দ্বিতীয় অধ্যায়

বহুপদ (Polynomials)

2.1 অৱতাৰণা (Introduction) :

আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে ইতিমধ্যে বীজগণিতীয় ৰাশি, সিহঁতৰ যোগ, বিয়োগ, পূৰণ আৰু হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিলা। ইয়াৰোপৰি, কিছুমান বীজগণিতীয় ৰাশিৰ উৎপাদক কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰে তাৰ বিষয়েও অধ্যয়ন কৰিলাহঁক। তোমালোকে তলৰ অভেদ কেইটা মনত পেলাব পাৰা :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

আৰু, $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

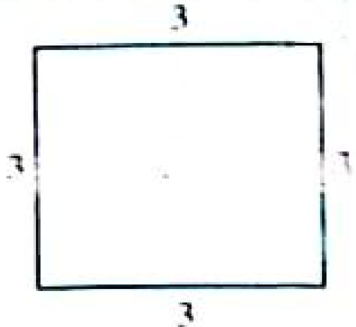
লগতে উৎপাদক বিশ্লেষণত ইহঁতৰ প্ৰয়োগৰ কথাও মনত পেলোৱা। এই অধ্যায় আমি 'বহুপদ' বোলা বিশেষ ধৰণৰ বীজগণিতীয় ৰাশি আৰু ইয়াৰ লগত সংগতি থকা পৰিভাষাসমূহৰ অধ্যয়নৰ লৈ আৰম্ভ কৰিম। আমি ভাগশেষ উপপাদ্য আৰু উৎপাদক উপপাদ্য আৰু বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণত ইয়াৰ ব্যৱহাৰৰ বিষয়েও অধ্যয়ন কৰিম। ইয়াৰ উপৰিও আৰু কিছুমান বীজগণিতীয় অভেদ আৰু উৎপাদক বিশ্লেষণ আৰু কিছুমান প্ৰদত্ত বীজগণিতীয় ৰাশিৰ মান নিৰ্ণয়ত এইবোৰৰ প্ৰয়োগ সমন্ধেও অধ্যয়ন কৰিম।

2.2 এক চলক যুক্ত বহুপদ :

যিকোনো বাস্তৱ মান ল'ব পৰা এটা চিহ্নৰে সূচিত কৰা পদকে 'চলক' বোলে। কথাষাৰ মনত পেলাই আমি আলোচনা আৰম্ভ কৰোঁ আহা। আমি চলক এটা x, y, z আদি বৰ্ণৰে সূচিত কৰোঁ। মন কৰা যে $2x$, $3x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$ আদি বীজগণিতীয় ৰাশি। এই সকলো ৰাশি (এটা ধ্ৰুৱক) $\times$

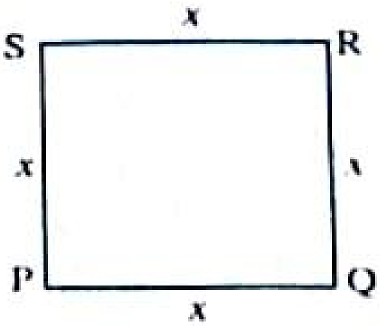
x আকাৰৰ। ধৰা, আমি এনে এটা ৰাশি (এটা ধ্ৰুৱক) × (এটা চলক) লিখিব খোজো য'ত ধ্ৰুৱক কি আমি নাজানো। এনেক্ষেত্ৰত আমি a, b, c আদিৰে লিখোঁ। গতিকে ৰাশিটো হ'ব ax (ধৰোঁ)।

যি কি নহওঁক, এটা চলক আৰু এটা ধ্ৰুৱক সূচিত কৰা আখৰৰ মাজত পাৰ্থক্য আছে। এক বিশেষ সমস্যা তথা অৱস্থাত ধ্ৰুৱকৰ মানবোৰ একেই থাকে অৰ্থাৎ এক নিৰ্দিষ্ট সমস্যাত ধ্ৰুৱকৰ মানবোৰৰ পৰিবৰ্তন নহয় কিন্তু চলকৰ মান পৰিবৰ্তনশীল হ'ব পাৰে।



চিত্ৰ 2.1

এতিয়া, এটা বৰ্গ (চিত্ৰ 2.1) বিবেচনা কৰা যাৰ বাহু 3 একক। ইয়াৰ পৰিসীমা কি? তোমালোকে জানা যে, বৰ্গৰ পৰিসীমা হ'ল ইয়াৰ চাৰিটা বাহুৰ দীঘৰ সমষ্টি। ইয়াৰ প্ৰতিটো বাহুৰ দীঘ 3 একক। সেয়ে বৰ্গটোৰ পৰিসীমা হ'ব 4 × 3 অৰ্থাৎ 12 একক। যদি বৰ্গটোৰ প্ৰতিটো বাহুৰ দীঘ 10 একক হয় তেন্তে পৰিসীমা কিমান? পৰিসীমা হ'ব 4 × 10 অৰ্থাৎ 40 একক। যদি বাহুৰ দীঘ x একক হয় তেন্তে পৰিসীমা হ'ব $4x$ একক। গতিকে বাহুৰ দীঘ সলনি হ'লে পৰিসীমাও সলনি হয়। PQRS বৰ্গটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবানে? ই হ'ল $x \times x = x^2$ বৰ্গ একক। x^2 এটা বীজগণিতীয় ৰাশি।



চিত্ৰ 2.2

তোমালোক $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ আদি বীজগণিতীয় ৰাশিৰ লগতো পৰিচিত। মন কৰা যে বৰ্তমানলৈকে আমি বিবেচনা কৰা সকলো বীজগণিতীয় ৰাশিত মাথোঁ পূৰ্ণ সংখ্যাহে চলকৰ সূচক আকাৰত পাওঁ। এনেধৰণৰ ৰাশিক এক চলকযুক্ত বহুপদ বোলে। ওপৰৰ উদাহৰণ বিলাকত চলক হ'ল x। উদাহৰণ স্বৰূপে, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ এটা x চলকযুক্ত বহুপদ। এনেদৰে, $3y^2 + 5y$ এটা y চলকযুক্ত বহুপদ, আৰু $t^2 + 4$, t চলকযুক্ত বহুপদ। $x^2 + 2x$ বহুপদটোত x^2 আৰু $2x$ ৰাশি দুটাক বহুপদটোৰ পদ বোলে। একেদৰে, $3y^2 + 5y + 7$ বহুপদটোৰ তিনিটা পদ ক্ৰমে $3y^2$, $5y$ আৰু 7। $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ বহুপদটোৰ পদবোৰ লিখিব পাৰিবানে? ইয়াৰ 4টা পদ ক্ৰমে $-x^3$, $4x^2$, $7x$ আৰু -2।

বহুপদৰ প্ৰতিটো পদৰে একোটা সহগ থাকে। $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ত x^3 ৰ সহগ -1, x^2 ৰ সহগ 4, x ৰ সহগ 7 আৰু -2 হ'ল x^0 ৰ সহগ (মনত ৰাখিবা $x^0 = 1$)। $x^2 - x + 7$ ত x সহগ কি? ই হ'ল '-1'। '2'ও এটা বহুপদ। প্ৰকৃততে 2, -5, 7 আদি ধ্ৰুৱক বহুপদৰ উদাহৰণ। ধ্ৰুৱক বহুপদ '0' ক শূন্য বহুপদ বোলে। উচ্চ শ্ৰেণীত দেখিবা যে এই বহুপদটোৱে বহুপদৰ সংগ্ৰহৰ মাজত এক বিশেষ ভূমিকা লয়।

এতিয়া, $x + \dfrac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ আৰু $\sqrt[3]{y} + y^2$ ৰ দৰে আকাৰৰ বীজগণিতীয় ৰাশিকেইটা বিবেচনা

