31 बीजगणित (ALGEBRA)

आवश्यक तथ्य एवं सूत्र

1. (i) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. (ii) $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$.
   (iii) $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$. (iv) $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.
   (v) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.
   (vi) $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$.
2. (i) $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$. (ii) $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$.
   (iii) $(a^3+b^3) = (a+b)(a^2+b^2-ab)$. (iv) $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+b^2+ab)$.
   (v) $(a^3+b^3+c^3-3abc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.
   (vi) $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$.
3. (i) **गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem) :** यदि $f(x)$ का एक गुणनखण्ड $(x-a)$ हो, तो $f(a)=0$.
   (ii) **शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem) :** यदि $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दें तो शेषफल $= f(a)$.
4. **कुछ विशेष परिणाम :**
   (i) (x^n-a^n) सदैव $(x-a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा.
   (ii) (x^n-a^n) तभी $(x+a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा, जबकि n एक समसंख्या हो.
   (iii) (x^n+a^n) तभी $(x+a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा, जबकि n एक विषम संख्या हो.
   (iv) (x^n+a^n) कभी भी $(x-a)$ से पूर्णतया विभक्त नहीं होगा.
5. **करणी (SURDS)**
   माना a एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा n एक धनपूर्णांक है. तब $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ को nवें घात की करणी कहते हैं, जबकि किसी भी धनात्मक परिमेय संख्या की nवीं घात a के बराबर नहीं है.
   उदाहरणार्थ : (i) $\sqrt{11}$ एक करणी है, चूँकि किसी भी धनात्मक परिमेय संख्या का वर्ग 11 नहीं है.
   (ii) $\sqrt[3]{12}$ एक करणी है, चूँकि किसी भी धनात्मक परिमेय संख्या का घन 12 नहीं है.
   (iii) $\sqrt{9}$ एक करणी नहीं है, क्योंकि $9 = 3^2$.
   (iv) $\sqrt[3]{8}$ एक करणी नहीं है, क्योंकि $8 = 2^3$.
   नोट : प्रत्येक अपरिमेय संख्या का करणी होना आवश्यक नहीं.
   जैसे : π एक अपरिमेय संख्या है, परन्तु करणी नहीं.
6. **करणी के नियम :**
   (i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n = a^{\left(\frac{1}{n}\times n\right)} = a^1 = a.$
   (ii) $\left(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left\{(ab)^{\frac{1}{n}}\right\}^n = (ab)^{\left(\frac{1}{n}\times n\right)} = (ab)^1 = ab.$
   (iii) $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right\}^{mn} = a^{\left(\frac{1}{nm}\times mn\right)} = a^1 = a.$
7. (i) **शुद्ध करणी (Pure Surd) :**
   यदि किसी एकपदी करणी में गुणांक 1 हो, तो यह शुद्ध करणी कहलाती है.
   जैसे : $\sqrt{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{8}$ आदि सभी शुद्ध करणी हैं.

(*ii*) **मिश्र करणी (Mixed Surd) :**

यदि किसी एकपदी करणी में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य परिमेय गुणांक हो, तो उसे मिश्र करणी कहते हैं.

जैसे : $3\sqrt{2},\ 5\sqrt[3]{6},\ 2\sqrt[4]{8}$ आदि.

बहुपद (Polynomial) : एक चर x के विभिन्न घात वाले पदों को + चिन्ह से एकत्रित करने पर प्राप्त व्यंजक $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$
को चर x में एक बहुपद कहते हैं जहाँ a_0, a_1 इत्यादि धनात्मक या ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं एवं n एक पूर्ण संख्या है.

जैसे : $4x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ चर x में एक बहुपद है जबकि $5\sqrt{y} + \sqrt{7}y$ चर y में बहुपद नहीं है क्योंकि प्रथम पद $5\sqrt{y}$ में y का घात $\frac{1}{2}$ है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है.

बहुपद का घात (Degree of a Polynomial) : किसी बहपद में सबसे बड़े घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद का घात कहा जाता है.

जैसे : बहुपद $x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ में x के सबसे बड़े घात वाला पद x^3 है. इसका घातांक 3 है. अत: इस बहुपद का घात 3 है.

रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) : यदि बहुपद में प्रयुक्त चर का अधिकतम घात 1 हो तो उसे रैखिक बहुपद कहते हैं.

जैसे : $4x,\ 2x + 5,\ \sqrt{3} - y$

द्विघाती बहुपद (Quadratic Polynomial) : यदि बहुपद में प्रयुक्त चर का अधिकतम घात 2 हो तो उसे द्विघाती बहुपद कहते हैं.

जैसे : $3x^2,\ 2x^2 - 5x + 3,\ y^2 + \frac{3}{5}y$.

प्रश्नमाला 31

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में ठीक उत्तर को चिन्हांकित (✓) कीजिए :

1. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
   (*a*) $x+\frac{1}{x}-2$ (*b*) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+3$ **(*c*) $\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+6$** (*d*) $x+2\sqrt{x}+3$
2. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
   (*a*) $\sqrt{x}-2$ (*b*) $\frac{1}{\sqrt{x}}+3$ (*c*) $x-\frac{1}{x}$ (*d*) $2x$
3. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
   (*a*) $x+\frac{1}{x}+1$ (*b*) $\frac{1}{x}+3$ (*c*) $\sqrt{x}+3$ (*d*) -5
4. निम्नलिखित व्यंजकों में से कौन-सा बहुपद है ?
   (*a*) $x^{-2}+x^{-1}+1$ (*b*) $x+x^{-1}+2$ (*c*) $x^{-1}+5$ (*d*) 0
5. निम्नलिखित में से कौन-सा रैखिक बहुपद है ?
   (*a*) $x+\frac{1}{x}$ (*b*) $x+x^2$ (*c*) $x+8$ (*d*) $\frac{3}{x}+3$
6. निम्नलिखित में से कौन-सा व्यंजक द्विपदी है ?
   (*a*) x^2+x+3 (*b*) x^3+2 (*c*) $2x^2$ (*d*) x^2+3x+5
7. $\sqrt{2}$ किस घात का बहुपद है ?
   (*a*) 2 (*b*) $\frac{1}{2}$ (*c*) 1 (*d*) 0

8. शून्य-बहुपद की घात कितनी है ?

