बीजगणित
ALGEBRA

इकाई – 2

आओ अंकगणित एवं बीजगणित का इतिहास जानें...

यदि आप अपने आस–पास होने वाले क्रियाकलापों, घटनाओं और चीजों को ध्यान से देखें और उन पर विचार करें तो पाएँगे कि वे सभी किसी न किसी तरह गणित से जुड़े हुए हैं। खरीद–फरोख्त करना हो या कोई चीज बनानी हो, अपनी दिनचर्या तय करनी हो या कोई बड़ी योजना बनानी हो तो हर जगह हम गणित का उपयोग करते ही हैं।

गणित का जीवन से यह जुड़ाव आज की बात नहीं है। इंसानी सभ्यता के विकास के साथ–साथ ही गणित की विकास यात्रा भी लगातार जारी है। इस विकास यात्रा में मनुष्य ने संख्याओ के साथ–साथ व्यापक संकेतों का इस्तेमाल करके समस्याओं का हल ढूंढ़ने की कोशिश की। ऐसी कोशिशों से ही गणित की उस शाखा का जन्म हुआ जिसे आज हम बीजगणित कहते हैं।

बीजगणित, गणित की वह शाखा है जिसमें संख्याओं को अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है। परन्तु संक्रिया के चिह्न वही रहते हैं जिनका प्रयोग अंक गणित में होता है।

बीजगणित के आधुनिक संकेतवाद का विकास कुछ शताब्दी पूर्व ही प्रारंभ हुआ है, परन्तु समीकरण को हल करने की समस्या बहुत पुरानी है। ईसा से 2000 वर्ष पूर्व लोग अटकल लगाकर समीकरणों को हल करते थे।

बीजगणित को संकेतों के रूप में व्यक्त करने की परम्परा क्रमशः विकसित हुई। अनुमान है कि ईसा पूर्व 300 से 250 ईसवी के आसपास बीजगणित आम बोलचाल की भाषा में वर्णित किया जाता था। जैसे $x+1=2$ को कहना "किसी संख्या में एक जोड़ने पर दो प्राप्त होता है।" लगभग 250 ईसवी में डायोफेन्टस की "अरिथमेटिका" में कुछ आशुलिपिक संकेतों का प्रयोग दिखाई पड़ता है। ऐसी ही बातें ब्रह्मगुप्त ने ब्रह्मस्फुट सिद्धांत में लिखी हैं। उक्त उदाहरण को उस समय ऐसा लिखा जाता था– "x में जब 1 जोड़ते हैं तब 2 प्राप्त होता है।"

1600 ईसवी के बाद चरों और स्थिर संख्याओं को संकेतों के रूप में लिखा जाने लगा। जैसे $x+1=2$ को व्यापक रूप में इस तरह लिखा जा सकता है– $ax+b=c$ जहाँ x चर और a, b, c स्थिर संख्याएँ हैं।

यह कैसे हुआ होगा इसे समझने के लिए आइए कोई ऐसी पहेली हल करने की कोशिश करें जो गाँव–देहात के बड़े–बूढ़े अक्सर पूछा करते हैं। उदाहरण के लिए एक पहेली देखें–

सौ गोड़ अउ बहत्तर आँखी
कतका हाथी, कतका पाँखी

इसका आशय है– "हाथियों और पक्षियों के एक समूह के कुल सौ पैर और बहत्तर आँखें हैं, बताओ हाथी कितने हैं और कितने पक्षी हैं?"

इसे कैसे हल करेंगे? इसे हम अटकलें लगाकर हल कर सकते हैं, जैसे बीस हाथी हैं तो अस्सी पैर, बचे बीस पैर तो दस पक्षी होंगे। कुल 30 प्राणी हुए। इनकी 60 आँखें होंगी। लेकिन आँखें तो बहत्तर है...। तो कोई और जोड़ी सोचें।

स्पष्ट है हाथी कम करने पड़ेंगे। सोचिए क्यों?

हम ऐसे भी हल शुरू कर सकते हैं– आँखें बहत्तर हैं तो प्राणी छत्तीस। हाथियों की संख्या 'ह' हो तो पक्षियों की संख्या 36 से 'ह' कम होगी। अब 'ह' हाथियों और (36–ह) पक्षियों के पैर गिन लें तो सौ होंगे। याने ह×4+(36–ह)×2=100 यह हमारा सरल समीकरण बन गया जिससे 'ह' मालूम कर सकते हैं।

हमें जो प्रमाण मिलते हैं उनके अनुसार लगभग 800–500 ईसा पूर्व भारत में शुल्व सूत्रों की रचनाएँ हुई। ये शुल्व सूत्र यज्ञ के लिए विभिन्न प्रकार की वेदियों की रचना करने से संबंधित थे। वेदियाँ यदि निश्चित क्षेत्रफल की किंतु अलग–अलग आकृतियों की बनानी हो तो यह कैसे किया जाए, ऐसी समस्याओं का हल इन सूत्रों में है। एक उदाहरण देखें– यदि किसी वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर आयत की रचना करनी हो तो कैसे करें? यद्यपि यह समस्या ज्यामिति से जुड़ी है किंतु इसे हल करने के लिए बीजगणितीय समीकरणों की मदद भी ली जा सकती है। जैसे किसी वर्ग की भुजा 'व' हो और इसके बराबर क्षेत्रफल वाले ऐसे आयत की रचना करनी हो जिसकी लम्बाई 'ल' निश्चित हो तो इसकी चौड़ाई क्या होनी चाहिए। इसके हल करने के लिए व × व = ल × च जैसा समीकरण बनता है। ऐसा नहीं है कि केवल भारत में ही ऐसी सोच विकसित हुई। दुनिया के अलग–अलग हिस्सों में भी ऐसे लोग हुए जिन्होंने गणित की इस नई दिशा में काम किया। 500–300 ई.पू. में आर्कमिडीज ने प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग प्राप्त करने का तरीका ढूँढ़ लिया था।

अंकगणित व संख्या समूहों को व्यापक रूप में लिखने का बहुत सारा काम भारत में छठवीं शताब्दी ईसापूर्व के आसपास हुआ। इसी तरह से पाँचवीं व छठी शताब्दी में आर्यभट्ट व ब्रह्मगुप्त ने संख्या श्रेणियों के कई तरह के व्यापक जोड़ भी पता किए। इन्होंने अलग–अलग तरह की कई व्यापक द्विघाती व सरल समीकरणों के हल भी पता किए। भारत में अंकों से खेलकर कई तरह की व्यापक व विशिष्ट बातें पता करने के कई उदाहरण हैं। भारतीय गणित, यूनानी व अरबी गणित में कई तरह का आदान–प्रदान भी हुआ।

भारत में बारहवीं शताब्दी में अवकलजों, अतिसूक्ष्मों, मध्यमान प्रमेय आदि पर बहुत काम हुआ। चौदहवीं शताब्दी में sine (ज्या), cosine (कोज्या) के लिए अनन्त श्रेणी आदि पर काम किया गया। किन्तु यह काम व्यवस्थित रूप से प्रस्तुत नहीं हो पाया और बाहर के लोगों को ठीक से इसका महत्व ज्ञात नहीं हो पाया।

आज का 'एलजेब्रा' या 'बीजगणित' अलग–अलग जगह हुए प्रयासों की मिली–जुली समझ है।

यह अंकगणित एवं बीजगणित का सम्पूर्ण इतिहास नहीं है। अलग–अलग ग्रंथों से कुछ जानकारियाँ संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से बीजगणित के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

वास्तविक संख्याएँ
(परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ)
[REAL NUMBERS]
(Rational and Irrational Numbers)

02

किसी कक्षा में सभी प्रकार की संख्याएँ सोचने के लिए कहे जाने पर छात्रों ने ये संख्याएँ बताईं।

8, 0.15, $\frac{3}{7}$,1, −3	−108, −0.37, $\frac{10}{9}$, 105	12 0 $\frac{17}{19}$, −7.5	205 $\frac{22}{7}$, −55 3.2323

क्या इनमें सभी प्रकार की संख्याएँ आ गई हैं?

