ज्यामिति
GEOMETRY

इकाई – 5

आओ ज्यामिति का इतिहास जानें.....

जब से मनुष्य ने अपने आस–पास की आकृतियों में विभेद करना प्रारंभ किया तभी से रेखागणित का उद्भव हुआ। तभी से बहुत सी वस्तुओं का नामकरण उनकी रेखागणितीय आकृतियों से बनी पहचान पर आधारित भी है। मनुष्य ने इन विविध आकृतियों को समझने व अलग–अलग ढंग से चित्रित करने के प्रयास में भिन्न–भिन्न प्रकार की रेखाओं व आकृतियों की रचना करना प्रारंभ किया।

इस प्रक्रिया में उन्होंने स्थानिक संबंधों का अध्ययन किया। आकृतियों की रचना, कोण की समझ विकसित की। भारत में ज्यामिति का उपयोग प्रमुख रूप से स्मारकों को बनाने व नक्षत्रों की स्थिति पता करने व उसका पूर्वानुमान लगाने आदि के लिए होता था। इसके लिए कई सूत्र बने हुए थे। शुरूआती ज्यामिति, अनुभवों व उदाहरणों से नियमों को प्राप्त करने के प्रयासों पर आधारित थी। ये नियम लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई, कोण, क्षेत्रफल, आयतन आदि की गणना करने में सरलता लाने के प्रयास में बने थे। इनका लक्ष्य रोजमर्रा की जरूरतों यथा जमीन के सर्वे, इमारतों, पुलों आदि के निर्माण तथा खगोलीय व अन्य तकनीकी उपयोग पूरा करना था। परंतु जैसा अक्सर होता है ज्यामिति करने का दायरा उसे आगे खोजने का भी था और धीरे–धीरे यह और व्यापक होती गई।

ज्यामिति याने भूमि मापन इसके उद्भव के कारणों को इंगित करता है। उस समय प्राप्त कई नियम आधुनिक गणित जैसे गहरे थे जिन्हें प्राप्त करना आज भी आसान नहीं है। यह ही औपचारिक ज्यामिति की शुरूआत थी। हड़प्पा सभ्यता के लोग मापन के साथ–साथ ज्यामितीय आकृतियों की रचना में प्रवीण थे। इसी तरह शुल्व सूत्र में भी त्रिभुजों, वर्गो, आयतों तथा अन्य जटिल ज्यामितीय आकृतियों की रचना एवं इन आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्रों का उल्लेख हैं। इन सब सूत्रों का भी व्यापक संदर्भों में उपयोग संभव है और त्रिभुजों, चतुर्भुजों आदि से संबंधित सूत्र हर प्रकार के त्रिभुजों, चतुर्भुजों पर उपयोग हो सकते हैं।

शुल्ब सूत्र ज्यामिति के कुछ उदाहरण हैं–

1. दो दिए गए वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल का वर्ग बनाना।
2. ऐसा वर्ग बनाना जिसका क्षेत्रफल दिए गए वर्ग से दोगुना हो।

दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल से दोगुने क्षेत्रफल वाले वर्ग की रचना करने के लिए वर्ग की भुजा ज्ञात करने हेतु अपस्तंभ तथा कात्यायन ने निम्नलिखित शुल्ब सूत्र दिए –

$$\text{नयी भुजा} = \text{पुरानी भुजा}\ (1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{3\times 4\times 34}) = 1.4142156\times \text{पुरानी भुजा}$$

यह मान $\sqrt{2}$ के वर्गमूल के मान से दशमलव के बाद के पांच स्थानों तक मिलता है।

इस तरह के सूत्रों व नियमों के कई और उदाहरण यूनानी, भारतीय (सिंधु घाटी व हड़प्पा) बेबिलोनियन, अरबी ज्यामिति में मिलते हैं।

ये जानकारियाँ अलग–अलग ग्रंथों से संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से ज्यामिति के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

सरल रेखा और कोण

[STRAIGHT LINE & ANGLE]

BJW9LH

09

हमारे इर्द–गिर्द बहुत–सी आकृतियाँ छिपी हुई हैं। नीचे दिए गए चित्र में दरवाजे के पल्ले, खिड़की की चौखट, किताब की ऊपरी सतह, छत आदि सभी आयताकार हैं।

चित्र–1

कुछ और चीज़ों की सतहें त्रिभुजाकार, पंचभुजाकार व अन्य आकार की भी होती हैं। आयताकार आकृतियों की सम्मुख भुजाएं बराबर व सभी कोण 90° के होते हैं। बाकी आकृतियों में भी कुछ रेखाखण्ड व उनके बीच के कोण आपस में बराबर हो सकते हैं।

चित्र में खिड़की के ग्रिल को देखें। इस ग्रिल के डिजाइन का चित्र बहुत से रेखाखण्ड दिखाता है। इसमें कई रेखाखण्ड एक–दूसरे को प्रतिच्छेद भी कर रहे हैं। इस ग्रिल में व घर में लगे अन्य ग्रिडनुमा ग्रिल में कई प्रतिच्छेद के बिंदु मिलते हैं। क्या ऐसे प्रतिच्छेदी बिंदुओं पर बनने वाले कोणों में आपस में कोई संबंध होता है? इस अध्याय में हम प्रतिच्छेदी बिंदुओं पर बने कोणों का अध्ययन करेंगे।

रेखाखण्ड और अंत बिंदु (Line Segment and End Points)

अपनी कापी पर एक रेखा खींचिए। इसे व्यक्त करने के लिए किन संकेतों का उपयोग होता है?

अब एक किरण खींचिए। इसके लिए कौन–से संकेत लेते हैं?

क्या रेखा में कोई अंत बिंदु हैं? और किरण में? आपस में चर्चा करें।

नीचे दिए गए चित्र को ध्यान से देखें:–

इसमें कितने अंत बिंदु हैं? यह चित्र न तो रेखा को निरूपित करता है और न ही किरण को। यह एक रेखाखण्ड है।

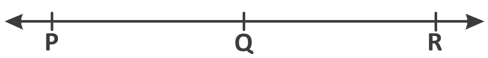
चित्र–2

यह एक रेखा पर भी चिह्नित किया जा सकता है।

एक रेखा पर कितने रेखाखण्ड हो सकते हैं?

आपस में चर्चा कीजिये।

रेखाखण्ड पहचानें



चित्र–3

1. इस रेखा में कितने बिंदु अंकित है?
2. इसमें कौन–कौन से रेखाखण्ड हैं व कितने रेखाखण्ड हैं?

उपर्युक्त तीनों बातें नीचे के चित्र 4, 5, 6 और 7 में भी देखें–

चित्र–4

चित्र–5

चित्र–6

चित्र–7

अंकित बिंदुओं की संख्या	अंकित बिंदुओं के नाम	रेखा खण्डों के नाम	रेखा खण्डों की संख्या
3	P, Q, R	PQ, PR, QR	3
4	P, Q, R, S		
5			
6			
7			

यहाँ PQ अथवा QP एक ही रेखाखण्ड के दो नाम हैं।

यदि किसी रेखा पर दो ही बिंदु अंकित हों तो कितने रेखाखण्ड होंगे?

इस तालिका के आधार पर बिंदु की संख्या और रेखाखण्ड की संख्या में क्या कोई संबंध दिखता है?

इसी प्रकार यदि किसी रेखा पर 8 बिंदु अंकित हों तो रेखाखण्ड की संख्या $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ होगी।

यदि किसी रेखा पर n बिंदु अंकित हों तो रेखाखण्ड की संख्या $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ _ _ _ _ _ _ _ $+ n - 1$ होगी।

क्या आप इससे सहमत हैं? आपस में चर्चा करें।

संरेख बिंदु (Collinear Points)

ऊपर की तालिका में बिंदु P, Q, R, S आदि एक ही रेखा पर हैं। ये संरेख बिंदु हैं अर्थात् ऐसे सभी बिंदु जो एक ही रेखा पर स्थित हो संरेख बिंदु (collinear points) होंगे।

यहां बिंदु A, B व C संरेख हैं (चित्र–8)।

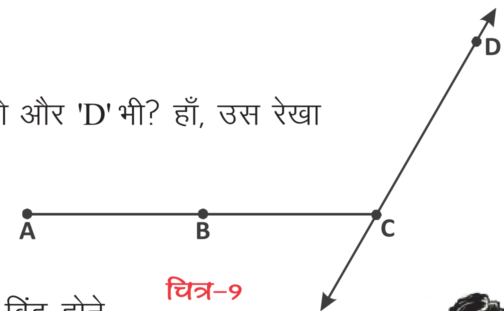
चित्र–8

क्या चित्र 9 में बिंदु A, B, C और D संरेख हैं? क्या हम यह भी कह सकते हैं कि बिंदु B, C और D संरेख नहीं हैं?

और क्या बिंदु C व D भी संरेख नहीं हैं?

क्या हम एक ऐसी रेखा खींच सकते हैं जिस पर 'C' भी हो और 'D' भी? हाँ, उस रेखा पर CD रेखा खण्ड है।

स्पष्टतः कोई भी दो बिंदु हों, किसी न किसी एक रेखा पर तो वे अवश्य होंगे और उस रेखा पर वे संरेख होंगे।



चित्र–9

अर्थात् बिंदु संरेख है या नहीं, यह प्रश्न कम से कम तीन बिंदु होने पर ही सार्थक होता है। तभी यह पूछा जा सकता है कि दिए गए बिंदु संरेख हैं या नहीं?

सोचें एवं चर्चा करें

क्या 3 संरेख बिंदुओं से त्रिभुज बन सकता है?

