

द्विपद प्रमेय

Ex 7.1

निम्न (प्रश्न 1 से 5 तक) में प्रत्येक व्यंजक का प्रसार कीजिए।

प्रश्न 1. $(2 - x)^3$

हल- हम जानते हैं,

$$\begin{aligned}(x - a)^n &= x^n - {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 - \dots + (-1)^r {}^nC_r x^{n-r} a^r + \dots + (-1)^n a^n \\ \therefore (2 - x)^3 &= 2^3 - {}^3C_1(2)^{3-1} \cdot x + {}^3C_2(2)^{3-2} \cdot x^2 - {}^3C_3(2)^{3-3} \cdot x^3 \\ &= 8 - 3 \times (2)^2 \cdot x + 3 \times (2)^1 \cdot x^2 - 1 \times (2)^0 \cdot x^3 \\ &= 8 - 12x + 6x^2 - x^3\end{aligned}$$

प्रश्न 2.

$$\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$$

हल- द्विपद प्रमेय से हम जानते हैं कि

$$(x + a)^n = {}^nC_0 x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} \cdot a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + {}^nC_r x^{n-r} a^r + \dots + a^n$$

प्रश्नानुर

$$\begin{aligned}\left[\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right]^5 &= \left[\frac{2}{x} + \left(-\frac{x}{2}\right)\right]^5 \\ &= {}^5C_0 \left(\frac{2}{x}\right)^5 \left(-\frac{x}{2}\right)^0 + {}^5C_1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 \left(-\frac{x}{2}\right)^1 \\ &\quad + {}^5C_2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + {}^5C_3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \left(-\frac{x}{2}\right)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + {}^5C_4 \left(\frac{2}{x}\right)^1 \left(-\frac{x}{2}\right)^4 + {}^5C_5 \left(-\frac{x}{2}\right)^5 \\
& = \frac{32}{x^5} + 5\left(\frac{16}{x^4}\right)\left(-\frac{x}{2}\right) + 10\left(\frac{8}{x^3}\right)\left(\frac{x^2}{4}\right) \\
& \quad + 10\left(\frac{4}{x^2}\right)\left(\frac{-x^3}{8}\right) + 5\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x^4}{16}\right) + \left(\frac{-x^5}{32}\right) \\
& = \frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5x^3}{8} - \frac{x^5}{32}
\end{aligned}$$

प्रश्न 3.

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^6$$

हल- द्विपद प्रमेय के आधार पर हम जानते हैं कि

$$(x + a)^n = {}^nC_0 x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + {}^nC_r x^{n-r} a^r + \dots + {}^nC_n a^n$$

प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^6 &= {}^6C_0 \left(\frac{x}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + {}^6C_1 \left(\frac{x}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + \\
&\quad {}^6C_2 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^6C_3 \left(\frac{x}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \\
&\quad {}^6C_4 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5 \left(\frac{x}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 \\
&\quad + {}^6C_6 \left(\frac{x}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^6 \\
&= \frac{x^6}{729} + \frac{2}{81}x^4 + \frac{5x^2}{27} + \frac{20}{27} + \frac{5}{3x^2} + \\
&\quad \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^6}
\end{aligned}$$

प्रश्न 4. $(3x + 2)^4$

हल- द्विपद प्रमेय के आधार पर हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}
 (x + a)^n &= {}^nC_0 x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} \cdot a + {}^nC_2 x^{n-2} \cdot a^2 \\
 &\quad + {}^nC_3 x^{n-3} a^3 + \dots + {}^nC_r x^{n-r} a^r \\
 &\quad + \dots + {}^nC_n a^n \\
 (3x + 2y)^4 &= {}^4C_0 (3x)^4 \cdot (2y)^0 + {}^4C_1 (3x)^{4-1} \cdot (2y)^1 + \\
 &\quad {}^4C_2 (3x)^{4-2} \cdot (2y)^2 + {}^4C_3 (3x)^{4-3} \cdot (2y)^3 \\
 &\quad + {}^4C_4 (3x)^{4-4} \cdot (2y)^4 \\
 &= (3x)^4 + 4 \cdot (3x)^3 \cdot 2y + 6 \cdot (3x)^2 \cdot (2y)^2 + \\
 &\quad 4 \cdot (3x)^1 \times (2y)^3 + (2y)^4 \\
 &= 81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5.

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^6$$

हल- द्विपद प्रमेय के आधार पर हम जानते हैं कि

$$(x + a)^n = x^n - {}^nC_1 x^{n-1} \cdot a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + (-1)^r {}^nC_r x^{n-r} a^r + \dots + (-1)^n a^n$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^6 - {}^6C_1 \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^5 \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} + {}^6C_2 \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 - \\
 &\quad {}^6C_3 \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^3 + {}^6C_4 \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^4 - \\
 &\quad {}^6C_5 \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right) \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^5 + {}^6C_6 \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^0 \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^6 \\
 &= \frac{x^3}{a^3} - \frac{6x^2}{a^2} + \frac{15x}{a} - 20 + 15\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{6a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \\
 &= \frac{x^3}{a^3} - \frac{6x^2}{a^2} + \frac{15x}{a} - 20 + 15\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{6a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}
 \end{aligned}$$

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित (प्रश्न 6-9) का मान ज्ञात कीजिए

प्रश्न 6. $(96)^3$

हल- $96 = 100 - 4$ लिखने पर

$$\begin{aligned}(96)^3 &= (100 - 4)^3 \\&= {}^3C_0 (100)^3 - {}^3C_1 (100)^2 (4) + {}^3C_2 (100)^1 (4)^2 - {}^3C_3 (4)^3 \\&= 1000000 - 3 (10000) (4) + 3 (100) 16 - 64 \\&= 1000000 - 120000 + 4800 - 64 \\&= 1004800 - 120064 \\&= 884736\end{aligned}$$

प्रश्न 7. $(101)^4$

हल- $101 = 100 + 1$ लिखने पर

$$\begin{aligned}(100 + 1)^4 &= {}^4C_0 (100)^4 + {}^4C_1 (100)^3 (1) + {}^4C_2 (100)^2 (1)^2 + {}^4C_3 (100)^1 (1)^3 + {}^4C_4 (1)^4 \\&= 100000000 + 4 (1000000) + 6 (10000) + 4 (100) + 1 \\&= 100000000 + 4000000 + 60000 + 400 + 1 \\&= 104060401\end{aligned}$$

प्रश्न 8. $(99)^5$

हल- $99 = 100 - 1$ लिखने पर

$$\begin{aligned}(99)^5 &= (100 - 1)^5 \\&= {}^5C_0 (100)^5 - {}^5C_1 (100)^4 \cdot 1 + {}^5C_2 (100)^3 \cdot (1)^2 - {}^5C_3 (100)^2 \cdot (1)^3 + {}^5C_4 (100)^1 (1)^4 - {}^5C_5 (1)^5 \\&= (100)^5 - 5 \times (100)^4 + 10 \times (100)^3 - 10 \times (100)^2 + 5 \times 100 - 1 \\&= 10000000000 - 500000000 + 10000000 - 100000 + 500 - 1 \\&= 10010000500 - 500 100001 \\&= 9509900499\end{aligned}$$

प्रश्न 9. $(1.1)^6$

हल- $1.1 = 1 + 0.1$ लिखने पर

$$\begin{aligned}(1.1)^6 &= (1 + 0.1)^6 \\&\therefore (1 + 0.1)^6 = {}^6C_0 (1)^6 + {}^6C_1 (1)^5 \cdot (0.1) \\&\quad + {}^6C_2 (1)^4 \cdot (0.1)^2 + {}^6C_3 (1)^3 \cdot (0.1)^3 + {}^6C_4 (1)^2 \cdot (0.1)^4 + {}^6C_5 (1)(0.1)^5 + (0.1)^6 \\&= 1 + 6 \times 1 \times 0.1 + 15 \times 1 \times 0.01 + 20 \times 1 \times 0.001 + 15 \times 1 \times 0.0001 + 6 \times 1 \times 0.00001 + 0.000001\end{aligned}$$

$$= 1 + 0.6 + 0.15 + 0.020 + 0.0015 + 0.00006 + 0.000001$$

$$= 1.771561$$

प्रश्न 10. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौनसी संख्या बड़ी है। $(1.1)^{10000}$ या 1000.

हल- द्विपद प्रमेय की सहायता से $(1.1)^{10000}$ का विस्तार करने पर

$$(1.1)^{10000} = (1 + 0.1)^{10000}$$

$$= {}^{10000}C_0 + {}^{10000}C_1 (0.1) + {}^{10000}C_2 (0.1)^2 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$

$$= 1 + 10000 \times (0.1) + \text{अन्य धनात्मक पद}$$

$$= 1 + 1000 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$

$$= 1001 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$

जो कि 1000 से बड़ी संख्या प्राप्त होगी। अतः

$$(1.1)^{10000} > 1000$$

प्रश्न 11. $(a + b)^4 - (a - b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- प्रश्नानुसार $(a + b)^4 - (a - b)^4$

$$= [{}^4C_0 a^4 + {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 + {}^4C_3 a b^3 + {}^4C_4 b^4] - [{}^4C_0 a^4 - {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 - {}^4C_3 a b^3 + {}^4C_4 b^4]$$

$$= (a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4) - (a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4)$$

$$= 2 [4a^3 b - 4ab^3]$$

$$= 8ab (a^2 + b^2)$$

इसमें प्रश्नानुसार $a = \sqrt{3}$ तथा $b = \sqrt{2}$ रखने पर

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} [(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2]$$

$$= 8\sqrt{6} (3 + 2)$$

$$= 8\sqrt{6} (5)$$

$$= 40\sqrt{6}$$

Ex 7.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित द्विपद प्रसारों में अंकित पद ज्ञात कीजिए।

(i) $(a + 2x^3)^{17}$ का 5 वाँ पद

हल- हम जानते हैं

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$$

यहाँ पर $r = 4$ होगा।

$$\therefore T_{4+1} = T_5 = {}^{17}C_4 (a)^{17-4} \cdot (2^3)^4$$

$$\begin{aligned} T_5 &= {}^{17}C_4 \cdot a^{13} \cdot 2^4 \cdot x^{12} \\ &= {}^{17}C_4 \cdot a^{13} \cdot 16x^{12} \end{aligned}$$

