15 सांख्यिकी

आओ, समझें

औसत

नीचे दी गई तालिका में अस्मिता को घर से पाठशाला पहुँचने में लगा हुआ समय मिनट में दिया गया है। लगने वाले समय का विवरण सोमवार से शनिवार तक का है।

वार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
मिनट	20	20	22	18	18	20

इस तालिका में दिखाई दे रहा हैं कि उसे कभी 18 मिनट कभी 22 मिनट तो कभी 20 मिनट लगते हैं। पाठशाला के 6 दिनों का विचार करने पर उसे पाठशाला जाने में प्रतीदिन अंदाजन कितने मिनट लगते हैं ?

गणित में इस प्रकार का अंदाज लगाने के लिए औसत ज्ञात करते हैं। यहाँ पर 6 दिनों के मिनटों का योगफल ज्ञात कर उसे 6 से भाग देने पर प्राप्त भागफल की संख्या ही लगभग लगनेवाला समय है। वह इन सभी संख्याओं का औसत है।

$$\text{औसत} = \frac{\text{पाठशाला में 6 दिन जाने में लगनेवाले समय का योगफल}}{\text{कुल दिन}}$$

$$= \frac{20 + 20 + 22 + 18 + 18 + 20}{6} = \frac{118}{6} = 19\ \frac{2}{3}$$

अस्मिता को पाठशाला जाने में औसतन $19\ \frac{2}{3}$ मिनट प्रतिदिन लगते हैं।

उदा. किसी विद्यालय द्वारा विद्यार्थियों के घर तथा विद्यालय के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए सर्वेक्षण किया गया उसमें से निम्नलिखित छह विद्यार्थियों के घर से विद्यालय की दूरी दी गई हैं। उन दूरियों का औसत ज्ञात करो।

950 मी, 800 मी, 700 मी, 1.5 किमी, 1 किमी, 750 मी.

हल : विद्यार्थियों के घर से विद्यालय तक की दूरी का औसत ज्ञात करने के लिए सभी दूरियाँ एक ही इकाई में लेनी पड़ती हैं।

$$\text{औसत} = \frac{\text{छह विद्यार्थियों के घर से विद्यालय तक की दूरियों का योगफल}}{\text{कुल विद्यार्थी}}$$

1 किमी = 1000 मीटर
1.5 किमी = 1500 मीटर

$$= \frac{950 + 800 + 700 + 1500 + 1000 + 750}{6} = \frac{5700}{6} = 950 \text{ मी}$$

विद्यार्थियों के घर से विद्यालय तक की दूरी का औसत 950 मीटर है।

आओ चर्चा करें

उदा. ऋतुजा ने सप्ताह के सातों दिन रस्सीकूद इस खेल का अभ्यास किया। उसके द्वारा प्रत्येक दिन एक मिनट में की गई रस्सीकूदों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं।

60, 62, 61, 60, 59, 63, 58

$$\text{औसत} = \frac{\text{सात दिन की गई रस्सीकूद का संख्या का योगफल}}{\text{कुल दिन}}$$

$$= \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$$

एक मिनट में की गई रस्सीकूद का औसत = 60.42

जिस संख्या की जानकारी चाहिए, उससे संबंधित उदाहरण (नमूने) दी गई सामग्री में मिलते हैं, उन्हें प्राप्तांक कहते हैं।

हमें मालूम हैं कि रस्सीकूद की संख्या प्राकृतिक संख्याओं में गिनते है। किसी भी दिन रस्सीकूद की संख्या भिन्न में नहीं हो सकती किंतु औसत भिन्न में हो सकता है।

मैंने यह समझा

$$\text{औसत} = \frac{\text{दी गई जानकारी के सभी प्राप्ताकों का योगफल}}{\text{कुल प्राप्तांकों की संख्या}}$$

उपक्रम :
- कक्षा में विद्यार्थियों के 10-10 का समूह बनाओ प्रत्येक समूह के विद्यार्थियों की ऊँचाई का औसत ज्ञात करो।
- कक्षा अध्यापक से उपस्थिति पत्रक (रजिस्टर) लेकर एक सप्ताह की औसत उपस्थिति ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 54