रेखा और कोण (Line and Angle)

चित्र–9 में बिंदु 'C' पर कोण $\angle DCA$, 90° से अधिक है अतः अधिक कोण है।

हम कई अन्य प्रकार के कोण जानते हैं, जैसे– न्यूनकोण (acute angle), समकोण (right angle), अधिक कोण (obtuse angle), सरल या ऋृजुकोण (straight angle) तथा प्रतिवर्ती या वृहत्त कोण (reflex angle)।

करके देखें

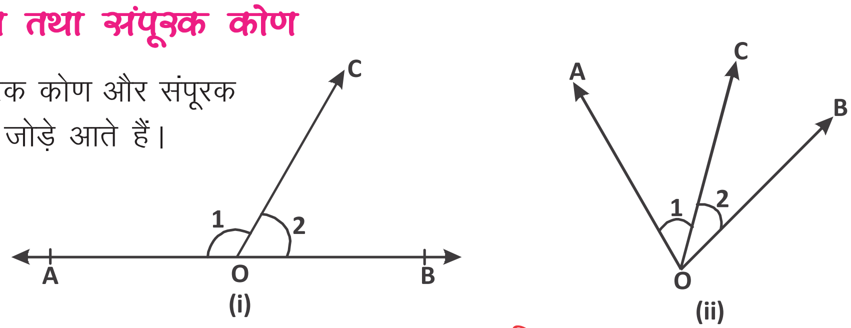
इनमें से प्रत्येक कोण का चित्र बनाइए व कोणों के नाम लिखिए।

आसन्न कोण, पूरक कोण तथा संपूरक कोण

यहाँ हम देखेंगे कि आसन्न कोण, पूरक कोण और संपूरक कोण की श्रेणी में कौन से कोण के जोड़े आते हैं।

आसन्न कोण (Adjacant angles)

दिए गए चित्र 10 (i) व (ii) को देखें।

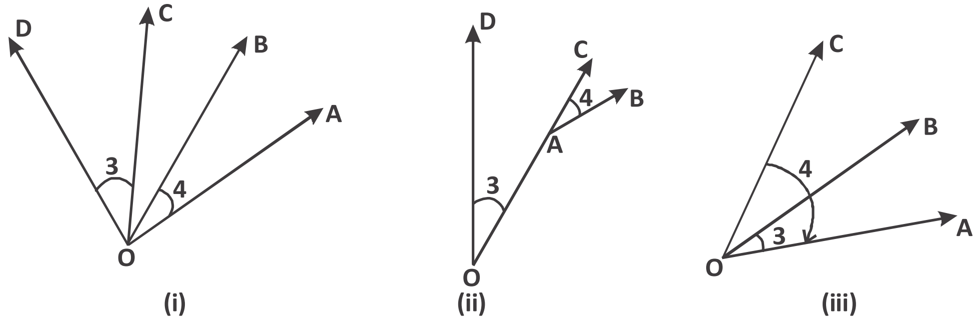


चित्र–10

चित्र 10 (i) व (ii) में दो कोण 1 व 2 है। जिनमें शीर्ष O और एक भुजा OC उभयनिष्ठ(common) व मध्य में है।

अतः चित्र 10 में कोण 1 व 2 आसन्न कोण हैं।

अब चित्र 11 (i), (ii) व (iii) को देखिए–



चित्र–11

चित्र–11 के (i), में कोण 3, 4 के लिए शीर्ष समान है लेकिन कोई एक भुजा दोनों में उभयनिष्ठ (common) नहीं है।

चित्र (ii) में कोण 3, 4 के लिए शीर्ष अलग–अलग हैं अर्थात् कोण 3 के लिए O व कोण 4 के लिए A

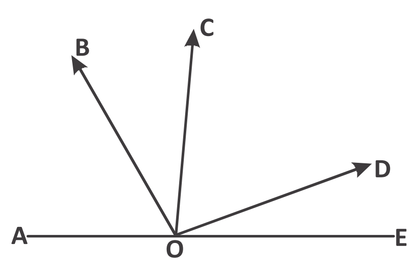
चित्र (iii) में कोण 3, कोण 4 में एक भुजा OA उभयनिष्ठ है किंतु कोण 4 का ही एक भाग कोण 3 है।

इसलिए चित्र 11 के सभी भागों में कोण 3 व 4 आसन्न कोण नहीं हैं।

अर्थात् जब दो कोण एक ही शीर्ष पर हों व उनकी कोई भुजा दोनों में ही उभयनिष्ठ (common) हो (चित्र–10 की तरह) तथा एक कोण दूसरे में समाहित न हो (चित्र–11(iii) की तरह) तब कोणों के ऐसे जोड़ों को आसन्न कोण कहेंगे।

करके देखें

1. 2 ऐसे कोण बनाएँ जो आसन्न कोण न हों।
2. चित्र देखकर बताइए कि निम्नलिखित कोण आसन्न है या नहीं?
   (i) $\angle AOB$ और $\angle BOC$
   (ii) $\angle BOC$ और $\angle DOE$
   (iii) $\angle EOD$ और $\angle DOC$



सोचें एवं चर्चा करें

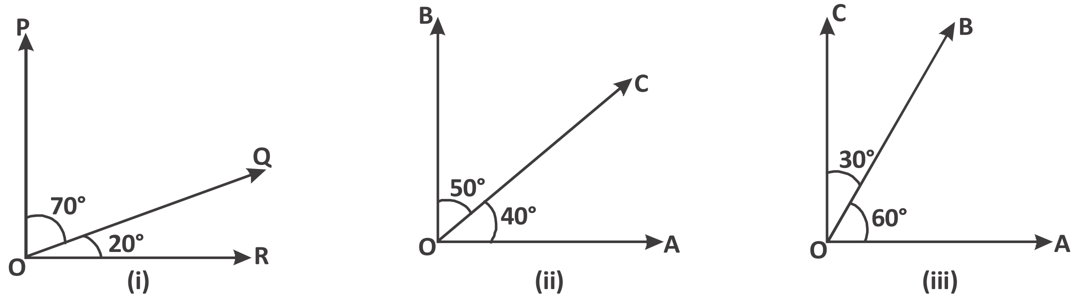
दो कोण कब आसन्न कोण होंगे?

(i) जब दोनों अधिक कोण हो (ii) दोनों न्यूनकोण हों

(iii) एक अधिक कोण व एक न्यून कोण हो।

पूरक कोण (Complementary angles)

नीचे दिए गए इन चित्रों को ध्यान से देखें। यहाँ प्रत्येक में दो कोण बने हैं। इन कोणों के प्रत्येक जोड़े का योग कितना होगा?



चित्र–12

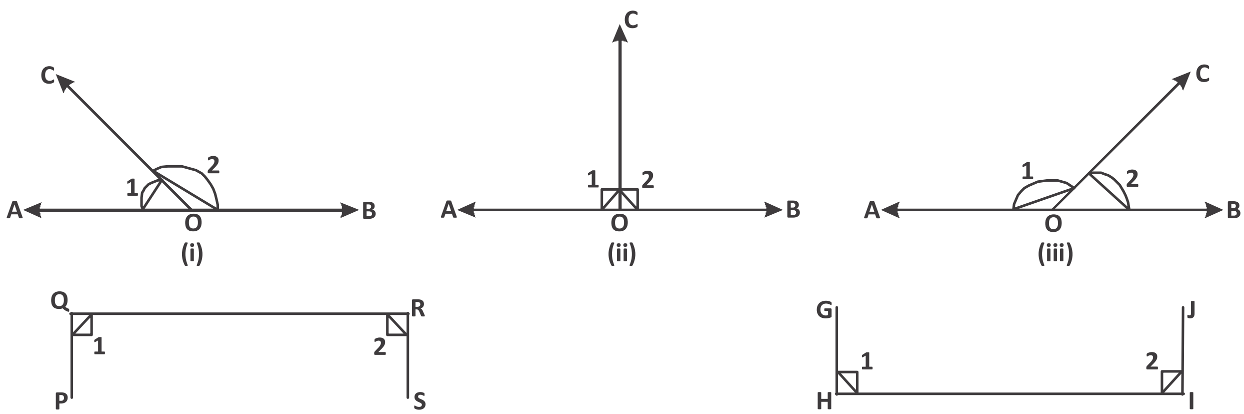
जब दो कोणों का योग 90° हो तब प्रत्येक कोण एक–दूसरे के पूरक कोण होंगे।

क्या ये पूरक कोण आसन्न कोण भी हैं?

आप भी चित्र–12 की तरह कुछ और आसन्न पूरक कोणों के चित्र बनाइए।

संपूरक कोण (Supplementary angle)

नीचे बने चित्रों में $\angle 1$ व $\angle 2$ का योग कितना होगा?



चित्र–13

इन सभी कोणों के जोड़ों का योग 180° है अर्थात् प्रत्येक कोण, एक–दूसरे का संपूरक कोण है।

क्या चित्र 13 में (i), (ii) व (iii) आसन्न कोण हैं? क्या (iv) और (v) में भी आसन्न कोण हैं?

यहाँ (i), (ii) व (iii) में दो कोणों के मिलने से एक सरल रेखा बन रही है और एक ऋृजुकोण (सरल कोण) बन रहा है। ऐसे कोणों के जोड़ों (युग्म) को रैखिक युग्म भी कहते हैं।

याने हम प्रत्येक रैखिक युग्म को संपूरक कोण कह सकते हैं।

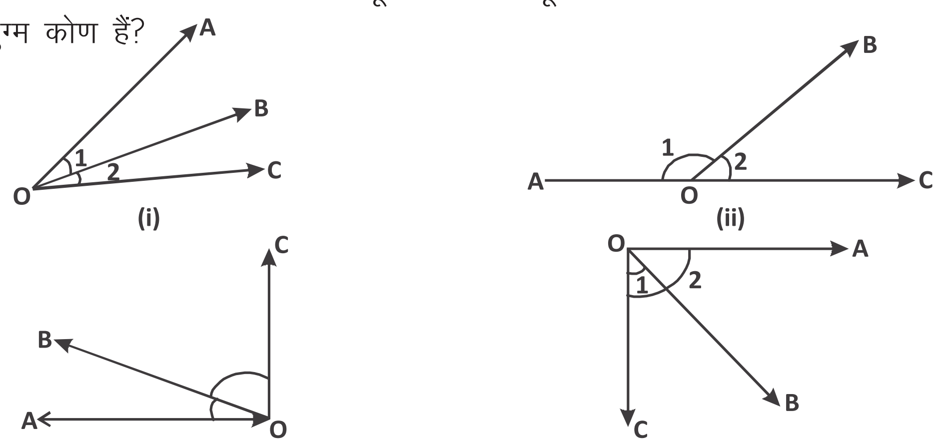
क्या चित्र (iv) व (v) के जोड़े भी रैखिक युग्म हैं?

सोचें एवं चर्चा करें

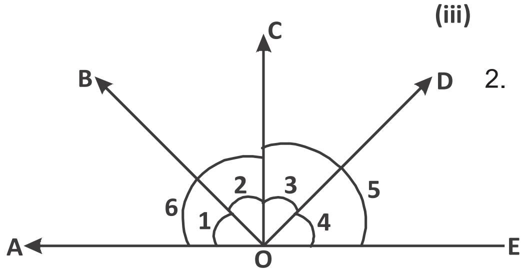
1. क्या दो समकोण एक–दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
2. क्या प्रत्येक रेखीय युग्म संपूरक कोण होगा?