(ii) $\left(\frac{x}{y} - \frac{3y}{x^2}\right)^{12}$ का 9 वाँ पद

हल- हम जानते हैं ।

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$$

यहाँ पर $r = 8$ होगा।

$$\begin{aligned} \therefore T_{8+1} = T_9 &= {}^{12}C_8 \left(\frac{x}{y}\right)^{12-8} \left(-\frac{3y}{x^2}\right)^8 \\ &= {}^{12}C_8 \frac{x^4}{y^4} \times (-1)^8 \times 3^8 \times \frac{y^8}{x^{16}} \\ &= {}^{12}C_8 \times 3^8 \times \frac{y^4}{x^{12}} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times 81 \times 81 \times \frac{y^4}{x^{12}} \\ &= 11 \times 5 \times 9 \times 81 \times 81 \left(\frac{y^4}{x^{12}}\right) \\ &= 3247695 \frac{y^4}{x^{12}} \end{aligned}$$

(iii) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2}\right)^9$ का 9 वाँ पद

हम जानते हैं

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$$

यहाँ पर $r = 5$ होगा।

$$\begin{aligned}\therefore T_{5+1} &= {}^9C_5 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^{9-5} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} \right)^5 \\ &= {}^9C_5 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)^4 \cdot (-1)^5 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right)^5 \\ &= {}^9C_5 \cdot (2)^4 \cdot x^{-2} \cdot x^{10} \cdot 2^{-5} \\ &= {}^9C_5 \cdot 2^{4-5} \cdot x^8 \\ &= -\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times 2^{-1} x^8 \\ &= -63x^8\end{aligned}$$

प्रश्न 2. गुणांक ज्ञात कीजिए

(i) $\left(ax - \frac{1}{bx^2} \right)^8$ के प्रसार में x^{-7} का

हल- माना कि x^{-7} , T_{r+1} पद में आता है। तब

$$\begin{aligned}T_{r+1} &= {}^8C_r (ax)^{8-r} \left(-\frac{1}{bx^2} \right)^r \\ &= {}^8C_r (a)^{8-r} x^{8-r} \cdot (-1)^r \cdot b^{-r} \cdot x^{-2r} \\ &= {}^8C_r \cdot (a)^{8-r} \cdot x^{8-3r} \cdot (-1)^r \cdot b^{-r} \quad \dots (1)\end{aligned}$$

इसमें x की घात -7 होनी चाहिए।

$$\therefore 8 - 3r = -7$$

$$\text{या } 3r = 8 + 7$$

$$3r = 15$$

$$\therefore r = 5$$

r का मान समी. (1) में रखने पर, x^{-7} का गुणांक

$$= {}^8C_5 \cdot (a)^{8-5} \cdot (-1)^5 \cdot b^{-5}$$

$$= -\frac{56a^3}{b^5}$$

(ii) $\left(x^4 - \frac{1}{x^3} \right)^{15}$ के प्रसार में x^4 का

हल-

माना कि x^4 , T_{r+1} पद में आता है। तब

$$\begin{aligned}
 T_{r+1} &= {}^{15}C_r (x^4)^{15-r} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^r \\
 &= {}^{15}C_r \cdot x^{60-4r} \cdot x^{-3r} \\
 &= {}^{15}C_r \cdot x^{60-7r} \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

इसमें x की घात 4 होनी चाहिए।

$$\text{अतः } 60 - 7r = 4 \Rightarrow 7r = 60 - 4 = 56$$

$$\therefore r = \frac{56}{7} = 8$$

r का मान समी. (1) में रखने पर, x^4 का गुणांक

$$\begin{aligned}
 &= {}^{15}C_8 = \frac{15!}{7! \cdot 8!} \\
 &= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}
 \end{aligned}$$

$$= 6435$$

(iii) $(a - bx^2)^{10}$ के प्रसार में x^6 का

हल- माना कि x^6 , T_{r+1} पद में आता है। तब

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r (a)^{10-r} \cdot (-bx^2)^r$$

$$= {}^{10}C_r (a)^{10-r} (-1)^r b^r \cdot x^{2r} \dots\dots(1)$$

इसमें x की घात 6 होनी चाहिए।

$$\text{अतः } 2r = 6 \therefore r = 3$$

r का मान समी. (1) में रखने पर, x^6 का गुणांक

$$\begin{aligned}
 &= {}^{10}C_3 \cdot (a)^{10-3} \cdot (-1)^3 b^3 \\
 &= -{}^{10}C_3 a^7 b^3 \\
 &= -\frac{10!}{7! \times 3!} a^7 b^3 \\
 &= -\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} a^7 b^3 = -120a^7 b^3
 \end{aligned}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित के प्रसार में x रहित पद ज्ञात कीजिए

$$(i) \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{12}$$

हल- माना x रहित पद T_{r+1} वाँ पद है।

$$\therefore T_{r+1} = {}^{12}C_r x^{12-r} a^r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{r+1} &= {}^{12}C_r \cdot (x)^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r \\ &= {}^{12}C_r x^{12-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{-2r} \\ &= (-1)^r {}^{12}C_r \cdot x^{12-3r} \end{aligned}$$

x रहित पद के लिए, x की घात शून्य होती है।

$$\text{अतः } 12 - 3r = 0 \text{ या } r = 4$$

$$\therefore x \text{ रहित पद} = T_5 = (-1)^4 \cdot {}^{12}C_4$$

$$\begin{aligned} &= {}^{12}C_4 = \frac{12!}{8!4!} \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 495 \end{aligned}$$

$$(ii) \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^{10}, x > 0$$

हल- माना कि $(r + 1)$ वाँ पद x रहित है।

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}^{10}C_r \cdot (\sqrt{x})^{10-r} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r \\ &= (-1)^r {}^{10}C_r (x)^{10-r/2} \cdot 3^r \cdot x^{-2r} \\ &= (-1)^r {}^{10}C_r \cdot 3^r \cdot x^{10-r/2-2r} \\ &= (-1)^r {}^{10}C_r \cdot 3^r \cdot x^{10-5r/2} \end{aligned}$$

x रहित पद के लिए, x की घात शून्य होती है।

$$\text{अतः } \frac{10-5r}{2} = 0 \text{ या } r = 2$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये } x \text{ रहित पद} &= T_3 = (-1)^2 {}^{10}C_2 \cdot 3^2 \\ T_3 &= {}^{10}C_2 \cdot 9 = 9 \cdot {}^{10}C_2 \\ &= 9 \times 45 = 405 \end{aligned}$$

$$(iii) \left(\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{3}{2x^2} \right)^{10}$$

हल- माना, कि $(r + 1)$ वाँ पद x रहित है।

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}^{10}C_r \left(\sqrt{\frac{x}{3}} \right)^{10-r} \cdot \left(\frac{3}{2x^2} \right)^r \\ \Rightarrow T_{r+1} &= {}^{10}C_r \left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{10-r}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^r \cdot x^{-2r} \\ &= {}^{10}C_r \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{10-r}{2}} \cdot (x)^{\frac{10-r}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^r \cdot x^{-2r} \\ &= {}^{10}C_r \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{10-r}{2}} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^r \cdot x^{\frac{10-5r}{2}} \end{aligned}$$

x रहित पद के लिए, x की घात शून्य होती है।

$$\text{अतः} \quad \frac{10-5r}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 5r = 0 \therefore r = 2$$

$$\text{इसलिए } x \text{ रहित पद} = T_3 = {}^{10}C_2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} T_3 &= {}^{10}C_2 \cdot \frac{1}{3^2 \cdot 2^2} = 45 \times \frac{1}{9 \times 4} \\ &= \frac{45}{36} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$(iv) \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)^{10}$$

हल- माना कि $(r + 1)$ वाँ पद x रहित है।

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}^{10}C_r (x^2)^{10-r} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r \\ &= (-1)^r {}^{10}C_r \cdot x^{20-2r} \cdot x^{-2r} \\ &= (-1)^r {}^{10}C_r \cdot x^{20-4r} \end{aligned}$$

x रहित पद के लिए, x की घात शून्य होती है।

$$\text{अतः } 20 - 4r = 0 \text{ या } r = 5$$

$$\text{इसलिए } x \text{ रहित पद} = T_6 = (-1)^5 {}^{10}C_5$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{10!}{5!5!} \\ &= -\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -252 \end{aligned}$$

प्रश्न 4. निम्नलिखित के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए

(i) $\left(\frac{x}{2} + 2y\right)^6$

हल- $\left(\frac{x}{2} + 2y\right)^6$ के प्रसार में पदों की संख्या $= 6 + 1 = 7$ (विषम)

$$\begin{aligned} \text{अतः मध्य पद} &= \left(\frac{n+2}{2}\right) \text{वाँ पद} \\ &= \left(\frac{6+2}{2}\right) \text{वाँ पद} = 4 \text{वाँ पद} \end{aligned}$$

अतः हमें T_4 ज्ञात करना है।

हम जानते हैं—

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}^nC_r (x)^n r a^r \\ \Rightarrow T_{3+1} &= {}^6C_3 \left(\frac{x}{2}\right)^{6-3} \cdot (2y)^3 \\ &= {}^6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (2)^3 x^3 y^3 \\ &= 20x^3y^3 \end{aligned}$$

(ii) $\left(3a - \frac{a^3}{6}\right)^9$

हल- $\left(3a - \frac{a^3}{6}\right)^9$ के प्रसार में पदों की संख्या

$$= 9 + 1 = 10 \text{ (सम)}$$

अतः मध्य पद = $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ पद और $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ वाँ पद

अर्थात् मध्य पद = 5वाँ पद और 6वाँ पद होगा।

अतः मध्य पद T_5 तथा T_6 होंगे।

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^n r a^r$$

$$T_{4+1} = {}^9C_4 (3a)^5 \cdot \left(-\frac{a^3}{6}\right)^4$$

$$= (-1)^4 {}^9C_4 \cdot (3)^5 \cdot \frac{a^5 \cdot a^{12}}{6^4}$$

$$= {}^9C_5 \cdot \frac{(3)^5}{6^4} \cdot a^{17}$$

$$= \frac{|9|}{|4 \times |5|} \times \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6 \times 6} a^{17}$$

$$= \frac{189}{8} a^{17} \text{ उत्तर}$$

T_6 ज्ञात करने के लिए $r = 5$ लेंगे।

$$T_{5+1} = {}^9C_5 (3a)^4 \cdot \left(-\frac{a^3}{6}\right)^5$$

$$= (-1)^5 {}^9C_5 \cdot \frac{3^4 \cdot a^4 \cdot a^{15}}{6^5}$$

$$= - {}^9C_5 \cdot \frac{3^4 \cdot a^{19}}{6^5} = - \frac{|9|}{|4 \times |5|} \cdot \frac{3^4}{6^5} \cdot a^{19}$$

$$= - \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} \times \frac{1}{48} a^{19}$$

$$= - \frac{21}{16} a^{19}$$

$$(iii) \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$$

हल- $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ प्रसार में पदों की संख्या = $2n + 1$
जो कि एक विषम संख्या है। इसलिए

$$\text{मध्य पद} = \left(\frac{2n+2}{2}\right) \text{वाँ पद} = (n+1) \text{वाँ पद}$$