1. किसी शहर के एक सप्ताह की बारिश मिमी में दिखाई है। सप्ताह में हुई बारिश का औसत ज्ञात करो।
   9, 11, 8, 20, 10, 16, 12
2. विद्यालय के स्नेहसम्मेलन में स्वयंसिद्धा महिला बचत गट ने खाद्य पदार्थों का स्टॉल लगाया था। प्रतिघंटा हुई बिक्री ₹ 960, ₹ 830, ₹ 945, ₹ 800, ₹ 847, तथा ₹ 970 थी तो प्रतिघंटा औसत बिक्री ज्ञात करो ?
3. विदर्भ में 5 वर्षों में हुई बारिश नीचे दिखाई गई हैं। इस आधार पर 5 वर्षों के बारिश का औसत ज्ञात करो।
   900 मिमी, 650 मिमी, 450 मिमी,
   733 मिमी, 400 मिमी
4. किसी किसान ने पशुआहार की बोरियाँ खरीदी। उनके वजन किग्रा में नीचे दिए गए हैं तो बोरियों का औसत वजन ज्ञात करो।
   49.8, 49.7, 49.5, 49.3, 50, 48.9, 49.2, 48.8

आओ, समझें

बारंबारता वितरण सारिणी (Frequency distribution table)

कभी-कभी दी गई जानकारी में कुछ आँकड़े कई बार आते हैं। **कौन-से आँकड़े कितनी बार आए, इस संख्या को दिखाने वाले प्राप्तांक को बारंबारता कहते हैं।** इस प्रकार बारंबारता सारिणी तैयार करते समय सारिणी में आँकड़े, गणन चिह्न (मिलान चिह्न) तथा बारंबारता ये तीन स्तंभ होते हैं।

1. पहले स्तंभ में छोटी संख्या से प्रारंभ कर बड़ी संख्या तक के आँकड़े लिखो।
   उदा. 1, 2, 3, 4, 5, 6 को क्रमशः एक-के नीचे एक लिखो।
2. दी गई संख्याओं की जानकारी को क्रम से पढ़ो। प्रत्येक बार पढ़ी हुई संख्या के लिए तालिका में उस संख्या के पास के स्तंभ में '।' का चिह्न अंकित करो। इस चिह्न को मिलान चिह्न कहते हैं। (गणन चिह्न कहते हैं।)
   उदा. 3 इस संख्या को 3 संख्या के सामने के स्तंभ में। को '।।।' चिह्न अंकित करो। 4 चिह्नों तक '।।।।' लिखने पर पाँचवाँ चिह्न'𝍸' इस प्रकार लगाते हैं। इस कारण गणन चिह्नों को गिनना आसान होता है।
3. प्रत्येक संख्या के सामने के स्तंभ में लगाए गए चिह्नों को गिनो। इसे ही बारंबारता कहते हैं। तीसरे स्तंभ में यह बारंबारता लिखो।
4. अंत में सभी बारंबारताओं का योगफल ज्ञात करो। उसे N अक्षर से दिखाया जाता है। यह योगफल आँकड़े से प्राप्तांक के बराबर होता है।

दी गई जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करना

उदा. किसी कक्षा के कुछ छात्राओं को घर से विद्यालय तक की दूरी किमी में नीचे दी है।
1, 3, 2, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6
इस जानकारी के आधार पर कैसे बनाई जाती है, देखते हैं। बारंबारता सारिणी तैयार करेंगे।

आँकडे	गणन चिह्न	बारंबारता
1	।।	2
2	।	1
3	।।	2
4	𝍸	5
5	।।	2
6	।।।	3
	कुल बारंबारता N = 15	

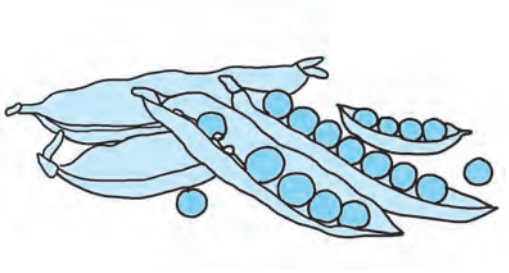
प्राप्तांक गिनते समय जो संख्या गिनी गई वह ध्यान में रखने के लिए उसपर रेख खींचते हैं। यहाँ पहले तीन आँकड़े गिनने के बाद प्राप्तांकों की सूची प्राप्तांक गिनते समय दी गई है।
(१, ३, २, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6)