(a) 0 (b) 1 (c) परिभाषित नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $p(x) = x^{\frac{1}{3}} + 3$ हो, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

(a) $p(x)$ एक बहुपदी है जिसकी घात 3 है (b) $p(x)$ एक बहुपदी है जिसकी घात $\frac{1}{3}$ है

(c) $p(x)$ एक व्यंजक है जो बहुपदी नहीं है (d) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{2}} = ?$

(a) 0·471 (b) 0·707 (c) 0·713 (d) 1·707

11. यदि $\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ हो, तो $\frac{1}{\sqrt{3}} = ?$

(a) 0·866 (b) 0·433 (c) 0·577 (d) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$ हो, तो

(a) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{3}{7}$ (b) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{4}{7}$ (c) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{5}{7}$ (d) $a = \frac{11}{7}, b = \frac{6}{7}$

13. यदि $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = a - b\sqrt{2}$ हो, तो

(a) $a = 3,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 5,\ b = 3$ (d) $a = 3,\ b = 5$

14. यदि $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = a + b\sqrt{3}$ हो, तो

(a) $a = 2,\ b = 1$ (b) $a = 2,\ b = -1$ (c) $a = 3,\ b = -2$ (d) $a = 1,\ b = -2$

15. यदि $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = a + b\sqrt{15}$ हो, तो

(a) $a = 3,\ b = 2$ (b) $a = 4,\ b = 1$ (c) $a = 5,\ b = 3$ (d) $a = 3,\ b = 5$

16. यदि $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ हो, तो

(a) $a = 11,\ b = 6$ (b) $a = -11,\ o = 6$ (c) $a = 11,\ b = -6$ (d) $a = -11,\ b = -6$

17. यदि $\frac{4+2\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$ हो, तो

(a) $a = \frac{46}{29}, b = \frac{-20}{29}$ (b) $a = \frac{-46}{29}, b = \frac{20}{29}$ (c) $a = \frac{46}{29}, b = \frac{20}{29}$ (d) $a = \frac{-46}{29}, b = \frac{-20}{29}$

18. यदि $\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = a + b\sqrt{6}$ हो, तो

(a) $a = 12,\ b = -5$ (b) $a = -12,\ b = 5$ (c) $a = -12,\ b = -5$ (d) $a = 12,\ b = 5$

19. यदि $\sqrt{5} = 2{\cdot}236$ हो, तो $\frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}$ का मान कितना होगा ?

(a) 0·134 (b) 0·124 (c) 0·764 (d) 0·146

20. यदि $x = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ हो, तो $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = ?$

(a) 512 (b) 625 (c) 488 (d) 424

21. यदि $x=(2+\sqrt{3})$ हो, तो $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=?$

(a) 52 (b) 56 (c) 72 (d) इनमें से कोई नहीं

22. $\frac{(7+3\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}+\frac{(7-3\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}=?$

(a) 6 (b) 9 (c) 3 (d) 8

23. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=?$

(a) 6 (b) 4 (c) 12 (d) 10

24. $\sqrt{50}\times\sqrt{72}=?$

(a) 60 (b) 65 (c) $6\sqrt{5}$ (d) $15\sqrt{2}$

25. $\sqrt{20}\times\sqrt{45}$

(a) 25 (b) 30 (c) 35 (d) इनमें से कोई नहीं

26. $\sqrt{20}+\sqrt{80}+\sqrt{45}-\sqrt{180}=?$

(a) $4\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{3}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) $5\sqrt{5}$

27. $(125)^{-\frac{1}{3}}=?$

(a) -5 (b) $\frac{-1}{5}$ (c) 5 (d) $\frac{1}{5}$

28. $(27)^{\frac{2}{3}}=?$

(a) 6 (b) 9 (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{9}$

29. $(16)^{\frac{3}{2}}=?$

(a) 48 (b) 24 (c) 64 (d) 96

30. $(81)^{\frac{3}{4}}=?$

(a) 36 (b) 27 (c) 18 (d) 12

31. $(81)^{\frac{-1}{4}}=?$

(a) 3 (b) -3 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{3}$

32. $(64)^{\frac{-1}{2}}=?$

(a) -8 (b) 8 (c) $\frac{-1}{8}$ (d) $\frac{1}{8}$

33. $\sqrt[3]{216}=?$

(a) 4 (b) 6 (c) 3 (d) 16

34. $\sqrt[3]{27}=?$

(a) घात 3 की करणी (b) $\frac{1}{3}$ घात की करणी (c) 1 घात की करणी (d) एक करणी नहीं है

35. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{9}$ तथा $\sqrt[6]{18}$ में से सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है ?

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt[3]{9}$ (c) $\sqrt[6]{18}$ (d) सभी बराबर हैं

36. यदि $\left(x+\frac{1}{x}\right)=3$ हो, तो $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=?$

(*a*) 9 (*b*) 7 (*c*) 11 (*d*) 13

37. यदि $\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$ हो, तो $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=?$

(*a*) 64 (*b*) 14 (*c*) 8 (*d*) 2

38. यदि $\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$ हो, तो $\left(4x^2+\frac{4}{x^2}\right)=?$

(*a*) 7 (*b*) -7 (*c*) 9 (*d*) -9

39. यदि $\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{3}$ हो, तो $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=?$

(*a*) 0 (*b*) $3\sqrt{3}$ (*c*) $3(\sqrt{3}-1)$ (*d*) $3(\sqrt{3}+1)$

40. यदि $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=102$ हो, तो $\left(x-\frac{1}{x}\right)=?$

(*a*) 8 (*b*) 10 (*c*) 12 (*d*) 13

41. यदि $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)=322$ हो, तो $\left(x-\frac{1}{x}\right)=?$

(*a*) 4 (*b*) 6 (*c*) 8 (*d*) $3\sqrt{2}$

42. यदि $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=52$ हो, तो $\left(x+\frac{1}{x}\right)=?$

(*a*) 6 (*b*) 4 (*c*) 3 (*d*) 13

43. यदि $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=14$ हो, तो $\left(x-\frac{1}{x}\right)=?$

(*a*) 5 (*b*) 4 (*c*) 3 (*d*) 2

44. यदि $\left(2x-\frac{3}{x}\right)=5$ हो, तो $\left(4x^2-\frac{9}{x^2}\right)=?$

(*a*) 25 (*b*) 30 (*c*) 35 (*d*) 49

45. यदि $a+b=7$ तथा $ab=12$ हो, तो $(a^2+b^2)=?$

(*a*) 25 (*b*) 29 (*c*) 37 (*d*) 49

46. यदि $a+b=7$ तथा $ab=6$ हो, तो $(a^3+b^3)=?$

(*a*) 91 (*b*) 133 (*c*) 217 (*d*) 343

47. यदि $a+b=5$ तथा $ab=6$ हो, तो $(a^3-b^3)=?$

(*a*) 19 (*b*) -19 (*c*) 63 (*d*) 63

48. यदि $a+b+c=0$ हो, तो $(a^3+b^3+c^3)=?$

(*a*) 0 (*b*) abc (*c*) $3\,abc$ (*d*) $(ab+bc+ca)$

49. यदि $a+b+c=0$ हो, तो $\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)=?$