करके देखें

1. निम्नलिखित में से कौन से कोण पूरक अथवा संपूरक हैं? कौन से आसन्न व रेखीय युग्म कोण हैं?



(i) (ii) (iii) (iv)



2. निम्नलिखित चित्र में निम्न कोण कौनसे युग्म बना रहे हैं।

(i) $\angle 1$ व $\angle 2$ (ii) $\angle 5$ व $\angle 6$

(iii) $\angle 6$ व $\angle 3$ (iv) $\angle 5$ व $\angle 2$

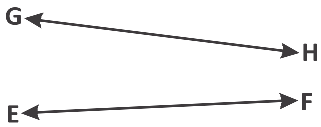
(v) $\angle 3$ व $\angle 4$

प्रतिच्छेदी एवं समांतर रेखाएँ (Intersecting and Parallel Lines)

चित्र–14 (i)

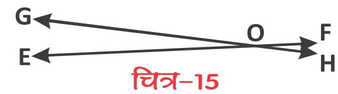
चित्र–14(i) व (ii) में यदि रेखाओं को आगे बढ़ाया जाए तो कौन–सी रेखाएँ एक–दूसरे को काटेंगी?

यहाँ रेखा AB व CD एक–दूसरे को नहीं काटती हैं जबकि रेखाओं GH व EF



चित्र–14 (ii)

को H व F की दिशा में आगे बढ़ाने पर एक–दूसरे को O बिंदु पर काटती हैं। (चित्र–15)



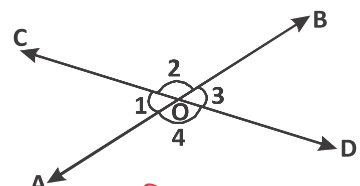
चित्र–15

अर्थात् AB व CD रेखाएँ समांतर रेखाएँ हैं और EF व GH प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं।

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से बने कोण

जब दो रेखाएँ एक–दूसरे को किसी बिंदु पर काटती हैं तो कटान बिंदु पर कुछ कोण बनते हैं।

चित्र–16 को देखें। रेखा AB व CD बिंदु O पर एक–दूसरे को काटती ga c $\angle 1$,, $\angle 2$, $\angle 3$, व $\angle 4$ बनते हैं। क्या $\angle 1$ व $\angle 3$ तथा $\angle 2$ व $\angle 4$ में कुछ समानता है?



चित्र–16

यहाँ हम देखते हैं कि $\angle 1$ व $\angle 3$ बिंदु O (जो कि कोणों का शीर्ष है) पर एक–दूसरे के सामने के कोण हैं इसी प्रकार $\angle 2$ व $\angle 4$ भी।

ये कोण शीर्षाभिमुख कोण हैं।

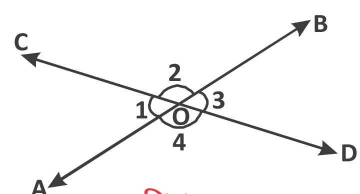
शीर्षाभिमुख कोणों के गुण (Vertically Opposite Angles)

यहाँ $\angle 1$ व $\angle 3$ तथा $\angle 2$ व $\angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।

अब रेखा CD के ऊपरी भाग में $\angle COB + \angle BOD = \angle COD$

यहाँ $\angle COD$ कौन–सा कोण है?

यह सरल कोण है।



चित्र–17

अर्थात् $\angle COB + \angle BOD = 180^\circ$

या $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ .....(i)

क्या AB रेखा के ऊपरी भाग में भी इसी प्रकार का संबंध ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, करके देखते हैं।

$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$

या $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ...(ii)

यहाँ $\angle AOB$ एक सरल कोण है।

अब (i) व (ii) से

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$

या $\angle 3 = \angle 1$

अर्थात् $\angle 1 = \angle 3$ ...(iii)

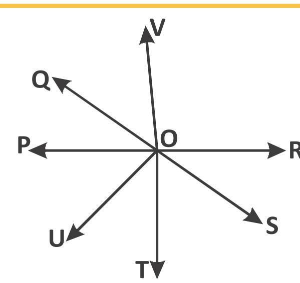
इसी प्रकार आप रेखा CD के ऊपर के कोणों का योग तथा रेखा AB के नीचे के कोणों का योग प्राप्त कर निम्नलिखित संबंध प्राप्त कर सकते हैं।

$$\angle 2 = \angle 4 \qquad \text{...(iv)}$$

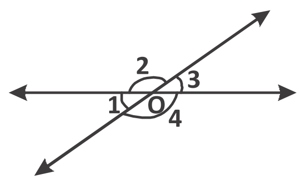
यहाँ $\angle 1$ व $\angle 3$ तथा $\angle 2$ व $\angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण है तथा प्राप्त संबंध (iii) व (iv) से देख सकते हैं कि ये कोण बराबर हैं अर्थात् शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

करके देखें

1. चित्र में शीर्षाभिमुख कोण बताइए।

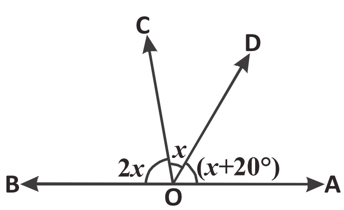


2. चित्र में $\angle 2 = 110^\circ$ तो $\angle 1$ व $\angle 4$ का मान बताइए।



उदाहरण–1. चित्र–18 में $\overrightarrow{OA}$ व $\overrightarrow{OB}$ विपरीत किरणें हैं। $\angle AOC$ व $\angle BOC$ के माप क्या होंगे?

हल : $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ विपरीत किरणें हैं।



चित्र–18

चूंकि $\angle AOC$ व $\angle BOC$ रेखीय युग्म बनाते हैं।

अतः $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$

$(2x + 20^\circ) + 2x = 180^\circ$

$4x + 20^\circ = 180^\circ$

$x = 40^\circ$

अतः $\angle AOC = 2x + 20^\circ$

$= 2(40^\circ) + 20^\circ$

$= 100^\circ$

$$\left\{\begin{aligned} \angle AOC &= \angle COD + \angle DOA \\ &= x + (x + 20^\circ) \\ &= 2x + 20^\circ \end{aligned}\right\}$$

और $\angle BOC = 2x$

$= 2(40^\circ)$

$= 80^\circ$

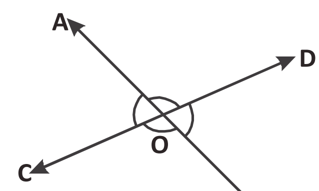
अतः $\angle AOC = 100^\circ$ व $\angle BOC = 80^\circ$ होगा।

उदाहरण–2. दिए गए चित्र में रेखाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOC : \angle COB = 7:8$ है, तो सभी कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्र नानुसार $\angle AOC : \angle COB = 7:8$

अतः माना $\angle AOC = 7x$ .....(i)

$\angle COB = 8x$ .....(ii)



चित्र–19

रेखा AB पर किरण OC खड़ी है (रेखीय युग्म)

$\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

$7x + 8x = 180^\circ$

$15x = 180^\circ$

$x = 12^\circ$ .....(iii)

अतः $\angle AOC = 7x$

$= 7(12^\circ)$

$= 84^\circ$

एवं $\angle COB = 8x$

$= 8\ (12^\circ)$

$= 96^\circ$

और $\angle BOD = \angle AOC = 84^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

पुनः $\angle AOD = \angle COB = 96^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

उदाहरण–3. दिए गए चित्र में $\angle COD = 90^\circ$, $\angle BOE = 72^\circ$ और AOB सरल रेखा होने पर $\angle AOC$, $\angle BOD$ और $\angle AOE$ ज्ञात कीजिए।

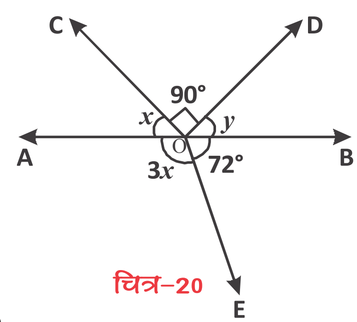
हल : AOB एक सरल रेखा है

$\angle AOE + \angle BOE = 180^\circ$ (रेखीय युग्म)

$\Rightarrow 3x + 72^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 3x = 108^\circ$

$\Rightarrow x = 36^\circ$ .....(i)



चित्र–20

इसी तरह से,

$\angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 180^\circ$ (सरल कोण)

$\Rightarrow x + 90^\circ + y = 180^\circ$

$\Rightarrow 36^\circ + 90^\circ + y = 180^\circ$

$\Rightarrow 126^\circ + y = 180^\circ$

$\therefore\ y = 54^\circ$ .....(ii)

अतः $\angle AOC = x = 36^\circ$

$\angle BOD = y = 54^\circ$

और $\angle AOE = 3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$

उदाहरण–4. दिए गए चित्र–21 में PQ रेखा पर किरण OS है व अन्य किरणें OR और OT हैं जो क्रमशः $\angle POS$ और $\angle SOQ$ के समद्विभाजक हैं। $\angle ROT$ ज्ञात कीजिए।

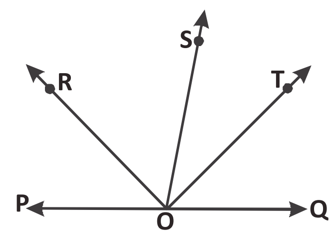
हल : किरण OS, रेखा PQ पर है, अतः रैखिक युग्म

$\angle POS + \angle SOQ = 180^o$

माना $\angle POS = x$

तो $x + \angle SOQ = 180^o$

$\angle SOQ = 180^o - x$ .....(i)



चित्र–21

किरण OR, $\angle POS$ को समद्विभाजित करती है,

अतः $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$ .....(ii)

इसी तरह किरण $OT, \angle SOQ$ को समद्विभाजित करती है,

अतः $\angle SOT = \frac{1}{2} \angle SOQ$

$= \frac{1}{2}(180^o - x)$ (सेमी. 1 से)

$= 90^0 - \frac{x}{2}$ .....(iii)

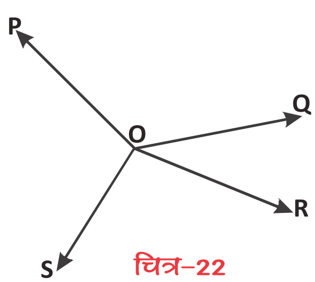
चित्र से स्पष्ट है कि

$\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + \left(90^o - \frac{x}{2}\right) \quad = \frac{x}{2} + 90^o - \frac{x}{2}$

अतः $\angle ROT = 90^o$

उदाहरण–5. संलग्न चित्र में चार किरणें OP, OQ, OR और OS हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^o$ है।



चित्र–22

हल : दिए गए चित्र–22 में किरण OP, OQ, OR और OS में से किसी भी एक को पीछे एक बिंदु तक बढ़ाने की आवश्यकता है। (क्यों?)