क्या आप कुछ और संख्याओं के उदाहरण दे सकते हैं? आपस में चर्चा करें व उदाहरण दें।

इन संख्याओं को गुणों के आधार पर बाँटना हो तो, कैसे बाँटें? कौन से गुण लें? क्या इन्हें सम–विषम संख्याओं में बांट सकते हैं? क्या इन्हें बांटने का कोई और तरीका हो सकता है? कितने अलग–अलग तरीकों से इन्हें बाँट सकते हैं?

प्राकृत से परिमेय तक (Natural to Rational)

मनीषा और सलमा ने इन्हें N (प्राकृत संख्या– Natural Numbers), W (पूर्ण संख्या– Whole Numbers), Z (पूर्णांक संख्या–Integers) और Q (परिमेय संख्या– Rational Numbers) में नीचे दिए तरीके से बाँटा–

N	W	Z	Q
8,105, 12,205, 1	0,8,105, 12,205, 1	0,8,105, 12,205, 1,−108, −55 −3	0,8,105,12,205, 1,−3,−108,−55, $\frac{22}{7}$,$\frac{3}{7}$,−0.37, 3.2323, −7.5, $\frac{10}{9}$,$\frac{17}{19}$ 0.15

आप सभी डिब्बों में 3 नई संख्याएँ और लिखें।

क्या कुछ ऐसी संख्याएँ हैं जो सभी डिब्बों में हैं?

करके देखें

1. वे संख्याएँ लिखिए जो Q में है परंतु N में नही।
2. वे संख्याएँ लिखिए जो Z में है परंतु N में नही
3. वे संख्याएँ लिखिए जो W में है परंतु N में नही।

Q बॉक्स में सभी संख्याएँ आ जाएंगी, इन सबको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसमें p तथा q पूर्णांक संख्याएँ हैं तथा $q \neq 0$ याने p कोई भी पूर्णांक संख्या और q शून्य को छोड़कर कोई भी पूर्णांक संख्या हो सकती है। ये सब परिमेय संख्याएँ हैं।

रश्मि बोली कि प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ भी परिमेय संख्याओं में आती हैं क्योंकि इन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है

क्या आप इससे सहमत हैं? रेशमा ने कुछ उदाहरण ऐसे दिये–

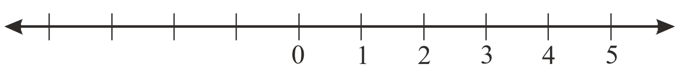
$$8 = \frac{8}{1}, \qquad -3 = \frac{-3}{1}, \qquad 0 = \frac{0}{1}$$

क्या आप कोई ऐसी पूर्णांक संख्या ढूंढ सकते हैं जो इस तरह परिमेय रूप में न लिखी जा सके?

अतः हम कह सकते हैं कि प्राकृत संख्या का समूह पूर्णांकों में और पूर्णांक संख्या का समूह परिमेय संख्या में सम्मिलित है।

प्राकृत संख्याएँ (N) और पूर्णांक संख्याएँ (Z) एक नियम का पालन करती हैं। प्रत्येक संख्या पिछली अथवा अपने बायीं ओर की संख्या से एक अधिक और बाद की अथवा दायें वाली संख्या से एक कम है। अर्थात दो क्रमवार संख्याएँ आपस में एक इकाई की समान दूरी पर हैं।

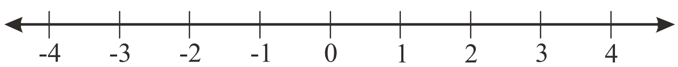
संख्या रेखा



चित्र–1

पूर्ण संख्या को संख्या रेखा पर दिखाने के लिए एक रेखा खींचकर, उस पर समान दूरी पर कई चिह्न लगाइए। किसी एक बिंदु को 0 मान लें, समान दूरी पर दाईं ओर 1, 2, 3,...... संख्याएँ लिखें।

पूर्णांक संख्याओं के लिए संख्या रेखा



चित्र–2

पूर्णांक संख्या को संख्या रेखा पर दिखाने के लिए चित्र–1 की संख्या रेखा पर बायीं ओर –1, –2, –3, ... लिखें (चित्र–2)।

हम देख सकते हैं कि दाईं ओर एक आगे बढ़ने पर संख्या एक अधिक हो जाती है और बाईं और बढ़ने पर एक कम हो जाती है।

करके देखें

1. संख्या रेखा पर दिखाएँ −2, +3, +4 2. −3 से +2 कितने आगे है?

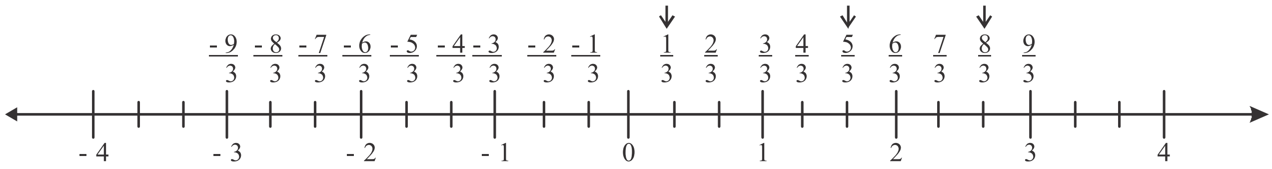
परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना

क्या आप परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं?

AQH7P7

क्या आप $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ आदि को संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं?

रश्मि ने इनको संख्या रेखा पर ऐसे दर्शाया।



चित्र–3

इसमें उसने प्रत्येक इकाई को तीन बराबर भागों में बाँटा है और फिर संख्याओं को दर्शाया है।

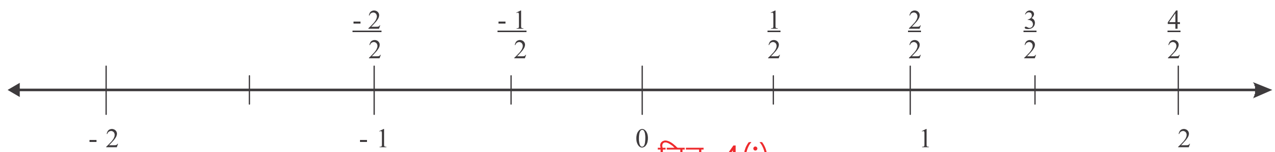
इसी तरह आप भी $\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}$ अंकित करें।

सोचें एवं चर्चा करें

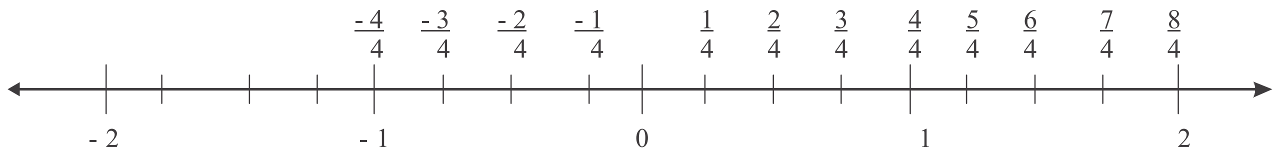
$\frac{-3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{12}{5}$...... आदि को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए क्या करना होगा?