गणित मेरा साथी : घर में, बाजार में

प्रिया की माता जी बाजार से मटर की कुछ फलियाँ लेकर आईं । माता जी ने फलियाँ छीलना प्रारंभ किया। प्रिया निकट ही बैठकर गणित विषय का अभ्यास कर रही थी। सहज ही उसका ध्यान माता जी की छिली हुई फलियों की ओर गया कुछ फलियों में 4 दाने तो कुछ फलियों में 7 दाने निकले। तब प्रिया ने 50 फलियाँ लीं और उनमें से निकले दानों की संख्या दर्ज की।

प्रिया ने मटर की फलियों के दानों की बारंबारता सारिणी तैयार की।

दानों की संख्या	फलियाँ–गणन–चिह्न	बारंबारता
2	𝍸 III	8
3	𝍸 𝍸 𝍸	15
4	𝍸 𝍸 II	12
5	II	2
6	𝍸 II	7
7	III	3
8	III	3
	कुल बारंबारता N = 50	



4, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 2, 8
2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 8
8, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 3
4, 4, 3, 3, 2, 6, 4, 4, 7, 2
3, 6, 3, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 3

माता जी : तुम्हारे द्वारा छीली गई फलियों के दाने का औसत ज्ञात कर सकती हो क्या ?

प्रिया : इन 50 संख्याओं का योगफल करके 50 से भाग देना होगा ना ? झंझट का काम है।

माता जी : हम इस काम को आसान करेंगे। बारंबारता सारिणी में 2 दाने कितनी फलियों में, 3 दाने कितनी फलियों में दिखाए गए है, यह पता है न ?

प्रिया : हाँ। 2 दाने 8 फलियों में, 3 दाने 15 फलियों में 4 दाने 12 फलियों में आदि की जानकारी है, अब आया ध्यान में। 2×8, 3×15, 4×12 इस प्रकार गुणनफल ज्ञात कर उनको जोड़ लेते हैं। प्राप्त योगफल 50 संख्याओं का योगफल होगा।

माता जी : सात छोटा गुणाकार या उनका योगफल करना आसान है न ! बहुत बड़ी सामग्री होने पर बारंबारता का उपयोग होता है।

प्रिया : प्राप्तांकों का कुल योगफल 206 है।

औसत = $\frac{206}{50}$ = 4.12

माता जी : किसी भी फली से मिलने वाले दानों की संख्या पूर्ण संख्या होती है किंतु औसत भिन्न में आ सकता है। ऐसा कहा जा सकता है कि यहाँ पर प्रत्येक फली में औसतन 4 दाने हैं।

यह मैंने समझा

- आँकड़ों का वर्गीकरण आसान पद्धति से करने के लिए गणन चिह्नों का उपयोग करते हैं।
- चिह्नों की संख्या बारंबारता दिखाती है। इस प्रकार की सारिणी को बारंबारता सारिणी कहते हैं।
- आँकड़ों की संख्या बड़ी होने पर बारंबारता सारिणी का उपयोग औसत ज्ञात करने के लिए करते हैं।

प्रश्नसंग्रह 55

1. किसी कक्षा के 30 छात्रों की ऊँचाई सेमी में दी गई हैं। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।

   131, 135, 140, 138, 132, 133, 135, 133, 134, 135, 132, 133, 140, 139, 132, 131, 134, 133, 140, 140, 139, 136, 137, 136, 139, 137, 133, 134, 131, 140

2. किसी बस्ती में 50 परिवार रहते हैं। प्रत्येक परिवार के सदस्यों (व्यक्तियों) की संख्या नीचे दी गई है। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।

   5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2.