किरण OQ को एक बिंदु T तक बढ़ा दें, (चित्र–23) ताकि TOQ एक रेखा हो जाय। अब चित्र से स्पष्ट है कि

किरण OP, रेखा TQ पर है, अतः रैखिक युग्म

$\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ .....(i)

इसी प्रकार किरण OS भी रेखा TQ पर है, अत: रैखिक युग्म

$\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ .....(ii)

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर

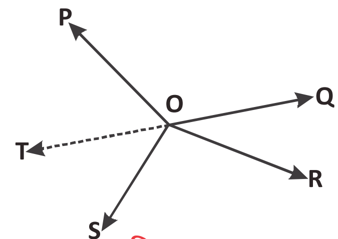
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOQ = 360^\circ$ .....(iii)

चित्र से स्पष्ट है कि

$\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

$\angle TOP = \angle POS - \angle TOS$ .....(iv)

और $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$ .....(v)



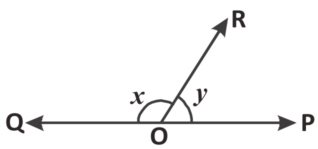
चित्र–23

समीकरण (iii) में समी. (iv) और समी. (v) से मान रखने पर

$\angle POS - \angle TOS + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^\circ$

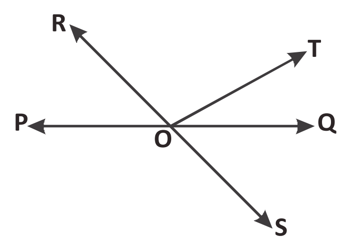
अत: $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$ यही सिद्ध करना था।

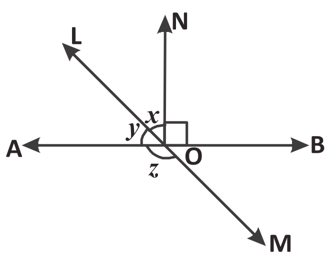
प्रश्नावली – 9.1



1. चित्र में $\angle POR$ तथा $\angle QOR$ रेखीय युग्म निर्मित करते हैं। यदि $x - y = 80^\circ$ हो तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

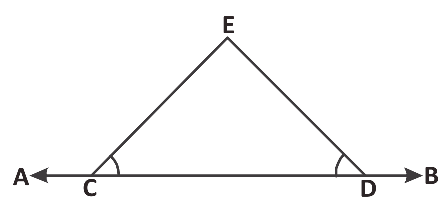
2. दिए गए चित्र में रेखाएँ PQ और RS बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POR + \angle QOT = 70^\circ$ और $\angle QOS = 40^\circ$ है तो $\angle QOT$ तथा प्रतिवर्ती $\angle ROT$ का मान ज्ञात कीजिए।

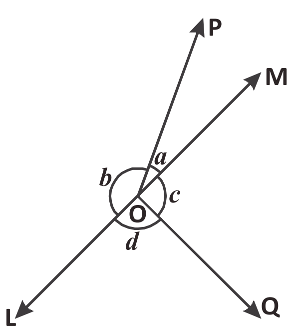




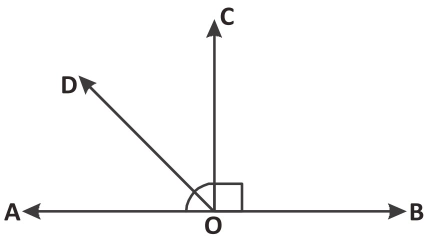
3. दिए गए चित्र में, रेखाएँ AB और LM बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle NOB = 90^\circ$ और $x : y = 2 : 3$ है, तो z का मान ज्ञात कीजिए।

4. दी गई आकृति में $\angle ECD = \angle EDC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ECA = \angle EDB$





5. दिए गए चित्र में यदि $a + b = c + d$ है, तो सिद्ध कीजिए कि LOM एक रेखा है।

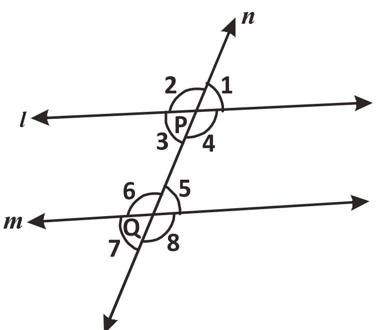


6. दिए गए चित्र में AOB एक रेखा है। किरण OC, रेखा AB पर लंब है। किरण OA और OC के बीच में एक अन्य किरण OD है। सिद्ध कीजिए कि

$$\angle COD = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle AOD)$$

7. यदि $\angle ABC = 64^\circ$ और AB को बिंदु X तक बढ़ाया गया है। इस दी गई जानकारी से आकृति खींचिए। यदि किरण BY, $\angle CBX$ को समद्विभाजित करती है, तो कोण $\angle ABY$ और प्रतिवर्ती $\angle YBX$ के मान ज्ञात कीजिए।

समांतर रेखा और तिर्यक रेखाएँ (Parallel and Transversal Lines)



चित्र–24

चित्र–24 व 25 में ℓ, m किस प्रकार की रेखाएँ हैं?

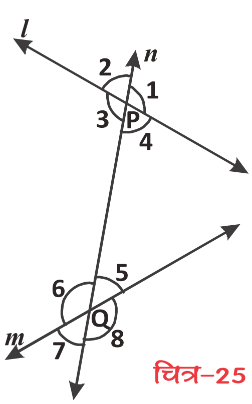
चित्र–24 में रेखाएँ ℓ, m एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती तथा चित्र–25 में रेखाएँ ℓ, m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। रेखा n दोनों चित्रों में ℓ, m रेखाओं को दो बिंदुओं P व Q पर काटती है। यह रेखा n तिर्यक रेखा है।

चित्र–24 व चित्र–25 को देखिए। इन दोनों में से किस चित्र में l व m रेखाओं के बीच की दूरियाँ समान है?

यहाँ चित्र–25 में रेखाएँ ℓ, m प्रतिच्छेदी हैं और इनके बीच की दूरियाँ असमान हैं जबकि चित्र–24 में रेखाएँ ℓ, m बीच की दूरियाँ समान हैं।

चित्र–24 की रेखाएँ ℓ, m समांतर रेखाएँ हैं।

जब दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तो निम्नलिखित कोण बनते हैं जिन्हें चित्र–24 व 25 में देख सकते हैं–



चित्र–25

(i) संगत कोण (Corresponding angle)
   (a) $\angle 1$ और $\angle 5$ (b) $\angle 2$ और $\angle 6$
   (c) $\angle 3$ और $\angle 7$ (d) $\angle 4$ और $\angle 8$

(ii) एकांतर अंतःकोण (Alternative interior angle)
   (a) $\angle 4$ और $\angle 6$ (b) $\angle 3$ और $\angle 5$

(iii) एकांतर बाह्य कोण (Alternate exterior angle)
   (a) $\angle 1$ और $\angle 7$ (b) $\angle 2$ और $\angle 8$

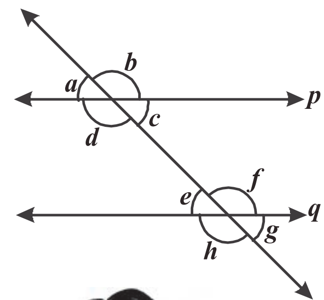
(iv) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोण
   (a) $\angle 4$ और $\angle 5$ (b) $\angle 3$ और $\angle 6$

तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतःकोणों को क्रमागत (consecutive) अंतः कोण या संबंधित (allied) अंतःकोण या सहअंतःकोण (cointerior angles) भी कहते हैं। कई बार हम एकांतर अंतः कोणों के स्थान पर भाब्द एकांतर कोण का प्रयोग करते हैं।

(v) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के बाह्य कोण हैं।
(क्रमागत बाह्य कोण या संबंधित बाह्य कोण या सहबाह्य कोण)
(a) $\angle 1$ और $\angle 8$ (b) $\angle 2$ और $\angle 7$

करके देखें

आप निम्नलिखित चित्र का अवलोकन कर तालिका पूर्ण कीजिए।



क्र सं.	कोणों का युग्म	कोण	कोणों के युग्म की संख्या
1	एकांतर अंतः कोण		2
2	तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण		
3		$\angle a$ और $\angle g$, $\angle b$ और $\angle h$	
4		$\angle a$ और $\angle h$ $\angle b$ और $\angle g$	
5	संगत कोण		4

संगत कोण व एकांतर कोण के गुण (Properties of Corresponding angle and Alternative Angle)

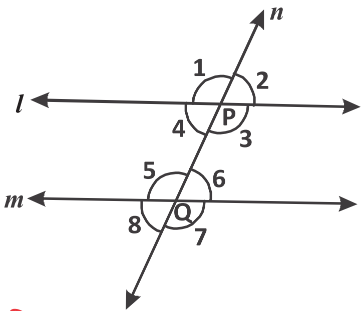
दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा के काटने पर संगत कोणों, एकांतर कोणों के जोड़े बनते हैं। क्या इन कोणों के जोड़ों (युग्म) में कुछ संबंध होते हैं?

जब प्रतिच्छेदी रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोणों व एकांतर कोणों के युग्म बराबर नहीं होते हैं, किंतु समांतर रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो संगत कोणों व एकांतर कोणों के युग्म बराबर होते हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और उनके संगत कोण बराबर हों तब क्या दोनों रेखाएँ समांतर होंगी?

