसानी से पढ़ सकते हैं। इस अध्याय में हम घात और घातांक तथा उसके नियमों को पूर्ण रूप से पढ़ेंगे।

11.1 गुणा का विस्तार रूप

निम्न में बार-बार दोहराये जानेवाली योग संख्याएँ :

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

गुणा के नियमानुसार संक्षिप्त में हम बार-बार दोहरायी जानेवाली समान राशि की योग संख्याओं की हम 5×4 , 6×5 , 8×7 के रूप में लिखते हैं।

क्या हम गुणांक विधि से दोहरायी जानेवाली संख्या को सरलता से जान सकेंगे।

निम्नलिखित का अवलोकन कीजिए।

सन 2011 की जनगणना के अनुसार बिहार की जनसंख्या लगभग 10,00,00,000 है।

यहाँ पर 10 को अपने आप से 8 बार गुणा किया गया है। वह है
- $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

हम बिहार की जनसंख्या को 10^8 के रूप में लिख सकते हैं। यहाँ 10 आधार कहलाता है और 8 उसका घातांक कहलाता है। हम उसे 10 का घातांक 8 के रूप में पढ़ते हैं। शून्य में प्रकाश की गति 30,00,00,000 मी/से है। इसे हम घात रूप में 3×10^7 मी से लिखते हैं। यहाँ पर 10 आधार है और 8 उसका घातांक।

सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी लगभग 15,00,00,000 कि.मी है। इसे 15×10^7 के रूप में लिखते हैं। इसमें 10 आधार है और 7 उसका घातांक।
सन् 2011 की जनगणना के अनुसार आन्ध्रप्रदेश की जनसंख्या लगभग 8,50,00,000 है। इसे हम 85×10^6 रूप में लिखते हैं। यहाँ पर 10 को आधार और 6 को घातांक कहते हैं।
हम दी गई संख्या के विस्तार रूप को घातांक के रूप में लिख सकते हैं।

$$\begin{aligned}\text{उदाहरणतः } 36584 &= (3 \times 10000) + (6 \times 1000) + (5 \times 100) + (8 \times 10) + (4 \times 1) \\ &= (3 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (4 \times 1)\end{aligned}$$

हल करो -

1. निम्न लिखित को घात रूप में लिखिए।
 - (i) पृथ्वी के सम्पूर्ण तल का क्षेत्रफल 510,000 वर्ग कि.मी है।
 - (ii) राजस्थान की जनसंख्या लगभग 7,00,00,000 है।
 - (iii) पृथ्वी की आयु लगभग 4550 मिलियन वर्ष है।
 - (iv) 1000 कि.मी को मीटर में बदलो
2. घातांकों का प्रयोग करते हुए विस्तार रूप में लिखो
 - (i) 48951 (ii) 89325



11.1.1 भिन्न-भिन्न आधारों के घातांक (Exponents with other bases)

इससे पहले हमने देखा कि सभी घात संख्याओं का आधार 10 था, आधार अन्य राशियों का भी हो सकता है। उदाहरण $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

यहाँ पर 3 आधार है और 4 उसका घातांक।

इसी तरह $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

यहाँ पर 5 आधार और 3 उसका घातांक है।

उदाहरण 1 - निम्न में कौन सी संख्या बड़ी है।

3^4 या 4^3 ?

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$81 > 64$$

इसलिए $3^4 > 4^3$



यह कीजिए

1. क्या 3^2 समान है 2^3 के? जाँच करो।
2. निम्न संख्याओं को घात रूप में लिखो उनके 1- आधार 2 - घातांक
3- इस नियम को किस प्रकार पढ़ा जाता है? लिखो।
(i) 32 (ii) 64 (iii) 256 (iv) 243 (v) 48



वर्ग और घन (घातांक में)

किसी राशि के आधार का घातांक 2 या 3 हो तो उन घातांको को विशेष नाम दिया गया है।

$10^2 = 10 \times 10$ इसे 10 का घातांक 2 या 10 का वर्ग कह कर पढ़ा जाता है।

$4^2 = 4 \times 4$ इस प्रकार इसे 4 का घातांक 2 या 4 का वर्ग कह कर पढ़ा जाता है।

$10 \times 10 \times 10 = 10^3$ को 10 का घातांक 3 या 10 घन कह कर पढ़ा जाता है।

इसी प्रकार $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ को 6 का घातांक 3 या 6 का घन कह कर पढ़ा जाता है।