3. एक पाँसा 40 बार उछालने पर ऊपरी पृष्ठभाग पर मिलने वाली संख्या लिखी गई। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।

   3, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 6, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 6,
   3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 3, 4,

4. किसी छात्रावास के भोजनालय में 30 छात्रों को भोजन में लगने वाली रोटियों की संख्या नीचे दी गई है। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।

   3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2

औसत का उपयोग विज्ञान की सभी शाखाओं, वैद्यकीय शाखा, भूगोल, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र आदि विषयों में होता है।

❑❑❑

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1) एंजल ने 9 प्र.श.प्र. की दर से ₹ 15000 कुछ वर्षों के लिए बैंक में जमा किए। अवधि पूर्ण होने पर उसे ₹ 5400 रुपये साधारण ब्याज मिला तो उसने कितने वर्षों के लिए रकम जमा की थी ?

2) किसी रास्ते के डांबरीकरण कार्य के लिए 10 मजदूरों को 4 दिन लगते हैं तो 8 मजदूरों को कितने दिन लगेंगे ?

3) नसरूद्दीन तथा महेश ने क्रमशः ₹ 40,000 तथा ₹ 60,000 निवेश कर एक व्यवसाय प्रारंभ किया। इस व्यवसाय में 30% लाभ हुआ तो प्रत्येक को कितना लाभ हुआ ?

4) किसी वृत्त का व्यास 5.6 सेमी है तो उसकी परिधि ज्ञात करो।

5) विस्तार करो।

(i) $(2a - 3b)^2$ (ii) $(10 + y)^2$ (iii) $\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{4}\right)^2$ (iv) $\left(y-\frac{3}{y}\right)^2$

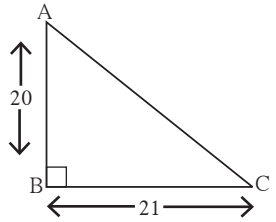
6) सूत्र की सहायता से गुणनफल ज्ञात करो।

(i) $(x - 5)(x + 5)$ (ii) $(2a - 13)(2a + 13)$

(iii) $(4z - 5y)(4z + 5y)$ (iv) $(2t - 5)(2t + 5)$

7) किसी बैलगाड़ी के पहिए की त्रिज्या 1.6 मीटर है। उस पहिए के 2000 फेरों में बैलगाड़ी कितने किलोमीटर दूरी पार करेगी ?

8) 40 मी लंबाईवाले किसी आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 1000 वर्ग मी है तो उस आयत की चौड़ाई तथा परिमिति ज्ञात करो। इस बगीचे के दरवाजे की 4 मी जगह छोड़कर उसके चारों ओर 3 फेरोंवाली बाड़ लगानी है। जिसका खर्च 250 रु प्रतिमीटर है तो बाड़ लगाने का कुल खर्च ज्ञात करो।

9) 

संलग्न आकृति में दिए गए मापों के आधार पर कर्ण AC की लंबाई ज्ञात करो।

ΔABC की परिमिति ज्ञात करो।

10) किसी समघन की भुजा की लंबाई 8 सेमी है तो उस समघन का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात करो।

11) गुणनखंड ज्ञात करो। $365y^4z^3 - 146y^2z^4$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

प्रश्न. नीचे दिए गए प्रश्नों में पर्यायी उत्तर दिए हैं। उनमें से उचित विकल्प चुनकर लिखो।

1) संख्या 33, 34, 35, x, 37, 38, 39 का औसत 36 हैं तो x का मान ..... होगा।

(1) 40 (2) 32 (3) 42 (4) 36

2) $(61^2 - 51^2)$ इस वर्ग संख्याओं सें विस्तार सूत्र का उपयोग करके ..... यह मान आता है।

(1) 1120 (2) 1230 (3) 1240 (4) 1250

3) समीर तथा सुनीता ने 2600 रुपये को 8 : 5 के अनुपात में बाँटने पर प्रत्येक के हिस्से में ..... तथा ..... आएँगे।

(1) ₹ 1500, ₹ 1100 (2) ₹ 1300, ₹ 900

(3) ₹ 800, ₹ 500 (4) ₹ 1600, ₹ 1000

❑❑❑