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$$

$$\therefore T_{n+1} = {}^{2n}C_n \cdot (x)^{2n-n} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

$$= {}^{2n}C_n \cdot x^n \cdot \frac{1}{x^n} = {}^{2n}C_n$$

$$= \frac{{}^{2n}}{n \cdot n} = \frac{{}^{2n}}{(n)^2}$$

$$(iv) \left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$$

हल- $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ के प्रसार में पदों की संख्या
= $15 + 1 = 16$ (सम)

$$\text{अतः मध्य पद} = \left(\frac{16}{2}\right) \text{वाँ पद} = 8 \text{वाँ पद}$$

$$\begin{aligned} \text{और मध्य पद} &= \left(\frac{16}{2} + 1\right) \text{वाँ पद} = (8 + 1) \text{वाँ पद} \\ &= 9 \text{वाँ पद} \end{aligned}$$

अब हमें T_8 व T_9 ज्ञात करना है।

$$\therefore T_{7+1} = {}^{15}C_7 (3x)^{15-7} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^7$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^7 {}^{15}C_7 \cdot (3x)^8 \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^7 \\
&= -{}^{15}C_7 \cdot 3^8 \cdot x^8 \cdot 2^7 \cdot x^{-14} \\
&= -{}^{15}C_7 \cdot 3^8 \cdot 2^7 \cdot x^{-6} \\
&= -\frac{6435 \times 3^8 \times 2^7}{x^6}
\end{aligned}$$

अब T_9 के लिए $r = 8$ लेंगे।

$$\begin{aligned}
T_9 = T_{8+1} &= {}^{15}C_8 (3x)^{15-8} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^8 \\
&= {}^{15}C_8 \cdot \frac{3^7 \cdot x^7 \cdot 2^8}{x^{16}} \\
&= \frac{{}^{15}C_8 \times 3^7 \times 2^8}{x^9} = \frac{6435 \times 3^7 \times 2^8}{x^9}
\end{aligned}$$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि यदि n सम हो, तब $(1 + x)^n$ के प्रसार में मध्य पद का गुणांक $\frac{1.3.2.....(n-1)}{2.4.6.....n} 2^n$ होगा। यदि n

विषम हो, तो दोनों मध्य पदों का गुणांक $\frac{1.3.5....n}{2.4.6(n+1)} 2^n$ होगा।

हल- (i) n के सम होने पर माना $n = 2k$

$\therefore (1 + x)^{2k}$ के प्रसार में $(2k + 1)$ पद होंगे, जिनका मध्य पद $\frac{2k+1+1}{2}$
 $= (k + 1)$ वाँ पद होगा।

$$\begin{aligned}
\therefore T_{k+1} &= {}^{2k}C_k x^k \\
\therefore \text{मध्य पद का गुणांक} &= {}^{2k}C_k \\
&= \frac{2k!}{k!k!} \\
&= \frac{[2k(2k-1)(2k-2)(2k-3).....6.5.4.3.2.1]}{k!k!} \\
&= \frac{[2k(2k-2)(2k-4)....6.4.2].[(2k-1)(2k-3)....5.3.1]}{k!.k!} \\
&= \frac{2^k [k(k-1)(k-2).....3.2.1].[1.3.5.....(2k-1)]}{k!.k!} \\
&= 2^k \frac{k![1.3.5.....(2k-1)]}{k!.k!}
\end{aligned}$$

$$= 2^k \cdot \frac{[1.3.5.....(2k-1)]}{k!}$$

k का मान रखने पर—

$$= 2^{n/2} \frac{[1.3.5.....(n-1)]}{\frac{n!}{2}}$$

$$= 2^{n/2} \frac{1.3.5.....(n-1)}{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right).....3.2.1}$$

$$= 2^{n/2} \frac{1.3.5.....(n-1)}{\frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{2}}$$

$$= 2^{n/2} \cdot 2^{n/2} \cdot \frac{1.3.5.....(n-1)}{n(n-2)(n-4).....6.4.2}$$

$$= \frac{1.3.5.....(n-1)}{2.4.6.....n} 2^n \quad \text{इतिसिद्धम्}$$

(ii) यदि n विषम है तो माना $n = 2k + 1$, अतः $(1 + x)^{2k+1}$ के विस्तार में $(2k + 1) + 1$ अर्थात् $(2k + 2)$ पद होंगे।

इसलिए मध्य पद, $\frac{2k+2}{2} = k + 1$ वाँ पद

तथा $\left(\frac{2k+2}{2} + 1\right)$ वाँ पद $= k + 2$ वाँ पद होगा।

$$\therefore T_{k+1} = {}^{2k+1}C_k x^k$$

$$\text{तथा } T_{k+2} = {}^{2k+1}C_{k+1} x^{k+1}$$

$$= {}^{2k+1}C_{(2k+1) - (k+1)} x^{k+1} \quad [\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$$

$$= {}^{2k+1}C_k x^{k+1}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} \text{ तथा } T_{k+2} \text{ का गुणांक एक ही है तथा यह है} \\ = {}^{2k+1}C_k$$

$$= \frac{2k+1!}{k!2k+1-k!} = \frac{2k+1!}{k!k+1!} \\ = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2).....5.4.3.2.1}{k!k+1!} \\ = \frac{[(2k)(2k-2).....4.2][(2k+1)(2k-1).....5.3.1]}{k!(k+1)!} \\ = \frac{2^k [k(k-1).....2.1][(2k+1).....5.3.1]}{k!(k+1)!} \\ = \frac{2^k (k!)[1.3.5.....(2k+1)]}{k!(k+1)!} \\ = \frac{2^k [1.3.5.....(2k+1)]}{(k+1)!}$$

$$= k \text{ का मान रखने पर } k = \frac{n-1}{2} \\ = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} [1.3.5.....n]}{\left(\frac{n-1}{2}+1\right)!} = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} [1.3.5.....n]}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!} \\ = 2^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5.....n}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right).....3.2.1} \\ = 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1.3.5.....n}{(n+1)(n-1)(n-3).....6.4.2} \\ = 2^n \frac{1.3.5.....n}{2.4.6.....(n+1)} \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 6. यदि $(ax + \frac{1}{bx})^{11}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक तथा x^{-7} का गुणांक बराबर है तब सिद्ध कीजिए $ab - 1 = 0$.

हल-

$(ax + \frac{1}{bx})^{11}$ के प्रसार का व्यापक पद

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}^{11}C_r (ax)^{11-r} \left(\frac{1}{bx}\right)^r \\ &= {}^{11}C_r \frac{a^{11-r}}{b^r} \cdot x^{11-2r} \end{aligned}$$

$$\text{अतः } x^{11-2r} \text{ का गुणांक} = {}^{11}C_r \frac{a^{11-r}}{b^r}$$

$$= \frac{55 a^9}{b^2}$$

जब $11 - 2r = -7$ हो तो $r = 9$

$$\therefore x^{-7} \text{ का गुणांक} = {}^{11}C_9 \frac{a^2}{b^9} = \frac{55 a^2}{b^9}$$

दोनों के गुणांक समान हैं इसलिए—

$$\frac{55 a^9}{b^2} = \frac{55 a^2}{b^9}$$

$\Rightarrow$

$$a^7 b^7 = 1$$

$\Rightarrow$

$$(ab)^7 = 1$$

अतः

$$ab = 1$$

$$ab - 1 = 0 \text{ (इतिसिद्धम्)}$$

प्रश्न 7. $(1 + y)^n$ के विस्तार में यदि 5 वें, 6 वें तथा 7 वें पदों के गुणांक स.श्रे. में हों, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $\therefore (1 + y)^n$ के प्रसार में $T_{r+1} = {}^nC_r y^r$

$\therefore (r + 1)$ वें पद का गुणांक $= {}^nC_r$

$\therefore$ 5 वें पद का गुणांक $= {}^nC_4$

6 वें पद का गुणांक $= {}^nC_5$

7 वें पद का गुणांक $= {}^nC_6$

${}^nC_4, {}^nC_5, {}^nC_6$, समान्तर श्रेणी में हों, तब
 $2{}^nC_5 = {}^nC_4 + {}^nC_6$

$$\Rightarrow \frac{2 \times n!}{5!n-5!} = \frac{n!}{4!n-4!} + \frac{n!}{n-6!6!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{60(n-5!)} = \frac{1}{24(n-4!)} + \frac{1}{720(n-6!)}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{(n-5)(n-6!)} = \frac{30}{(n-4)(n-5)(n-6!)} + \frac{1}{(n-6)!}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{(n-5)} - 1 = \frac{30}{(n-4)(n-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{12-(n-5)}{(n-5)} = \frac{30}{(n-4)(n-5)}$$

$$\Rightarrow (17-n)(n-4)(n-5) = 30(n-5)$$

$$\Rightarrow (17-n)(n-4) = 30$$

$$\Rightarrow 21n - 68 - n^2 = 30$$

$$\Rightarrow n^2 - 21n + 98 = 0$$

$$\Rightarrow (n-14)(n-7) = 0$$

$$\Rightarrow n = 7 \text{ या } 14$$

$$\therefore n = 7 \text{ या } 14$$

प्रश्न 8. $(x + a)^n$ के द्विपद प्रसार के दूसरे, तीसरे और चौथे पद क्रमशः 240, 720 और 1080 हैं। x , a तथा n ज्ञात कीजिए।

हल- हमें ज्ञात है कि दूसरा पद $T_2 = 240$

$$\text{परन्तु } T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} \cdot a$$

$$\text{इसलिए } {}^nC_1 x^{n-1} \cdot a = 240 \dots (1)$$

$$\text{इसी प्रकार } {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \dots (2)$$

$$\text{और } {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \dots (3)$$

(2) को (1) से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \text{ या } \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{a}{x} = 6$$

$$\text{या } \frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \quad \dots (4)$$