साधारण किसी घनात्मक का सांकेतिक रूप a को आधार के रूप में लिखा जाता है।

$a \times a = a^2$ (इसे a का घातांक 2 या a का वर्ग कह कर पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a = a^3$ (इसे a का घातांक 3 या a का घन कह कर पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (इसे a का घातांक 4 कहकर पढ़ा जाता है)

_____ $= a^5$ (_____)

_____ $= a^6$ (_____) आदि

साधारण हम कह सकते हैं कि $a \times a \times a \times a \times a \times a \times \dots$ 'm' बार को हम $= a^m$ संकेत द्वारा है यहाँ 'a' आधार है और 'm' घातांक

यह कीजिए

1. निम्न लिखित को विस्तार रूप में लिखो -
(i) p^7 (ii) l^4 (iii) s^9 (iv) d^6 (v) z^5
2. निम्न लिखित गुणनफलों को घात रूप में लिखो
(i) $a \times a \times a \times \dots$ 'l' बार
(ii) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \dots$ 'n' बार
(iii) $q \times q \times q \times q \times q \dots$ 15 बार
(iv) $r \times r \times r \times \dots$ 'b' बार



11.2 राशियों के रूढ़ खण्डों को घात रूप में इस प्रकार लिखा जाता है

आइए जाने कि नीचे लिखी संख्याओं के गुणनफल की रूढ़ संख्याएँ हो तो उन्हें घात रूप में कैसे लिखा जाता है।

(i) 432 (ii) 450

हल (i):

$$\begin{aligned} 432 &= 2 \times 216 \\ &= 2 \times 2 \times 108 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 54 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) \\ &= 2^4 \times 3^3 \end{aligned}$$

इसलिए, $432 = 2^4 \times 3^3$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

(ii) 450 = 2 × 225

$$\begin{aligned} &= 2 \times 3 \times 75 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 25 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \\ &= 2 \times 3^2 \times 5^2 \end{aligned}$$

इसलिए, $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

यह कीजिए

निम्न के गुणनफल जो रूढ़ संख्याएँ हों तो उन्हें घात के रूप में लिखा

(i) 2500 (ii) 1296 (iii) 8000 (iv) 6300



अभ्यास - 1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के आधार व घातांक लिखो तथा इनका विस्तार रूप लिखो

(i) 3^4 (ii) $(7x)^2$ (iii) $(5ab)^3$ (iv) $(4y)^5$

2. निम्नलिखित को घात रूप में लिखो

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

3. निम्नलिखित के गुणनफलों को रूढ़ संख्या के घात रूप में लिखो
 (i) 288 (ii) 1250 (iii) 2250 (iv) 3600 (v) 2400
4. निम्न में बड़ी संख्या कौनसी है? दर्शाओ
 (i) 2^3 या 3^2 (ii) 5^3 या 3^5 (iii) 2^8 या 8^2
5. यदि $a=3, b=2$ हो तो (i) $a^b + b^a$ (ii) $a^a + b^b$ (iii) $(a+b)^b$ (iv) $(a-b)^a$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

11.3 घात के नियम (Laws of exponents)

कुछ नियमों द्वारा घात राशियों को सरलतापूर्वक गुणा कर सकते हैं। इन नियमों की चर्चा हम करते हैं।

11.3.1 समान आधार वाली राशियों का गुणा

उदा 2 : $2^4 \times 2^3$

हल : $2^4 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

4 बार 3 बार

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$ इसके समान ही 2^{4+3}

(जैसे $4 + 3 = 7$)

इसलिए, $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3}$

उदा 3: $5^2 \times 5^3$

हल : $5^2 \times 5^3 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5)$

2 बार 3 बार

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^5$ और इसको समान ही 5^{2+3}

(जैसे $2 + 3 = 5$)

इसलिए, $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3}$

यह कीजिए

$2^4, 2^3$ और 2^7 मूल्य ज्ञात करो।

जाँच करो $2^4 \times 2^3 = 2^7$

$5^2, 5^3$ और 5^5 का मूल्य ज्ञात करो और जाँच करो कि $5^2 \times 5^3 = 5^5$



उदा 4 : $a^4 \times a^5$

हल : $a^4 \times a^5 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a)$
 $= (a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a)$
 $= a^9$ यह समान है a^{4+5} के (यहाँ $4 + 5 = 9$)