तुल्य परिमेय संख्या व संख्या रेखा

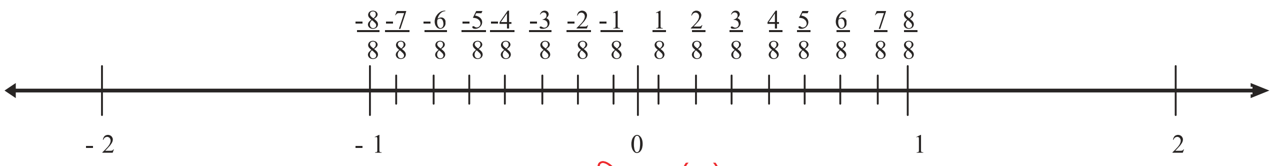
जिस प्रकार $\frac{1}{2}$ परिमेय संख्या है उसी प्रकार $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$, ... भी परिमेय संख्याएँ हैं। इन्हें संख्या रेखा पर कैसे प्रदर्शित करें? आइए, करके देखते हैं।



चित्र–4 (i)



चित्र–4 (ii)



चित्र–4 (iii)

संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ का जो स्थान है वही संख्या $\frac{2}{4}$ तथा $\frac{4}{8}$ का भी है। अतः $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ जो तुल्य परिमेय संख्याएँ हैं, एक ही जगह पर आती हैं।

दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ– हमें कोई भी दो पूर्णांक मिलें तो हम पता लगा सकते हैं कि उनके बीच कितनी पूर्णांक संख्याएँ हैं।

करके देखें

1. 5 व 15 के बीच कितनी पूर्णांक संख्याएँ हैं?
2. –3 व 8 के बीच कितनी पूर्णांक संख्याएँ हैं?

क्या यह गणना हम परिमेय संख्याओं के लिए भी कर सकते हैं?

$\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ हैं? आपस में चर्चा करो।

रेशमा बोली– संख्या रेखा पर देखे तो $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के ठीक बीच $\frac{3}{8}$ है।

$\frac{3}{8}$ याने $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ का आधा

सलमा बोली फिर $\frac{3}{8}$ और $\frac{1}{2}$ के ठीक बीच परिमेय संख्या, $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)$ का आधा याने $\frac{7}{16}$ और फिर $\frac{7}{16}$ और $\frac{1}{2}$ के ठीक बीच है $\frac{15}{32}$

ये सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच हैं। इसी प्रकार हम और भी परिमेय संख्याएँ इन दोनों के बीच ढूंढ सकते हैं।

क्या आप सोच सकते हैं कि कितनी और परिमेय संख्याएँ इन दोनों के बीच हैं?

आपस में चर्चा करो और कुछ और परिमेय संख्याएँ ढूंढो।

हम देखते हैं कि जितनी बार चाहें, हम इन परिमेय संख्याओं के बीच नई परिमेय संख्याएँ ढूंढ सकते हैं।

अब हम यह कह सकते हैं कि $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच इतनी अधिक परिमेय संख्याएँ हैं कि हम इनको गिन कर बता नहीं सकते।

यह बात किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के लिए सही है।

परिमेय संख्याओं के बीच असंख्य संख्याएँ

a, b कोई भी दो परिमेय संख्याएँ है जिनमें $a < b$

तब $a + a < b + a$

$2a < b+a$

या $a < \frac{b+a}{2}$ ....(i)

पुनः $a < b$

$a + b < b + b$

$a + b < 2b$

$\frac{a+b}{2} < b$ ....(ii)

इस प्रकार $\frac{a+b}{2}$, a और b के बीच में है। याने $a < \frac{a+b}{2} < b$

हम कोई भी दो परिमेय संख्याएँ a और b लें तो उनके बीच एक परिमेय $\frac{a+b}{2}$ है और इस प्रकार $\frac{a+b}{2}$ और a के बीच भी परिमेय संख्याएँ होती हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दो परिमेय संख्याओं के बीच असंख्य परिमेय संख्याएँ हैं।

दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ ढूंढना

हम दो परिमेय संख्याएँ $a = \frac{5}{1}$ व $b = \frac{6}{1}$ लेते हैं।

हालाँकि इनके बीच असंख्य परिमेय संख्याएँ हैं, हम उनमें से कुछ संख्याएँ पता करना चाहें तो यह तरीका उपयोग कर सकते हैं।

$\frac{5}{1}$ व $\frac{6}{1}$ के बीच एक परिमेय संख्या $= \frac{a+b}{2} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$ है।

इसे हम तुल्य परिमेय संख्याओं का उपयोग करके भी देख सकते हैं।

$$\frac{5}{1}=\frac{5\times 2}{1\times 2}=\frac{10}{2},$$ (तुल्य परिमेय संख्या)

$$\frac{6}{1}=\frac{6\times 2}{1\times 2}=\frac{12}{2},$$

$$\frac{10}{2}<\frac{11}{2}<\frac{12}{2}$$

$\frac{10}{2}$ और $\frac{12}{2}$ के बीच एक परिमेय संख्या $\frac{11}{2}$ होगी।

इसी प्रकार

$$\frac{5}{1}=\frac{5\times 3}{1\times 3}=\frac{15}{3},$$

$$\frac{6}{1}=\frac{6\times 3}{1\times 3}=\frac{18}{3},$$

यानी $\frac{15}{3}$ और $\frac{18}{3}$ के बीच परिमेय संख्या $\frac{16}{3},\frac{17}{3}$ होंगी।

तुल्य परिमेय संख्या का उपयोग करके इन सब के अलावा और भी बहुत सी संख्या ढूँढ सकते हैं। उदाहरण के लिए $\frac{5}{1}$ और $\frac{6}{1}$ को 11 से गुणा व भाग करने पर हमें इन दोनों के बीच 10 नई परिमेय संख्याएँ मिल जाएँगी।

अगर हमें $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात करनी हैं तो हम तीन से 1 अधिक अर्थात् 3 +1 = 4 का गुणा दोनों परिमेय संख्या के अंश और हर में करेंगे।

$$\frac{1}{5}=\frac{1´\ 4}{5´\ 4}=\frac{4}{20}$$ (तुल्य परिमेय संख्या)

$$\frac{2}{5}=\frac{2´\ 4}{5´\ 4}=\frac{8}{20}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{4}{20}<\frac{5}{20}<\frac{6}{20}<\frac{7}{20}<\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

अतः $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{20},\frac{6}{20},\frac{7}{20}$ होंगी।

करके देखें

1. $\frac{2}{7}$ और $\frac{4}{7}$ के बीच कोई 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{7}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{-1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच 11 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

परिमेय संख्याओं के गुणधर्म (Properties of Rational Numbers)

(i) पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक (Whole Numbers and Integers)

एक बार पुनः संक्षेप में संख्याओं के गुणधर्म पर चर्चा करें। शुरूआत संवृतता (Clousure) से करते हैं।

नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए जो चर्चा के लिए आवश्यक है। इस तालिका में संबंधित उदाहरण भी दें।

संख्याएँ	संक्रियाएँ			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
पूर्ण संख्याएँ	किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a और b के लिए a + b पूर्ण संख्या है, इसलिए यह संवृत है। उदा.	संवृत नहीं है क्योंकि 5 − 7 = −2 पूर्ण संख्या नहीं है।	संवृत है −−−−−− −−−−−−	संवृत नहीं हैं क्योंकि 5÷8 $= \frac{5}{8}$ पूर्ण संख्या नहीं है।
पूर्णांक	−6+4= −2 एक पूर्णांक है। पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत है। उदा. −−−−−−	संवृत है क्योंकि किन्हीं a और b दो पूर्णांकों के लिए a-b पूर्णांक है उदा. −−−−−−	5 x 9 = 45 −5 x 9 = −45 और −5 x(- 9)=45 सभी पूर्णांक हैं। व्यापक रूप से किन्हीं दो पूर्णांक a तथा b के लिए a x b एक पूर्णांक है। उदा.	संवृत नहीं है क्योंकि −−−−−− −−−−−− −−−−−−

(ii) परिमेय संख्याएँ – संवृत गुणधर्म **(Closure Property)**

(a) **योग**

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$ हैं।

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

परिणाम $\frac{51}{56}$ पुनः परिमेय संख्या प्राप्त हुआ।

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ ____________ क्या यह परिमेय संख्या है?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ____________ क्या परिणाम परिमेय संख्या होगी?