কৰা। তোমালোকে জানানে যে $x+\frac{1}{x}=x+x^{-1}$ বুলি লিখিব পাৰি? ইয়াত দ্বিতীয় পদ অৰ্থাৎ x^{-1} ৰ সূচক '−1', যিটো পূৰ্ণসংখ্যা নহয়। সেয়ে, এই বীজগণিতীয় ৰাশিটো এটা বহুপদ নহয়।

আকৌ $\sqrt{x}+3$ ক $x^{\frac{1}{2}}+3$ ৰূপত লিখিব পাৰি। ইয়াত x ৰ সূচক $\frac{1}{2}$, যি পূৰ্ণসংখ্যা নহয়। গতিকে, $\sqrt{x}+3$ এটা বহুপদ নে? নহয়, ই বহুপদ নহয়। $\sqrt[3]{y}+y^2$ ৰ সম্পৰ্কত মতামত কি? এইটোও এটা বহুপদ নহয়, (কিয়?)।

এটা বহুপদৰ যদি, চলক x, তেন্তে বহুপদটোক আমি $p(x)$, $q(x)$, বা $r(x)$ আদিৰে সূচিত কৰিব পাৰোঁ। উদাহৰণ স্বৰূপে—

$$p(x) = 2x^2+5x-3$$
$$q(x) = x^3-1$$
$$r(y) = y^3+y+1$$
$$s(u) = 2-u-u^2+6u^3$$

এটা বহুপদত যিকোনো (সীমিত) সংখ্যক পদ থাকিব পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে $x^{150}+x^{149}+x^{148}+\ldots+x^2+x+1$, এটা 151 টা পদযুক্ত বহুপদ। $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y, আৰু u^4 বহুপদ কেইটা বিবেচনা কৰা। তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছানে যে প্ৰতিটো বহুপদত মাথোঁ এটাহে পদ আছে? যি বহুপদত মাথোঁ এটা পদ থাকে তাক মনমিয়েল (monomials) অৰ্থাৎ একপদ বোলে। {mono মানে এক (one)}।

এতিয়া তলৰ প্ৰতিটো বহুপদকে লক্ষ্য কৰা

$p(x) = x+1$, $q(x) = x^2-x$, $r(y) = y^{30}+1$, $t(u) = u^{43}-u^2$ এই বহুপকেইটাৰ প্ৰত্যেকতে কেইটাকৈ পদ আছে? ইয়াৰ প্ৰতিটো বহুপদতে দুটাকৈ পদ আছে। যি বহুপদত মাথোঁ দুটা পদ থাকে তাক দ্বিপদ (binomial) বোলা হয়। {bi মানে দুই (two)}।

একেদৰে, তিনিটা পদবিশিষ্ট বহুপদক ত্ৰিপদ (trinomials) বোলে। {tri মানে তিনি (three)}। কেইটামান ত্ৰিপদৰ উদাহৰণ হ'ল—

$p(x) = x+x^2+\text{p}$, $\qquad q(x) = \sqrt{2}+x-x^2$

$r(u) = u+u^2-2$ $\qquad t(y) = y^4+y+5$

এতিয়া $p(x) = 3x^7-4x^6+x+9$ বহুপদটো লক্ষ্য কৰা। ইয়াত কোনটো পদত x ৰ সূচক সৰ্বোচ্চ? নিশ্চিতভাৱে ই $3x^7$। এই পদত x ৰ সূচক 7। একেদৰে, $q(y) = 5y^6-4x^2-6$ বহুপদত y ৰ সৰ্বোচ্চ সূচকযুক্ত পদটো হ'ল $5y^6$ আৰু এই পদত y ৰ সূচক হ'ল 6। এটা বহুপদৰ

চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাতক বহুপদটোৰ মাত্ৰা (degree) বোলা হয়। সেয়ে, $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ বহুপদৰ মাত্ৰা 7 আৰু $5y^6 - 4x^2 - 6$ বহুপদৰ মাত্ৰা 6। এই অশূন্য ধ্ৰুৱক বহুপদৰ মাত্ৰা হ'ল '0' (শূন্য)।

উদাহৰণ 1 : তলৰ প্ৰতিটো বহুপদৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰা—

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

সমাধান : (i) চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ল 5, সেয়ে, বহুপদটোৰ মাত্ৰা 5।

(ii) চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ল 8, সেয়ে, বহুপদটোৰ মাত্ৰা 8।

(iii) ইয়াত একমাত্ৰ পদটো হ'ল 2, আৰু $2x^0$ ৰূপত লিখিব পাৰি। সেয়ে, x ৰ সূচক '0'। গতিকে বহুপদটোৰ মাত্ৰা '0'।

এতিয়া $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ আৰু $s(u) = 3 - u$ বহুপদ কেইটালৈ লক্ষ্য কৰা। ইহঁত আটাইকেইটাৰে কিবা সাধাৰণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ্য কৰিছানে? বহুপদ কেইটাৰ প্ৰত্যেকটোৰ মাত্ৰা 'এক'। এক মাত্ৰাযুক্ত বহুপদক ৰৈখিক (Linear) বহুপদ বোলে। এক চলক বিশিষ্ট আৰু কেইটামান ৰৈখিক বহুপদ হ'ল—

$$2x - 1,\ \sqrt{2}y + 1,\ 2 - u$$

এতিয়া x ৰ এটা ৰৈখিক বহুপদ লিখিবলৈ চেষ্টা কৰা য'ত পদ সংখ্যা 3। তোমালোকে এনে কোনো বহুপদ নোপোৱা কাৰণ x ৰ ৰৈখিক বহুপদত অতি বেছি দুটা পদ থাকিব পাৰে। সেয়ে, x ৰ যিকোনো এটা ৰৈখিক বহুপদৰ আকাৰ হ'ল $ax + b$ য'ত a, b ধ্ৰুৱক, $a \neq 0$ (কিয়?)। একেদৰে $ay + b$, y ৰ এটা ৰৈখিক বহুপদ।

এতিয়া তলৰ বহুপদ কেইটালৈ মন কৰা—

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2 \text{ আৰু } x^2 + \frac{2}{5}x$$

তোমালোক সকলো একমত নে যে আটাইকেইটাৰ বহুপদ মাত্ৰা দুই? এটা দুই মাত্ৰাবিশিষ্ট বহুপদক দ্বিঘাত বহুপদ বোলা হয়। দ্বিঘাত বহুপদৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল— $5 - y^2$, $4y + 5y^2$, আৰু $6 - y - y^2$। এটা চলক যুক্ত এনে এটা দ্বিঘাত বহুপদ লিখিব পাৰিবানে য'ত চাৰিটা বিভিন্ন পদ থাকে? তোমালোকে দেখিবা যে এটা চলকযুক্ত দ্বিঘাত বহুপদত অতি বেছি 3টা ভিন্নপদ থাকিব পাৰে। এটা চলকযুক্ত আৰু কিছুমান দ্বিঘাত বহুপদৰ তালিকা প্ৰস্তুত কৰিলে দেখা পাবা যে, x যুক্ত যিকোনো দ্বিঘাত বহুপদৰ আকাৰ $ax^2 + bx + c$, য'ত $a \neq 0$ আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক। একেদৰে y যুক্ত দ্বিঘাত বহুপদ এটাৰ আকাৰ হ'ব $ay^2 + by + c$, যদিহে $a \neq 0$ আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক।

এটা বহুপদৰ মাত্ৰা 3 হ'লে তাক ত্ৰিঘাত বহুপদ বোলে। ত্ৰিঘাত বহুপদৰ কিছুমান উদাহৰণ হ'ল—