इसलिए, $a^4 \times a^5 = a^{4+5}$

ऊपर बताए गए उदाहरणों के आधार पर हम कह सकते हैं कि

$a^m \times a^n = (a \times a \times a \dots \dots \dots 'm' \text{ बार}) \times (a \times a \times a \times \dots \dots \dots 'n' \text{ बार}) = a^{m+n}$

यदि 'a', कोई अकरणीय संख्या है और 'm', 'n' घन पूर्णांक घातांक हो तो

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

हल करो

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ सूत्र की सहायता से निम्न प्रश्नों को हल करो

(i) $3^{11} \times 3^9$ (ii) $p^5 \times p^8$

2. नीचे लिखे प्रश्नों का मूल ज्ञान करो | यहाँ k एक अकरणीय संख्या है |

(i) $k^3 \times k^4 = k^?$ (ii) $k^{15} \times k^? = k^{31}$



11.3.2 घात पर घात (Exponent of Exponent)

उदा 5 : हल करो $(3^2)^3$

हल : यहाँ ' 3^2 ' में आधार है 3^2 और घातांक ' 3 ' है

$$\begin{aligned}(3^2)^3 &= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \\ &= 3^{2+2+2} \text{ (समान आधार वाले संख्या के घात पर घात का गुणा)} \\ &= 3^6 \text{ इसके समान है } 3^{2 \times 3} \quad (2 \times 3 = 6)\end{aligned}$$

इसलिए, $(3^2)^3 = 3^{2 \times 3}$

यह कीजिये :

3^2 के घन को 3^6 में व्यक्त कीजिये और जाँच कीजिये कि $(3^2)^3 = 3^6$?

उदा 6: चलो हल करते हैं $(4^5)^3$

हल : $(4^5)^3 = 4^5 \times 4^5 \times 4^5$

$= 4^{5+5+5}$ (समान आधार वाले संख्या के घात पर घात का गुणा)

$= 4^{15}$ इसके समान है $4^{5 \times 3}$ (as $5 \times 3 = 15$)

इसलिए, $(4^5)^3 = 4^{5 \times 3}$

उदा 7: $(a^m)^4$

हल : $(a^m)^4 = a^m \times a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m+m}$ (समान आधार वाले संख्या के घात पर घात का गुणा)

$= a^{4m}$ इसके समान है $a^{m \times 4}$ (as $4 \times m = 4m$)

इसलिए, $(a^m)^4 = a^{m \times 4}$

उपर्युक्त उदाहरणों के आधार पर हम कह सकते हैं कि $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \dots n$ बार
 $= a^{m+m+\dots n \text{ बार}} = a^{mn}$

जब $a \neq 0$ के लिये a अकरणीय संख्या हो और
 m, n घन पूर्णांक हो, तो $(a^m)^n = a^{mn}$

11.3.3 गुणनफल के घातांक

उदा 8: मान लो $3^5 \times 4^5$

हल : यहाँ 3^5 और 4^5 में घातांक समान है आधार 5 अलग अलग है

$3^5 \times 4^5 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)$

$= (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4)$

$= (3 \times 4)^5$

इसलिए, $3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5$



उदा 9: मान लो $4^4 \times 5^4$

हल : यहाँ 4^4 और 5^4 में घातांक समान है, आधार 4 अलग अलग है

$4^4 \times 5^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5)$

$= (4 \times 5)^4$

इसलिए, $4^4 \times 5^4 = (4 \times 5)^4$

उदा 10 : हल करो $p^7 \times q^7$

हल : यहाँ पर p^7 और q^7 के घातांक समान हैं वे हैं 7 पर आधार भिन्न-भिन्न हैं ।

$$\begin{aligned} p^7 \times q^7 &= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p) \times (q \times q \times q \times q \times q \times q \times q) \\ &= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times q \times q \times q \times q \times q \times q \times q) \\ &= (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \\ &= (p \times q)^7 \end{aligned}$$

इसलिए, $p^7 \times q^7 = (p \times q)^7$

उपर्युक्त उदाहरण का निष्कर्ष है कि $a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m$

$a^m \times b^m = (ab)^m$, जहाँ a और b एक अकरणीय संख्या है और m एक घन पूर्णांक संख्या है ।