इस गुणधर्म को कुछ और संख्याओं के साथ भी जाँचिए।

$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग भी एक परिमेय संख्या है। यदि a, b परिमेय संख्या है, तो $a+b$ भी एक परिमेय संख्या होगी। अतः योग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं।

(b) **व्यवकलन**

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ हैं $\frac{5}{9}$ और $\frac{3}{4}$

तो $\frac{5}{9}-\frac{3}{4} = \frac{5\times4-3\times9}{36} = \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

$\frac{-7}{36}$ एक परिमेय संख्या है। (क्योंकि –7, 36 पूर्णांक है और 36 शून्येतर है, अतः $\frac{-7}{36}$ भी एक परिमेय संख्या है।)

इसकी जाँच निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के संदर्भ में भी कीजिए।

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right) - \frac{11}{18}$ = ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

हमने पाया कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के लिए, उनका अंतर भी परिमेय संख्या है।
अतः व्यवकलन के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं।
किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b, के लिए, a–b भी परिमेय संख्या होगी।

(c) गुणन

निम्नलिखित पर ध्यान दीजिए।

(i) $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

(ii) $\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$

(iii) $\frac{3}{7} \times \frac{5}{2}$ = __________

(iv) $\frac{2}{1} \times \frac{19}{13}$ = __________

सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या होती है। कुछ और परिमेय संख्याओं के युग्मों को गुणा कीजिए। जाँच कीजिए कि गुणनफल परिमेय संख्या है या नहीं। क्या आप ऐसी परिमेय संख्या बता सकते हैं जिसका गुणनफल एक परिमेय संख्या नहीं है? अतः हमें पता चलता है कि गुणा के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b, के लिए a×b भी एक परिमेय संख्या होगी।

(d) भाग

दो परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{8}$

तो $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$ जो कि एक परिमेय संख्या है?

इसे कुछ अन्य उदाहरणों से जाँचिए।

(i) $\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

(ii) $-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11}$ = __________ = __________ = __________

(iii) $3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} = _______ = _______ = _______$

ऊपर के सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि जब हम दो परिमेय संख्याओं का भाग करते हैं तो हमें परिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। अब क्या हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के भाग के लिए संवृत गुण सही है?

आइए, इनकी जाँच करें : 0, 5 परिमेय संख्याएँ है और $\frac{5}{0}$ अपरिभाषित है। अतः परिमेय संख्याओं का समूह 'Q' भाग के सापेक्ष संवृत नहीं है।

यदि Q में से हम शून्य निकाल दें तो यह समूह भाग के सापेक्ष संवृत हो जाएगा।

करके देखें

यदि हम पूर्णांकों के समूह से शून्य निकाल दें तो क्या यह भाग के सापेक्ष संवृत है? इसी तरह पूर्ण संख्याओं के समूह के लिए भी जाँच कीजिए।

तालिका के खाली स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	अंतर्गत संवृत है			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्या	हाँ	....	....	....
पूर्ण संख्याएँ	....	....	....	नहीं
पूर्णांक संख्याएँ	....	हाँ	....	....
परिमेय संख्याएँ	....	....	हाँ	....

क्रमविनिमेय गुण (Commutative Property)

आइए, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों दोनों के लिए हम अलग-अलग संक्रियाओं के साथ क्रमविनिमेय गुण को हम पुनः स्मरण करते हैं।

निम्नलिखित तालिका पूर्ण कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

संक्रियाएँ	उदाहरण	टिप्पणी
योग	2, 3 पूर्ण संख्याएँ है। $2+3 = 5$ और $3 + 2 = 5$	पूर्ण संख्याएँ योग में क्रमविनिमेय गुण का पालन करता है $\therefore 2 + 3 = 3 + 2$

व्यवकलन	क्या 3 – 2 और 2 –3 समान है?	क्रमविनिमेय गुण का पालन नहीं करता।
गुणन	------	------
भाग	$4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$ क्या $4 \div 2 = 2 \div 4$?	-------

(ii) पूर्णांक

संक्रियाएँ	उदाहरण	टिप्पणी
योग	---	पूर्णांकों में योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन	2, 3 पूर्णांक हैं $2 - (3) = ?$ $(3) - 2 = ?$ क्या $2 - (3) = (3) - 2 = ?$	....
गुणन	....	....
भाग	....	पूर्णांकों में भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

दो परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$ लीजिए। इन्हें जोड़ दीजिए।

$$\frac{5}{2} + \frac{(-3)}{4} = \frac{2 \times 5 + 1 \times (-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

और $\frac{(-3)}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1 \times (-3) + 2 \times 5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

तो $\frac{5}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{5}{2}$

अब इस गुण को परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्मों के लिए जाँच कीजिए।

मान लीजिए $\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ और $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$. क्या $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}$?

क्या $\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4)}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right)$?

क्या आप परिमेय संख्याओं के कोई ऐसे युग्म बता सकते हैं जिन पर यह नियम लागू नहीं हो?

हम कह सकते हैं कि किन्हीं a और b परिमेय संख्याओं के लिए $a + b = b + a$ इस प्रकार परिमेय संख्याओं में योग क्रमविनिमेय रहता है।

(b) **व्यवकलन :** दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{8}$ लीजिए।

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ और $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

इसलिए $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

इनकी जाँच कीजिए।

क्या $2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$?

क्या $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$?

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं में घटाना क्रमविनिमेय नहीं है।

अतः किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए $a - b \neq b - a$ होगा।

(c) **गुणन :** दो परिमेय संख्याएँ 2 और $-\frac{5}{7}$ लीजिए।

$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7}$; $\frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7}$ अतः $2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$

क्या $\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$?

इन्हें कुछ और परिमेय संख्याओं के लिए जाँच कीजिए।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत गुणन क्रमविनिमेय है।

अर्थात् $a \times b = b \times a$ किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए।

(d) भाग

क्या $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$?