(3) को (2) से भाग करने पर,

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \quad \dots (5)$$

$$(4) \text{ व } (5) \text{ से, } \frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)} \text{ या } n = 5$$

$$\text{अब (1) से, } 5x^4a = 240 \text{ और (4) से, } \frac{a}{x} = \frac{3}{2}$$

इन समीकरणों को हल करने से हम $x = 2$, $a = 3$ तथा $n = 5$ प्राप्त करते हैं।

प्रश्न 9. यदि $(1 + a)^n$ के प्रसार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक $1 : 7 : 42$ के अनुपात में हैं तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल- मान लीजिए $(1 + a)^n$ के प्रसार में $(r-1)^{\text{वाँ}}$, $r^{\text{वाँ}}$ तथा $(r+1)^{\text{वाँ}}$ पद, तीन क्रमागत पद हैं। $(r-1)^{\text{वाँ}}$ पद ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$ है तथा इसका गुणांक ${}^nC_{r-2}$ है। इसी $r^{\text{वाँ}}$ प्रकार तथा $(r+1)^{\text{वाँ}}$ पदों के गुणांक क्रमशः ${}^nC_{r-1}$ व nC_r हैं। क्योंकि गुणांकों का अनुपात $1 : 7 : 42$ है इसलिए

$$\text{प्रश्नानुसार } \frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}$$

$$\text{और } \frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}$$

$$\text{अब } \frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{\frac{n!}{(r-2)!(n-r+2)!}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{(r-1)}{(n-r+2)} = \frac{1}{7}$$

$$7r - 7 = n - r + 2$$

$$\Rightarrow 8r - n - 9 = 0 \quad \dots(1)$$

अब $\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}} = \frac{7}{42}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{n-r+1} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 6r = n - r + 1$$

$$\Rightarrow 7r - n - 1 = 0 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर।

$$-r + 8 = 0 \therefore r = 8$$

r का मान समीकरण (1) में रखने पर।

$$8 \times 8 - n - 9 = 0$$

$$64 - n - 9 = 0$$

$$\therefore n = 55$$

प्रश्न 10. m का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1 + x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 हो।

हल- हम जानते हैं कि

$$(1 + x)^m = {}^mC_0 + {}^mC_1x^1 + {}^mC_2x^2 + \dots + {}^mC_m r^m$$

इस प्रसार में x^2 का गुणांक mC_2 होगा जो कि प्रश्नानुसार 6 के बराबर है।

$$\therefore {}^mC_2 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{m!}{2!(m-2)!} = 6$$

$$\text{या } \frac{m(m-1)(m-2)!}{2!(m-2)!} = 6$$

$$\text{या } m(m-1) = 2 \times 6$$

$$\text{या } m^2 - m = 12$$

$$\text{या } m^2 - m - 12 = 0$$

$$\text{या } m^2 - 4m^2 + 3m - 12 = 0$$

$$\text{या } m(m-4) + 3(m-4) = 0$$

$$\text{या } (m-4)(m+3) = 0$$

$$\text{या } m-4 = 0$$

$$\text{या } m+3 = 0$$

$$\text{या } m = 4 \text{ या } m = -3$$

नकारात्मक मान को उपेक्षणीय मानने पर $m = 4$.

Ex 7.3

प्रश्न 1. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ हो, तो मान ज्ञात कीजिए-

$$(i) {}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + \dots + {}^8C_8$$

$$(ii) {}^8C_1 + {}^8C_3 + {}^8C_5 + {}^8C_7 + \dots$$

हल- (i) चूँकि हम जानते हैं कि

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$$

$$1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_n = 2^n$$

$$\therefore {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_n = 2^n - 1$$

$n = 8$ रखने पर

$${}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + \dots + {}^8C_8 = 2^8 - 1$$

$$= 256 - 1 = 255$$

(ii) द्विपद गुणांकों के गुणधर्म से हम जानते हैं ।

$$2({}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \dots) = 2^n$$

$$\text{या } {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \dots \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

$n = 8$ रखने पर

$${}^8C_1 + {}^8C_3 + {}^8C_5 + \dots = 2^{8-1} = 2^7$$

$$= 128$$

यदि $(1 + x)^n$ के प्रसार के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ हो, तब सिद्ध कीजिए

प्रश्न 2. $C_0 + 3.C_1 + 5.C_2 + \dots + (2n + 1). C_n = (n + 1)2^n$

हल- L.H.S. $C_0 + 3.C_1 + 5.C_2 + \dots + (2n + 1). C_n$

$$= (C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n) + (2.C_1 + 4.C_2 + 6.C_3 + \dots + 2nC_n)$$

$$= 2^n + 2(C_1 + 2C_2 + 3C_3 \dots + n.C_n).$$

$$= 2^n + 2 \left[n + \frac{2.n(n-1)}{1.2} + \frac{3.n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots + n \right]$$

$$= 2^n + 2 \left[n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} + \dots + n \right]$$

$$= 2^n + 2n \left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \dots + 1 \right]$$

$$= 2^n + 2n[1 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_3 + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}].$$

$$= 2^n + 2n.2^{n-1}$$

$$= 2^n + n.2^n$$

$$= (n + 1)2^n$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 3. $C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \dots + C_{n-2}C_n =$

$$\frac{2n}{(n-2)(n+2)}$$

हल : $(1 + x)^n = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n) \dots (1)$

$$(x + 1)^n = (C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_n) \dots (2)$$

समी. (1) तथा (2) का गुणा करने पर

$$(1 + x)^n \times (x + 1)^n$$

$$= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n) \times$$

$$(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_n)$$

दोनों पक्षों में x^{n-r} के गुणांकों की तुलना करने पर

$${}^{2n}C_{n-r} = C_0C_r + C_1r_{r+1} + \dots + C_{n-r}C_r$$

$r = 2$ रखने पर

$${}^{2n}C_{n-2} = C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \dots + C_{n-2}C_n$$

$$\frac{{}^{2n}C_{n-2}}{{}^{2n-n+2}C_{n-2}} = C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \dots + C_{n-2}C_n$$

$$\frac{{}^{2n}C_{n-2}}{{}^{n+2}C_{n-2}} = C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \dots + C_{n-2}C_n$$

अर्थात्

$$C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \dots + C_{n-2}C_n = \frac{{}^{2n}C_{n-2}}{{}^{n-2}C_{n+2}} \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 4. $C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 6C_3 + \dots + 2nC_n = 1 + n2^n$

हल- L.H.S.

$$\begin{aligned} & C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 6C_3 + \dots + 2nC_n \\ &= 1 + 2C_1 + 4C_2 + 6C_3 + \dots + 2nC_n \\ &\because C_0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 2(C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + nC_n) \\ &= 1 + 2({}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + \dots + n.{}^nC_n) \end{aligned}$$

$$= 1 + 2\left(n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots + n\right)$$

$$= 1 + 2\left(n + n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \dots + n\right)$$

$$= 1 + 2n\left(1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \dots + 1\right)$$

$$= 1 + 2n(1 + {}^{(n-1)}C_1 + {}^{(n-1)}C_2 + {}^{(n-1)}C_3 + \dots + {}^{n-1}C_{n-1})$$

$$= 1 + 2n \cdot 2^{n-1} = 1 + n \cdot 2^n = \text{R.H.S.}$$

प्रश्न 5.

$$\left(1 + \frac{C_1}{C_0}\right)\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)\left(1 + \frac{C_3}{C_2}\right) \dots \left(1 + \frac{C_n}{C_{n-1}}\right) = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

हल- सभी के मान निकालने पर

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{{}^nC_1}{{}^nC_0} = \frac{n}{1} = n$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{{}^nC_2}{{}^nC_1} = \frac{\frac{n}{n-2} \times 2}{\frac{n}{n-1} \times 1} = \frac{n \times n-1}{n \times n-2 \times 2}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{(n-1)}{2}$$

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{{}^nC_3}{{}^nC_2} = \frac{\frac{n}{n-3} \times 3}{\frac{n}{n-2} \times 2} = \frac{n-2 \times 2}{3 \times n-3}$$

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{n-2}{3}$$

इसी प्रकार से $\frac{C_4}{C_3} = \frac{n-3}{4}$

L.H.S. में सभी के मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= (1+n) \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \left(1 + \frac{n-2}{3}\right) \left(1 + \frac{n-3}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= (1+n) \left(\frac{2+n-1}{2}\right) \left(\frac{3+n-2}{3}\right) \left(\frac{4+n-3}{4}\right) \dots \frac{(n+1)}{n} \\ &= \frac{(1+n)(1+n)(1+n) \dots (1+n)}{1.2.3.4 \dots n} \\ &= \frac{(1+n)^n}{n} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. यदि $(1+x-2x^2)^6$ का पूर्ण प्रसार $1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{12}x^{12}$ द्वारा निरूपित हो, तब सिद्ध कीजिए, $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{12} = 31$

हल- $x = -1$ रखने पर

$$(1 - 1 - 2(-1)^2)^6 = 1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{12}$$

$$\text{अर्थात् } (-2)^6 = 1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + a_{12}$$

$$64 = 1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + a_{12} \dots (1)$$

अब $x = 1$ रखने पर

$$(1 + 1 - 2 \cdot 1^2)^6 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12}$$

$$(2 - 2)^6 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12}$$

$$0 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12} \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$64 = 2 + 2a_2 + 2a_4 + \dots + 2a_{12}$$

$$64 = 2(1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{12})$$

$$\text{या } \frac{64}{2} = (1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{12})$$

$$32 = 1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{12}$$

$$\text{या } a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{12} = 32 - 1 = 31$$

$$\text{अतः } a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{12} = 31 \text{ इतिसिद्धम्}$$

Ex 7.4

प्रश्न 1. निम्नलिखित द्विपदों का चार पदों तक प्रसार कीजिए

(i) $(1 + x^2)^{-2}$

हल- (i) $(1 + x^2)^{-2}$

हम जानते हैं।

$$(1 + x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \dots +$$

$$\frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r} x^r + \dots$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2(2+1)}{2} (x^2)^2 -$$

$$\frac{2(2+1)(2+2)}{3} (x^2)^3 + \dots$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2 \times 3}{2} x^4 - \frac{2 \times 3 \times 4}{6} x^6 + \dots$$

चार पदों तक प्रसार लेने पर

$$= 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6$$

$$(ii) \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{1/2}$$

हल-

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{1/2}$$

हम जानते हैं।

$$\begin{aligned} (1 - x)^n &= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r}x^r + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{128}x^3 \end{aligned}$$

$$(iii) (3 - 2x^2)^{-2/3}$$

$$\text{हल- } (3 - 2x^2)^{-2/3}$$

$$\Rightarrow (3)^{-2/3} \left(1 - \frac{2}{3}x^2\right)^{-2/3}$$

हम जानते हैं—

$$(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r}x^r + \dots$$

$$\Rightarrow (3)^{-2/3} \left[1 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} x^2 \right) + \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1 \right)}{2} \left(\frac{2}{3} x^2 \right)^2 + \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) \left(\frac{2}{3} + 2 \right)}{3} \left(\frac{2}{3} x^2 \right)^3 + \dots \right]$$

चार पदों तक प्रसार लेने पर

$$\Rightarrow (3)^{-2/3} \left[1 + \frac{4}{9} x^2 + \frac{20}{81} x^4 + \frac{320}{2187} x^6 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3)^{2/3}} \left[1 + \frac{4}{9} x^2 + \frac{20}{81} x^4 + \frac{320}{2187} x^6 \right]$$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{5+4x}}$