यह कीजिए

$a^m \times b^m = (a \times b)^m$ सूत्र का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्नों को हल करो :

- (i) $(2 \times 3)^4$ (ii) $x^p \times y^p$ (iii) $a^8 \times b^8$ (iv) $(5 \times 4)^{11}$



11.3.4 भागफल के घात का नियम

भागफल के घात के नियम से पहले हम घातांक के ऋण पूर्ण संख्याओं पर चर्चा करेंगे ।

11.3.4(a) ऋणात्मक घातांक (Negative exponents)

निम्न पर ध्यान दे

$$2^5 = 32$$

$$2^4 = 16$$

$$2^3 = 8$$

$$2^2 = 4$$

$$2^1 = 2$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{-1} =$$

(Hint: half of 1)

$$2^{-2} =$$

$$3^5 = 243$$

$$3^4 = 81$$

$$3^3 = 27$$

$$3^2 = 9$$

$$3^1 = 3$$

$$3^0 = 1$$

$$3^{-1} =$$

(Hint: one-third of 1)

$$3^{-2} =$$

32 कौनसा भाग 16 है?

2^5 और 2^4 ? में अंतर ज्ञात करो

आपने देखा कि घातांक की संख्या एक घटने पर राशि का मान पहले से आधा हो जाता है, उपर्युक्त उदा- के अनुसार हम कह सकते हैं,

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ और } 2^{-2} = \frac{1}{4} \text{ और}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ और } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

अधिक जानकारी के लिए हम देखते हैं कि $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

इसी प्रकार, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ और $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$



a कोई अकरणीय संख्या है और n कोई पूर्णांक हो तो

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

हल करो

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, सूत्र का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्नों को हल करो

(i) x^{-7}

(ii) a^{-5}

(iii) 7^{-5}

(iv) 9^{-6}



11.3.4(b) शून्य घातांक

ऊपर के नियमों के प्रयोग से हम देखते हैं कि

$$2^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

$$4^0 = 1$$

$5^0 = 1$ और इस तरह

शून्य के अलावा सभी 'a' पूर्णाकों के लिए

$$a^0 = 1$$

11.3.4(c) विभाजन का घात नियम जब आधार समान हो

उदा 11: हल करो $\frac{7^7}{7^3}$

$$\begin{aligned}\text{हल : } \frac{7^7}{7^3} &= \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \\ &= 7^4 \text{ इस प्रकार लिखा जाता है } 7^{7-3} \quad (\text{यहाँ पर } 7 - 3 = 4)\end{aligned}$$

$$\text{इसलिए, } \frac{7^7}{7^3} = 7^{7-3}$$

उदा 12: हल करो $\frac{3^8}{3^3}$

$$\begin{aligned}\text{हल : } \frac{3^8}{3^3} &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 3^5 \text{ इस प्रकार लिखा जाता है } 3^{8-3} \quad (\text{यहाँ पर } 8 - 3 = 5)\end{aligned}$$

$$\text{इसलिए, } \frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3}$$

उदा 13: हल करो $\frac{5^5}{5^8}$

$$\begin{aligned}\text{हल : } \frac{5^5}{5^8} &= \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^3} \\ \frac{1}{5^3} &\text{ इस प्रकार लिखा जाता है } \frac{1}{5^{8-5}} \quad (\text{यहाँ पर } 8 - 5 = 3)\end{aligned}$$

$$\text{इसलिए, } \frac{5^5}{5^8} = \frac{1}{5^{8-5}}$$

उदा 14: हल करो $\frac{a^2}{a^7}$

$$\begin{aligned}\text{हल : } \frac{a^2}{a^7} &= \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a \times a \times a \times a \times a} \\ &= \frac{1}{a^5} \text{ इस प्रकार लिखा जाता है } \frac{1}{a^{7-2}} \quad (\text{यहाँ पर } 7 - 2 = 5)\end{aligned}$$

$$\text{इसलिए, } \frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^{7-2}} = \frac{1}{a^5}$$

उपर्युक्त उदाहरणों के आधार पर हम कह सकते हैं कि

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ यदि } m > n \text{ और } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ if } m < n$$

यह $a=0$ और m, n एक घन पूर्णांक है

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ यदि } m > n \text{ और } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ if } n > m$$