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{14}_{2}} = \frac{3}{2}$ और $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं में भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

करके देखें

यह तालिका पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	क्रमविनिमेयता के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्याएँ	हाँ	नहीं	हाँ	----
पूर्ण संख्याएँ	----	----	----	नहीं
पूर्णांक	----	----	----	----
परिमेय संख्याएँ	----	----	----	नहीं

साहचर्य गुण (Associative Property)

चार संक्रियाएँ अर्थात् योग, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष पूर्ण संख्याओं की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

आवश्यक उदाहरण और टिप्पणियों द्वारा तालिका पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्ण संख्याओं के उदाहरण	टिप्पणी
योग	क्या $2 + (3 + 0) = 2 + 3 = 5$ $(2 + 3) + 0 = 5 + 0 = 5$ $\Rightarrow 2 + (3 + 0) = (2 + 3) + 0$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ किन्हीं a, b, c पूर्ण संख्याओं के लिए	 ------- -------

व्यवकलन	(4–3) – 2 = ? 4–(3–2) = ? क्या (4–3) –2 = 4–(3–2) ?	व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	-----------------------------	गुणन साहचर्य है।
भाग	$2 \div (3 \div 5) = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ $(2 \div 3) \div 5 = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ $2 \div (3 \div 5) \neq (2 \div 3) \div 5$	भाग साहचर्य नहीं है।

(ii) पूर्णांक

चार संक्रियाओं के सापेक्ष पूर्णांकों की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

निम्नलिखित तालिका आवश्यक टिप्पणियों के साथ पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्णांक उदाहरण के साथ	टिप्पणी
योग	$2 + [(-3) + 5] = 2 + [-3 + 5] = 2 + 2 = 4$ $[2 + (-3)] + 5 = [2 - 3] + 5 = -1 + 5 = 4$ किन्हीं a, b और c तीन पूर्णांकों के लिए a + (b + c) = (a + b) + c	
व्यवकलन	क्या 6 – (9 – 5) = (6 – 9) – 5?	
गुणन	क्या 2 × [7 × (–3)] = (2 × 7) × (–3)?	
भाग	$10 \div [2 \div (-5)] = 10 \div \frac{-2}{5} = 10 \times \frac{-5}{2} = -25$ अब $(10 \div 2) \div (-5) = \frac{10}{2} \div (-5) = 5 \div (-5) = \frac{5}{-5} = -1$ इस प्रकार $10 \div [2 \div (-5)] \neq (10 \div 2) \div (-5)$	

(iii) परिमेय संख्याएँ – साहचर्यता

(a) योग

मान लीजिए तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}$, 5, $\frac{1}{2}$ हैं। इनकी जाँच कीजिए कि

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\frac{2}{7}+5\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{L.H.S.}=\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.}=\left[\frac{2}{7}+5\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

ज्ञात कीजिए $\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{4}{3}\right)\right]$ और $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$

क्या दोनों योग समान हैं?

कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को लेकर इनकी साहचर्यता की जाँच कीजिए।

हमें प्राप्त हुआ कि परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत साहचर्य नियम का पालन करती हैं।

अतः किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए $a+(b+c) = (a+b)+c$ होगा।

(b) व्यवकलन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ और $\frac{-5}{4}$ लीजिए।

जाँच कीजिए $\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]-\left(\frac{-5}{4}\right)$

$$\text{L.H.S.}=\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{8}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S.}=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right) = \left(\frac{1\times 2-3}{4}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{5}{4}$$

$$= \frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right)$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

हमने ज्ञात किया कि परिमेय संख्याओं में व्यवकलन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता है। अतः किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए a-(b-c) ≠ (a-b) – c होगा।

(c) गुणन

तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{7}$

क्या $\frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3} \times \left[\frac{4}{7} \times \left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right] = \frac{-40}{147}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right) \times \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

L.H.S. = R.H.S.

इनकी जाँच कीजिए।

ज्ञात कीजिए। $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right)$ और $\left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$

क्या $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) \times 3$

ज्ञात कीजिए $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right)$ और $\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$

क्या $\frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{7}{5}$

हम ऊपर की सभी स्थितियों में पाते हैं कि L.H.S. = R.H.S.

इस प्रकार परिमेय संख्याओं में गुणा साहचर्य नियम का पालन करता है।

अतः किन्हीं a, b, c परिमेय संख्याओं के लिए a × (b × c) = (a × b) × c होगा।

(d) भाग

कोई तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए, जैसे– $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ और $\frac{1}{7}$

क्या $\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$ है?

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3} \div \frac{21}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{8}{63}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \div \frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right) \div \frac{1}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{1} = \frac{56}{9}$$

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{7}$$

$\therefore$ L.H.S. $\neq$ R.H.S.

अतः किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ होता है।

इसलिए, परिमेय संख्याओं में भाग साहचर्य नियम का पालन नहीं करता।

करके देखें

इस तालिका को पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	साहचर्य के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत संख्याएँ	हाँ	नहीं	....	....
पूर्ण संख्याएँ	....	....	....	नहीं
पूर्णांक	....	नहीं	हाँ	....
परिमेय संख्याएँ	....	....	....	....

शून्य की भूमिका

क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जिसे किसी संख्या में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है? जब '0' किसी भी परिमेय संख्या में जोड़ा जाता है तो पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरण के लिए–

$1 + 0 = 1$ और $0 + 1 = 1$

$-2 + 0 = -2$ और $0 + (-2) = -2$

$$\frac{11}{3} + 0 = \frac{11}{3} \text{ और } 0 + \frac{11}{3} = \frac{11}{3}$$

इस कारण हम '0' को योज्य तत्समक कहते हैं। इस गुण का सार नीचे प्रस्तुत किया गया है।

; fn **a** कोई परिमेय संख्या का प्रतिनिधित्व करता है तो $a + 0 = a$ और $0 + a = a$

क्या प्राकृतिक संख्याओं में योज्य तत्समक है?

एक (1) की भूमिका

नीचे दिए गए खाली डिब्बे भरिए।

$\square \times 3 = 3$ और $3 \times \square = 3$

$-2 \times \square = -2$ और $\square \times -2 = -2$

$\frac{7}{8} \times \square = \frac{7}{8}$ और $\square \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

आपने ऊपर के गुणनफलों में क्या कुछ विशेष देखा?

हम देख सकते हैं कि किसी भी परिमेय संख्या को '1' से गुणा किया जाये तो गुणनफल पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

हम कह सकते हैं कि '1' परिमेय संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक है।

उदाहरण के लिए जब $\frac{15}{50}$ को सरल रूप में लिखने के लिए हम निम्न प्रकार से करते हैं।

$$\frac{15}{50} = \frac{3\times5}{10\times5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$$

जहाँ हम लिखते हैं कि $\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$, वहाँ हम गुणनफल के तत्समक गुण का उपयोग करते हैं।

प्रतिलोम का अस्तित्व

(i) योगात्मक प्रतिलोम

$3 + (-3) = 0$ और $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ और $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ और $? + \frac{2}{3} = 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ और $? + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

पहले उदाहरण में –3 और 3 एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम हैं, क्योंकि इनको जोड़ने पर हमें योग '0' प्राप्त होता है। कोई दो संख्याएँ जिनका योग '0' हो, एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम कहलाती हैं। सामान्यतः यदि **a** कोई परिमेय संख्या है तो **a + (–a) = 0** और **(–a) + a = 0**.

तो **'a', '-a'** एक दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम हैं।

0 का योगात्मक प्रतिलोम 0 ही रहता है क्योंकि 0 + 0 = 0

(ii) गुणात्मक प्रतिलोम

परिमेय संख्या $\frac{2}{7}$ का किस संख्या से गुणा किया जाए कि गुणनफल 1 प्राप्त हो?