(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) -1 (*d*) 3

50. यदि $a+b+c=9$ तथा $ab+bc+ca=23$ हो, तो $(a^3+b^3+c^3-3abc)=?$

(*a*) 108 (*b*) 207 (*c*) 669 (*d*) 723

51. यदि $(x^2+3ax-2a)$ का एक गुणनखण्ड $(x-2)$ हो, तो $a=?$
(a) 2 (b) – 2 (c) 1 (d) – 1

52. यदि (x^3+6x^2+4x+k) पूर्णतया $(x+2)$ से विभाज्य हो, तो $k=?$
(a) – 6 (b) – 7 (c) – 8 (d) – 10

53. यदि (x^3-5x^2+4k) पूर्णतया $(x+2)$ से विभाज्य हो, तो $k=?$
(a) – 2 (b) 3 (c) 7 (d) – 7

54. यदि $(x^{100}+x^{99}+k)$ पूर्णतया $(x+1)$ से विभक्त हो, तो $k=?$
(a) 1 (b) – 1 (c) 2 (d) 0

55. यदि (x^3+3x^2+4x+k) का एक गुणनखण्ड $(x+6)$ हो, तो $k=?$
(a) 33 (b) 36 (c) 66 (d) 132

56. यदि (x^3-k) का एक गुणनखण्ड $(x-1)$ हो, तो $k=?$
(a) – 1 (b) 1 (c) 2 (d) – 2

57. यदि (x^3+10x^2+mx+n) के दो गुणनखण्ड $(x-1)$ तथा $(x+2)$ हों, तो
(a) $m=5,\ n=-3$ (b) $m=7,\ n=-18$ (c) $m=17,\ n=-8$ (d) $m=23,\ n=-19$

58. यदि $f(x)$ एक बहुपद ऐसा है कि $f(-2)=0$, तो $f(x)$ का एक गुणनखण्ड है :
(a) $x-2$ (b) $x+2$ (c) $2-x$ (d) इनमें से कोई नहीं

59. $(3x^3+x^2-12x-4)$ का एक गुणनखण्ड निम्नलिखित में से कौन-सा है ?
(a) $3x-1$ (b) $3x+1$ (c) $3x-2$ (d) $3x+2$

60. (x^3-6x+7) को $(x+1)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
(a) 0 (b) 2 (c) 7 (d) 12

61. $(5x^3+5x^2-6x+9)$ को $(x+3)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
(a) 63 (b) – 63 (c) 135 (d) – 135

62. यदि एक बहुपद $f(x)$ को $(2x+3)$ से भाग दें, तो शेषफल क्या होगा ?
(a) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ (b) $f\left(\frac{-2}{3}\right)$ (c) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ (d) $f\left(\frac{-3}{2}\right)$

63. $(x^{11}+1)$ को $(x+1)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
(a) 0 (b) 2 (c) 11 (d) 12

64. $(2x^3+5x^2-4x-6)$ को $(2x+1)$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?
(a) 3 (b) – 3 (c) 6 (d) $\frac{-13}{2}$

65. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो (x^n-a^n) पूर्णतया $(x-a)$ से विभक्त होगा :
(a) n के सभी मानों के लिए (b) केवल n के सम मानों के लिए
(c) केवल n के विषम मानों के लिए (d) केवल n के अभाज्य मानों के लिए

66. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो (x^n-a^n) पूर्णतया $(x+a)$ से विभक्त होगा
(a) n के सभी मानों के लिए (b) केवल n के सम मानों के लिए
(c) केवल n के विषम मानों के लिए (d) केवल n के अभाज्य मानों के लिए

67. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो (x^n+a^n) पूर्णतया $(x+a)$ से विभक्त होगा :
(a) n के सभी मानों के लिए (b) केवल n के सम मानों के लिए
(c) केवल n के विषम मानों के लिए (d) केवल n के अभाज्य मानों के लिए

68. यदि n एक धन पूर्णांक हो तो (x^n+a^n) पूर्णतया $(x-a)$ से विभक्त होगा :
(a) n के सभी मानों के लिए (b) n के सम मानों के लिए
(c) n के विषम मानों के लिए (d) n के किसी भी मान के लिए नहीं

69. $(x+3)^3$ में x का गुणांक क्या होगा ?
(a) 1 (b) 9 (c) 18 (d) 27

70. यदि $a+b+c=0$ हो $a^3+b^3+c^3=?$
(a) 0 (b) abc (c) $2abc$ (d) $3abc$

71. बहुपद $p(x)=x^2-3x$ की शून्य कौन-सी हैं ?
(a) 0, 0 (b) 0, 3 (c) 0, – 3 (d) 3, – 3

72. बहुपद $p(x)=3x^2-1$ की शून्य कौन-सी हैं ?
(a) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ (d) इनमें से कोई नहीं

73. $107\times93=?$
(a) 9021 (b) 9951 (c) 8881 (d) 9631

74. $(370)^2-(369)^2=?$
(a) 1 (b) 19 (c) 739 (d) इनमें से कोई नहीं

75. $305\times308=?$
(a) 94840 (b) 94940 (c) 93840 (d) 93940

76. $a^2+b-ab-a=?$
(a) $(a+1)(a-b)$ (b) $(a-1)(a+b)$ (c) $(a-1)(a-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

77. $a(a+b-c)-bc=?$
(a) $(a+c)(a-b)$ (b) $(a-c)(a-b)$ (c) $(a-c)(a+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

78. $a(a-2b-c)+2bc=?$
(a) $(a-c)(a-2b)$ (b) $(a-c)(a+2b)$ (c) $(a+c)(a-2b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

79. $2x+4y-8xy-1=?$
(a) $(1+4y)(2x-1)$ (b) $(1-4y)(2x-1)$
(c) $(1-4y)(2x+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

80. $a(a-1)-b(b-1)=?$
(a) $(a+b)(a-b+1)$ (b) $(a-b)(a-b+1)$
(c) $(a-b)(a+b-1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

81. $a-b-a^2+b^2=?$
(a) $(a+b)(a-b-1)$ (b) $(a-b)(1-a-b)$
(c) $(a-b)(1+a-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