हल-

$$\frac{1}{\sqrt{5+4x}} = \frac{1}{(5+4x)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow (5+4x)^{-1/2} = (5)^{-1/2} \left(1 + \frac{4}{5} x \right)^{-1/2}$$

हम जानते हैं—

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2} x^2 - \dots +$$

$$\frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r + \dots$$

चार पदों तक प्रसार करने पर

$$\Rightarrow 5^{-1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} x \right) + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)}{2!} \left(\frac{4}{5} x \right)^2 - \right.$$

$$\left. \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + 2 \right)}{3!} \times \left(\frac{4}{5} x \right)^3 \right]$$

$$\Rightarrow (5)^{-1/2} \left[1 - \frac{2}{5} x + \frac{6}{25} x^2 - \frac{4}{25} x^3 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[1 - \frac{2}{5} x + \frac{6}{25} x^2 - \frac{4}{25} x^3 \right]$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित प्रसारों में वांछित पद ज्ञात कीजिए

(i) $(1 - 3x)^{-1/3}$ का चौथा पद

हल- $(1 - x)^{-n}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r$$

चौथा पद ज्ञात करने के लिए $r = 3$ रखने पर

$$T_{3+1} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \left(\frac{1}{3} + 2 \right)}{3!} (3x)^3$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{7}{3}}{6} (3x)^3$$

$$= \frac{4 \times 7}{6} x^3$$

$$= \frac{14}{3} x^3$$

(ii) $(1 + x)^{5/2}$ का सातवाँ पद

हल- $(1 + x)^n$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} x^r$$

सातवाँ पद ज्ञात करने के लिए $r = 6$ रखने पर

$$T_{6+1} = \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)\left(\frac{5}{2}-4\right)\left(\frac{5}{2}-5\right)}{6!} x^6$$

$$T_7 = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} x^6$$

$$\begin{aligned} T_7 &= -\frac{5 \times 3 \times 5 \times 3}{2^6 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} x^6 \\ &= \frac{-5}{1024} x^6 \end{aligned}$$

(iii) $(1 + 2x)^{-1/2}$ का आठवाँ पद

हल- $(1 + x)^{-n}$ का व्यापक पद

$$T_{r+1} = (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r + \dots$$

आठवाँ पद ज्ञात करने के लिए $r = 7$ लेने पर

$$\begin{aligned} T_{7+1} &= (-1)^7 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{13}{2}\right)}{7!} (2x)^7 \\ &= -\frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13}{2^7 \cdot 7!} 2^7 x^7 \end{aligned}$$

$$= -\frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} x^7$$

$$= -\frac{429}{16} x^7$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित प्रसारों का व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

(i) $(a^3 - x^3)^{2/3}$

हल- $(a^3 - x^3)^{2/3}$

$$\Rightarrow (a^3)^{2/3} \left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow a^2 \left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)^{2/3}$$

हम जानते हैं—

$$(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{(-1)^r n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r} x^r + \dots$$

$$\therefore T_{r+1} = (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r} x^r$$

$$T_{r+1} = a^2 \left[\frac{(-1)^r \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3} - 2\right) \dots \left(\frac{2}{3} - r + 1\right) \left(\frac{x^3}{a^3}\right)^r}{r} \right]$$

$$= a^2 \left[-\frac{2.1.4\dots(3r-5)}{3^r r} \cdot \frac{x^{3r}}{a^{3r}} \right]$$

$$= -\frac{2.1.4\dots(3r-5)}{3^r r} \cdot \frac{x^{3r}}{a^{3r-2}}$$

(ii) $(1 - 2x)^{-3/2}$

हल- $(1 - 2x)^{-3/2}$

हम जानते हैं

$(1 - x)^{-n}$ का व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r$$

$$\therefore T_{r+1} = \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\dots\left(\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!} (2x)^r$$

$$= \frac{3.5.7\dots(2r+1)}{2^r r!} 2^r \cdot x^r$$

$$= \frac{3.5.7\dots(2r+1)}{r!} x^r$$

(iii) $(1 - x)^{p/q}$

हल- $(1 - x)^{p/q}$

हम जानते हैं $(1 - x)^{-n}$ का व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}+1\right)\left(\frac{p}{q}+2\right)\dots\left(\frac{p}{q}+r-1\right)}{r!} x^r$$

$$= \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+(r-1)q)}{q^r r!} x^r$$

$$T_{r+1} = \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+(r-1)q)}{r!} \left(\frac{x}{q}\right)^r$$

प्रश्न 4. यदि $x < 3$ हो, तो $(3 - x)^{-8}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है- $x < 3$

$$(3 - x)^{-8} = (3)^{-8} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-8}$$

$$= \frac{1}{3^8} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-8}$$

$(1 - x)^{-n}$ के विस्तार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r$$

इसलिए $\frac{1}{3^8} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-8}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक निकालने पर

$$T_{5+1} = \frac{1}{3^8} \left[\frac{8(8+1)(8+2)(8+3)(8+4)}{5!} \left(\frac{x}{3}\right)^5 \right]$$

अतः x^5 का गुणांक

$$= \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{3^8 \times 5! \times 3^5}$$

$$= \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{3^8 \times 5! \times 3^5}$$

$$= \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{3^{11} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3^2}$$

$$= \frac{88}{(3)^{11}}$$

प्रश्न 5. $(a + 2bx^2)^{-3}$ के प्रसार में x^6 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल-

$$(a + 2bx^2)^{-3} = a^{-3} \left(1 + \frac{2b}{a} x^2\right)^{-3}$$

माना x^6 , T_{r+1} वें पद में आता है।

$$T_{r+1} = \frac{a^{-3}(-3)(-3-1)(-3-2)\dots(-3-r+1)}{r!}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\frac{2b}{a} x^2 \right)^r \\
 &= \frac{(-1)^r 3.4.5 \dots (r+2).2^r b^r}{a^3 \cdot r! a^r} x^{2r} \\
 &= \frac{(-1)^r 3.4.5 \dots (r+2).2^r b^r}{a^{3+r} \cdot r!} x^{2r} \\
 2r = 6 &\Rightarrow r = 3 \\
 &= \frac{(-1)^3 3.4.5 \dots 5.2^3 b^3 x^6}{a^6 \cdot 5!} \\
 \text{अतः } x^6 \text{ का गुणांक} &= -4b^3 a^{-6}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 6.

$\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$ के प्रसार में x^{10} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3} \\
 & (1+3x^2)(1-x^2)^{-3} \\
 & (1+3x^2)(1+3x^2+6(x^2)^2+10(x^2)^3+15(x^2)^4+21(x^2)^5+\dots) \\
 & (1+3x^2)(1+3x^2+6x^4+10x^6+15x^8+21x^{10}+\dots)
 \end{aligned}$$

x^{10} के गुणांक का मान निकालने पर,

$$21 + 3 \times 15 = 21 + 45 = 66$$

प्रश्न 7. $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots)^n$ के विस्तार में x^r का गुणांक ज्ञात कीजिए तथा यदि $x = \frac{1}{2}$ और $n = 1$ हो, तो व्यंजक का मान लिखिए।

हल- माना $S = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$

$$xS = x - 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

दोनों को जोड़ने पर

$$S(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow S(1+x) = \frac{1}{1-(-x)} \quad \text{सूत्र } S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \text{ से}$$

$$\Rightarrow S(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{या, } S = \frac{1}{(1+x) \times (1+x)} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

$$\text{अतः } (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \infty)^n = (1+x)^{-2n}$$

$$T_{r+1} = \frac{(-2n)(-2n-1)(-2n-2)\dots(-2n-r+1)}{r!} x^r$$

$$T_{r+1} = (-1)^r \frac{2n(2n+1)(2n+2)\dots(2n+r-1)}{r!} x^r$$

अतः x^r का गुणांक

$$= (-1)^r \frac{2n(2n+1)(2n+2)\dots(2n+r-1)}{r!} x^r$$

पुनः $(1+x)^{-2n}$

$$x = \frac{1}{2} \text{ व } n = 1 \text{ रखने पर}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \text{ या } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

हल- L.H.S.

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2$$

$$= [(1-x)^{-1}]^2 \because (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty$$

$$= (1-x)^{-2}$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots \infty$$

= R.H.S.

L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty)(1 + 3x + 6x^2 + \dots \infty) = (1 + 2x + 3x^2 + \dots \infty)^2$

हल- L.H.S.

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty)(1 + 3x + 6x^2 + \dots \infty) = (1 - x)^{-1} \times (1 - x)^{-3}$$

प्रसार से हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं

$$= (1 - x)^{-4} = ((1 - x)^{-2})^2$$

मान रखने पर

$$= (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \infty)^2 = \text{R.H.S.}$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 10. यदि $x = 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots$ है, तो y को x की आरोही घातों की श्रेणी के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल- दिया गया है

$$x = 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$(1 + x) = 1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots$$

$$(1 + x) = (1 - y)^{-2}$$

$$\text{या } (1 - y) = (1 + x)^{-1/2}$$

$$\text{या } y = 1 - (1 + x)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2}x^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{6}x^3 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow y = 1 - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}{6}x^3 - \dots$$

$$\text{या } y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \dots$$

Ex 7.5

प्रश्न 1. यदि x की तुलना में y बहुत कम हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{(x-y)^n}{(x+y)^n} = 1 - \frac{2ny}{x}$$

जहाँ y^2 एवं उच्च घात उपेक्षणीय है।

हल-

$$\text{L.H.S.} = \frac{(x-y)^n}{(x+y)^n} = \frac{x^n \left(1 - \frac{y}{x}\right)^n}{x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{y}{x}\right)^n}{\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n} = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{-n}$$

$$= \left(1 - n \frac{y}{x}\right) \left(1 - n \frac{y}{x}\right)$$

यहाँ पर y^2 एवं उच्च घात की उपेक्षणीय है।

$$= \left(1 - n \frac{y}{x}\right)^2 = 1 - 2n \frac{y}{x} + n^2 \frac{y^2}{x^2}$$

पुनः y^2 एवं उच्च घात की उपेक्षणीय करने पर

$$= 1 - 2n \frac{y}{x}$$

= R.H.S.