अब प्रश्न यह है कि क्या संगत कोणों के इस गुण के आधार पर समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा के काटने पर बनने वाले अन्य कोणों जैसे एकांतर अन्तःकोण, एकांतर बाह्यकोण के गुण जान सकते हैं? हाँ, इस संबंध को जानने के लिए हम दो समांतर रेखाएँ ℓ, m बनाते हैं, जिन्हें तिर्यक रेखा n बिन्दु P व Q पर काटती है। चित्र–26 देखें।



चित्र-26

यहाँ $\angle 1 = \angle 5$ (संगतकोण) – (i)

$\angle 1 = \angle 3$ (शीर्षाभिमुख कोण) – (ii)

(i) व (ii) से

$\angle 5 = \angle 3$ ये कौन–से कोण हैं? ये एकांतर अन्तःकोण हैं।

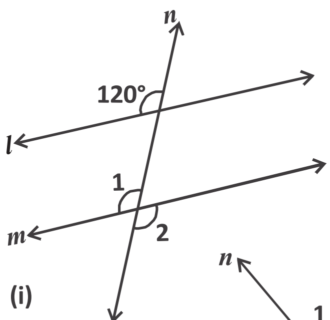
अब हम कह सकते है कि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तो उनके एकांतर अन्तःकोण बराबर होते हैं।

सोचें एवं चर्चा करें

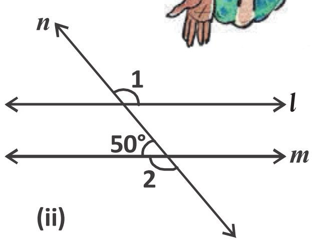
यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तथा उनके एकांतर अन्तःकोण बराबर हों तब क्या दोनों रेखाएँ समांतर होगी?

करके देखें

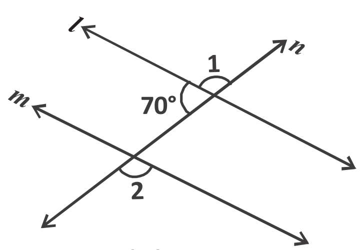
दिए गए चित्रों में $\angle 1$ और $\angle 2$ के मान ज्ञात कीजिए, यदि दो समांतर रेखाओं l और m को तिर्यक रेखा n प्रतिच्छेद करती हैं। उत्तर के कारण भी बताइए।



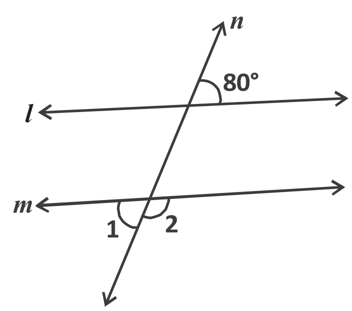
(i)



(ii)



(iii)

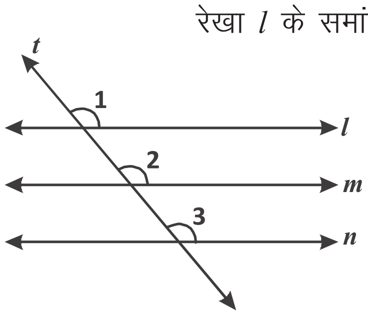


(iv)

एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ (Lines Parallel to the Same Line)

जब दो रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर हों, तो क्या वे परस्पर समांतर होंगी?

इसकी जांच के लिए संलग्न चित्रानुसार तीन रेखाएँ l, m, n खींचिए, जिनमें रेखा m रेखा l के समांतर है और रेखा n रेखा l के समांतर है।



चित्र-27

रेखा l, m, n पर तिर्यक रेखा t खींची।

संगत कोण अभिगृहित से

$\angle 1 = \angle 2$ ....(1)

$\angle 1 = \angle 3$ ....(2)

(1) और (2) से हम निष्कर्ष प्राप्त करते हैं ।

$\angle 2 = \angle 3$

परंतु $\angle 2$ और $\angle 3$ रेखा m तथा रेखा n के लिए संगत कोण बनाते हैं, इसलिए आप कह सकते हैं कि रेखा m, रेखा n के समांतर है।

इस परिणाम को एक प्रमेय के रूप में निम्नलिखित तरह से लिख सकते हैं–

प्रमेय

वे कथन जिन्हें तर्कों व ज्ञात जानकारियों की सहायता से प्रमाणित किया जाता है।

प्रमेय–1 : वे रेखाएँ जो एक ही रेखा के समांतर हों, परस्पर समांतर होती हैं।

उदाहरण–6. दिए गए चित्र–28 में x, y, z और a, b, c के मान ज्ञात कीजिए।

हल : चित्र में स्पष्ट है कि–

$y = 110^\circ$ ($\because$ संगत कोण)

और $x + y = 180^\circ$ (रैखिक युग्म कोण)

$\Rightarrow$ $x + 110^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $x = 70^\circ$

$z = x = 70^\circ$ ($\because$ संगत कोण)

पुनः $c = 65^\circ$ ($\because$ एकांतर कोण)

और $a + c = 180^\circ$ ($\because$ रैखिक युग्म कोण)

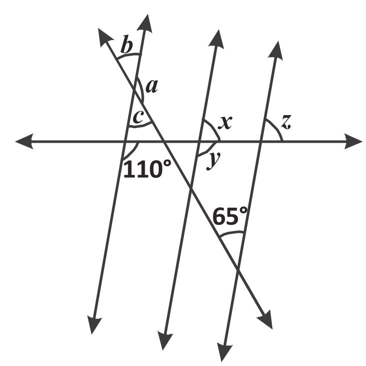
$\Rightarrow$ $a + 65^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $a = 115^\circ$

तथा $b = c = 65^\circ$ ($\because$ शीर्षाभिमुख कोण)

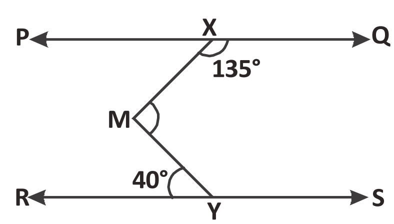
अतः $a = 115^\circ, b = 65^\circ, c = 65^\circ$

$x = 70^\circ, y = 110^\circ, z = 70^\circ$



चित्र–28

उदाहरण–7. दिए गए चित्र–29 में यदि $PQ \parallel RS, \angle MXQ = 135^\circ$ और $\angle MYR = 40^\circ$ है, तो $\angle XMY$ ज्ञात कीजिए।



चित्र–29

हल : दिए गए चित्र में M से गुजरने वाली और PQ के समांतर रेखा AB खींची। अब $AB \parallel RS$ और $PQ \parallel RS$ हैं।

अब, $\angle QXM + \angle XMB = 180^\circ$ .....(1)

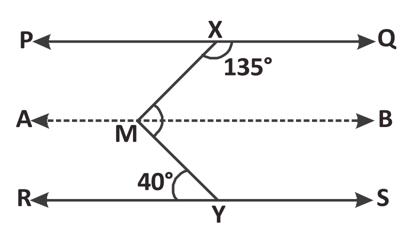
($\because$ $AB \parallel PQ$, तिर्यक रेखा XM के एक ही ओर के अंतः कोण) चित्र–30

प्रश्नानुसार, $\angle QXM = 135^\circ$, समीकरण (1) से

$135^\circ + \angle XMB = 180^\circ$

$\angle XMB = 180^\circ - 135^\circ$

अतः $\angle XMB = 45^\circ$ .....(2)



चित्र–30

पुनः $\angle BMY = \angle MYR$ .....(3) $(\because AB \parallel RS,$ एकांतर कोण)

प्रश्नानुसार, $\angle MYR = 40^\circ$, समीकरण (2) से

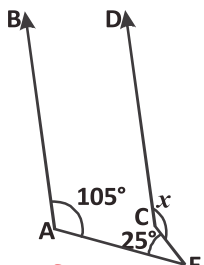
$\angle BMY = 40^\circ$ .....(4)

समीकरण (2) और (4) को जोड़ने पर,

$$\angle XMB + \angle BMY = 45^\circ + 40^\circ$$

अर्थात् $\angle XMY = 85^\circ$

उदाहरण–8. दिए गए चित्र–31 में $AB \parallel CD$ तब x का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र–31

हल : दिए गए चित्र–32 में बिंदु E से $EF \parallel AB$ खींचिए। तब $EF \parallel CD$

चूंकि $EF \parallel CD$ और CE तिर्यक रेखा है , अतः

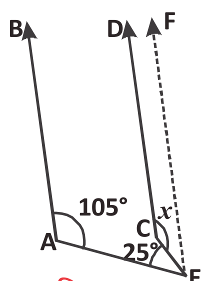
$\angle DCE + \angle CEF = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $x + \angle CEF = 180^\circ$ $(\because \angle DCE = x)$

$\angle CEF = 180^\circ - x$ .....(1)

$EF \parallel AB$ और AE तिर्यक रेखा है। अतः

$\angle BAE + \angle AEF = 180^\circ$ $(\because$ सह अंतः कोण)



चित्र–32

$\Rightarrow$ $105^\circ + (\angle AEC + \angle CEF) = 180^\circ$

$(\because \angle BAE = 105^\circ)$

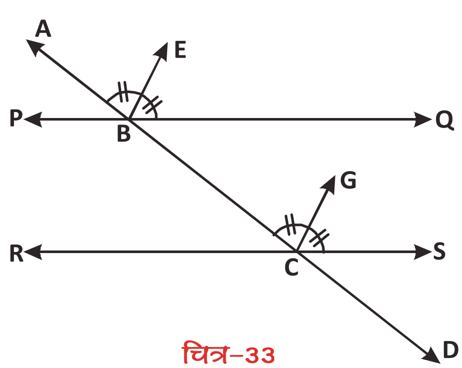
$\Rightarrow$ $105^\circ + 25^\circ + (180^\circ - x) = 180^\circ$

$(\because \angle AEC = 25^\circ$ और समी. 1 से)

$\Rightarrow$ $310^\circ - x = 180^\circ$

अतः $x = 130^\circ$

उदाहरण–9. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों के एक युग्म के समद्विभाजक परस्पर समांतर हों, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों रेखाएं भी परस्पर समांतर होती हैं।



चित्र–33

हल : चित्रानुसार एक तिर्यक रेखा AD खींची जो दो रेखाओं PQ और RS को क्रमशः बिंदुओं B और C पर प्रतिच्छेद करती हैं। $\angle ABQ$ की समद्विभाजक, किरण BE है, $\angle BCS$ की समद्विभाजक किरण CG है तथा $BE \parallel CG$ है।

सिद्ध करना है– $PQ \parallel RS$

यहाँ दिया गया है कि किरण $BE, \angle ABQ$ की समद्विभाजक है,

अतः $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABQ$ .....(1)

इस प्रकार, किरण CG, $\angle BCS$ की समद्विभाजक है ,

अतः $\angle BCG = \frac{1}{2}\angle BCS$ .....(2)

परंतु, $BE \parallel CG$ और AD एक तिर्यक रेखा है, अतः

$\angle ABE = \angle BCG$ .....(3)

समी. (1), (2) और (3) से (संगत कोण)