$4x^3$, $2x^3+1$, $5x^3+x^2$, $6x^3-x$, $6-x^3$, $2x^3+4x^2+6x+7$ । এক চলকযুক্ত এটা ত্ৰিঘাত বহুপদত কিমান ভিন্ন পদ থাকিব পাৰে বুলি ভাবা? ইয়াত অতি বেছি 4টা পদ থাকিব পাৰে। এই বহুপদক ax^3+bx^2+cx+d (য'ত $a \neq 0$ আৰু a, b, c, d ধ্ৰুৱক) আকাৰত লিখিব পাৰি।

এতিয়া যিহেতু তোমালোকে মাত্ৰা 1 মাত্ৰা 2 বা মাত্ৰা 3 বিশিষ্ট বহুপদৰ আকাৰ কেনে তাক দেখা পালা, তোমালোকে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে n মাত্ৰা বিশিষ্ট এক চলকযুক্ত এটা বহুপদ লিখিব পাৰিবানে? x চলক যুক্ত n মাত্ৰা বিশিষ্ট বহুপদ ৰাশিৰ আকাৰ $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ য'ত $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ধ্ৰুৱক আৰু $a_n \neq 0$ । বিশেষতঃ যদি $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$ (সকলো ধ্ৰুৱক শূন্য), তেন্তে আমি শূন্য বহুপদটো পাম যাক '0' বুলি লিখা হয়। শূন্য বহুপদৰ মাত্ৰা কি? শূন্য বহুপদৰ মাত্ৰা সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

এতিয়ালৈকে আমি মাত্ৰ এটা চলকযুক্ত বহুপদৰ বিষয়েহে আলোচনা কৰিছোঁ। এটাতকৈ বেছি চলকযুক্ত বহুপদো আমি পাব পাৰোঁ। উদাহৰণ স্বৰূপে, x^2+y^2+xyz (য'ত x, y আৰু z চলক) এটা তিনিটা চলকযুক্ত বহুপদ। একেদৰে, $p^2+q^{10}+r$ (য'ত p, q আৰু r চলক), u^3+v^2 (য'ত u আৰু v চলক), ক্ৰমে তিনিটা আৰু দুটা চলকযুক্ত বহুপদ। পিছত, তোমালোকে এনে বহুপদৰ সম্পৰ্কে বিশদভাৱে পঢ়িবলৈ পাবা।

অনুশীলনী 2.1

1. তলৰ কোনকেইটা ৰাশি এটা চলকযুক্ত বহুপদ আৰু কোনকেইটা নহয়? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দিয়া।

   (i) $4x^2-3x+7$ (ii) $y^2+\sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t}+t\sqrt{2}$

   (iv) $y+\dfrac{2}{y}$ (v) $x^{10}+y^3+t^{50}$

2. তলৰ প্ৰতিটোৰে x^2 ৰ সহগ লিখা :

   (i) $2+x^2+x$ (ii) $2-x^2+x^3$ (iii) $\dfrac{\pi}{2}x^2+x$ (iv) $\sqrt{2}x-1$

3. 35 মাত্ৰাযুক্ত এটা দ্বিপদ আৰু 100 মাত্ৰাযুক্ত এটা একপদৰ একোটাকৈ উদাহৰণ দিয়া।

4. তলৰ বহুপদবোৰৰ মাত্ৰা লিখা :

   (i) $5x^3+4x^2+7x$ (ii) $4-y^2$ (iii) $5t-\sqrt{7}$ (iv) 3

5. তলৰ ৰৈখিক, দ্বিঘাত আৰু ত্ৰিঘাত বহুপদবোৰ শ্ৰেণী বিভাজন কৰা :

   (i) x^2+x (ii) $x-x^3$ (iii) $y+y^2+4$ (iv) $1+x$

   (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 বহুপদৰ শূন্য (Zeroes of a Polynomial) :

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ বহুপদটো বিবেচনা কৰা। যদি $p(x)$ ৰ সকলো ঠাইতে আমি x ক 1 ৰে প্ৰতিস্থাপন কৰো তেন্তে, পাওঁ

$$\begin{aligned} p(1) &= 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times 1 - 2 \\ &= 5 - 2 + 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

অৰ্থাৎ আমি ক'ব পাৰোঁ যে, $x = 1$ ত $p(x)$ ৰ মান 4 ।

এনেদৰে, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3 \times 0 - 2$
$= -2$

তোমালোকে $p(-1)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবানে?

উদাহৰণ 2 : তলৰ বহুপদ কেইটাৰ প্ৰতিটোৰে মান চলকৰ নিৰ্দেশিত মানৰ বাবে নিৰ্ণয় কৰা

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, যেতিয়া $x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, যেতিয়া $y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ যেতিয়া $t = a$

সমাধান : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ ৰ বাবে $p(x)$ ৰ মান হ'ল $p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7 = 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ ৰ বাবে $q(y)$ ৰ মান হ'ল $q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11}$
$= 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ ৰ বাবে $p(t)$ ৰ মান হ'ল $p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

এতিয়া, $p(x) = x - 1$ বহুপদটো লক্ষ্য কৰা। $p(1)$ ৰ মান কি? মন কৰা যে,

$p(1) = 1 - 1 = 0$

যিহেতু $p(1) = 0$, এইক্ষেত্ৰত 1 ক $p(x)$ বহুপদটোৰ এটা শূন্য বোলে। একেদৰে তোমালোকে চাব পাৰা যে, $q(x) = x - 2$ ৰ শূন্য হ'ল 2। সাধাৰণতে, আমি কওঁ যে, এটা বহুপদ $p(x)$ ৰ এটা শূন্য এটা সংখ্যা c হ'ব যেতিয়া $p(c) = 0$ ।

তোমালোকে নিশ্চয় মন কৰিছা যে $x - 1$ বহুপদৰ শূন্য বহুপদটোক 0 ৰ লগত সমান কৰি পোৱা যায় অৰ্থাৎ, $x - 1 = 0$, যিয়ে $x = 1$ দিয়ে। আমি $p(x) = 0$ ক বহুপদী সমীকৰণ বুলি কওঁ আৰু 1ক বহুপদী সমীকৰণ $p(x) = 0$ ৰ মূল বোলো। গতিকে, আমি কওঁ যে, 1, $x - 1$ বহুপদৰ শূণ্য বা $x - 1 = 0$ বহুপদী সমীকৰণটোৰ এটা মূল।

এতিয়া, ধ্ৰুবক বহুপদ 5 লোৱা হওক। ইয়াৰ শূণ্য কি ক'ব পাৰিবানে? ইয়াৰ কোনো শূণ্য নাই

কাৰণ x ৰ যিকোনো মানৰ বাবে $5x^0$ ৰ মান 5যেই হৈ থাকিব। বাস্তৱিকতে এটা অশূণ্য ধ্ৰুৱক বহুপদৰ কোনো শূণ্য নাই। শূণ্য বহুপদৰ শূণ্য বুলিলে কি বুজা যাব? পৰম্পৰা অনুসৰি প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাই শূণ্য বহুপদৰ এটা শূণ্য।

উদাহৰণ 3 : $x + 2$ বহুপদৰ শূণ্য -2 আৰু 2 হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান : ধৰা $p(x) = x + 2$। তেতিয়া,

$p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

গতিকে, -2, $x + 2$ বহুপদৰ এটা শূণ্য কিন্তু 2 নহয়।

উদাহৰণ 4 : $p(x) = 2x + 1$ বহুপদৰ এটা শূণ্য নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : $p(x)$ৰ শূণ্য নিৰ্ণয় কৰা মানে $p(x) = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

এতিয়া, $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

অৰ্থাৎ $-\dfrac{1}{2}$, $2x + 1$ বহুপদৰ এটা শূণ্য।

এতিয়া যদি, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ এটা ৰৈখিক বহুপদ হয় তেন্তে $p(x)$ৰ এটা শূণ্য কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰিম? উদাহৰণ 4ৰ পৰা তোমালোকে কিছু আভাস পাইছা নিশ্চয়। এটা বহুপদ $p(x)$ৰ শূণ্য নিৰ্ণয় বুলিলে $p(x) = 0$ বহুপদী সমীকৰণৰ সমাধান কৰা।