प्रश्न 2. यदि x इतना छोटा है कि x के वर्ग एवं अन्य उच्च घात उपेक्षणीय है, तो निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए-

$$(i) \frac{(9+2x)^{1/2}(3+4x)}{(1+x)^{1/5}} \quad (ii) \frac{\sqrt{1-2x} + (1+3x)^{4/3}}{3+x+\sqrt{4-x}}$$

$$(iii) \frac{\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4} \sqrt{16-3x}}{(8+x)^{2/3}}$$

हल-

$$(i) \frac{(9+2x)^{1/2}(3+4x)}{(1+x)^{1/5}} \\ = 9^{1/2} \left(1+\frac{2x}{9}\right)^{1/2} (3+4x)(1+x)^{-1/5}$$

x^2 व अन्य उच्च घातों को छोड़ने पर

$$= 3 \left(1+\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{9}\right) (3+4x) \left(1-\frac{1}{5}x\right) \\ = 3 \left(1+\frac{1}{9}x\right) (3+4x) \left(1-\frac{1}{5}x\right) \\ = 3 \left[3+4x+\frac{3}{9}x\right] \left[1-\frac{1}{5}x\right] \\ = 3 \left[3+4x+\frac{1}{3}x\right] \left[1-\frac{1}{5}x\right] \\ = 3 \left[3+\frac{13}{3}x\right] \left[1-\frac{1}{5}x\right]$$

पुनः x^2 व अन्य उच्च घातों को छोड़ने पर

$$\begin{aligned}
&= 3 \left[3 - \frac{3}{5}x + \frac{13}{3}x \right] \\
&= 3 \left[3 + \frac{56}{15}x \right] = 9 + \frac{56}{5}x \\
\text{(ii)} & \frac{\sqrt{1-2x} + (1+3x)^{4/3}}{3+x+\sqrt{4-x}} \\
& \frac{\sqrt{1-2x} + (1+3x)^{4/3}}{3+x+\sqrt{(4-x)}} \\
&= \frac{(1-2x)^{1/2} + (1+3x)^{4/3}}{(3+x) + (4-x)^{1/2}} = \frac{(1-2x)^{1/2} + (1+3x)^{4/3}}{(3+x) + 2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{1/2}} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 2x\right) + \left(1 + \frac{4}{3} \cdot 3x\right)}{(3+x) + 2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4}\right)}
\end{aligned}$$

चूँकि दिया गया है कि x के वर्ग एवं अन्य उच्च घात उपेक्षणीय है। अतः उपरोक्त इस प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-x)(1+4x)}{(3+x) + \left(2 - \frac{x}{4}\right)} = \frac{(2+3x)}{\left(5 + \frac{3}{4}x\right)} \\
&= (2+3x) \left(5 + \frac{3}{4}x\right)^{-1} \\
&= (2+3x) \cdot (5)^{-1} \left(1 + \frac{3}{5 \times 4}x\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{5} (2+3x) \left(1 - \frac{3}{20}x\right)
\end{aligned}$$

यहाँ पर x के वर्ग एवं अन्य उच्च घात उपेक्षणीय है।

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left(2 - \frac{6}{20}x + 3x \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(2 - \frac{3}{10}x + 3x \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(2 + \frac{27}{10}x \right) = \frac{2}{5} + \frac{27}{50}x
\end{aligned}$$

$$(iii) \frac{\left(1 + \frac{3}{4}x\right)^{-4} \sqrt{16-3x}}{(8+x)^{2/3}}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{3}{4}x\right)^{-4} \sqrt{16-3x}}{(8+x)^{2/3}}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{3}{4}x\right)^4 \cdot (16)^{1/2} \left(1 - \frac{3}{16}x\right)^{1/2}}{(8)^{2/3} \left(1 + \frac{x}{8}\right)^{2/3}}$$

चूँकि दिया गया है कि x के वर्ग एवं अन्य उच्च घात उपेक्षणीय है इसलिये इसे इस प्रकार से लिख सकते हैं

$$= \frac{\left(1 - 4 \cdot \frac{3}{4}x\right) \cdot 4 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16}x\right)}{(2^3)^{2/3} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{8}\right)}$$

$$= \frac{4(1-3x) \left(1 - \frac{3}{32}x\right)}{4 \left(1 + \frac{1}{12}x\right)}$$

$$= \frac{(1-3x) \left(1 - \frac{3}{32}x\right)}{\left(1 + \frac{1}{12}x\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \frac{3}{32}x - 3x}{\left(1 + \frac{1}{12}x\right)} = \frac{\left(1 - \frac{99}{32}x\right)}{\left(1 + \frac{1}{12}x\right)} \\
&= \left(1 - \frac{99}{32}x\right) \left(1 + \frac{1}{12}x\right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{99}{32}x\right) \left(1 - \frac{1}{12}x\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{12}x - \frac{99}{32}x\right)
\end{aligned}$$

x के वर्ग एवं अन्य उच्च घात उपेक्षणीय है।

$$= \left(1 - \frac{1}{12}x - \frac{99}{32}x\right)$$

x के वर्ग एवं अन्य उच्च घात उपेक्षणीय है।

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \left(\frac{1}{12}x + \frac{99}{32}x\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{305}{96}x\right)
\end{aligned}$$

प्रश्न 3. मान ज्ञात कीजिए

- (i) $\sqrt{30}$ का दशमलव के 4 अंकों तक
- (ii) $(1.03)^{1/3}$ का दशमलव के 4 अंकों तक
- (iii) $\frac{1}{(8.16)^{1/3}}$ का दशमलव के 4 अंकों तक
- (iv) 126 का घनमूल, दशमलव के 5 अंकों तक

हल- (i) $\sqrt{30} = (30)^{1/2}$

$$= (25 + 5)^{1/2} = (25)^{1/2} \left(1 + \frac{5}{25}\right)^{1/2}$$

$$= 5 \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{1/2}$$

$$\text{सूत्र } (1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^3 + \dots + x^n \text{ से}$$

$$= 5 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= 5 \left(1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{125} \dots \right)$$

$$= 5 \left(1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{4000} - \dots \right)$$

$$= 5[1 + 0.1 - 0.005 + 0.00025]$$

$$= 5[1.10025 - 0.005]$$

$$= 5 \times 1.09525$$

$$= 5.47625$$

$$(ii) (1.03)^{1/3} = (1 + 0.03)^{1/3}$$

$$\text{सूत्र } (1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^3 + \dots + x^n \text{ से}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(0.03) + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}(0.03)^2 + \dots$$

$$= 1 + 0.1 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times (0.0009)$$

$$= 1 + 0.1 - 0.0001$$

$$= 1.0099$$

$$(iii) \frac{1}{(8.16)^{1/3}}$$

$$= (8 + 0.16)^{-1/3} = (8)^{-1/3} \left(1 + \frac{0.16}{8}\right)^{-1/3}$$

$$= (2^3)^{-1/3} \left(1 + \frac{1}{50}\right)^{-1/3} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{50}\right)^{-1/3}$$

$$\text{सूत्र } (1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2} x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$x^3 + \dots + (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r}$$

$x^r + \dots$ से

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{50} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{2} \left(\frac{1}{50}\right)^2 - \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+2)}{3} \left(\frac{1}{50}\right)^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{150} + \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}}{2} \left(\frac{1}{50}\right)^2 - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{150} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{2500} - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{150} + \frac{2}{22500} - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} [1 - 0.00666 + 0.0000888\dots]$$

$$= \frac{1}{2} [0.9934]$$

$$= 0.4967$$

(iv) 126 को घनमूल

$$(126)^{1/3} = (125 + 1)^{1/3}$$

$$\begin{aligned}
&= (5^3 + 1)^{1/3} = (5^3)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{5^3}\right)^{1/3} \\
&= 5 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5^3}\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2} \left(\frac{1}{5^3}\right)^2 + \dots \right] \\
&= 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{-2}{3}\right)}{2} \cdot \frac{1}{5^6} + \dots \right] \\
&= 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^6} + \dots \right] \\
&= 5 + \frac{1}{3 \times 5^2} - \frac{1}{9 \times 5^5} + \dots \\
&= 5 + 0.01333 - 0.000035 + \dots \\
&= 5.01333 - 0.000035 = 5.013295 \\
&\text{अतः दशमलव के 5 अंकों तक इसका मान होगा} \\
&= 5.01330
\end{aligned}$$

प्रश्न 4. यदि x लगभग 1 के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए

$$(i) \frac{mx^m - nx^n}{m-n} = x^{m+n} \quad (ii) \frac{ax^b - bx^a}{x^b - x^a} = \frac{1}{1-x}$$

हल-

$$(i) \frac{mx^m - nx^n}{m-n} = x^{m+n}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{mx^m - nx^n}{m-n}$$

माना $x = 1 + h$, जहाँ h इतना छोटा है कि इसके वर्ग तथा अन्य घातों को उपेक्षणीय मानते हैं।

$$\begin{aligned}
&= \frac{m(1+h)^m - n(1+h)^n}{m-n} = \frac{m(1+mh) - n(1+nh)}{m-n} \\
&= \frac{m + m^2h - n - n^2h}{m-n} = \frac{(m-n) + h(m^2 - n^2)}{m-n} \\
&= \frac{(m-n) \left[1 + \frac{h(m^2 - n^2)}{m-n} \right]}{m-n} = 1 + h(m+n) \\
&= (1+h)^{m+n} = x^{m+n} = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

$$(ii) \frac{ax^b - bx^a}{x^b - x^a} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{L.H.S.} \frac{ax^b - bx^a}{x^b - x^a}$$

माना $x = 1 + h$, जहाँ h इतना छोटा है कि इसके वर्ग तथा अन्य घातों को उपेक्षणीय मानते हैं।

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(1+h)^b - b(1+h)^a}{(1+h)^b - (1+h)^a} \\
&= \frac{a(1+bh) - b(1+ah)}{(1+bh) - (1+ah)} \\
&= \frac{a + abh - b - abh}{1 + bh - 1 - ah} = \frac{a-b}{h(b-a)} \\
&= -\frac{1}{h} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

प्रश्न 5. यदि p और q लगभग बराबर हैं, तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{q+2p}{p+2q} = \left(\frac{p}{q} \right)^{1/3}$$

हल- चूँकि p और q लगभग बराबर हैं। अतः माना कि $p = q + h$, जहाँ h बहुत छोटी राशि है। जिसके वर्ग तथा उच्च घातों को नगण्य मानकर छोड़ा जा सकता है।

$$\begin{aligned}
\text{अतः L.H.S.} &= \frac{q + 2(q + h)}{q + h + 2q} \\
&= \frac{q + 2q + 2h}{q + h + 2q} = \frac{3q + 2h}{3q + h} \\
&= \frac{3q \left(1 + \frac{2h}{3q}\right)}{3q \left(1 + \frac{h}{3q}\right)} \\
&= \left(1 + \frac{2h}{3q}\right) \left(1 + \frac{h}{3q}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{2h}{3q}\right) \left(1 - \frac{h}{3q}\right) \\
&= 1 - \frac{h}{3q} + \frac{2h}{3q}
\end{aligned}$$