82. $1+2ab-a^2-b^2=?$
(a) $(1+a-b)(1-a+b)$ (b) $(1-a+b)(1-a-b)$
(c) $(1+a-b)(1-a+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

83. $20x^2-45=?$
(a) $(5x-9)(4x-5)$ (b) $5(2x-3)^2$
(c) $5(x-3)(x+3)$ (d) $5(2x-3)(2x+3)$

84. $x-64x^3=?$
(a) $x(8x-1)(8x+1)$ (b) $(8x^2-1)(8x^2+1)$
(c) $x(1-8x)(1+8x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

85. $a^2-b^2-4ac+4c^2=?$
(a) $(a-b-2c)(a-b+2c)$ (b) $(a-2c+b)(a-2c-b)$
(c) $(a+2c-b)(a+2c+b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

86. $3x^3 - 48x = ?$

(a) $3x(x^2 + 16)$ (b) $3x(x-4)(x+4)$ (c) $4x(x-3)(x+3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

87. $2 - 50x^2 = ?$

(a) $(\sqrt{2} - 5x)(\sqrt{2} + 5x)$ (b) $2(1-5x)^2$

(c) $2(1-5x)(1+5x)$ (d) $2(5x-1)(5x+1)$

88. $8ab^2 - 18a^3 = ?$

(a) $2(2ab+3a)(2ab-3a)$ (b) $2a(2a+3b)(2a-3b)$

(c) $2a(2b-3a)(2b+3a)$ (d) इनमें से कोई नहीं

89. $(a+b)^3 - a - b = ?$

(a) $(a+b-1)(a+b+1)$ (b) $(a+b)(a+b-1)(a+b+1)$

(c) $(a-b)(a-b-1)(a-b+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं

90. $150 - 6x^2 = ?$

(a) $6(25+x^2)$ (b) $6(x+5)(x-5)$ (c) $6(5-x)(5+x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

91. $a^2 + b - ab - a = ?$

(a) $(a+1)(a-b)$ (b) $(a-1)(a+b)$ (c) $(a-1)(a-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

92. $(2x-3)^2 - 8x + 12 = ?$

(a) $(2x-3)(2x-4)$ (b) $(2x-3)(2x-5)$

(c) $(2x-3)(2x-6)$ (d) $(2x-3)(2x-7)$

93. $(3a-1)^2 - 6a + 2 = ?$

(a) $(3a-1)(a-3)$ (b) $3(3a-1)(a-1)$ (c) $3(1-3a)(1+a)$ (d) इनमें से कोई नहीं

94. $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2) = ?$

(a) $(bx+ay)(ax-by)$ (b) $(bx-ay)(ax+by)$

(c) $(bx-ay)(ax-by)$ (d) इनमें से कोई नहीं

95. $x^2 - (a+b)x + ab = ?$

(a) $(x-a)(x-b)$ (b) $(x-a)(x+b)$ (c) $(x+a)(x-b)$ (d) इनमें से कोई नहीं

96. $(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = ?$

(a) $(a^2+b^2)(x^2-y^2)$ (b) $(a^2-b^2)(x^2+y^2)$

(c) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ (d) इनमें से कोई नहीं

97. $(x^2 + 5x - 24) = ?$

(a) $(x-8)(x-3)$ (b) $(x-8)(x+3)$ (c) $(x+8)(x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

98. $(x^2 - 4x - 21) = ?$

(a) $(x-7)(x+3)$ (b) $(x+7)(x-3)$ (c) $(x-7)(x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

99. $6x^2 + 7x - 3 = ?$

(a) $(2x-3)(3x+1)$ (b) $(2x+3)(3x-1)$

(c) $(3x-1)(2x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

100. $2x^2 - x - 21 = ?$

(a) $(2x-7)(x+3)$ (b) $(2x+7)(x-3)$

(c) $(2x-7)(x-3)$ (d) इनमें से कोई नहीं

101. $6 - x - x^2 = ?$

(a) $(2+x)(3-x)$ (b) $(2-x)(3+x)$ (c) $(x-2)(3-x)$ (d) इनमें से कोई नहीं

102. $2x^2 - x - 21 = ?$

(a) $(2x+7)(x-3)$ (b) $(2x-7)(x+3)$

(c) $(2x-3)(x+7)$ (d) $(2x+3)(x-7)$

103. $2x^2+3\sqrt{3}x+3=?$

(a) $(x+\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})$
(b) $(\sqrt{3}x+1)(2x+1)$
(c) $(\sqrt{3}x+1)(2\sqrt{3}x+3)$
(d) इनमें से कोई नहीं

104. $\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}=?$

(a) $(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$
(b) $(x+\sqrt{2})(2x+1)$
(c) $(x+\sqrt{2})(\sqrt{2}x+1)$
(d) इनमें से कोई नहीं

105. $3x^3-x^2-10x=?$

(a) $(x^2-2)(3x+5)$
(b) $(x^2+2)(3x-5)$
(c) $x(x-2)(3x+5)$
(d) $x(x+2)(3x-5)$

106. $8a^2-27ab+9b^2=?$

(a) $(a-3b)(8a-3b)$
(b) $(3b-a)(8a+3b)$
(c) $(a+3b)(3b-8a)$
(d) इनमें से कोई नहीं

107. $16a^4+54a=?$

(a) $(2a+3)(4a^3-6a+9)$
(b) $(2a^2+3)(4a^2-6a+9)$
(c) $2a(2a+3)(4a^2-6a+9)$
(d) इनमें से कोई नहीं

108. $(1-27x^3)=?$

(a) $(1-3x)(1+9x^2-3x)$
(b) $(1-3x)(1+3x+9x^2)$
(c) $(1+3x)(1-3x+9x^2)$
(d) इनमें से कोई नहीं

109. $(7a^3+56b^3)=?$

(a) $7(a+2b)(a^2+2ab+4b^2)$
(b) $7(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$
(c) $(7a+8b)(a^2-2ab+4b^2)$
(d) इनमें से कोई नहीं

110. $a^3-0\cdot064=?$

(a) $(a-0\cdot4)(a^2+0\cdot4a+1\cdot6)$
(b) $(a-0\cdot04)(a^2+0\cdot04a-0\cdot0016)$
(c) $(a-0\cdot4)(a^2+0\cdot4a+0\cdot16)$
(d) इनमें से कोई नहीं

111. $a-8ab^3=?$

(a) $a(1-2b)(1-2b+4b^2)$
(b) $a(1-2b)(1+2b+4b^2)$
(c) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
(d) इनमें से कोई नहीं