এতিয়া, $p(x) = 0$ ৰ পৰা পাওঁ $ax + b = 0$, $a \neq 0$

গতিকে, $ax = -b$

অৰ্থাৎ, $x = -\dfrac{b}{a}$

সেয়ে $x = -\dfrac{b}{a}$, $p(x)$ৰ একমাত্ৰ শূণ্য। অৰ্থাৎ, এটা ৰৈখিক বহুপদৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে শূণ্য থাকে। এতিয়া আমি ক'ব পাৰোঁ যে $x - 1$ৰ শূণ্য 1 আৰু $x + 2$ৰ শূণ্য -2

উদাহৰণ 5 : $x^2 - 2x$ বহুপদৰ শূণ্য 2 আৰু 0, হয়নে সত্যাপন কৰা।

সমাধান : ধৰা $p(x) = x^2 - 2x$

তেন্তে, $p(2) = 2^2 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$

আৰু $p(0) = (0)^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

গতিকে 2 আৰু 0 দুয়োটাই $x^2 - 2x$ বহুপদৰ শূণ্য।

এতিয়া আমাৰ পৰ্যবেক্ষণসমূহৰ এক সূচী কৰোঁ আঁহা

(i) এটা বহুপদৰ শূণ্য '0' নহ'বও পাৰে।

(ii) '0' এটা বহুপদৰ শূণ্য হ'ব পাৰে।

(iii) প্ৰতিটো ৰৈখিক বহুপদৰ এটা আৰু মাত্ৰ এটাহে শূন্য থাকে।

(iv) এটা বহুপদৰ শূন্য এটাতকৈ বেছি থাকিব পাৰে।

অনুশীলনী 2.2

1. $5x - 4x^2 + 3$ বহুপদৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া—

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. তলৰ বহুপদবোৰৰ প্ৰত্যেকৰ বাবে $p(0)$, $p(1)$ আৰু $p(2)$ নিৰ্ণয় কৰা

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$
   (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$
   (iii) $p(x) = x^3$
   (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. কাষত উল্লেখিত মানবোৰ বহুপদটোৰ শূন্য হয়নে নহয় সত্যাপন কৰি চোৱা।

   (i) $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

   (ii) $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

   (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

   (v) $p(x) = x^2, x = 0$

   (vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

   (vii) $p(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

   (viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

4. তলৰ প্ৰতিটো বহুপদৰ শূন্য নিৰ্ণয় কৰা

   (i) $p(x) = x + 5$
   (ii) $p(x) = x - 5$
   (iii) $p(x) = 2x + 5$
   (iv) $p(x) = 3x - 2$
   (v) $p(x) = 3x$
   (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$
   (vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0, c, d$ বাস্তৱ সংখ্যা।

2.4 ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) :

আমি দুটা সংখ্যা 15 আৰু 6 লওঁ। তোমালোকে জানা যে, যেতিয়া 15ক 6ৰে হৰণ কৰা হয় তেতিয়া ভাগফল 2 আৰু ভাগশেষ 3 পোৱা যায়। তোমালোকে মন কৰিছানে কেনেকৈ এই কথাটো প্ৰকাশ কৰা হয়? আমি 15ক লিখো, $15 = (6 \times 2) + 3$ হিচাপে।

আমি লক্ষ্য কৰিছো যে, ভাগশেষ 3, ভাজক 6তকৈ সৰু। একেদৰে, যদি 12অক 6ৰে হৰণ কৰো তেন্তে পাওঁ— $12 = (6 \times 2) + 0$

এই ক্ষেত্ৰত ভাগশেষ কি? ইয়াত ভাগশেষ 0 আৰু আমি কওঁ যে 6, 12ৰ এটা উৎপাদক বা 12, 6 ৰ এটা গুণিতক।

এতিয়া প্ৰশ্ন হ'ল— এটা বহুপদক অন্য এটা বহুপদেৰে হৰণ কৰিব পাৰিনে? এই কথা আলোচনা কৰিবলৈ প্ৰথমে ভাজকটো এটা একপদ লওঁ। এতিয়া $2x^3 + x^2 + x$ বহুপদক একপদ xৰে হৰণ কৰিলে পাওঁ—

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} = 2x^2 + x + 1$$

বাস্তৱিকতে তোমালোকে হয়তো লক্ষ্য কৰিছা যে, x, $2x^3 + x^2 + x$ বহুপদটোৰ প্ৰতিটো পদৰ এটা সাধাৰণ পদ। গতিকে আমি লিখিব পাৰো যে,

$$2x^3 + x^2 + x = x(2x^2 + x + 1)$$

আমি ক'ম যে x আৰু $2x^2 + x + 1$ দুয়োটাই $2x^3 + x^2 + x$ অৰ উৎপাদক আৰু $2x^3 + x^2 + x$, x আৰু $2x^2 + x + 1$ প্ৰত্যেকৰে এটা গুণিতক।

অন দুটা বহুপদ $3x^2 + x + 1$ আৰু xৰ কথা বিবেচনা কৰা।

ইয়াত, $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

আমি দেখা পাওঁ যে, 1ক x ৰে হৰণ কৰি কোনো বহুপদ নাপাওঁ। সেইবাবে ইয়ানতে সমাপ্ত কৰোঁ আৰু লক্ষ্য কৰোঁ যে 1টো এইক্ষেত্ৰত ভাগশেষ। গতিকে আমি পাওঁ—

$$3x^2 + x + 1 = \{x \times (3x + 1)\} + 1$$

এই ক্ষেত্ৰত $3x + 1$ হ'ল ভাগফল আৰু 1 হ'ল ভাগশেষ। তোমালোকে ভাবা নেকি যে x, $3x^2 + x + 1$ৰ এটা উৎপাদক? যিহেতু ভাগশেষ শূণ্য নহয়, এইটো উৎপাদক নহয়।

এতিয়া আমি এনে এটা উদাহৰণ লওঁ যাতে কেনেকৈ এটা বহুপদ অন্য এটা অশূণ্য বহুপদেৰে হৰণ কৰিব পাৰি তাক চাব পাৰোঁ—

উদাহৰণ 6 : $p(x)$ক $g(x)$ৰে হৰণ কৰা য'ত $p(x) = x + 3x^2 - 1$ আৰু $g(x) = 1 + x$

সমাধান : আমি তলত দেখুওৱা ধৰণে পৰ্যায়ক্ৰমে হৰণ প্ৰক্ৰিয়াটো সমাপন কৰিম—

১ম পৰ্যায় : আমি ভাজ্য $x + 3x^2 - 1$ আৰু ভাজক $1 + x$ ক মানক ৰূপত অৰ্থাৎ, পদসমূহৰ সূচকৰ ক্ৰমহ্ৰাসমান ৰূপত সজাম। এনে কৰিলে পাওঁ—

ভাজ্য $3x^2 + x - 1$ আৰু ভাজক $x + 1$

২য় পর্যায় ঃ ভাজ্যৰ প্ৰথম পদটোক ভাজকৰ প্ৰথম পদেৰে হৰণ কৰোঁহক অৰ্থাৎ $3x^2$ ক x ৰে হৰণ কৰোঁ আৰু তেতিয়া পাওঁ $3x$। এইদৰে আমি ভাগফলৰ প্ৰথম পদটো পাওঁ।

$\frac{3x^2}{x} = 3x$ = ভাগফলৰ প্ৰথম পদ

৩য় পৰ্যায় ঃ আমি ভাজকক ভাগফলৰ প্ৰথম পদেৰে পূৰণ কৰি তাক ভাজ্যৰ পৰা বিয়োগ কৰোঁ। অৰ্থাৎ $x + 1$ ক $3x$ৰে পূৰণ কৰি পোৱা $3x^2 + 3x$ ক ভাজ্য $3x^2 + x - 1$ৰ পৰা বিয়োগ কৰি পাওঁ—
$-2x - 1$

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & \underline{3x^2 + 3x} \\ & \quad -2x - 1 \end{array}$$

৪র্থ পৰ্যায় ঃ আমি ভাগশেষ $-2x - 1$ক নতুন ভাজ্য ৰূপে লৈ ভাজকক একে ৰাখি ২য় পৰ্যায়ৰ কাৰ্যৰ পুনৰাবৃত্তি কৰি ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদটো পাওঁ। অৰ্থাৎ, আমি নতুন ভাজ্যৰ প্ৰথম পদ $-2x$ক ভাজকৰ প্ৰথম পদ xৰে হৰণ কৰি ভাগফলৰ পৰৱৰ্তী পদটো পাওঁ (-2).