हम देखते हैं $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$ और $\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = 1$

नीचे दिए खाली डिब्बे भरिए।

$2 \times \square = 1$ और $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ और $\square \times -5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ और $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

कोई दो संख्याएँ जिनका गुणनफल '1' हो, वे एक दूसरे के गुणात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं।

उदाहरणतया, $4 \times \frac{1}{4} = 1$ और $\frac{1}{4} \times 4 = 1$, अतः संख्या 4 और $\frac{1}{4}$ एक दूसरे के गुणात्मक प्रतिलोम हैं।

हम कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{c}{d}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाती है यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ और $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = 1$

परिमेय संख्या व उनका दशमलव स्वरूप

अगर हमें $\frac{7}{4}, \frac{9}{11}, \frac{7}{6}$ आदि का दशमलव स्वरूप लिखना है तो हम 7 को 4, 9 को 11, 7 को 6 से भाग करेंगे।

4) 7 (1.75
4
30
28
20
20
0

11) 9.0 (0.8181
88
20
11
90
88
20
11
9

6) 7 (1.1666
6
10
6
40
36
40
36
40
36
4

आप भी करें तथा आगे दी गई सारणी से मिलान करें।

1. शेषफल = 3, 2, 0 भाजक 4
2. शेषफल = 2, 9, 2, 9, 2, 9, ... भाजक 11
3. शेषफल = 1,4,4,4,4....... भाजक 6

इन तीनों शेषफलों को देखें। क्या आप इनकी कोई विशेषता दिखा पा रहे हैं?

1. 4 से भाग करने पर शेषफल एक सीमा के पश्चात शून्य हो जाता है।
2. 11 से भाग करने पर बारी–बारी से 2 व 9 शेषफल में आ रहे हैं।
3. 6 से भाग करने पर पहले स्थान के बाद 4 का दोहराव हो रहा है।
4. जब शेषफल का दोहराव हो रहा है तो भागफल में भी दोहराव दिखता है।

इसे और समझने के लिए हम तालिका बनाते हैं।

संख्या	भागफल	विश्लेषण	निष्कर्ष
$\frac{7}{4}$	1.75	यहाँ दशमलव के दो स्थानों के बाद शेषफल शून्य हो जाता है।	सांत, दशमलव
$\frac{9}{11}$	0.8181.....	यहाँ दशमलव के दो स्थानों के बाद पहले वाले दो स्थानों के अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है।	असांत आवर्ती दशमलव
$\frac{7}{6}$	1.166.........	यहाँ दशमलव के एक स्थान के बाद आने वाली संख्या की पुनरावृत्ति हो रही है।	असांत आवर्ती दशमलव

इस तालिका से हम पाते हैं कि–

संख्या $\frac{7}{4}$ में शेषफल कुछ पदों के बाद शून्य हो जाता है। इसके अन्य उदाहरण $\frac{1}{2}=0.5, \frac{7}{8}=0.875$ आदि हैं। ऐसे दशमलव को सांत दशमलव कहते हैं, जिनमें दशमलव के पश्चात् की संख्याएँ सीमित हैं।

संख्या $\frac{9}{11}, \frac{7}{6}$ में भागफल में एक निश्चित स्थान के बाद पुनरावृत्ति हो रही है। हम $\frac{7}{6}=1.1666...$ को $1.1\overline{6}$ भी लिखते हैं। ऐसे ही $\frac{9}{11}=0.8181...$ को $0.\overline{81}$ लिखेंगे। यह असांत आवर्ती है याने असीमित किंतु दशमलव के कुछ स्थानों के बाद वही टुकड़े दोहराए जा रहे हैं।

करके देखें

1. ऐसी दो परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका दशमलव रूप असांत आवर्ती हो।
2. ऐसी दो परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका दशमलव रूप सांत हो।

दशमलव को परिमेय संख्या के सामान्य रूप में लिखना

जब हम दशमलव संख्या को उसके $\frac{p}{q}$ रूप में लिखते हैं तो हम संख्या को बेहतर समझ पाते हैं। हम पहले कुछ आवर्त दशमलव संख्याएँ लेते हैं–

उदाहरण–1. 1.555.......... = $1.\overline{5}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना $\frac{p}{q}$ = 1.55555................. (i)

दोनो पक्षों को 10 का गुणा करने पर

$10\frac{p}{q}$ = 15.5555 .... (ii)

समी (ii) से (i) को घटाने पर

$10\frac{p}{q}-\frac{p}{q}$ = (15.55555 .....) – (1.555 ......)

$9\frac{p}{q}=14$

$$\frac{p}{q} = \frac{14}{9}$$

उदाहरण–2. $7.3\overline{456}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना $\frac{p}{q} = 7.3\overline{456} = 7.3456456$ ....

दोनों पक्षों को 10 का गुणा करने पर

$$10\frac{p}{q} = 73.456456................ \quad .....(i)$$

दोनों पक्षों को 1000 का गुणा करने पर

$$10000\frac{p}{q} = 73456.456456 .... \quad .....(ii)$$

समी. (ii) से (i) को घटाने पर

$$9990\frac{p}{q} = 73383$$

$$\frac{p}{q} = \frac{73383}{9990}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{24461}{3330}$$

करके देखें

निम्नलिखित दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिवर्तित कीजिए।

(i) 1.2333....., (ii) 3.88...... (iii) 3.204343........

प्रश्नावली – 2.1

1. निम्नलिखित कथनों के लिए उदाहरण दीजिए।
   - (i) एक संख्या जो प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या और पूर्णांक संख्या है।
   - (ii) एक संख्या जो पूर्ण संख्या हो परंतु प्राकृत संख्या न हो।
   - (iii) एक संख्या जो परिमेय संख्या हो परंतु प्राकृत संख्या न हो।

2. 6 व 7 के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

3. $\frac{4}{7}$ व $\frac{5}{7}$ के बीच 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

4. $\frac{2}{3}$ व $\frac{3}{4}$ के बीच 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें।

5. −1 और 2 के बीच किन्हीं 4 परिमेय संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

6. $\frac{5}{10}$ और $\frac{9}{10}$ के बीच की कोई तीन परिमेय संख्या लिखिए।

7. $\frac{7}{3}$ और $-\frac{7}{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में परिवर्तित कीजिए और पता कीजिए कि ये किस तरह के दशमलव रूप में हैं?

   (i) $\frac{126}{5}$ (ii) $\frac{335}{16}$ (iii) $\frac{22}{7}$ (iv) $-\frac{118}{3}$

9. निम्नलिखित दशमलव रूप को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 0.53 (ii) 16.8 (iii) 105.25 (iv) 7.36

10. निम्नलिखित दशमलव को $\frac{p}{q}$ रूप में परिवर्तित कीजिए।

   (i) $0.\overline{70}$ (ii) $8.\overline{39}$ (iii) $3.12\overline{7}$ (iv) $5.\overline{125}$

अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

अभी तक हमने परिमेय संख्याओं का दाशमिक रूपांतरण करके देखा जैसे $\frac{9}{18} = 0.5$, $\frac{7}{6} = 1.166.........= 1.1\overline{6}$ । इन उदाहरणों से यह बात स्पष्ट होती है कि इनका दशमलव प्रसार सांत होता है या असांत आवर्ती होता है। क्या कुछ ऐसी संख्याएँ सोच सकते हैं जो असांत हों पर आवर्ती नहीं?

1.414213 ....

1.7320508 ....

2.2360679774 ....