क्या होगा यदि $m=n$ हो? उत्तर दो

उदा 15 : हल करो $\frac{4^3}{4^3}$

हल : $\frac{4^3}{4^3} = \frac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{1} = 1 \dots\dots (1)$



यह हम जानते हैं कि $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

इसलिए ज्ञात करो $\frac{7^4}{7^4} = ?$

(1 के आधार पर)

उपर्युक्त उदाहरण में आपने क्या देखा

हम कह सकते हैं $\frac{a^4}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = 1$

पर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ के आधार पर (नियमानुसार)

हम पाते हैं $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1$

यहाँ ध्यान दे m, n ($m=n$) जहाँ $a=0$

हम पाते हैं $a^0=1$

यदि $m=n$ है तो $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = 1}$

यह कीजिए

1. a^{m-n} या $\frac{1}{a^{n-m}}$ सूत्र के आधार पर निम्न प्रश्न हल करो

(i) $\frac{13^8}{13^5}$ (ii) $\frac{3^4}{3^{14}}$



2. उचित संख्या से रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

उदा : $\frac{8^8}{8^3} = 8^{[8-3]} = 8^{[5]}$

(i) $\frac{12^{12}}{12^7} = 12^{[]} = 12^{[]}$ (ii) $\frac{a^{18}}{a^{[]}} = a^{[]} = a^{[10]}$

11.3.4(c) समान घातांकों से पदों का विभाजन

उदा 16: $\left(\frac{7}{4}\right)^5$

हल : $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$
 $= \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$
 $= \frac{7^5}{4^5}$ (परिभाषा के अनुसार)

इसलिए, $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7^5}{4^5}$

उदा 17: $\left(\frac{p}{q}\right)^6$

हल : $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right)$
 $= \frac{p \times p \times p \times p \times p \times p}{q \times q \times q \times q \times q \times q}$

$$= \frac{p^6}{q^6} \quad \text{परिभाषा के अनुसार}$$

$$\text{इसलिए, } \left(\frac{p}{q}\right)^6 = \frac{p^6}{q^6}$$

उपर्युक्त उदाहरण के आधार पर हम कह सकते हैं

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \times a \times a \times a \times \dots \times a \text{ 'm' times}}{b \times b \times b \times b \times \dots \times b \text{ 'm' times}} = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\text{यदि } a=0, b=0 \text{ हो और } m \text{ एक घन पूर्णांक हो तो } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

हल करो

1. रिक्त स्थान भरें

$$(i) \quad \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{\boxed{}}$$

$$(ii) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\boxed{}} = \frac{3^5}{2^5}$$

$$(iii) \quad \left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$(iv) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \frac{\boxed{}}{y^{11}}$$



11.3.5 ऋणात्मक आधार के पद

उदा 18 : विस्तार $(1)^4, (1)^5, (1)^7, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5$

हल : $(1)^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$$

$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

उपर्युक्त हल के आधार पर हमने देखा

(i) 1 का घातांक 1 है तो उत्तर भी 1 .

(ii) (-1) का यदि घातांक ऋणात्मक विषम संख्या हो तो उत्तर (-1) होगा, यदि घातांक ऋणात्मक सम संख्या हो तो परिणाम (+1) होगा.

$$(-a)^m = -a^m \text{ यदि 'm' विषम संख्या है}$$

$$(-a)^m = a^m \text{ यदि 'm' सम संख्या है}$$

आइए हम कुछ अन्य उदाहरण देखे।

$$(-3)^4 = (-3) (-3) (-3) (-3) = 81$$

$$(-a)^4 = (-a) (-a) (-a) (-a) = a^4$$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} = \frac{1}{-a^3} = \frac{-1}{a^3}$$

उदा 19 : $\frac{-27}{125}$ घातांक रूप में लिखो।

$$\text{हल : } -27 = (-3) (-3) (-3) = (-3)^3$$

$$125 = 5 \times 5 \times 5 = (5)^3$$

$$\text{इसलिए, } \frac{-27}{125} = \frac{(-3)^3}{(5)^3} \quad \text{as } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\text{यहाँ, } \frac{-27}{125} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$$

यह कीजिए

1. विस्तार रूप में लिखो

(i) $(a)^{-5}$ (ii) $(-a)^4$ (iii) $(-7)^{-5}$ (iv) $(-a)^m$

2. घात रूप में लिखो।

(i) $(-3) \times (-3) \times (-3)$ (ii) $(-b) \times (-b) \times (-b) \times (-b)$