$\frac{-2x}{x} = -2$ = ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদ | নতুন ভাগফল $= 3x - 2$

৫ম পৰ্যায় ঃ আমি ভাজকক ভাগফলৰ দ্বিতীয় পদেৰে পূৰণ কৰি পোৱা পূৰণফল ভাজ্যৰ পৰা বিয়োগ কৰোঁ অৰ্থাৎ $x + 1$ক -2 ৰে পূৰণ কৰি পাওঁ $-2x - 2$ আৰু ইয়াক $-2x - 1$ৰ পৰা বিয়োগ কৰি পাওঁ ভাগশেষ 1

$$(x+1)(-2) = -2x - 2 \quad \begin{array}{|l} -2x - 1 \\ -2x - 2 \\ \underline{+ \quad +} \\ \quad +1 \end{array}$$

ভাগশেষ 0 নাইবা নতুন ভাজ্যৰ মাত্ৰা ভাজকৰ মাত্ৰাতকৈ কম নোহোৱালৈকে এই প্ৰক্ৰিয়া চলি থাকিব। তেনে এটা অৱস্থা পালে নতুন ভাজ্যটো ভাগশেষ আৰু ভাগফলৰ পদসমূহৰ সমষ্টিয়েই হ'ব সম্পূৰ্ণ ভাগফল।

৬ষ্ঠ পৰ্যায় এই ক্ষেত্ৰত সম্পূৰ্ণ ভাগফল হ'ব $3x - 2$ আৰু ভাগশেষ হ'ব 1।

আটাইকেইটা পৰ্যায় একেলগে বিবেচনা কৰি পাওঁ—

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 2 \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & \underline{- \quad -} \\ & \quad -2x - 1 \\ & \quad -2x - 2 \\ & \quad \underline{+ \quad +} \\ & \qquad\quad 1 \end{array}$$

মন কৰিবা যে, $3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$

অৰ্থাৎ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

সাধাৰণভাৱে ক'বলৈ গ'লে, যদি $p(x)$ আৰু $g(x)$ দুটা বহুপদ হয় যাতে, $p(x)$ৰ মাত্ৰা ≥ $g(x)$ৰ মাত্ৰা আৰু $g(x) \neq 0$, তেন্তে আমি দুটা বহুপদ $q(x)$ আৰু $r(x)$ পাওঁ যাতে, $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$, য'ত $r(x) = 0$ বা $r(x)$ৰ মাত্ৰা < $g(x)$ৰ মাত্ৰা। এই ক্ষেত্ৰত আমি কওঁ যে, $p(x)$ক $g(x)$ৰে হৰণ কৰিলে ভাগফল $q(x)$ আৰু ভাগশেষ $r(x)$ পোৱা যায়।

ওপৰৰ উদাহৰণত ভাজক এটা ৰৈখিক বহুপদ আছিল। এনে এটা অৱস্থাত ভাগশেষ আৰু ভাজ্যৰ কোনো বিশেষ মানৰ মাজত কিবা সম্বন্ধ আছে নেকি চাওঁহক।

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ ত যদি xক -1ৰে প্ৰতিস্থাপন কৰা হয় তেন্তে আমি পাওঁ—

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$

গতিকে, $p(x) = 3x^2 + x - 1$ক $x + 1$ৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগশেষ, $x + 1$ বহুপদৰ শূন্যমানত $p(x)$ৰ মানৰ সমান যিটো হৈছে – 1। আমি আৰু কেইটামান উদাহৰণ আলোচনা কৰোঁহক—

উদাহৰণ 7 : $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ বহুপদক $x - 1$ৰে হৰণ কৰা।

সমাধান : দীৰ্ঘীয়া হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে পাওঁ—

$$3x^3 - x^2 - x - 4$$

$$x - 1 \,\big)\, 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$$

$$3x^4 - 3x^3$$

$$- \quad +$$

$$-x^3 - 3x - 1$$

$$-x^3 + x^2$$

$$+ \quad -$$

$$-x^2 - 3x - 1$$

$$-x^2 + x$$

$$+ \quad -$$

$$-4x - 1$$

$$-4x + 4$$

$$+ \quad -$$

$$-5$$

ইয়াত ভাগশেষ – 5। এতিয়া $x - 1$ৰ শূন্য হ'ল 1। সেইবাবে $x = 1$, $p(x)$ত বহুৱাই পাওঁ,

$$\begin{aligned} p(1) &= 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1 \\ &= 3 - 4 - 3 - 1 \\ &= -5, \text{ যিটো আমাৰ ভাগশেষ।} \end{aligned}$$

উদাহৰণ ৪ : $p(x) = x^3 + 1$ ক $x + 1$ ৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : দীঘলীয়া হৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে—

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ \hline x+1 & x^3 + 1 \\ & x^3 + x^2 \\ & - \quad - \\ \hline & -x^2 + 1 \\ & -x^2 - x \\ & + \quad + \\ \hline & x + 1 \\ & x + 1 \\ & - \quad - \\ \hline & 0 \end{array}$$

গতিকে ইয়াত ভাগশেষ 0। আকৌ $p(x) = x^3 + 1$ আৰু $x + 1 = 0$ ৰ মূল $x = -1$, গতিকে

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0, \text{ যিটো প্ৰকৃত হৰণ প্ৰক্ৰিয়াত আমাৰ ভাগশেষ।} \end{aligned}$$

এটা বহুপদক এটা বৈখিক বহুপদেৰে হৰণ কৰি ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা এই প্ৰক্ৰিয়াটো সহজ নহয়নে? আমি এই কথাষাৰ তলৰ উপপাদ্যৰ ৰূপত সাধাৰণীকৰণ কৰিম। লগতে উপপাদ্যটোৰ প্ৰমাণসহ তাৰ সত্যতাও প্ৰতিপন্ন কৰিমহঁক।

ভাগশেষ উপপাদ্য : ধৰোঁ, $p(x)$ এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা এক বা ততোধিক, আৰু a যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা। যদি $p(x)$ক $x - a$ৰে হৰণ কৰা হয় তেন্তে ভাগশেষ হ'ব $p(a)$।

প্ৰমাণ : ধৰোঁ, $p(x)$ যিকোনো এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা 1 তকৈ ডাঙৰ বা ইয়াৰ সমান। ধৰোঁ, $p(x)$ক $x - a$ৰে হৰণ কৰিলে ভাগফল পাওঁ $q(x)$ আৰু ভাগশেষ $r(x)$।

অৰ্থাৎ $\qquad p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$

যিহেতু $x - a$ ৰ মাত্ৰা 1 আৰু $r(x)$ৰ মাত্ৰা $x - a$ ৰ মাত্ৰাতকৈ সৰু। সেয়ে $r(x)$ৰ মাত্ৰা = 0। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল $r(x)$ এটা ধ্ৰুৱক। ধৰোঁ $r(x) = r$