112. $64x^3-343=?$

(a) $(4x-7)(16x^2+28x+49)$
(b) $(4x-7)(16x^2-28x+49)$
(c) $(4x-7)(16x^2-28x-49)$
(d) इनमें से कोई नहीं

113. $32x^4-500x=?$

(a) $x(8x-25)(4x^2+10x+20)$
(b) $4x(2x-5)(4x^2-10x+25)$
(c) $4x(2x-5)(4x^2+10x+25)$
(d) इनमें से कोई नहीं

114. $a^3+a-3a^2-3=?$

(a) $(a-3)(a^2+1)$
(b) $(a^2+3)(a-1)$
(c) $(3-a)(1+a^2)$
(d) इनमें से कोई नहीं

115. $(x^4+4)=?$

(a) $(x^2+2)^2$
(b) $(x^2+2)(x^2-2)$
(c) $(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$
(d) इनमें से कोई नहीं

116. $(a+b)^3-(a-b)^3=?$

(a) $2b(3a^2+b^2)$ (b) $2b(3b^2+a^2)$ (c) $2a(3a^2+b^2)$ (d) $2a(a^2+3b^2)$

117. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=?$

(*a*) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (*b*) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

(*c*) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (*d*) $3(a-b)(b-c)(c-a)$

118. $(x^4+x^2+25)=?$

(*a*) $(x^2+3x+5)(x^2+3x-5)$ (*b*) $(x^2+5-3x)(x^2+5+3x)$

(*c*) $(x^2-5-3x)(x^2-5+3x)$ (*d*) इनमें से कोई नहीं

119. $(x^2-1-2a-a^2)=?$

(*a*) $(x-a+1)(x-a-1)$ (*b*) $(x+a-1)(x-a+1)$

(*c*) $(x+a+1)(x-a-1)$ (*d*) इनमें से कोई नहीं

उत्तरमाला (प्रश्नमाला 31)

1. (c)	2. (d)	3. (d)	4. (d)	5. (c)	6. (b)	7. (d)	8. (c)	9. (c)	10. (b)
11. (c)	12. (d)	13. (a)	14. (b)	15. (b)	16. (c)	17. (d)	18. (b)	19. (d)	20. (c)
21. (a)	22. (c)	23. (d)	24. (a)	25. (b)	26. (c)	27. (d)	28. (b)	29. (c)	30. (b)
31. (c)	32. (d)	33. (b)	34. (d)	35. (a)	36. (b)	37. (d)	38. (c)	39. (a)	40. (b)
41. (a)	42. (b)	43. (d)	44. (c)	45. (a)	46. (c)	47. (a)	48. (c)	49. (d)	50. (a)
51. (d)	52. (c)	53. (c)	54. (d)	55. (d)	56. (b)	57. (b)	58. (b)	59. (b)	60. (d)
61. (b)	62. (d)	63. (a)	64. (b)	65. (a)	66. (b)	67. (c)	68. (d)	69. (d)	70. (d)
71. (b)	72. (c)	73. (b)	74. (c)	75. (d)	76. (c)	77. (c)	78. (a)	79. (b)	80. (c)
81. (b)	82. (c)	83. (d)	84. (c)	85. (b)	86. (b)	87. (c)	88. (c)	89. (b)	90. (c)
91. (c)	92. (d)	93. (b)	94. (c)	95. (a)	96. (c)	97. (c)	98. (a)	99. (b)	100. (a)
101. (b)	102. (b)	103. (a)	104. (c)	105. (c)	106. (a)	107. (c)	108. (b)	109. (b)	110. (c)
111. (b)	112. (a)	113. (c)	114. (a)	115. (c)	116. (a)	117. (d)	118. (b)	119. (c)	

दिये गये प्रश्नों के हल | प्रश्नमाला 31

1. स्पष्ट है कि $(\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+6)$ एक बहुपद है.

2. स्पष्ट है कि $2x$ एक बहुपद है.

3. स्पष्ट है कि -5 एक अचर बहुपद है.

4. स्पष्ट है कि 0 शून्य बहुपद है.

5. स्पष्ट है कि $x+8$ एक रैखिक बहुपद है.

6. इनमें से (x^3+2) एक द्विपदी व्यंजक है.

7. स्पष्ट है कि $\sqrt{2}$ एक अचर बहुपद है जिसकी घात शून्य है.

8. शून्य-बहुपद की घात परिभाषित नहीं है.

9. $P(x)=x^{1/3}+3$ एक व्यंजक है जो बहुपदी नहीं है.

10. $\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1\cdot414}{2}=0\cdot707.$

11. $\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1\cdot732}{3}=0\cdot577.$

12. $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})}\times\frac{(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})}=\frac{(3+\sqrt{2})^2}{(9-2)}=\frac{9+2+6\sqrt{2}}{7}$

$=\frac{11}{7}+\frac{6\sqrt{2}}{7}\Rightarrow a=\frac{11}{7}$ तथा $b=\frac{6}{7}.$

13. $\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}\times\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(2-1)}=(2+1-2\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2}).$

$\therefore\ a=3,\ b=2.$

14. $\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}\times\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(3-1)}=\frac{(3+1-2\sqrt{3})}{2}$

$=\frac{(4-2\sqrt{3})}{2}=(2-\sqrt{3}).$

$\therefore\ (a+b\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})\Rightarrow a=2, b=-1.$

15. $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}\times\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(5-3)}=\frac{5+3+2\sqrt{15}}{2}=\frac{(8+2\sqrt{15})}{2}=(4+\sqrt{15}).$

$\therefore\ (a+b\sqrt{15})=(4+\sqrt{15})\Rightarrow a=4, b=1.$

16. $\frac{(5+2\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})}=\frac{(5+2\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})}\times\frac{(7-4\sqrt{3})}{(7-4\sqrt{3})}$

$=\frac{(5+2\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{(49-48)}=(35-24+14\sqrt{3}-20\sqrt{3})=(11-6\sqrt{3})$

$(a+b\sqrt{3})=(11-6\sqrt{3})\Rightarrow a=11, b=-6.$

17. $\frac{(4+2\sqrt{5})}{(4-3\sqrt{5})}=\frac{(4+2\sqrt{5})}{(4-3\sqrt{5})}\times\frac{(4+3\sqrt{5})}{(4+3\sqrt{5})}=\frac{(4+2\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})}{(16-45)}$