AQH3QU

जैसा कि आप देख सकते हैं कि उपर्युक्त संख्याओं में दशमलव प्रसार का अंत नही होता तथा पुनरावृति खंड भी नहीं हैं। इन्हें असांत अनावर्ती कहते हैं। ऐसी कुछ संख्याएँ और देखें। इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार $\sqrt{3} = 1.7320508075\ldots \ldots \ldots \ldots$

$\sqrt{5} = 2.2360679\ldots \ldots \ldots \ldots$

इन्हें भी $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। अर्थात् वे संख्याएँ जो पूर्ण वर्ग नहीं होती हैं उनका वर्गमूल अपरिमेय संख्या होती है। याने $\sqrt{4}, \sqrt{36}$ परिमेय संख्या है क्योंकि $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$ तथा $\sqrt{36} = 6 = \frac{6}{1}$ परन्तु $\sqrt{3}$ व $\sqrt{7}$ परिमेय संख्या नहीं है।

करके देखें

निम्नलिखित संख्याओं में परिमेय संख्या, अपरिमेय संख्या की पहचान कीजिए–

(i) $\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt{7}$ (iii) $-\sqrt{25}$ (iv) $-\sqrt{8}$ (v) $\sqrt{9}$ (vi) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

π (पाई)

$\pi = 3.14159265389\ldots\ldots\ldots\ldots$

π (पाई) एक अपरिमेय संख्या है जो वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात है।

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{c}{d}$$

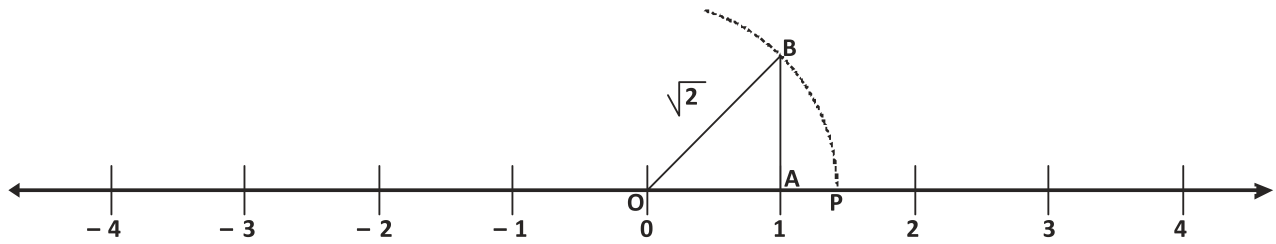
क्या इसका अर्थ यह है कि परिधि या व्यास दोनों में से कम से कम एक संख्या अपरिमेय है या ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसे व्यास में गुणा करने पर परिधि प्राप्त हो। हम प्राय: π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं लेकिन यह π का लगभग मान है।

अपरिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण

हमने देखा कि दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। क्या संख्या रेखा पर इन अनेक परिमेय संख्याओं के बाद कोई जगह खाली रह जाती है। अगर अपरिमेय संख्याएँ भी संख्या रेखा पर अंकित हो सकती हैं तो यह मानना पड़ेगा कि परिमेय संख्याएँ पूरी संख्या रेखा को नहीं ढकतीं। हम देखते हैं कि $\sqrt{2}$ का संख्या रेखा पर कैसे स्थान निर्धारित किया जा सकता है।

उदाहरण–3. संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

बिंदु A पर एक लम्ब AB खींचा (चित्र–6)। AB = 1 इकाई लिया व परकार की सहायता से O को केंद्र मानकर OB त्रिज्या लेकर एक चाप खींचा। यह संख्या रेखा को बिंदु P पर काटता है। चूंकि OB मान $\sqrt{2}$ है अतः OP भी $\sqrt{2}$ है। याने संख्या रेखा पर P ऐसा बिंदु है जहाँ $\sqrt{2}$ आएगा। अतः यहाँ कोई भी परिमेय संख्या नहीं आ सकती।



चित्र–6

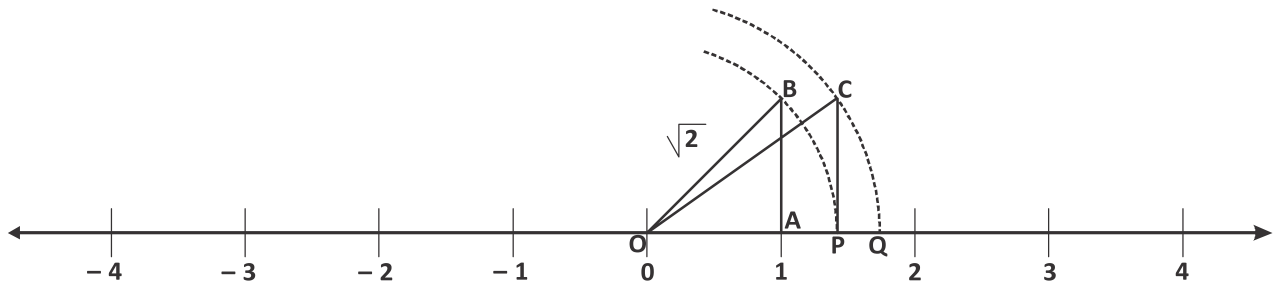
इसी तरह हम संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारित करते हैं।

संख्या रेखा पर बिंदु A पर एक लंब AB खींचा (चित्र–7), जहां AB = 1 इकाई लिया। O और B को जोड़ा यहाँ $OB = \sqrt{2}$

'O' को केंद्र मानकर OB त्रिज्या का चाप काटा।

यह चाप संख्या रेखा को बिंदु P पर मिलती है। P पर एक लंब CP खींचा जिसमें CP = 1 इकाई। O को C से जोड़ा। O को केंद्र मानकर OC त्रिज्या का चाप काटा जो संख्या रेखा को बिंदु Q पर मिलता है। OQ दूरी, $\sqrt{3}$ को प्रदर्शित करती है।

$\sqrt{3}$ बिंदु Q के संगत है।



चित्र–7

करके देखें

1. निम्नलिखित संख्याएँ परिमेय हैं या अपरिमेय

   (i) $\sqrt{81}$ (ii) $-\sqrt{625}$ (iii) $\sqrt{11}$

   (iv) $-\sqrt{\frac{81}{25}}$ (v) 3.232323……… (vi) 5.7070070007…

2. $\sqrt{5}, \sqrt{7}$ का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण कीजिए।

3. संख्या रेखा पर $-\sqrt{2}, -\sqrt{5}$ का स्थान निर्धारित कीजिए।

वास्तविक संख्याएँ

यदि हम सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाते हैं तो क्या संख्या रेखा पर कोई संख्या बची रहेगी? नहीं। परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर जो नया संग्रह प्राप्त होता है वे संख्या रेखा की सभी बिंदुओं को ढँक लेगा। यह बड़ा संग्रह वास्तविक संख्याओं का है।

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

परिमेय संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणा, भाग की संक्रिया हम करते रहे हैं। हम देख चुके हैं कि परिमेय संख्याओं के योग व गुणा, सदैव परिमेय संख्या होती है। क्या अपरिमेय संख्याओं के बीच भी संक्रिया करने पर सदैव अपरिमेय संख्या प्राप्त होती है?