সেইবাবে, x ৰ সকলো মানৰ বাবে $r(x) = r$

গতিকে, $p(x) = (x - a)\, q(x) + r$

বিশেষতঃ $x = a$ হ'লে এই সমীকৰণৰ পৰা পাওঁ—

$p(a) = (a - a)\, q(a) + r = r$

যি উপপাদ্যটো প্ৰমাণিত কৰে।

উদাহৰণ 9 : $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ক $x - 1$ৰে হৰণ কৰিলে পোৱা ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ইয়াত, $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$, আৰু $x - 1$ ৰ শূণ্য 1।

গতিকে, $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 = 2$

গতিকে, ভাগশেষ উপপাদ্যৰ মতে $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ক $x - 1$ ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ হ'ব 2।

উদাহৰণ 10 : $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ বহুপদটো $2t + 1$ৰ এটা গুণিতক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান : তোমালোকে জানা যে, $q(t)$ বহুপদটো, $2t + 1$ৰ এটা গুণিতক হ'ব যদিহে $2t + 1$ৰে $q(t)$ ক হৰণ কৰিলে ভাগশেষ শূণ্য হয়। এতিয়া $2t + 1 = 0$ ধৰিলে আমি পাওঁ $t = \frac{1}{2}$। আকৌ

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

অৰ্থাৎ $q(t)$ক $2t + 1$ ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ পাওঁ 0

সেইবাবে, $2t + 1$, $q(t)$ৰ এটা উৎপাক অৰ্থাৎ $q(t)$বহুপদটো $2t + 1$ৰ এটা গুণিতক।

অনুশীলনী 2.3

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ক তলৰ বহুপদেৰে হৰণ কৰিলে পোৱা ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা :

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x

   (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ক $x - a$ ৰে হৰণ কৰিলে পোৱা ভাগশেষ উলিওৱা।

3. $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ ৰ এটা উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

2.5 বহুপদৰ উৎপাক বিশ্লেষণ (Factorisation of Polynomials) :

এতিয়া ওপৰৰ উদাহৰণ 10 ৰ অৱস্থাটো সূক্ষ্মভাবে পৰ্যবেক্ষণ কৰোঁহক। ইয়াৰ পৰা পাইছোঁ যে যিহেতু ভাগশেষ $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, সেয়ে $(2t + 1)$, $q(t)$ৰ এটা উৎপাদক অৰ্থাৎ $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$, য'ত $g(t)$ এটা বহুপদ। এইটো তলৰ উপপাদ্যটোৰ এটা বিশেষ অৱস্থা।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) : যদি $p(x)$ এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা $n \geq 1$ আৰু a যিকোনো এটা বাস্তৱ সংখ্যা তেন্তে,

(i) $(x - a)$, $p(x)$ ৰ এটা উৎপাদক, যদিহে $p(a) = 0$, আৰু

(ii) $p(a) = 0$, যদিহে $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক।

প্ৰমাণ : ভাগশেষ উপপাদ্যৰ পৰা পাওঁ—

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$$

(i) যদি $p(a) = 0$ তেন্তে $p(x) = (x - a)q(x)$, যিয়ে প্ৰতিপন্ন কৰে যে $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক।

(ii) যদি $(x - a)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক তেন্তে, $p(x) = (x - a)g(x)$, য'ত $g(x)$ এটা বহুপদ। এইক্ষেত্ৰত $p(a) = (a - a)g(a) = 0$

উদাহৰণ 11 : $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ আৰু $2x + 4$ৰ উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান : $x + 2$ৰ শূন্য -2। ধৰো $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ আৰু $s(x) = 2x + 4$। তেন্তে

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6 \\ &= -8 + 12 - 10 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

গতিকে, উৎপাদক উপপাদ্য মতে $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ৰ এটা উৎপাদক।

আকৌ, $s(-2) = 2(-2) + 4 = -4 + 4 = 0$

এতেকে, $x + 2$, $2x + 4$ৰ এটা উৎপাদক। বাস্তৱিকতে, উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ নকৰি তোমালোকে এই কথাটো চাব পাৰা; কিয়নো $2x + 4 = 2(x + 2)$।

উদাহৰণ 12 : যদি $x - 1$, $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ৰ এটা উৎপাদক, তেন্তে kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : যিহেতু, $x - 1$, $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ৰ উৎপাদক সেয়ে, $p(1) = 0$।

এতিয়া, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

গতিকে, $4 + 3 - 4 + k = 0$

অৰ্থাৎ, $k = -3$

এতিয়া আমি 2 আৰু 3 মাত্ৰাবিশিষ্ট কিছুমান বহুপদৰ উৎপাদক নিৰ্ণয়ৰ বাবে উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিম। তোমালোকে ইতিমধ্যে $x^2 + lx + m$ৰ নিচিনা দ্বিঘাত বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণৰ লগত পৰিচিত। তোমালোকে মধ্যম পদ lx ক $ax + bx$ ৰূপত, য'ত $ab = m$, প্ৰকাশ কৰি এই বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিছিলা। তেতিয়া, $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ পোৱাইছিলা। এতিয়া আমি $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক আকাৰৰ দ্বিঘাত বহুপদৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিম।

$ax^2 + bx + c$ বহুপদৰ মধ্যম পদক দুটা পদত ভাগ কৰি তলত দিয়া ধৰণেৰে উৎপাদক

বিশ্লেষণ কৰিব পাৰি—

ধৰো, উৎপাদক কেইটা $(px + q)$ আৰু $(rx + s)$।

তেতিয়া $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = prx^2 + (ps + qr)x + qs$

এতিয়া, x^2ৰ সহগ তুলনা কৰি পাওঁ, $a = pr$

xৰ সহগ তুলনা কৰি পাওঁ, $b = ps + qr$

আৰু ধ্ৰুৱকপদ তুলনা কৰি পাওঁ, $c = qs$

এই ক্ষেত্ৰত দেখা যায় যে b হ'ল দুটা সংখ্যা ps আৰু qr ৰ সমষ্টি যাৰ পূৰণফল,

$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$

গতিকে, $ax^2 + bx + c$ ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰোঁতে bক এনে দুটা সংখ্যাৰ যোগফলৰ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব লাগে যাতে সিহঁতৰ পূৰণফল ac হয়। এই ধাৰণাটো উদাহৰণ-13ত স্পষ্ট হ'ব—

উদাহৰণ 13 : $6x^2 + 17x + 5$ৰ মধ্যমপদ বিভাজন আৰু উৎপাদক উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান : (1) প্ৰথম সমাধান (মধ্যমপদ বিভাজন কৰি) আমি দুটা সংখ্যা p আৰু q বিচাৰিব পাৰো যাতে $p + q = 17$ আৰু $pq = 6 \times 5 = 30$, আৰু তেতিয়া আমি উৎপাক দুটা পাম। সেয়ে আমি 30ৰ যুৰীয়া উৎপাদকবোৰ চাওঁ আহী। ইহঁতৰ কিছুমান হৈছে 1 আৰু 30, 2 আৰু 15, 3 আৰু 10, 5 আৰু 6। এই যোৰবিলাকৰ ভিতৰত 2 আৰু 15ই আমাক দিয়ে—

$p + q = 2 + 15 = 17$

গতিকে,
$$\begin{aligned} 6x^2 + 17x + 5 &= 6x^2 + (2 + 15)x + 5 \\ &= 6x^2 + 2x + 15x + 5 \\ &= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1) \\ &= (3x + 1)(2x + 5) \end{aligned}$$

(2) দ্বিতীয় সমাধান (উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি)