$=\frac{(16+30+12\sqrt{5}+8\sqrt{5})}{-29}=\frac{(46+20\sqrt{5})}{-29}=\frac{-46}{29}-\frac{20}{29}\cdot\sqrt{5}$

$\therefore\ (a+b\sqrt{5})=\frac{-46}{29}-\frac{20}{29}\cdot\sqrt{5}\Rightarrow a=\frac{-46}{29}, b=\frac{-20}{29}.$

18. $\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(3-2)}$

$=3\sqrt{6}-6-6+2\sqrt{6}=(5\sqrt{6}-12).$

$\therefore\ (a+b\sqrt{6})=(-12+5\sqrt{6})\Rightarrow a=-12, b=5.$

19. $\frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}=\frac{(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}\times\frac{(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{(9-5)}$

$=\frac{(9+5-6\sqrt{5})}{4}=\frac{(14-6\sqrt{5})}{4}=\frac{(7-3\sqrt{5})}{2}$

$=\frac{(7-3\times2\cdot236)}{2}=\frac{(7-6\cdot708)}{2}=\frac{0\cdot292}{2}=0\cdot146.$

20. $\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(5-3)}$

$=\frac{2(5+3)}{2}=8$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = 8^3 = 512$$

$$\Rightarrow \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=512$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times1\times8=512 \Rightarrow \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=(512-24)=488.$$

21. $\frac{1}{x}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})}\times\frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})}{(4-3)}=(2-\sqrt{3})$.

$$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=64 \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=64$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times4=64 \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=52.$$

22. दिया गया व्यंजक $=\frac{(7+3\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}\times\frac{(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}+\frac{(7-3\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}\times\frac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}$

$$=\frac{(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(9-5)}+\frac{(7-3\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(9-5)}$$

$$=\frac{(21-7\sqrt{5}+9\sqrt{5}-15)}{4}+\frac{(21+7\sqrt{5}-9\sqrt{5}-15)}{4}$$

$$=\frac{(6+2\sqrt{5})}{4}+\frac{(6-2\sqrt{5})}{4}=\frac{(6+2\sqrt{5})+(6-2\sqrt{5})}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

23. दिया गया व्यंजक $=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(3-2)}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(3-2)}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$=2(3+2)=(2\times5)=10.$$

24. $\sqrt{50}\times\sqrt{72}=\sqrt{25\times2}\times\sqrt{36\times2}$

$$=5\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=(30\times2)=60.$$

25. $\sqrt{20}\times\sqrt{45}=\sqrt{4\times5}\times\sqrt{9\times5}$

$$=2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=(2\times3\times5)=30.$$

26. $\sqrt{20}+\sqrt{80}+\sqrt{45}-\sqrt{180}$

$$=\sqrt{4\times5}+\sqrt{16\times5}+\sqrt{9\times5}-\sqrt{36\times5}$$

$$=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-6\sqrt{5}=9\sqrt{5}-6\sqrt{5}=3\sqrt{5}.$$

27. $(125)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{(125)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{(5^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{5^{\left(3\times\frac{1}{3}\right)}}=\frac{1}{5^1}=\frac{1}{5}.$

28. $(27)^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{\left(3\times\frac{2}{3}\right)}=3^2=9.$

29. $(16)^{\frac{3}{2}}=(4^2)^{\frac{3}{2}}=4^{\left(2\times\frac{3}{2}\right)}=4^3=64.$

30. $(81)^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^{\left(4\times\frac{3}{4}\right)}=3^3=27.$

31. $(81)^{-\frac{1}{4}}=(3^4)^{\frac{-1}{4}}=3^{4\times\frac{(-1)}{4}}=3^{-1}=\frac{1}{3}.$

32. $(64)^{-\frac{1}{2}}=(8^2)^{-\frac{1}{2}}=8^{\left\{2\times\frac{(-1)}{2}\right\}}=8^{-1}=\frac{1}{8}.$

33. $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6\times6\times6}=6.$

34. $\sqrt[3]{27}=3$ जो एक परिमेय संख्या है.

अत: $\sqrt[3]{27}$ एक करणी नहीं है.

35. 2, 3, 6 का ल०स० = 6.

प्रत्येक करणी को घात 6 की करणी में बदलने पर :

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=(27)^{\frac{1}{6}}$;

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=(9)^{\frac{1}{6}}$;

तीसरी संख्या $=(18)^{\frac{1}{6}}$.

स्पष्ट है कि इन सब में से $(27)^{\frac{1}{6}}$ अर्थात् $\sqrt{3}$ सबसे बड़ी संख्या है.

36. $\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=9\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(9-2)=7.$

37. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=2^3\Rightarrow\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=8$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\times2=8\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=2.$$

38. $\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2x\times\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(2+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow\left(4x^2+\frac{4}{x^2}\right)=4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(4\times\frac{9}{4}\right)=9.$$

39. $\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\sqrt{3}=3\sqrt{3}\Rightarrow\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=0.$$

40. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=102\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=100\Rightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(10)^2\Rightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)=10.$

41. $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)=322 \Rightarrow \left(x^4+\frac{1}{x^4}+2\right)=324$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=(18)^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=18$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=16 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4^2 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)=4.$$

42. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=52 \Rightarrow y^3-3y=52, \text{ जहाँ } \left(x-\frac{1}{x}\right)=y$$

$$\Rightarrow y^3-3y-52=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)=4.$$

43. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=14 \Rightarrow y^3+3y-14=0, \text{ जहाँ } \left(x-\frac{1}{x}\right)=y$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)=2.$$

44. $\left(2x-\frac{3}{x}\right)=5 \Rightarrow \left(2x-\frac{3}{x}\right)^2=5^2 \Rightarrow 4x^2+\frac{9}{x^2}-2\times 2x\times\frac{3}{x}=25$

$$\Rightarrow 4x^2+\frac{9}{x^2}-12=25 \Rightarrow 4x^2+\frac{9}{x^2}=37$$

$$\Rightarrow (2x)^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2+2\times 2x\times\frac{3}{x}=37+12=49$$

$$\Rightarrow \left(2x+\frac{3}{x}\right)^2=7^2 \Rightarrow \left(2x+\frac{3}{x}\right)=7$$

$$\Rightarrow \left(4x^2-\frac{9}{x^2}\right)=\left(2x+\frac{3}{x}\right)\left(2x-\frac{3}{x}\right)=(7\times 5)=35.$$

45. $(a^2+b^2)=(a+b)^2-2ab=(7)^2-2\times 12=(49-24)=25.$

46. $(a^3+b^3)=(a+b)^3-3ab\,(a+b)$

$$=(7)^3-3\times 6\times 7=(343-126)=217.$$

47. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(5)^2-4\times 6=(25-24)=1 \Rightarrow (a-b)=1.$

$\therefore\ (a^3-b^3)=(a-b)^3+3ab\,(a-b)=1^3+3\times 6\times 1=19.$

48. $(a+b+c)=0 \Rightarrow (a+b+c)^3=0$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc.$$

49. $(a+b+c)=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^3}{abc}=3 \Rightarrow \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=3.$$

50. $(a^3+b^3+c^3-3abc)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=(a+b+c)\cdot\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]$$
$$=9\times\left[(9)^2-3\times 23\right]=9\times[81-69]=(9\times 12)=108.$$

51. माना $f(x)=x^2+3ax-2a$. तब, $f(2)=0$.