निम्नलिखित उदाहरण देखिए–

$$\sqrt{5}+\left(-\sqrt{5}\right)=0$$

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}=3$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$$

इन सब में संक्रिया के बाद प्राप्त हुई संख्या अपरिमेय नहीं है। यानि अपरिमेय संख्याओं का योग, गुणा व भाग सदैव अपरिमेय संख्या नही होती है।

करके देखें

1. आप भी कुछ अपरिमेय संख्याएँ लें और संक्रिया करके जाँचें।
2. कम से कम 5–5 उदाहरण खोजें जहाँ संक्रिया के बाद अपरिमेय संख्याएँ न मिलें। ऐसे भी उदाहरण सोचें जिनमें संक्रिया के बाद अपरिमेय संख्याएँ ही मिलती हैं।

अपरिमेय संख्या पहचानना

हम जानते हैं कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ आदि अपरिमेय संख्याएँ हैं। किंतु $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ परिमेय संख्याएँ हैं, परंतु क्या $5+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-1$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ और ऐसी अन्य संख्याएँ भी अपरिमेय संख्याएँ हैं? आइए देखें–

हम जानते हैं $\sqrt{2} = 1.41421....$

$\sqrt{3} = 1.73205$

$\sqrt{5} = 2.23606....$

(i) अतः $5+\sqrt{2} = 6.41421......$ यह निरूपण असांत है व अनावर्ती है। अतः $\left(5+\sqrt{2}\right)$ परिमेय संख्या नहीं है।

(ii) $\sqrt{3}-1 = (1.73205.........)-1$

= 0.73205................ असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है

अतः $\sqrt{3}-1$ अपरिमेय संख्या है।

(iii) $3\sqrt{2} = 3\times(1.41421 \ldots \ldots \ldots \ldots)$

= 4.24263 .... असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है

अतः $3\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

(iv) $\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2.23606.....}{2}$

= 1.11803.............. असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है।

अतः $\frac{\sqrt{5}}{2}$ अपरिमेय संख्या है।

इनसे क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

निम्नलिखित उदाहरणों से हम कह सकते हैं कि एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या के बीच योग, अंतर, गुणा और भाग सदैव अपरिमेय संख्या होती है।

माना a तथा b दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। तो

(i) $a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a+c)\sqrt{b}$

(ii) $a\sqrt{b} - c\sqrt{b} = (a-c)\sqrt{b}$

(iii) $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(जहाँ c और d वे धनात्मक वास्तविक संख्या है।)

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(vii) $\left(a+\sqrt{b}\right)\ \left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

करके देखें

1. निम्नलिखित को हल कीजिए।

   (i) $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt{6}.2\sqrt{3}$

2. $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ को $3\sqrt{5}+7\sqrt{3}$ में से घटाओ।

3. $6\sqrt{3}$ को $13\sqrt{3}$ से गुणा करो।

4. निम्नलिखित को हल कीजिए।

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $3\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

कुछ और संक्रियाएँ

जब वास्तविक संख्या में कई हिस्से हों तो उनका जोड़ कैसे होगा।

$a\sqrt{b}+c\sqrt{b}+e\sqrt{b}$ का जोड़ कैसे होगा? यह जोड़ = $(a+c+e)\sqrt{b}$

ऐसे ही और वास्तविक संख्याओं का जोड़ भी कर सकते हैं।

उदाहरण–4. $9\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ में $7\sqrt{3}-5\sqrt{5}$ का योग करो।

हल : $9\sqrt{3}+7\sqrt{5}+7\sqrt{3}-5\sqrt{5}$

$= 9\sqrt{3}+7\sqrt{3}+7\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

$= (9+7)\sqrt{3} + (7-5)\sqrt{5}$

$= 16\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

उदाहरण–5. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ को $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ में से घटाओ।

हल : $3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)$

$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$

$= (3+2)\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$

उदाहरण–6. निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ (ii) $2\sqrt{3} \times 7\sqrt{2}$ (iii) $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$

(iv) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

हल : (i) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

(ii) $2\sqrt{3} \times 7\sqrt{2} = 2 \times 7\sqrt{3 \times 2} = 14\sqrt{6}$

(iii) $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right) = 4 - 5 = -1$

(iv) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = \sqrt{14} + \sqrt{35} + \sqrt{6} + \sqrt{15}$

हर को परिमेय बनाओ

हम $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं, तब क्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को भी संख्या रेखा पर दिखा सकते हैं?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मान क्या होगा?

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1.414213}....$

हर को परिमेय बनाने का अर्थ है 'rationalisation' या परिमेयीकरण

क्या 1 को $\sqrt{2} = 1.414213...$ से भाग दे सकते हैं? यह आसान नहीं होगा। क्योंकि $\sqrt{2}$ एक असांत और अनावर्ती दशमलव संख्या है। ऐसी स्थिति में हमें हर के परिमेयीकरण की आवश्यकता होती है।

हर के परिमेयीकरण के लिए $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के अंश और हर में $\sqrt{2}$ का गुणा करेंगे।

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ याने यह $\sqrt{2}$ का आधा है।

क्या हम $\frac{\sqrt{2}}{2}$ को भी संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं?

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ क्योंकि $\sqrt{2}$ का आधा है अतः 0 और 1 के बीच होगा।

उदाहरण–7. $\frac{1}{4-\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए।

हल : $\frac{1}{4-\sqrt{7}} = \frac{1}{4-\sqrt{7}} \times \frac{4+\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$ [$(a-\sqrt{b})$ का परिमेयकारी गुणक $(a+\sqrt{b})$]

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{(4)^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{16-7}$$

$$= \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

उदाहरण–8. $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयीकरण कीजिए।

हल : $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \times \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ [$(a-\sqrt{b})$ का परिमेयकारी गुणक $(a+\sqrt{b})$]

$$= \frac{3\times 3-3\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times 3+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{9-6\sqrt{2}+2}{9-2}$$

$$= \frac{11-6\sqrt{2}}{7}$$

करके देखें

1. हर को परिमेय बनाइए

(i) $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

प्रश्नावली – 2.2

AR5YSH

1. सरल कीजिए –

   (i) $7\sqrt{3}+11\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{7}-2\sqrt{7}$

2. $2\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ और $5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ का योग कीजिए।

3. $3\sqrt{5}+5\sqrt{7}$ को $8\sqrt{7}-5\sqrt{5}$ से घटाओ।

4. सरल कीजिए।

   (i) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ (ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})$

   (iii) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{8})$ (vi) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$

5. हरों का परिमेयीकरण कीजिए।

   (i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

6. यदि a व b दो परिमेय संख्याएँ हैं तो निम्नलिखित समीकरण में a और b का मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $\frac{6+\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=a+b\sqrt{15}$

7. सरल कीजिए–

   (i) $\frac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

8. यदि $x=3-2\sqrt{2}$ तो $x+\frac{1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. कोई संख्या परिमेय संख्या कहलाती है यदि इसे $\frac{p}{q}, (q \neq 0)$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ p और q पूर्णांक हैं।

2. कोई संख्या अपरिमेय संख्या (s) कहलाती है, यदि इसे $\frac{p}{q}, (q \neq 0)$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं।

3. दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए दोनो परिमेय संख्याओं का औसत (माध्य) लेते हैं।

4. दो परिमेय संख्याओं के बीच इतनी अधिक परिमेय संख्याएँ होती हैं कि हम उन्हें गिन कर नहीं बता सकते हैं।

5. एक परिमेय सख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या असांत आवर्ती होता है।

6. एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होता है।

7. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ संख्या अपरिमेय संख्याएँ हैं।

8. सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर वास्तविक संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है।

9. संख्या रेखा के प्रत्येक बिंदु के संगत एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है साथ ही प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक बिंदु होता है।

10. एक परिमेय व एक अपरिमेय संख्या को आपस में जोड़ा जाएँ, घटाया जाए, गुणा किया जाए व भाग किया जाए तो मान अपरिमेय संख्या प्राप्त होता है।

11 $\frac{1}{\sqrt{a} - b}$ के हर का परिमेयीकरण करने के लिए इसे हम $\frac{\sqrt{a} + b}{\sqrt{a} + b}$ से गुणा करते हैं, जहां a और b पूर्णांक हैं।