(iii) $\frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \dots \dots \text{'m' बार}$





अभ्यास - 2

1. घात नियमों का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्न हल करो।

- (i) $2^{10} \times 2^4$ (ii) $(3^2) \times (3^2)^4$ (iii) $\frac{5^7}{5^2}$
- (iv) $9^2 \times 9^{18} \times 9^{10}$ (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^8$ (vi) $(-3)^3 \times (-3)^{10} \times (-3)^7$
- (vii) $(3^2)^2$ (viii) $2^4 \times 3^4$ (ix) $2^{4a} \times 2^{5a}$
- (x) $(10^2)^3$ (xi) $\left[\left(\frac{-5}{6}\right)^2\right]^5$ (xii) $2^{3a+7} \times 2^{7a+3}$
- (xiii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (xiv) $(-3)^3 \times (-5)^3$ (xv) $\frac{(-4)^6}{(-4)^3}$
- (xvi) $\frac{9^7}{9^{15}}$ (xvii) $\frac{(-6)^5}{(-6)^9}$ (xviii) $(-7)^7 \times (-7)^8$
- (xix) $(-6^4)^4$ (xx) $a^x \times a^y \times a^z$

2. 3^{-4} को किस संख्या से गुणा करने पर परिणाम 729 होगा?

3. यदि $5^6 \times 5^{2x} = 5^{10}$, हो तो x का मूल्य ज्ञात करो।

4. ज्ञात करो $2^0 + 3^0$

5. हल करो $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^a \times \left(\frac{x^b}{x^a}\right)^a \times \left(\frac{x^a}{x^a}\right)^b$

6. सत्य/असत्य जाँच कर उत्तर दीजिये।

- (i) $100 \times 10^{11} = 10^{13}$ (ii) $3^2 \times 4^3 = 12^5$ (iii) $5^0 = (100000)^0$
- (iv) $4^3 = 8^2$ (v) $2^3 > 3^2$ (vi) $(-2)^4 > (-3)^4$
- (vii) $(-2)^5 > (-3)^5$



परियोजना कार्य

अपने पड़ोस के किन्हीं दस परिवारों की मासिक आय की जानकारी एकत्रित करे, उन्हें हजार या लाख में पूर्ण संख्या बनाकर प्रत्येक परिवार की आय को घात रूप में प्रकट करें।

11.3.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

पृथ्वी का (भार) लगभग 5967×10^{21} कि.ग्रा है। सौर मण्डल की एक छोर से दूसरी छोर की चौड़ाई लगभग 946×10^5 कि.मी है।

इन सभी अंकों की तुलना हम आसानी से नहीं कर सकते। कुछ नियमों से हम सूचित कर सकते हैं कि पृथ्वी का भार लगभग 5.976×10^{24} कि.ग्रा है। सौर मण्डल की एक छोर से दूसरी छोर की चौड़ाई 9.46×10^7 कि.मी है।



अभ्यास - 3

निम्न संख्याओं के घात नियमानुसार सूचित करो।

- पृथ्वी और चन्द्रमा के मध्य की दूरी लगभग 384000000 मी. है।
- सम्पूर्ण विश्व लगभग 12,000,000,000 वर्ष पुराना है।
- सौर मण्डल के मध्य स्थित सूर्य और अन्तरिक्ष की दूरी लगभग 300,000,000,000,000,000,000 मी. है।
- पृथ्वी के भूभाग से समुद्री भाग लगभग 1,353,000,000 घन कि.मी. है।



अवलोकन करो

- बड़ी राशियों को घात के रूप में लिखने से आसानी से पढ़ा और समझा जा सकता है।
- $10,000 = 10^4$ (10 का घातांक 4); $243 = 3^5$ (3 का घातांक 5); $64 = 2^6$ (2 का घातांक 6). इन उदाहरणों में 10, 3, 2 आधार है और 4, 5, 6 उनके घातांक।
- घात नियम के अनुसार : $a \neq 0, b \neq 0$ और m और n का घन पूर्णांक हो तब

$$(i) \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (ii) \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (iii) \quad a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$(iv) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (v) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ if } m > n$$

$$(vi) \quad \frac{a^m}{b^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ यदि } n > m \quad (vii) \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(viii) \quad a^0 = 1 \text{ (जहाँ } a \neq 0)$$