$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x), \text{ (ধৰোঁ)}$$

যদি a আৰু b, $p(x)$ৰ শূন্য হয় তেন্তে

$6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$। গতিকে $ab = \dfrac{5}{6}$

এতিয়া a আৰু bৰ কিছুমান সম্ভাব্য মান বিবেচনা কৰি পাওঁ— $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm1$

এতিয়া, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ কিন্তু $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

গতিকে $\left(x+\frac{1}{3}\right)$; $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক। একেদৰে তোমালোকে চেষ্টা কৰি পাবা যে $\left(x+\frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক।

$$\text{সেয়ে, } 6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$
$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$
$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

ওপৰৰ উদাহৰণৰ বাবে মধ্যমপদৰ বিভাজন প্ৰক্ৰিয়াৰে উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰাটো অধিক উপযুক্ত যেন বোধ হয়। সি যি কি নহওক, আন এটা উদাহৰণ লোৱা যাওক।

উদাহৰণ 14 : উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $y^2 - 5y + 6$ৰ উৎপাদক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ধৰো, $p(y) = y^2 - 5y + 6$। এতিয়া $p(y) = (y - a)(y - b)$ হ'লে, তোমালোকে জানা যে ধ্ৰুৱক পদটো হ'ব ab। গতিকে $ab = 6$। গতিকে $p(y)$ৰ উৎপাদক চোৱা মানে 6ৰ উৎপাদক চাব লাগে। 6ৰ উৎপাদকবোৰ হ'ল 1, 2 আৰু 3

এতিয়া, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

গতিকে, $(y - 2)$, $p(y)$ৰ এটা উৎপাদক

আকৌ, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

গতিকে, $(y - 3)$, $y^2 - 5y + 6$ৰ এটা উৎপাদক

এতেকে, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

মন কৰিবা যে, $y^2 - 5y + 6$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ মধ্যমপদ $-5y$ৰ বিভাজন কৰিও কৰিব পৰা যায়।

এতিয়া আমি ত্ৰিঘাত বহুপদৰ উৎপাক বিশ্লেণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। ইয়াত মধ্যমপদ বিভাজন নিয়ম প্ৰযোজ্য নহয়। আমি প্ৰথমে অতিকমেও এটা উৎপাদক নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব যিটো তলৰ উদাহৰণত দেখিবলৈ পাবা।

উদাহৰণ 15 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান : ধৰো, $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

আমি এতিয়া, -120ৰ সকলো উৎপাদক বিবেচনা কৰিব লাগে। তাৰে কিছুমান, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±8, ±10, ±12, ±15, ±20, ±24, ±30, ±60।

পৰীক্ষাৰ দ্বাৰা পাওঁ $p(1) = 0$। গতিকে $(x - 1)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক। এতিয়া আমি দেখিছোঁ যে,

$$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$$

$= x^2(x-1) - 22x(x-1) + 120(x-1)$ (কিয়?)

$= (x-1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x-1)$ক সাধাৰণ উৎপাদক লৈ]

আমি $p(x)$ক $(x-1)$ৰে হৰণ কৰিও এইটো ফলেই পাম।

এতিয়া, $x^2 - 22x + 120$ৰ মধ্যমপদ বিভাজন কৰি উৎপাদক নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি বা উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিও পাব পাৰি। মধ্যমপদ বিভাজন কৰি পাওঁ—

$$
\begin{aligned}
x^2 - 22x + 120 &= x^2 - 12x - 10x + 120 \\
&= x(x-12) - 10(x-12) \\
&= (x-12)(x-10)
\end{aligned}
$$

গতিকে, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x-1)(x-10)(x-12)$

অনুশীলনী 2.4

1. তলৰ কোনটো বহুপদৰ এটা উৎপাদক $(x+1)$ তাক নিৰ্ণয় কৰা।

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. উৎপাদক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে $g(x)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা :

   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

3. যদি $(x-1)$, $p(x)$ৰ এটা উৎপাদক হয় তেন্তে তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে kৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

   (i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা :

   (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

   (iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা :

   (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 বীজীয় অভেদ (Algebraic Identities) :

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত পাই আহিছা যে, এটা বীজীয় অভেদ হ'ল এটা বীজীয় সমীকৰণ যি ইয়াত থকা চলকৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য। তোমালোকে তলৰ বীজীয় অভেদ কেইটা পঢ়ি

আহিছা—

অভেদ I $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

অভেদ II $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

অভেদ III $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

অভেদ IV $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

তোমালোকে ইতিমধ্যে এই অভেদসমূহৰ কেইটামান ব্যৱহাৰ কৰি কিছুমান বীজীয় ৰাশিৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ নিশ্চয় কৰিছাইক। গণনা কৰাৰ বেলিকা ইহঁতৰ প্ৰয়োগৰ দিশটোত তোমালোকে লক্ষ্য কৰিব পাৰা।

উদাহৰণ 16 ঃউপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ পূৰণফলসমূহ নিৰ্ণয় কৰা ঃ

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

সমাধান ঃ(i) ইয়াত আমি অভেদ I ঃ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰো।

$y = 3$ বহুৱাই পাওঁ—

$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$

(ii) অভেদ IV অৰ্থাৎ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$(x - 3)(x + 5) \quad = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$= x^2 + 2x - 15$

উদাহৰণ 17 ঃপোনে পোনে পূৰণ নকৰাকৈ 105×106ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ$105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$, (অভেদ IV ব্যৱহাৰ কৰি)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

কিছুমান প্ৰদত্ত ৰাশিৰ পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰাত ওপৰত উল্লেখিত অভেদৰ কেইটামান প্ৰয়োগ তোমালোকে দেখিলা। এই অভেদসমূহ বীজীয় ৰাশিৰ উৎপাদক বিশ্লেষণতো প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি। তলত দিয়া উদাহৰণত এই কথা উপলব্ধি কৰিব পাৰিবা।

উদাহৰণ 18 ঃউৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

সমাধান ঃ(i) ইয়াত তোমালোকে দেখিছা যে

$49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$। প্ৰদত্ত ৰাশিটো $x^2 + 2xy + y^2$ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ, $x = 7a$ আৰু $y = 5b$

অভেদ I ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$

(ii) আমি পাওঁ, $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

অভেদ IIIৰ লগত ইয়াক তুলনা কৰি পাওঁ—

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$
$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

বৰ্তমানলৈকে আমাৰ সকলো অভেদতে দ্বিপদ ৰাশিৰ পূৰণফলহে পাইছো। এতিয়া আমি অভেদ Iক $x + y + z$ ত্ৰিপদ ৰাশিলৈ প্ৰসাৰিত কৰি চাওঁ। অভেদ-I ব্যৱহাৰ কৰি আমি এতিয়া $(x + y + z)^2$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিম।

ধৰো $x + y = t$, তেতিয়া,

$$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$$
$$= t^2 + 2tz + t^2 \text{ (অভেদ I ব্যৱহাৰ কৰি)}$$
$$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \text{ (t ৰ মান বহুৱাই)}$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 \text{ (অভেদ I ব্যৱহাৰ কৰি)}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \text{ (পদবোৰ পুনৰ সজাই)}$$

সেয়ে আমি তলৰ অভেদটো পাওঁ—

অভেদ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

মন্তব্য : আমি সোঁহাতৰ ৰাশিটোক বাওঁহাতৰ ৰাশিটোৰ বিস্তাৰিত ৰূপ বুলি কওঁ। মন কৰা যে, $(x + y + z)^2$ ৰাশিটোৰ বিস্তাৰিত তিনিটা বৰ্গ পদ আৰু তিনিটা গুণফল পদ আছে।

উদাহৰণ 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ক বিস্তাৰিত ৰূপত লিখা।

সমাধান : প্ৰদত্ত ৰাশিটো $(x + y + z)^2$ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ—