$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle BCS$$

अर्थात् $\angle ABQ = \angle BCS$

परंतु $\angle ABQ$ और $\angle BCS$ तिर्यक रेखा AD द्वारा रेखाओं PQ और RS के साथ बनाए गए संगत कोण हैं और बराबर हैं।

$PQ \parallel RS$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण–10. दिए गए चित्र में, $AB \parallel CD$ और $CD \parallel EF$ हैं। साथ ही, $EA \perp AB$ है। यदि $\angle BEF = 55^o$ हैं, तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है कि $AB \parallel CD$ तथा $CD \parallel EF$ अत : $AB \parallel EF$, दिए गए चित्र में BE को G तक बढ़ाया

अब $\angle DEF + \angle FEG = 180^o$ (रैखिक, युग्मकोण)

$55^o + \angle FEG = 180^o$ $(\because \angle DEF = 55^o)$

$\angle FEG = 125^o$

अतः $\angle FEG = y = x = 125^o$

(संगत कोण)

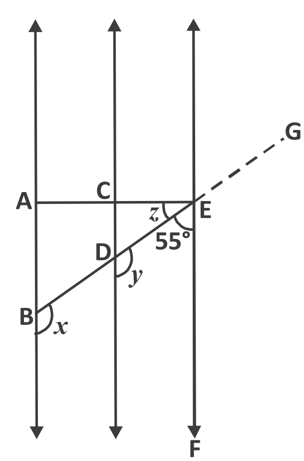
पुनः $\angle CED + \angle DEF = 90^o$

$(\because EA \perp AB$ तथा $AB \parallel EF)$

$z + 55^o = 90^o$

$z = 35^o$

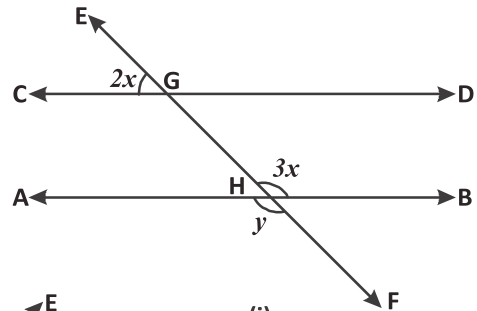
अतः $x = 125^o$, $y = 125^o$, $z = 35^o$



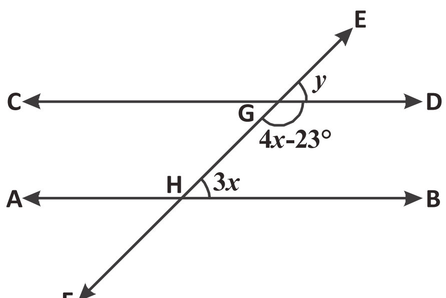
चित्र–34

प्रश्नावली – 9.2

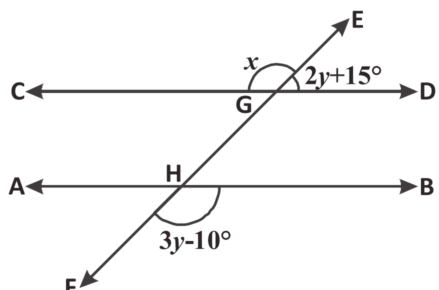
1. दिए गए चित्रों में $AB \parallel CD$ तथा EF एक तिर्यक रेखा है जो AB और CD को H और G पर प्रतिच्छेदित करती है। तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



(i)

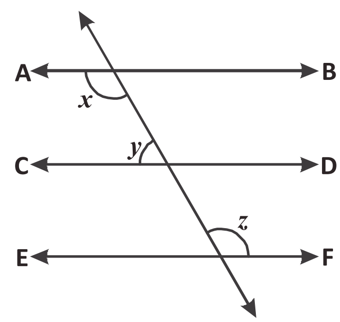


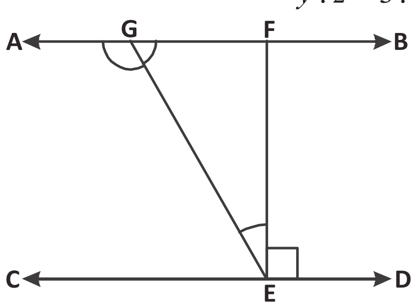
(ii)



(iii)

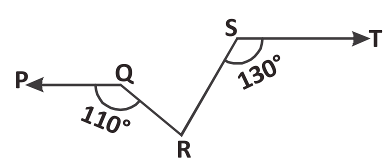
2. दिए गए चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



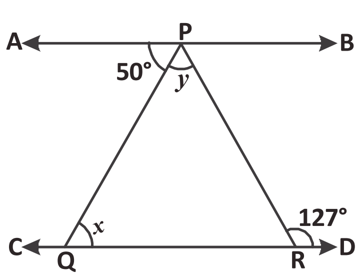


3. दिए गए चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ और $\angle GED = 126°$ है, तो $\angle AGE$, $\angle GEF$ तथा $\angle FGE$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. दिए गए चित्र में यदि $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110°$ और $\angle RST = 130°$ है तो $\angle QRS$ का मान ज्ञात कीजिए।

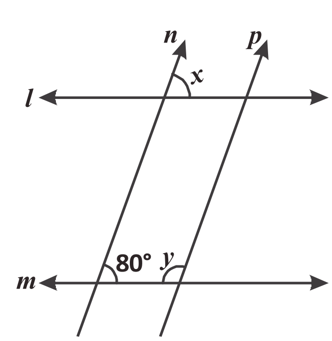


(**संकेत**– बिन्दु R से गुजरने वाली ST के समांतर एक रेखा खींचिए।)

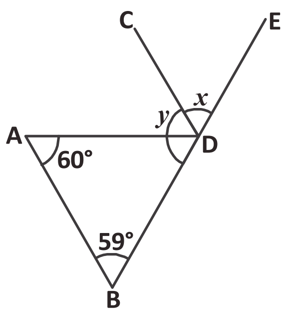


5. दिए गए चित्र में यदि $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50°$ और $\angle PRD = 127°$ हैं, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

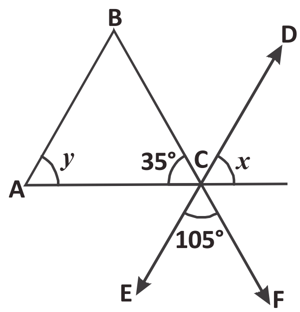
6. दिए गए चित्र में x और y के मान ज्ञात कीजिए। (संकेत $\ell \parallel m$, $n \parallel p$)



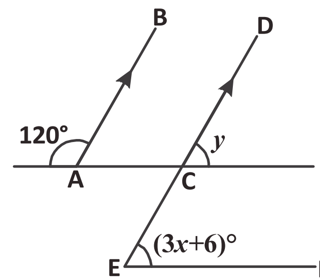
7. दिए गए चित्रों में x व y का मान ज्ञात कीजिए? यहाँ $AB \parallel CD$ है।



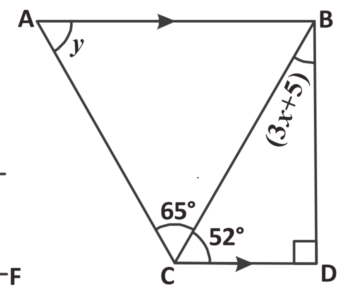
(i)



(ii)

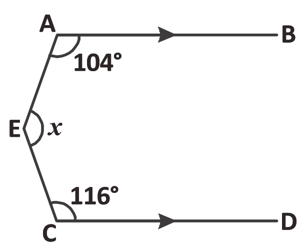


(iii)

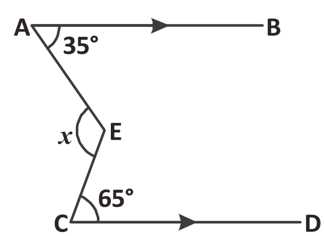


(iv)

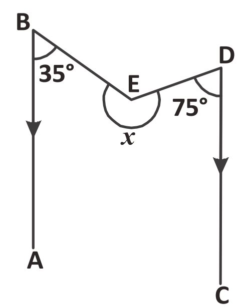
8. निम्नलिखित चित्रों में $AB \parallel CD$ हैं तो x का मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

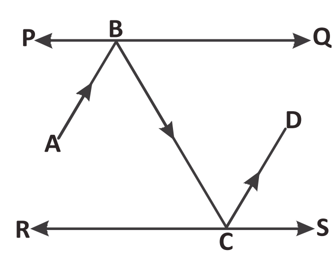


(iii)

9. नीचे दी गई सारणी को पूरा कीजिए–

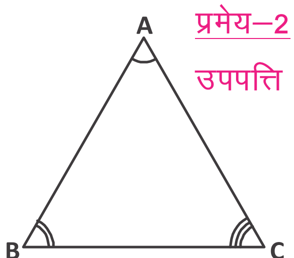
क्र.	त्रिभुज का नाम	कोणों का माप	विशेषता व अन्य गुण
1.	न्यूनकोण त्रिभुज		
2.		एक कोण 90° का	
3.	अधिक कोण त्रिभुज		
4.		प्रत्येक कोण 60°	
5.			दो भुजाओं का माप समान
6.	विषमबाहु त्रिभुज		

10. दिए गए चित्र में PQ और RS दो दर्पण हैं, जो एक दूसरे के समांतर रखे गए हैं। आपतित किरण AB, दर्पण PQ से B पर टकराती है और परावर्तित किरण पथ BC से गुजरते हुए दर्पण RS के बिंदु C पर टकराती है और CD की दिशा में परावर्तित हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि $AB \parallel CD$ है।
(संकेत : समांतर रेखाओं के लंबवत् रेखाएँ भी समांतर होती हैं।)



गणित में कथनों को सिद्ध करना

हमने चांदे की सहायता से व पेपर काट कर इस बात की पुष्टि की है कि त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है। अब हम इस कथन को समांतर रेखाओं से संबंधित अभिगृहीतों और प्रमेयों का उपयोग करके सिद्ध करेंगे।



चित्र–35(i)

प्रमेय–2 : किसी त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° होता है।

उपपत्ति : दिया गया है कि त्रिभुज ABC के कोण क्रमशः $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3$ हैं।

हमें सिद्ध करना है कि $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$ ।

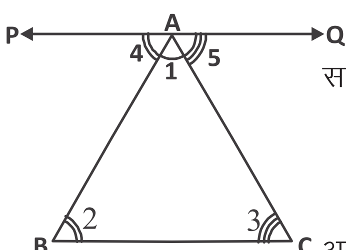
सिद्ध करने के लिए भुजा BC के समांतर और शीर्ष A से गुजरने वाली रेखा PQ खींचिए (चित्र–35(ii))