[h की उच्च घातों को नगण्य मानकर उपेक्षा करते हुए]

$$= 1 + \frac{h}{3q}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S.} &= \left(\frac{p}{q}\right)^{1/3} = \left(\frac{q + h}{q}\right)^{1/3} = \left(1 + \frac{h}{q}\right)^{1/3} \\
&= 1 + \frac{h}{3q} = \text{L.H.S.}
\end{aligned}$$

[h की उच्च घातों को नगण्य मानकर उपेक्षा करते हुए]

Ex 7.6

निम्नलिखित अनन्त श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1.

$$1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2.5}{3.6} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots$$

हल- श्रेणी

$$1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2.5}{3.6} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$nx = \frac{1}{3} \quad \dots(1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{2.5}{3.6} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$= n(n-1)x^2 = \frac{2 \times 5 \times 2}{3 \times 6 \times 2^2} = \frac{5}{18} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{5}{18}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)}{n} = \frac{5}{18} \times \frac{9}{1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{या } 2n - 2 = 5n \therefore n = \frac{-2}{3}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$\left(\frac{-2}{3}\right)x = \frac{1}{3} \therefore x = \frac{-1}{2}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3} \\ &= (2)^{2/3} = (2^2)^{1/3} = (4)^{1/3} \end{aligned}$$

प्रश्न 2.

$$1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1.4}{3.6} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots$$

हल- दी गयी श्रेणी

$$1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1.4}{3.6} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$nx = \frac{1}{12} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1.4}{3.6} \cdot \frac{1}{4^2}$$

या $\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1}{3 \times 6 \times 4}$

या $n(n-1)x^2 = \frac{2}{3 \times 6 \times 4} = \frac{1}{36}$

$$n(n-1)x^2 = \frac{1}{36} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{1}{36}}{\left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{144}{36}$$

या $\frac{(n-1)}{n} = 4$

या $n - 1 = 4n \Rightarrow 3n = -1 \therefore n = -\frac{1}{3}$

समी. (1) में मान रखने पर

$$nx = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{12}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1 + x)^n$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1/3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1/3}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$$

प्रश्न 3.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.4}{4.8} + \frac{1.4.7}{4.8.12} + \dots$$

हल- श्रेणी

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.4}{4.8} + \frac{1.4.7}{4.8.12} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{4} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1.4}{4.8}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1 \times 4 \times 2}{4 \times 8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1}{4} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\text{या } \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

$$\text{या } n-1 = 4n$$

$$\text{या } 3n = -1 \therefore n = -\frac{1}{3}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$\left(-\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-1/3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/3} \\ &= (4)^{1/3} \end{aligned}$$

प्रश्न 4.

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1.4}{10.20} + \frac{1.4.7}{10.20.30} + \dots$$

हल- श्रेणी

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1.4}{10.20} + \frac{1.4.7}{10.20.30} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{10} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1.4}{10.20}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1 \times 4 \times 2}{10 \times 20}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1}{25} \quad \dots(2)$$

समीकरण (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{1}{25}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$\text{या } \frac{n-1}{n} = \frac{1}{25} \times \frac{100}{1} = 4$$

$$\text{या } n-1 = 4n \therefore n = -\frac{1}{3}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$-\frac{1}{3}x = \frac{1}{10}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{10}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{-1/3} \left(\frac{7}{10}\right)^{-1/3} \\ &= \left(\frac{10}{7}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

प्रश्न 5.

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

हल- श्रेणी

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर

$$nx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$nx = -\frac{1}{4} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2} x^2 = \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1 \times 3 \times 2}{2 \times 4 \times 4} = \frac{3}{16} \quad \dots(2)$$

समीकरण (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2 x^2} = \frac{\frac{3}{16}}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{3}{16} \times \frac{16}{1} = 3$$

$$\text{या } n-1 = 3n$$

$$\therefore n = -\frac{1}{2}$$

समी. (1) में n का मान रखने पर

$$nx = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)x = -\frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

प्रश्न 6.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.2^4} + \frac{1.3.5}{3.2^6} + \dots$$

हल- R.H.S.

श्रेणी

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.2^4} + \frac{1.3.5}{3.2^6} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{2^2}$$

$$\text{या } nx = \frac{1}{4} \quad \dots(1)$$

$$\text{या } \frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1.3}{2.2^4}$$

$$\text{या } \frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{3}{2 \times 16}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{3}{16} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{3}{16}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\text{या } \frac{(n-1)}{n} = \frac{3}{16} \times \frac{16}{1} = 3$$

$$\text{या } n-1 = 3n \therefore n = -\frac{1}{2}$$

n का मान समी. (1) में रखने पर

$$\left(-\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{4} \therefore x = -\frac{1}{2}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} \\ &= (2)^{1/2} = \sqrt{2} = \text{L.H.S.} \end{aligned}$$

प्रश्न 7.

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{1}{10^6} + \dots \right]$$

हल-

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{1}{10^6} + \dots \right]$$

$$\text{या R.H.S. } \frac{5\sqrt{2}}{7} = 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{1}{10^6} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$x^3 + \dots$$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$nx = \frac{1}{100} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{1}{10^4}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1 \times 3 \times 2}{2 \times 10^4} = \frac{3}{10^4} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग करने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{3}{10^4}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2}$$

$$\text{या } \frac{(n-1)}{n} = \frac{3}{10^4} \times 100 \times 100 = \frac{3 \times 10^4}{10^4}$$

$$\text{या } \frac{n-1}{n} = 3 \Rightarrow n-1 = 3n$$

$$\therefore n = -\frac{1}{2}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$\left(-\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{100}$$

$$\therefore x = -\frac{2}{100} = -\frac{1}{50}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$= \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2} = \left(\frac{49}{50}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{50}{49}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{49}} = \frac{5\sqrt{2}}{7} = \text{L.H.S.}$$

प्रश्न 8.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1.4}{1.2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1.4.7}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3^6} + \dots$$

हल- R.H.S.

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1.4}{1.2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1.4.7}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3^6} + \dots$$

मानक श्रेणी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots$$

श्रेणी के पदों से तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2} x^2 = \frac{1.4}{1.2} \cdot \frac{1}{3^4}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1 \times 4 \times 2}{1 \times 2 \times 81} = \frac{4}{81} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2 x^2} = \frac{\frac{4}{81}}{\left(\frac{1}{9}\right)^2}$$

$$\text{या } \frac{n-1}{n} = \frac{4}{81} \times \frac{81}{1} = 4$$

$$\text{या } n-1 = 4n \Rightarrow 3n = -1$$

$$\therefore n = -\frac{1}{3}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$\left(-\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{9}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{अतः श्रेणी का योग} &= (1+x)^n = \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1/3} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = \text{L.H.S.}\end{aligned}$$

अतः **R.H.S. = L.H.S.**

प्रश्न 9. यदि

$$Y = \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \dots \infty,$$

तब सिद्ध कीजिए $y^2 + 2y - 2 = 0$

हल- दिया है

$$Y = \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \dots \infty,$$

दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$1 + Y = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \dots \infty$$

$$\text{माना } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

श्रेणी के पदों से तुलना करने पर

$$nx = \frac{1}{3} \quad \dots(1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{1.3}{3.6}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1 \times 3 \times 2}{3 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{या } n(n-1)x^2 = \frac{1}{3} \quad \dots(2)$$

समी. (2) में समी. (1) का वर्ग करके भाग देने पर

$$\frac{n(n-1)x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)}{n} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{1} = 3$$

$$\Rightarrow n-1 = 3n$$

$$\text{या } 2n = -1 \therefore n = -\frac{1}{2}$$

समी. (1) में मान रखने पर

$$\left(-\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{3} \therefore x = -\frac{2}{3}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = (3)^{1/2}$$

$$\therefore 1 + Y = (1+x)^n$$

$$\text{इसलिए } 1 + Y = (3)^{1/2} = \sqrt{3}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(1+Y)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2Y + Y^2 = 3$$

$$\therefore Y^2 + 2Y - 2 = 0$$

इतिसिद्धम्

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए

$$(1+x)^n = 2^n \left[1 - \frac{n(1-x)}{(1+x)} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 - \dots \right]$$

हल- R.H.S.

$$1 - \frac{n(1-x)}{(1+x)} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 - \dots$$

माना $\frac{1-x}{1+x} = z$ तब हमें प्राप्त होता है।

$$1 - nz + \frac{n(n+1)}{2} z^2 - \dots$$

हम जानते हैं—

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2} x^2 - \dots + \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!} x^r + \dots$$

इस आधार पर हम उपरोक्त को लिख सकते हैं

$$(1+z)^{-n}$$

z का मान रखने पर

$$\begin{aligned} (1+z)^{-n} &= \left(1 + \frac{1-x}{1+x} \right)^{-n} \\ &= \left(\frac{1+x+1-x}{1+x} \right)^{-n} \\ &= \left(\frac{2}{1+x} \right)^{-n} = \left(\frac{1+x}{2} \right)^n = \frac{(1+x)^n}{2^n} \end{aligned}$$

इसलिए

$$\begin{aligned} &2^n \left[1 - \frac{n(1-x)}{(1+x)} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 - \dots \right] \\ &= 2^n \left[\frac{(1+x)^n}{2^n} \right] = (1+x)^n = \text{L.H.S.} \end{aligned}$$

अतः L.H.S. = R.H.S.