$x = 3a$, $y = 4b$ আৰু $z = 5c$

এতিয়া অভেদ-V ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$$(3a + 4b + 5c)^2$$
$$= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

উদাহৰণ 20 : $(4a - 2b - 3c)^2$ৰ বিস্তাৰ কৰা।

সমাধান : অভেদ-V ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$$(4a - 2b - 3c)^2$$
$$= [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$

$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$

উদাহৰণ 21 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান : আমি পাওঁ—

$$4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$$
$$= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$$
$$= [2x + (-y) + z]^2 \quad \text{(অভেদ-V ব্যৱহাৰ কৰি)}$$
$$= (2x - y + z)^2$$
$$= (2x - y + z)(2x - y + z)$$

এতিয়ালৈকে, আমি দ্বিঘাত পদযুক্ত অভেদৰ বিষয়েহে অধ্যয়ন কৰিছোঁহঁক। এতিয়া, অভেদ-I ক সম্প্ৰসাৰণ কৰি $(x + y)^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিম। আমি পাওঁ—

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

গতিকে আমি তলৰ অভেদটো পাওঁ—

অভেদ VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

আকৌ অভেদ-VI ত y ক $-y$ ৰে অপসাৰিত কৰিলে পাওঁ

অভেদ VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

উদাহৰণ 22 : তলৰ ঘনসমূহক বিস্তাৰিত আকাৰত লিখা

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

সমাধান : (i) প্ৰদত্ত ৰাশিক $(x + y)^3$ ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ—

$x = 3a$ আৰু $y = 4b$

গতিকে অভেদ-VI প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) প্ৰদত্ত ৰাশিক $(x - y)^3$ ৰ লগত তুলনা কৰি পাওঁ—

$x = 5p,$ $y = 3q$

গতিকে, অভেদ-VII প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ—

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

উদাহৰণ 23 : উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ প্ৰতিটো ৰাশিৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

সমাধান : (i) আমি পাওঁ—

$$\begin{aligned}(104)^3 &= (100+4)^3\\ &= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4) \quad \text{(অভেদ-VI ব্যৱহাৰ কৰি)}\\ &= 1000000 + 64 + 124800\\ &= 1124864\end{aligned}$$

(ii) প্ৰদত্ত ৰাশি,

$$\begin{aligned}(999)^3 &= (1000-1)^3\\ &= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1) \quad \text{(অভেদ-VII ব্যৱহাৰ কৰি)}\\ &= 1000000000 - 1 - 2997000\\ &= 997002999\end{aligned}$$

উদাহৰণ 24 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান : প্ৰদত্ত ৰাশিৰ পৰা পাওঁ—

$$\begin{aligned}&(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)\\ &= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2\\ &= (2x+3y)^3 \quad \text{(অভেদ-VI ব্যৱহাৰ কৰি)}\\ &= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)\end{aligned}$$

এতিয়া, $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ৰাশিটো বিবেচনা কৰা হওঁক—

বিস্তাৰ কৰিলে এই পূৰণফলটো হ'ব—

$$\begin{aligned}&x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) +\\ &z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz +\\ &\qquad x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - z^2x\\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad \text{(সৰল কৰি)}\end{aligned}$$

গতিকে আমি তলৰ অভেদটো পাওঁ—

অভেদ VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

উদাহৰণ 25 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

সমাধান : আমি পাওঁ—

$$\begin{aligned}&8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz\\ &= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)\\ &= (2x+y+3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]\\ &= (2x+y+3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)\end{aligned}$$

অনুশীলনী 2.5

1. তলৰ পূৰণফলকেইটা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰা।

(i) $(x + 4)(x + 10)$ (ii) $(x + 8)(x - 10)$

(iii) $(3x + 4)(3x - 5)$ (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. প্ৰত্যক্ষভাৱে পূৰণ নকৰি তলৰ পূৰণফলসমূহ নিৰ্ণয় কৰা :

(i) 103×107 (ii) 95×96

(iii) 104×96

3. উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা :

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰাশিবোৰ বিস্তাৰ কৰা :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$ (iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. তলৰ ঘনকেইটা বিস্তাৰিত কৰি লিখা :

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ (iv) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

7. উপযুক্ত অভেদ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰাশিৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$

(iii) $(998)^3$

8. তলৰ প্ৰতিটোৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. সত্যাপন কৰা :

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা :

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

(ইংগিত : প্ৰশ্ন 9 চোৱা)

11. $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰা।

12. সত্যাপন কৰা যে

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

13. যদি $x + y + z = 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. ঘনফল প্ৰকৃতাৰ্থত নিৰ্ণয় নকৰাকৈ তলৰ প্ৰতিটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. তলত কালি দিয়া আয়তবিলাকৰ দীঘ আৰু প্ৰস্থৰ বাবে সম্ভাব্য ৰাশিবোৰ উলিওৱা।

(i)	(ii)
কালি : $25a^2 - 35a + 12$	কালি : $35y^2 + 13y - 12$

16. তলত আয়তন দিয়া ঘনকৰ মাত্ৰা তিনিটাৰ বাবে সম্ভাব্য ৰাশিকেইটা কি কি হ'ব?

(i)	(ii)
আয়তন : $3x^2 - 12x$	আয়তন : $12ky^2 + 8ky - 20k$

2.7 সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা অধ্যয়ন কৰিলা—

1. একচলকযুক্ত বহুপদ $p(x)$ হ'ল x ৰ এটা বীজীয় ৰাশি যাৰ আকাৰ—

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, য'ত, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

হ'ল ধ্ৰুৱক আৰু $a_n \neq 0$। এই ক্ষেত্ৰত $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ক্ৰমে $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ৰ সহগ আৰু n বহুপদটোৰ মাত্ৰা। $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_0$, য'ত $a_n \neq 0$, প্ৰত্যেককে $p(x)$ বহুপদটোৰ পদ বোলা হয়।

2. এটা পদযুক্ত বহুপদক একপদ বোলে।
3. দুটা পদযুক্ত বহুপদক দ্বিপদ বোলে।
4. তিনিটা পদবিশিষ্ট বহুপদক ত্ৰিপদ বোলে।
5. একমাত্ৰাৰ বহুপদক ৰৈখিক বহুপদ বোলে।
6. দুই মাত্ৰাৰ বহুপদক দ্বিঘাত বহুপদ বোলে।
7. তিনি মাত্ৰাৰ বহুপদক ত্ৰিঘাত বহুপদ বোলে।
8. এটা বাস্তৱ সংখ্যা 'a' ক এটা বহুপদ $p(x)$ৰ শূণ্য বোলে যদি $p(a) = 0$। এই ক্ষেত্ৰত a ক $p(x) = 0$ সমীকৰণৰ মূল বোলে।
9. প্ৰত্যেক এক চলকযুক্ত ৰৈখিক বহুপদৰ এটা অদ্বিতীয় শূণ্য থাকে, এটা অশূণ্য ধ্ৰুৱক বহুপদৰ কোনো শূণ্য নাই আৰু প্ৰত্যেক বাস্তৱ সংখ্যাই শূণ্য বহুপদৰ শূণ্য।
10. **ভাগশেষ উপপাদ্য :** যদি $p(x)$ এটা বহুপদ যাৰ মাত্ৰা এক বা ততোধিক আৰু $p(x)$ক ৰৈখিক বহুপদ $(x - a)$ ৰে হৰণ কৰা হয় তেন্তে ভাগশেষ হ'ব $p(a)$।
11. **উৎপাদক উপপাদ্য :** $(x - a)$ ৰাশিটো $p(x)$ বহুপদৰ এটা উৎপাদক হ'ব যদি $p(a) = 0$। আকৌ যদি $(x - a)$, $p(x)$ৰ উৎপাদক হয় তেন্তে $p(a) = 0$।
12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$