अब रेखा BC और PQ परस्पर समांतर रेखाएँ हैं और AB तथा AC तिर्यक रेखाएँ हैं। चित्र से स्पष्ट है कि $\angle 4$ और $\angle 2$, $\angle 5$ और $\angle 3$ एकांतर कोणों के युग्म हैं।

अतः $\angle 4 = \angle 2$ .....(1)

$\angle 5 = \angle 3$ .....(2)

परंतु, PAQ एक रेखा है, अतः



चित्र–35(ii)

$$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^{\circ} \quad .....(3)$$

समीकरण (3) में, समीकरण (1) और (2) से क्रमशः $\angle 4$ और $\angle 5$ का मान रखने पर,

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^{\circ}$$

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$

अतः हम कह सकते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग 180° होता है।

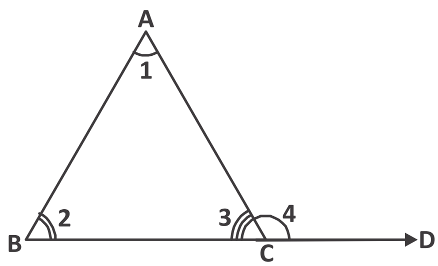
सोचें और चर्चा करें

निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर कारण सहित बताइए।

क्र.सं.	कथन	सत्य / असत्य	कारण
1.	किसी त्रिभुज में दो कोण समकोण हो सकते हैं।		
2.	किसी त्रिभुज में दो कोण अधिक कोण हो सकते हैं।		
3.	किसी त्रिभुज में दो कोण न्यूनकोण हो सकते हैं।		
4.	किसी त्रिभुज में सभी कोण 60° से कम के हो सकते हैं।		
5.	किसी त्रिभुज में सभी कोण 60° से अधिक के हो सकते हैं।		
6.	किसी त्रिभुज में सभी कोण 60° के बराबर हो सकते हैं।		

त्रिभुज का बाह्यकोण (बहिष्कोण) (Exterior angles of Triangle)

दिए गए चित्र में त्रिभुज ABC की भुजा BC को बिंदु D तक बढ़ाने पर त्रिभुज ABC का बाह्यकोण $\angle ACD$ प्राप्त होता है।



चित्र–36

रैखिक युग्म अभिगृहीत से हम लिख सकते हैं कि

$\angle 3+\angle 4=180^\circ$ .....(1)

त्रिभुज ABC के तीनों अन्तःकोणों का योग 180^0 होता है, अतः

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$ .....(2)

समी. (1) और (2) से,

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 3+\angle 4$

या $\angle 1+\angle 2=\angle 4$

हम इस परिणाम को इस प्रमेय के रूप में लिख सकते हैं–

प्रमेय–3 : **यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए, तो इस प्रकार बना बाह्यकोण दोनों अंतः अभिमुख (विपरीत) कोणों के योग के बराबर होता है।**

उपर्युक्त प्रमेय को बाह्यकोण प्रमेय भी कहते हैं। इस प्रमेय से यह स्पष्ट है कि किसी त्रिभुज का बाह्यकोण अपने दोनों अंतः अभिमुख कोणों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

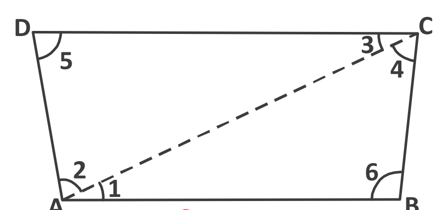
कथन–1 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के चारों अन्तःकोणों का योग 360^0 होता है।

हल : दिया गया है कि चतुर्भुज ABCD के कोण $\angle A, \angle B, \angle C$ और $\angle D$ है।

हमें सिद्ध करना है कि,

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

चित्रानुसार चतुर्भुज ABCD के कोण A को कोण C से मिलाते हुए रेखाखण्ड AC खींचा। इस तरह चतुर्भुज, दो त्रिभुजों, ΔADC और ΔABC में बंट जाता है।



चित्र–37

ΔABC में, त्रिभुज के कोण योग गुण से,

$\angle 1+\angle 6+\angle 4=180^\circ$ .....(1)

इसी तरह, ΔADC में, त्रिभुज के कोण योग गुण से,

$\angle 2+\angle 5+\angle 3=180^\circ$ .....(2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़ने पर

$\angle 1+\angle 6+\angle 4+\angle 2+\angle 5+\angle 3=360^\circ$

या $(\angle 1+\angle 2)+(\angle 3+\angle 4)+\angle 5+\angle 6=360^\circ$

या $\angle A+\angle C+\angle D+\angle B=360^\circ$

अर्थात $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि आप किसी भी बहुभुज के अंतः कोणों का योग, उस बहुभुज को त्रिभुजों में विभक्त करके ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

बहुभुज का नाम	त्रिभुजों की संख्या	अंतः कोणों का योग
चतुर्भुज	2	$2 \times 180 = 360$
पंचभुज	3	$3 \times 180 = 540$
षटभुज	4	....
अष्टभुज	....	....

अब हम कह सकते हैं कि n भुजा वाले बहुभुज को एक उभयनिष्ठ शीर्ष वाले (n-2) त्रिभुजों में विभक्त किया जा सकता है। इसलिए n भुजा वाले बहुभुज के सभी अंतः कोणों का योग $= (n - 2) \times 180^o$ होगा।

उदाहरण–11. त्रिभुज के तीनों कोण क्रमशः $(2x+1)^\circ$, $(3x+6)^\circ$ और $(4x-16)^\circ$ हों तो त्रिभुज के प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है, अतः

$$(2x+1)^\circ+(3x+6)^\circ+(4x-16)^\circ=180^0$$
$$\Rightarrow 9x-9=180^o$$
$$\Rightarrow 9x=189^o$$
$$\Rightarrow x=21^o$$

अतः $(2x+1)=(2\times 21^o+1)=43^o$

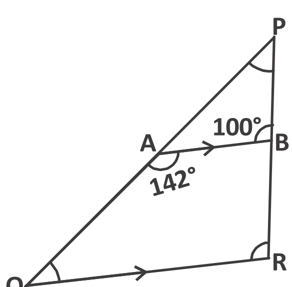
$(3x+6)=(3\times 21^o+6)=69^o$

$(4x-16)=(4\times 21^o-16)=68^o$

अब त्रिभुज के कोण क्रमशः 43^o, 69^o और 68^o हैं।

उदाहरण–12. दिए गए चित्र में $AB \parallel QR$, $\angle BAQ=142^o$ और $\angle ABP=100^o$ निम्न कोणों के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ (iii) $\angle QRP$



चित्र–38

हल : (i) त्रिभुज APB की भुजा PA, Q तक बढ़ाई गई है,

अतः बाह्य कोण प्रमेय से

$$\angle BAQ = \angle ABP + \angle APB$$
$$\Rightarrow 142^o = 100^o + \angle APB$$
$$\Rightarrow \angle APB = 142^o - 100^o$$
$$\Rightarrow \angle APB = 42^o$$

(ii) $\angle BAQ + \angle AQR = 180^o$

(सह अंतःकोणों का योग 180^oहोता है।)

$\Rightarrow 142^o + \angle AQR = 180^o$

$\Rightarrow \angle AQR = 180^o - 142^o$

$\Rightarrow \angle AQR = 38^o$

(iii) चूंकि $AB \parallel QR$ और PR तिर्यक रेखा है, अतः

$\angle QRP = \angle ABP$ (संगत कोण)

$\therefore \angle QRP = 100^o$

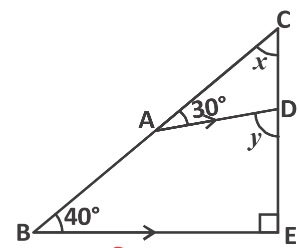
उदाहरण–13. दिए गए चित्र में यदि $BE \perp EC$, $\angle EBC = 40^o$, $\angle DAC = 30^o$ है, तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल : ΔEBC में,

$90^o + 40^o + x = 180^o$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

$\Rightarrow 130^o + x = 180^o$

$\Rightarrow x = 50^o$ .....(1)



चित्र–39

अब ΔADC में

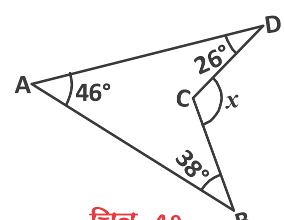
$\angle ADE = \angle DAC + \angle ACD$ (बाह्य कोण प्रमेय से)

$\Rightarrow y = 30^o + x$

$\Rightarrow y = 30^o + 50^o$ (समी. (1) से)

$\therefore y = 80^o$

उदाहरण–14. दिए गए चित्र–40 में x का मान ज्ञात कीजिए।



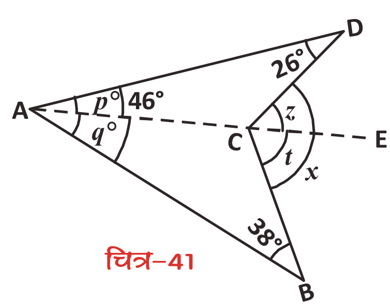
चित्र–40

हल : दिए गए चित्र में ABCD चतुर्भुज है। A और C को मिलाते हुए रेखाखण्ड खींचिए तथा इसे E तक बढ़ाइए। चित्र–41 की तरह

मान लीजिए $\angle DAE = p^o$

$\angle BAE = q^o, \angle DCE = z^o$

$\angle ECB = t^o$



चित्र–41

अतः ΔACD में बाह्य कोण प्रमेय से,

$$\angle DCE = \angle CAD + \angle ADC$$

$$z^o = p^o + 26^o \qquad .....(1)$$

पुनः ΔABC में

$$\angle BCE = \angle BAC + \angle ABC$$

$$t^o = q^o + 38^o \qquad .....(2)$$

समी. (1) और समी. (2) को जोड़ने पर

$$z^o + t^o = p^o + 26^o + q^o + 38^o$$

$$x = p + q + 64^\circ \qquad \left[\begin{array}{l} \because z^\circ + t^\circ = x \\ p + q = 46^\circ \end{array}\right]$$