$\therefore\ 2^2+3a\times 2-2a=0 \Rightarrow 4+6a-2a=0 \Rightarrow 4a=-4 \Rightarrow a=-1.$

52. माना $f(x)=x^3+6x^2+4x+k$. तब, $f(-2)=0$.

$\therefore\ (-2)^3+6\times(-2)^2+4\times(-2)+k=0 \Rightarrow -8+24-8+k=0 \Rightarrow k=-8.$

53. माना $f(x)=x^3-5x^2+4k$. तब, $f(-2)=0$.

$\therefore\ (-2)^3-5\times(-2)^2+4k=0 \Rightarrow -8-20+4k=0 \Rightarrow 4k=28 \Rightarrow k=7.$

54. माना $f(x)=x^{100}+x^{99}+k$. तब, $f(-1)=0$.

$\therefore\ (-1)^{100}+(-1)^{99}+k=0 \Rightarrow 1-1+k=0 \Rightarrow k=0.$

55. माना $f(x)=x^3+3x^2+4x+k$. तब, $f(-6)=0$.

$\therefore\ (-6)^3+3\times(-6)^2+4\times(-6)+k=0$

$\Rightarrow -216+108-24+k=0 \Rightarrow k=132.$

56. माना $f(x)=(x^3-k)$. तब, $f(1)=0$.

$\therefore\ 1^3-k=0 \Rightarrow k=1.$

57. माना $f(x)=x^3+10x^2+mx+n$. तब, $f(1)=0$ तथा $f(-2)=0$.

$f(1)=0 \Rightarrow 1^3+10\times 1^2+m\times 1+n=0 \Rightarrow m+n=-11.$

$f(-2)=0 \Rightarrow -8+10\times(-2)^2+m\times(-2)+n=0 \Rightarrow 2m-n=32.$

इन्हें हल करने पर : $m=7$ तथा $n=-18$.

58. चूँकि $f(-2)=0$ है, अतः $f(x)$ का एक गुणनखण्ड $(x+2)$ है.

59. माना $f(x)=3x^3+x^2-12x-4$.

तब, $f\left(\frac{-1}{3}\right)=3\times\frac{(-1)}{27}+\frac{1}{9}-12\times\frac{(-1)}{3}-4=0.$

अतः $f(x)$ का एक गुणनखण्ड $(3x+1)$ है.

60. माना $f(x)=x^3-6x+7$.

तब, $f(-1)=(-1)^3-6\times(-1)+7=(-1+6+7)=12.$

अतः (x^3-6x+7) को $(x+1)$ से भाग देने पर शेषफल $=12$.

61. माना $f(x)=5x^3+5x^2-6x+9$.

$f(x)$ को $(x+3)$ से भाग देने पर शेषफल $=f(-3)$.

$\therefore$ शेषफल $=f(-3)$

$$=5\times(-3)^3+5\times(-3)^2-6\times(-3)+9$$
$$=5\times(-27)+45+18+9=-135+72=-63.$$

62. $2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$.

$\therefore\ f(x)$ को $(2x+3)$ से भाग देने पर शेषफल $=f\left(\frac{-3}{2}\right)$.

63. $x+1=0 \Rightarrow x=-1$.

$f(x)=(x^{11}+1)$ को $(x+1)$ से भाग देने पर :

शेषफल $=f(-1)=(-1)^{11}+1=(-1+1)=0.$

64. $2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$.

$f(x)=2x^3+5x^2-4x-6$ को $(2x+1)$ से भाग देने पर :

शेषफल $= f\left(\frac{-1}{2}\right)$

$$= 2\times\left(\frac{-1}{2}\right)^3+5\times\left(\frac{-1}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{-1}{2}\right)-6$$

$$= 2\times\frac{(-1)}{8}+5\times\frac{1}{4}+2-6=\frac{-1}{4}+\frac{5}{4}+2-6$$

$$= (1+2-6)=-3.$$

65. सभी पूर्णांकों n के लिए (x^n-a^n) सदैव $(x-a)$ से पूर्णतया विभक्त होता है.

66. यदि n एक समसंख्या है, तो (x^n-a^n) सदैव $(x+a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा.

67. यदि n एक विषम संख्या है, तो (x^n+a^n) सदैव $(x+a)$ से पूर्णतया विभक्त होगा.

68. (x^n+a^n) कभी भी $(x-a)$ से विभक्त नहीं होगा.

69. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$.

$\therefore\ (x+3)^3=x^3+27+9x\,(x+3)=x^3+9x^2+27x+27$.

अत: x का गुणांक $= 27$.

70. $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$.

71. $p(x)=0 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ अथवा $x=3$.

72. $p(x)=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ अथवा $\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

73. $107\times 93=(100+7)\,(100-7)$

$$=(100)^2-7^2=(10000-49)=9951.$$

74. $(370)^2-(369)^2=(370+369)\times(370-369)=(739\times 1)=739$.

75. $(305\times 308)=(300+5)\times 308$

$$=(300\times 308)+5\times 308=92400+1540=93940.$$

76. $a^2+b-ab-a=(a^2-ab)-a+b$

$$=a(a-b)-(a-b)=(a-b)\,(a-1).$$

77. $a(a+b-c)-bc=a^2+ab-ac-bc$

$$=a(a+b)-c(a+b)=(a+b)\,(a-c).$$

78. $a(a-2b-c)+2bc=a^2-2ab-ac+2bc$

$$=a(a-c)-2b(a-c)=(a-c)\,(a-2b).$$

79. $2x(1-4y)-(1-4y)=(1-4y)\,(2x-1)$.

80. $a(a-1)-b(b-1)=a^2-a-b^2+b=(a^2-b^2)-(a-b)=(a-b)\,(a+b-1)$.