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. $\left(\frac{a}{x} + bx\right)^{12}$ के विस्तार में कुल पदों की संख्या है

- (A) 11
- (B) 13
- (C) 10
- (D) 14

हल : (B)

प्रश्न 2. $\left(\frac{1}{2} + a\right)^8$ के विस्तार में 7 वाँ पद है

- (A) ${}^8C_7 \left(\frac{1}{2}\right) (a)^7$
- (B) ${}^8C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot a$
- (C) ${}^8C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^2 (a)^6$
- (D) ${}^8C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 (a)^2$

हल : (C)

प्रश्न 3. $(a - x)^8$ के प्रसार में मध्य पद है

- (A) $56a^3x^5$
- (B) $-56a^3x^5$
- (C) $70a^4x^4$
- (D) $-70a^4x^4$

हल : (C)

प्रश्न 4. $\left(2x + \frac{1}{3x^2}\right)^9$ के प्रसार में अचर पद है

- (A) पाँचवाँ
- (B) चौथा
- (C) छठवाँ
- (D) सातवाँ

हल : (B)

प्रश्न 5. $(x + a)^n$ के प्रसार में व्यापक पद है

- (A) ${}^nC_r x^{n-r} \cdot a^r$
- (B) ${}^nC_r x^r \cdot a^r$
- (C) ${}^nC_{n-r} x^{n-r} \cdot a^r$
- (D) ${}^nC_{n-r} x^r \cdot a^{n-r}$

हल : (A)

प्रश्न 6. $(2x^2 - \frac{1}{x})^{12}$ के विस्तार में x रहित पद का मान है

- (A) 264
- (B) -264
- (C) 7920
- (D) -7920

हल : (C)

प्रश्न 7. $(x^4 - \frac{1}{x^3})^{15}$ के प्रसार में x^{-17} का गुणांक है

- (A) 1365
- (B) -1365
- (C) 3003
- (D) -3003

हल : (B)

प्रश्न 8. यदि $(1 + x)^{18}$ के प्रसार में $(2r + 4)$ वें तथा $(r - 2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हों, तब r का मान है

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8

हल : (B)

प्रश्न 9. यदि $(a + b)^n$ तथा $(a + b)^{n+3}$ के प्रसार में क्रमशः दूसरे एवं तीसरे एवं चौथे पदों का अनुपात बराबर हो, तो n का मान है

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 3
- (D) 4

हल : (A)

प्रश्न 10. यदि $(1 + x)^{2n}$ के विस्तार में $3r$ वें तथा $(r + 2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हो, तो

- (A) $n = 2r$
- (B) $n = 2r - 1$
- (C) $n = 2r + 1$
- (D) $n = r + 1$

हल : (A)

प्रश्न 11. $(2x^2 - \frac{1}{x})^{10}$ के विस्तार में x रहित पद का मान ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि $(r + 1)$ वाँ पद x रहित है।

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= (-1)^r {}^{10}C_r (2)^{10-r} \cdot x^{20-2r} \cdot x^{-2r} \\ &= (-1)^r {}^{10}C_r (2)^{10-r} \cdot x^{20-4r} \end{aligned}$$

x रहित पद के लिए $20 - 4r = 0 \therefore r = 5$

$$T_6 = (-1)^5 {}^{10}C_5 (2)^{10-5} = -{}^{10}C_5 \times (2)^5 = -8064$$

प्रश्न 12. सरलीकरण के पश्चात् $(x + a)^{200} + (x - a)^{200}$ के प्रसार में पदों की संख्या लिखिये।

हल- हम जानते हैं

$$(x + a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots$$

$$(x + a)^n = x^n - {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 - \dots$$

$(x + a)^{200}$ के प्रसार में कुल पदों की संख्या 201 होगी जिसमें 101 पद विषम होंगे और 100 पद सम होंगे। माना विषम पद P और सम पद Q हैं।

$$(x + a)^{200} = P + Q$$

इसी तरह से

$$(x - a)^{200} = P - Q$$

जोड़ने पर

$$(x + a)^{200} + (x - a)^{200} = 2P = 2 \text{ (सम पदों की संख्या)} \\ \text{अर्थात् पदों की संख्या} = 101 \text{ होगी।}$$

प्रश्न 13. यदि $(1 + x)^n$ के प्रसार में $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ विभिन्न पदों के गुणांक हों, तब $C_0 + C_2 + C_4 + \dots$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- हम जानते हैं

$$(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n \\ \text{प्रसार में } x = 1 \text{ रखने पर।}$$

$$(1 + 1)^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \\ \Rightarrow 2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \dots (1)$$

अब प्रसार में $x = -1$ रखने पर

$$(1 - 1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots + (-1)^n C_n \\ 0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots + (-1)^n C_n \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) का योग करने पर

$$2(C_0 + C_2 + C_4 + \dots) = 2^n \\ \Rightarrow C_0 + C_2 + C_4 + \dots = 2^{n-1}$$

प्रश्न 14. ${}^{30}C_1 + {}^{30}C_2 + {}^{30}C_3 + \dots + {}^{30}C_{30}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- चूँकि ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$

यहाँ पर $n = 30$ रखने पर

$${}^{30}C_0 + {}^{30}C_1 + {}^{30}C_2 + \dots + {}^{30}C_{30} = 2^{30} \\ \Rightarrow 1 + {}^{30}C_1 + {}^{30}C_2 + {}^{30}C_3 + \dots + {}^{30}C_{30} = 2^{30} \because {}^{30}C_0 = 1 \\ \therefore {}^{30}C_1 + {}^{30}C_2 + {}^{30}C_3 + \dots + {}^{30}C_{30} = 2^{30} - 1$$

प्रश्न 15. $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{10}$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल-

$$\text{मध्य पद} = \frac{10}{2} + 1 = \frac{10+2}{2} = 6 \text{ वाँ पद}$$

हम जानते हैं

$$\begin{aligned}
 T_{r+1} &= {}^nC_r x^{n-r} a^r \\
 \therefore T_{5+1} &= {}^{10}C_5 \left(\frac{a}{x}\right)^{10-5} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^5 \\
 &= {}^{10}C_5 \left(\frac{a}{x}\right)^5 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^5 \\
 &= {}^{10}C_5 \left(\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{a}\right)^5 \\
 &= {}^{10}C_5 \cdot (1)^5 = {}^{10}C_5 \\
 &= \frac{10!}{10-5 \times 5} = \frac{10!}{5 \times 5} \\
 &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5}
 \end{aligned}$$

$$= 252$$

प्रश्न 16. $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ के प्रसार के गुणनफल में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- द्विपद प्रमेय के आधार पर

$$\begin{aligned}
 (1+2x)^6 &= {}^6C_0 + {}^6C_1 (2x)^1 + {}^6C_2 (2x)^2 + {}^6C_3 (2x)^3 + {}^6C_4 (2x)^4 + {}^6C_5 (2x)^5 + {}^6C_6 (2x)^6 \\
 &= 1 + 6 (2x) + 15 (4x^2) + 20 (8x^3) + 15 (16x^4) + 6 (32) (5)^5 + 64x^6 \\
 &= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6
 \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned}
 (1 - x) &= {}^7C_0 - {}^7C_1 x^1 + {}^7C_2 x^2 - {}^7C_3 x^3 + {}^7C_4 x^4 - {}^7C_5 x^5 + {}^7C_6 x^6 - {}^7C_7 x^7 \\
 &= 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7
 \end{aligned}$$

अतः प्रश्नानुसार $(1 + 2x)^6 \cdot (1 - x)^7$

$$= (1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6) \cdot (1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7)$$

इनके गुणनफल में से x^5 वाले पदों को लेने पर

$$1. (-21x^5) + (12x) (35x^4) + (60x^2) (-35x^3) + (160x^3) (21x^2) + (240x^4) (-7x) + (192x^5) \cdot 1$$

$$\text{अतः } x^5 \text{ वाले पदों का गुणांक} = (-21) + (12) (35) + (60) (-35) + (160) (21) + (240) (-7) + 192$$

$$\begin{aligned}
&= -21 + 420 - 2100 + 3360 - 1680 + 192 \\
&= 3972 - 3801 \\
&= 171
\end{aligned}$$

प्रश्न 17. यदि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिये कि $2n^2 - 9n + 7 = 0$

हल- $(1 + x)^{2n} = 1 + {}^{2n}C_1x + {}^{2n}C_2x^2 + {}^{2n}C_3x^3 + \dots$

दूसरे पद का गुणांक $= {}^{2n}C_1$

तीसरे पद का गुणांक $= {}^{2n}C_2$

चौथे पद का गुणांक $= {}^{2n}C_3$

उपरोक्त पदों के गुणांक समान्तर श्रेणी में हैं।

$$\begin{aligned}
\text{इसलिए } {}^{2n}C_2 &= \frac{{}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_3}{2} \\
2 \cdot {}^{2n}C_2 &= {}^{2n}C_1 + {}^{2n}C_3 \\
\Rightarrow \frac{2 \cdot 2n(2n-1)}{2} &= 2n + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} \\
\Rightarrow \frac{2 \cdot 2n(2n-1)}{2} &= 2n + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \times 2} \\
\Rightarrow 2n(2n-1) &= 2n + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} \\
\Rightarrow (2n-1) &= 1 + \frac{(2n-1)(2n-2)}{6}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6(2n-1) = 6 + (2n-1)(2n-2)$$

$$\Rightarrow 6(2n-1) - (2n-1)(2n-2) = 6$$

$$\Rightarrow (2n-1)(6-2n+2) = 6$$

$$\Rightarrow (2n-1)(8-2n) = 6$$

$$\Rightarrow 2(2n-1)(4-n) = 6$$

$$\text{या } (2n-1)(4-n) = 3$$

$$\text{या } 8n - 2n^2 - 4 + n = 3$$

$$\text{या } 2n^2 - 9n + 7 = 0 \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 18. $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4$ $x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल-

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 &= \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x}\right]^4 \\&= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4 + {}^4C_1 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) + {}^4C_2 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \\&\quad \left(-\frac{2}{x}\right)^2 + {}^4C_3 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^3 + {}^4C_4 \left(-\frac{2}{x}\right)^4 \\&= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4 + 4 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3 \left(-\frac{2}{x}\right) + 6 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \left(-\frac{2}{x}\right)^2 \\&\quad + 4 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(-\frac{8}{x^3}\right) + \left(\frac{16}{x^4}\right) \\&= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4 - \frac{8}{x} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3 + \frac{24}{x^2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{32}{x^3} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \\&\quad + \frac{16}{x^4}\end{aligned}$$

अब

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^4, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

का प्रसार करने पर

$$\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 = \left(1 + 4 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x^2}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 = \left(1 + 4 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x^2}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16}\right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8}{x} \left(1 + 3 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} \right) \\
& + \frac{24}{x^2} \left[1 + x + \frac{x^2}{4} \right] - \frac{32}{x^3} \left[1 + \frac{x}{2} \right] + \frac{16}{x^4} \\
& = \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{16} \right) \\
& - \frac{8}{x} \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^3}{8} \right) + \frac{24}{x^2} \left(1 + x + \frac{x^2}{4} \right) \\
& - \frac{32}{x^3} \left(1 + \frac{x}{2} \right) + \frac{16}{x^4} \\
& = \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{16} \right) - \left(\frac{8}{x} + 12 + 6x + x^2 \right) \\
& + \left(\frac{24}{x^2} + \frac{24}{x} + 6 \right) - \left(\frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^2} \right) + \frac{16}{x^4} \\
& = \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \left(\frac{3}{2} - 1 \right) x^2 + (2 - 6) x + (1 - 12 + 6) \\
& + (-8 + 24) \frac{1}{x} + (24 - 16) \frac{1}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4} \\
& = \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - 5 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} \\
& + \frac{16}{x^4} \\
\text{अतः } & \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4} - 4x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \\
& \frac{x^4}{16} - 5
\end{aligned}$$