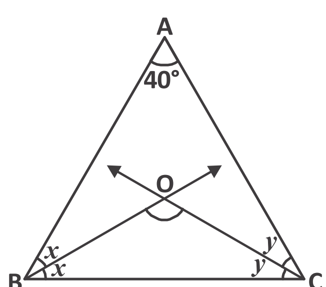
$$x = 46^\circ + 64^\circ$$

$$x = 110^\circ$$

उदाहरण–15. दिए गए चित्र में $\angle A = 40^o$ है। यदि BO और CO क्रमशः $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle BOC$ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि $\angle CBO = \angle ABO = x$ और $\angle BCO = \angle ACO = y$

($\because BO, \angle B$ की समद्विभाजक और $CO, \angle C$ की समद्विभाजक है।)



चित्र–42

तब , $\angle B = 2x, \angle C = 2y$

अतः त्रिभुज के कोण योग गुण से,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$$

$$\Rightarrow 40^o + 2x + 2y = 180^o$$

$$[\because \angle A = 40^o]$$

$$\Rightarrow 2(x + y) = 180^o - 40^o$$

$$\Rightarrow x + y = 70^o \qquad .....(1)$$

पुनः ΔBOC में त्रिभुज के कोण योग गुण से

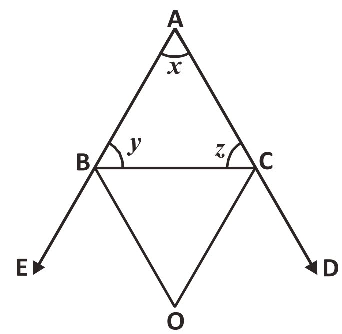
$$x + \angle BOC + y = 180^o$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 180^o - (x + y)$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 180^o - 70^o \qquad \text{(समी. (1) से)}$$

$$\therefore \angle BOC = 110^o$$

उदाहरण–16. दिए गए चित्र में ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः E और D तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle CBE$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक क्रमशः BO और CO बिंदु O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$ है।



चित्र–43

हल : किरण $BO, \angle CBE$ की समद्विभाजक है। अतः

$$\angle CBO = \frac{1}{2}\angle CBE$$

$$= \frac{1}{2}(180° - y)$$

$$= 90° - \frac{y}{2} \quad .....(1)$$

इसी तरह, किरण $CO, \angle BCD$ की समद्विभाजक है।

अतः $$\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$$

$$= \frac{1}{2}(180° - z) \quad = 90° - \frac{z}{2} \quad .....(2)$$

अब, त्रिभुज के कोण योग गुण से ΔBOC में

$$\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180° \quad .....(3)$$

समी. (1) और (2) से समी. (3) में मान रखने पर

$$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$$

$$\Rightarrow \angle BOC + 180° = 180° + \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$$

$$\therefore \angle BOC = \frac{1}{2}(z + y) \quad .....(4)$$

पुनः ΔABC में, त्रिभुज के कोण योग गुण से

$$x + y + z = 180°$$

$$y + z = 180° - x \quad .....(5)$$

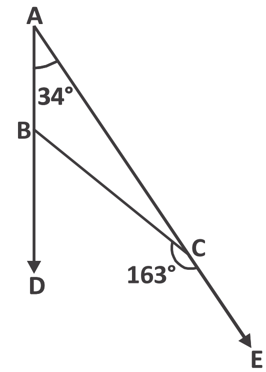
समी. (5) से समी. (4) में मान रखने पर

$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x)$$

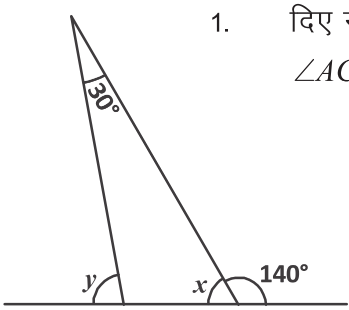
$$= 90^{\circ} - \frac{x}{2}$$

$$\angle BOC = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\angle BAC$$

प्रश्नावली – 9.3

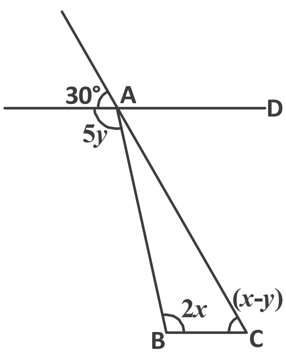


1. दिए गए चित्र में यदि $\angle BAC = 34^{\circ}$, $\angle BCE = 163^{\circ}$ हो तो $\angle ACB, \angle ABC$ और $\angle DBC$ ज्ञात कीजिए।



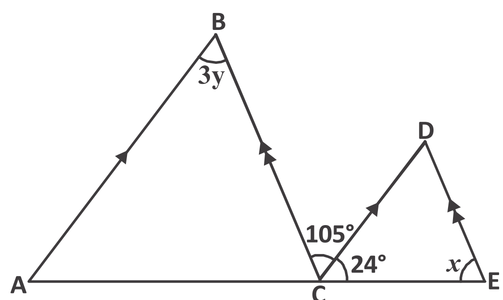
(i)

2. दी गई आकृतियों में x और y के मान ज्ञात कीजिए।



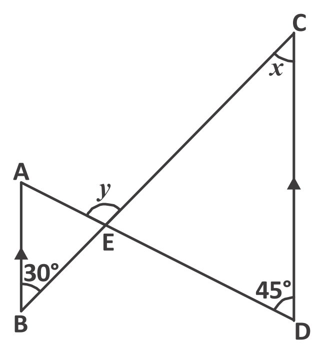
(ii)

(संकेत AD || BC)



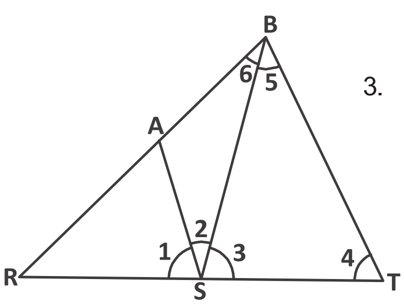
(iii)

(संकेत AB || CD, BC || DE)



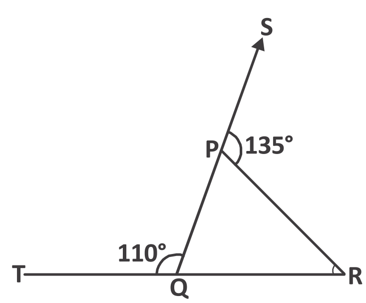
(iv)

(संकेत AB || CD)

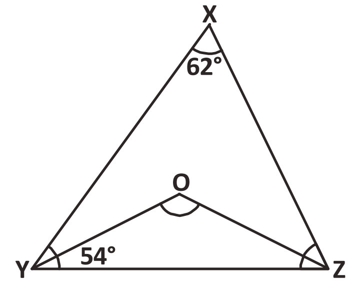


3. दिए गए चित्र में $AS \parallel BT$, $\angle 4 = \angle 5$ और $SB, \angle AST$ की समद्विभाजक है, तो $\angle 1$ की माप ज्ञात कीजिए।

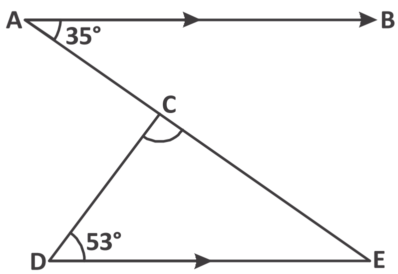
4. दी गई आकृति में त्रिभुज PQR की भुजाओं QP और RQ को क्रमशः बिंदुओं S और T तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle SPR = 135^{\circ}$, $\angle PQT = 110^{\circ}$ है, तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।



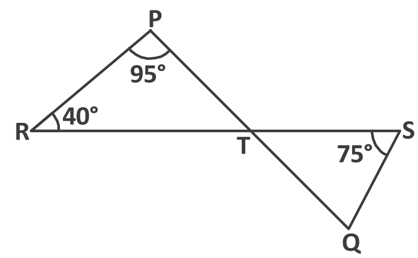
5. दी गई आकृति में $\angle ZXY = 62^\circ$ और $\angle XYZ = 54^\circ$ हैं। यदि YO और ZO क्रमशः ΔXYZ के $\angle XYZ$ और $\angle XZY$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle OZY$ और $\angle YOZ$ ज्ञात कीजिए।



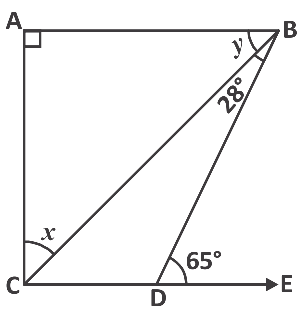
6. दी गई आकृति में यदि $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ और $\angle CDE = 53^\circ$ है, तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।



7. दिए गए चित्र में यदि रेखाएँ PQ और RS बिंदु T पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ और $\angle TSQ = 75^\circ$ है तो $\angle SQT$ ज्ञात कीजिए।

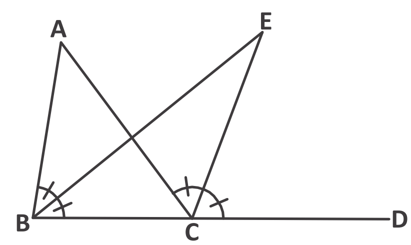


8. दी गई आकृति में यदि $AB \perp AC$, $AB \parallel CD$, $\angle CBD = 28^\circ$, $\angle BDE = 65^\circ$ है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।



9. दी गई आकृति में ΔABC की भुजा BC को D तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle ABC$ और $\angle ACD$ के समद्विभाजक बिंदु E पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\angle BEC = \frac{1}{2}\angle BAC$$



(संकेत– ΔABC के कोणों का योग = $\angle BEC$ के कोणों का योग एवं $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$)

हमने सीखा

1. यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हो, तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

2. यदि दो आसन्न कोणों का योग 180° है, तो उनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है वे एक रेखा बनाती हैं।

(उपर्युक्त दोनों अभिगृहीतों को मिलाकर रैखिक युग्म अभिगृहीत कहते हैं)

3. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

4. जब एक तिर्यक रेखा, दो समांतर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है तब–
   (i) संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
   (ii) एकांतर अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

5. दो रेखाएँ समांतर होती हैं, यदि एक तिर्यक रेखा इन रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि
   (i) संगत कोणों को कोई एक युग्म बराबर हो या
   (ii) एकांतर अंतः कोणों का कोई एक युग्म बराबर हो या
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का कोई एक युग्म संपूरक हो।

6. वे रेखाएँ, जो एक ही रेखा के समांतर होती है, परस्पर समांतर होती हैं।

7. एक त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180^o होता है।

8. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ाई जाए, तो इस तरह बना बाह्य कोण, अपने दोनों अंतःअभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है।

BK65NJ