81. $a-b-a^2+b^2=(a-b)-(a^2-b^2)=(a-b)\left[1-(a+b)\right]=(a-b)\,(1-a-b)$.

82. $1+2ab-a^2-b^2=1-(a^2+b^2-2ab)=1-(a-b)^2$

$$=(1+a-b)\,(1-a+b).$$

83. $20x^2-45=5(4x^2-9)=5(2x-3)\,(2x+3)$.

84. $x-64\,x^3=x(1-64\,x^2)=x(1-8x)\,(1+8x)$.

85. $a^2-b^2-4ac+4c^2=(a^2+4c^2-4ac)-b^2=(a-2c)^2-b^2$

$$=(a-2c+b)\,(a-2c-b).$$

86. $3x^3 - 48x = 3x(x^2 - 16) = 3x(x-4)(x+4).$

87. $2 - 50x^2 = 2(1 - 25x^2) = 2(1-5x)(1+5x).$

88. $8ab^2 - 18a^3 = 2a(4b^2 - 9a^2) = 2a(2b-3a)(2b+3a).$

89. $(a+b)^3 - a - b = (a+b)^3 - (a+b) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 1\right]$
$= (a+b)(a+b-1)(a+b+1).$

90. $(150 - 6x^2) = 6(25 - x^2) = 6(5-x)(5+x).$

91. $a^2 + b - ab - a = a^2 - ab - a + b = a(a-b) - (a-b) = (a-b)(a-1).$

92. $(2x-3)^2 - 8x + 12 = (2x-3)^2 - 4(2x-3) = (2x-3)(2x-3-4) = (2x-3)(2x-7).$

93. $(3a-1)^2 - 6a + 2 = (3a-1)^2 - 2(3a-1) = (3a-1)[(3a-1)-2]$
$= (3a-1)(3a-3) = 3(3a-1)(a-1).$

94. $ab(x^2+y^2) - xy(a^2+b^2)$
$= abx^2 + aby^2 - a^2xy - b^2xy = (abx^2 - a^2xy) + (aby^2 - b^2xy)$
$= ax(bx-ay) + by(ay-bx) = ax(bx-ay) - by(bx-ay)$
$= (bx-ay)(ax-by).$

95. $x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab$
$= x(x-a) - b(x-a) = (x-a)(x-b).$

96. $(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy$
$= (a^2x^2 + a^2y^2) + (b^2x^2 + b^2y^2) = a^2(x^2+y^2) + b^2(x^2+y^2)$
$= (x^2+y^2)(a^2+b^2) = (a^2+b^2)(x^2+y^2).$

97. $x^2 + 5x - 24 = x^2 + 8x - 3x - 24$
$= x(x+8) - 3(x+8) = (x+8)(x-3).$

98. $x^2 - 4x - 21 = x^2 - 7x + 3x - 21$
$= x(x-7) + 3(x-7) = (x-7)(x+3).$

99. $6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 9x - 2x - 3$
$= 3x(2x+3) - (2x+3) = (2x+3)(3x-1).$

100. $2x^2 - x - 21 = 2x^2 - 7x + 6x - 21$
$= x(2x-7) + 3(2x-7) = (2x-7)(x+3).$

101. $6 - x - x^2 = -x^2 - x + 6 = -x^2 - 3x + 2x + 6$
$= -x(x+3) + 2(x+3) = (x+3)(2-x).$

102. $2x^2 - x - 21 = 2x^2 - 7x + 6x - 21$
$= x(2x-7) + 3(2x-7) = (2x-7)(x+3).$

103. $2x^2 + 3\sqrt{3}x + 3 = 2x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x + 3$
$= 2x(x+\sqrt{3}) + \sqrt{3}(x+\sqrt{3}) = (x+\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}).$

104. $\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = \sqrt{2}x^2 + 2x + x + \sqrt{2}$
$= \sqrt{2}x(x+\sqrt{2}) + (x+\sqrt{2}) = (x+\sqrt{2})(\sqrt{2}x+1).$

105. $3x^3 - x^2 - 10x = x(3x^2 - x - 10)$
$= x(3x^2 - 6x + 5x - 10) = x[3x(x-2) + 5(x-2)]$
$= x(x-2)(3x+5).$

106. $8a^2 - 27ab + 9b^2 = 8a^2 - 24ab - 3ab + 9b^2$
$= 8a(a-3b) - 3b(a-3b) = (a-3b)(8a-3b).$

107. $16a^4+54a=2a(8a^3+27)=2a\times\left[(2a)^3+3^3\right]$
$=2a(2a+3)(4a^2-6a+9).$

108. $(1-27x^3)=[1^3-(3x)^3]$
$=(1-3x)(1+3x+9x^2).$

109. $(7a^3+56b^3)=7(a^3+8b^3)=7\left[a^3+(2b)^3\right]$
$=7(a+2b)(a^2-2ab+4b^2).$

110. $(a^3-0\cdot064)=a^3-(0\cdot4)^3$
$=(a-0\cdot4)(a^2+0\cdot4\,a+0\cdot16)$

111. $a-8ab^3=a(1-8b^3)=a\left[(1)^3-(2b)^3\right]$
$=a(1-2b)(1+2b+4b^2).$

112. $64x^3-343=(4x)^3-(7)^3$
$=(4x-7)(16x^2+28x+49).$

113. $32x^4-500\,x=4x(8x^3-125)=4x\times\left[(2x)^3-5^3\right]$
$=4x(2x-5)(4x^2+10x+25).$

114. $a^3+a-3a^2-3=(a^3-3a^2+a-3)$
$=(a^3-3a^2)+(a-3)=a^2(a-3)+(a-3)=(a-3)(a^2+1).$

115. $(x^4+4)=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x).$

116. माना $(a+b)=x$ तथा $(a-b)=y$. तब
$(a+b)^3-(a-b)^3=(x^3-y^3)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=\left[(a+b)-(a-b)\right]\left[(a+b)^2+(a-b)^2+(a+b)(a-b)\right]$
$=2b\left[2a^2+2b^2+a^2-b^2\right]=2b(3a^2+b^2).$

117. माना $a-b=x, b-c=y$ तथा $c-a=z$. तब
$x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$
$\Rightarrow (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$

118. $x^4+x^2+25=\left(x^2\right)^2+5^2+10x^2-9x^2$
$=\left(x^2+5\right)^2-(3x)^2=(x^2+5-3x)(x^2+5+3x).$

119. $(x^2-1-2a-a^2)=x^2-(1+2a+a^2)=x^2-(a+1)^2$
$=(x-a-1)(x+a+1).$