25 त्रिकोणमिति
(Trigonometry)

'त्रिभुज की भुजाओं और कोणों से सम्बन्धित माप' को 'त्रिकोणमिति' कहते हैं। इस माप के लिए समकोण त्रिभुज के दोनों न्यूनकोणों के साथ उसकी भुजाओं के अनुपात (सम्बन्ध) का प्रयोग करते हैं, जिन्हें 'त्रिकोणमितीय अनुपात' (Trigonometric Ratio) या त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Function) कहते हैं। कुल छः त्रिकोणमितीय अनुपात होतें है- sin, cos, tan, cot, sec, तथा cosec समकोण त्रिभुज में इनका मान निम्नवत् होता है।

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}},\quad \cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}},\quad \tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}},\quad \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}},\quad \text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

कर्ण, लम्ब, आधार का निर्धारण

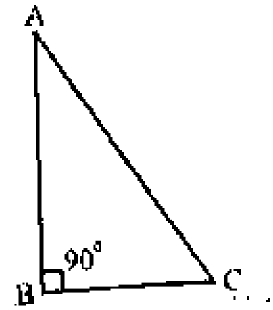
जिस Δ में एक कोण 90^0 का होता है, उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं। 90^0 के कोण के सामने वाली भुजा कर्ण कहलाती है, जो तीनों भुजाओं में सबसे बड़ी होती है। शेष दो भुजाओं में एक भुजा लम्ब और दूसरी भुजा आधार कहलाती है। लम्ब और आधार कोण के अनुसार बदलते रहते हैं। परन्तु कर्ण सदैव 90^0 के कोण के सामने वाली भुजा ही होती है।

जिस कोण का त्रिकोणमितीय फलन (sin, cos, tan, cot, sec, cosec) लिया जाता है उसके ठीक सामने वाली भुजा लम्ब और दूसरी भुजा आधार होती है। इस तथ्य को निम्नलिखित चित्र के माध्यम से स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है-

चित्र में ΔABC का $\angle B = 90^0$ अतः इसके सामने की भुजा AC कर्ण होगी। शेष दो भुजाओं AB और BC में किसी एक को लम्ब और दूसरी भुजा को आधार कहते हैं, वह इस प्रकार-

यदि कोण C का sin या cos या tan या cot या sec या cosec लें तो कोण C के सामने की भुजा AB लम्ब होगी और BC आधार इसी प्रकार यदि कोण A का sin या cos या tan या cot या sec या cosec लें तो $\angle A$ के सामने की भुजा BC लम्ब होगी और AB आधार।

इसी प्रकार $\angle C$ के त्रिकोणमितीय फलनों के मान निम्नवत् होंगे-



$$\sin C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC},\quad \cos C = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC},$$

$$\tan C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC},\quad \cot C = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{BC}{AB},$$

$$\sec C = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC},\quad \text{cosec}\,C = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{AB}$$

परन्तु इसी चित्र में $\angle A$ के त्रिकोणमितीय फलनों के मान इस प्रकार बनेंगे-

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC},\quad \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC},$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB},\quad \cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC},$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB},\quad \text{cosec}\,A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{BC}$$

Scanned by CamScanner

पाइथागोरस प्रमेय

समकोण त्रिभुज की तीनों भुजाओं से सम्बन्धित सूत्र पाइथागोरस प्रमेय से प्राप्त होता है, जो इस प्रकार है- "कर्ण पर बना वर्ग शेष दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।" अर्थात् किसी समकोण त्रिभुज में-

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$

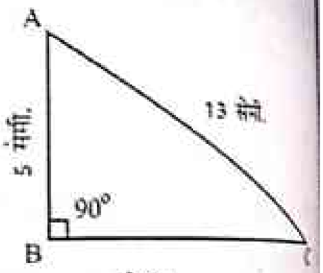
त्रिकोणमितीय फलनों में पारस्परिक सम्बन्ध-

(a) $\text{Sin}\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ (b) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ (c) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ (d) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(e) $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ (f) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ (g) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ (h) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1



सम्मुख चित्र में $\angle B = 90^0$, भुजा AB = 5 सेमी और कर्ण AC = 13 सेमी। तो $\angle C$ के सभी त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।

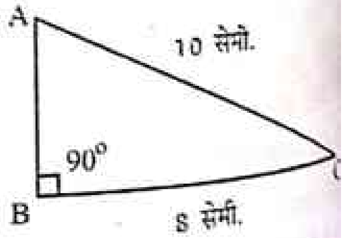
हल पाइथागोरस प्रमेय से $\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$

$\therefore\ 169 = 25 + \text{आधार}^2$, अतः $\text{आधार}^2 = 144 = 12^2$ या आधार = 12 सेमी

$\therefore\ \sin c = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{5}{13}$, $\cos c = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{12}{13}$, $\tan c = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{5}{12}$

$\cot c = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{12}{5}$, $\sec c = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{13}{12}$, $\text{cosec}\, c = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{13}{5}$,

उदाहरण-2



सामने के चित्र में $\angle B = 90$, कर्ण AC = 10 सेमी और भुजा BC = 8 सेमी तो $\angle A$ के सभी त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।

हल $AB^2 + 64 = 100$ या $AB^2 = 36 = 6^2$ अतः AB = 6 सेमी

$\therefore\ \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$,

$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, $\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$,

$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, $\text{cosec}\, A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

उदाहरण-3

यदि $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ तो $\sin\theta$ और $\tan\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ आधार = 1 और कर्ण = $\sqrt{5}$ सेमी

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2 = \text{कर्ण}^2$

$\therefore\ \text{लम्ब}^2 + 1 = 5 \Rightarrow \text{लम्ब}^2 = 4 = 2^2 \Rightarrow = 2$ सेमी

Scanned by CamScanner

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ और $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{2}{1} = 2$

उदाहरण-4

यदि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\sec\theta$ और $\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow$ लम्ब $= \sqrt{3}$ और कर्ण $= 2$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $(\sqrt{3})^2 +$ आधार$^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow 3 +$ आधार$^2 = 4$

$\therefore$ आधार$^2 = 4 - 3 = 1 = 1^2 \Rightarrow$ आधार $= 1$

$\therefore \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{2}{1} = 2$ और $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

उदाहरण-5

यदि $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो $\sin\theta$ और $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ लम्ब $= 1$ और आधार $= \sqrt{3}$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $1^2 + (\sqrt{3})^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow 1+3=$ कर्ण$^2 \Rightarrow$ कर्ण$^2 = 4 \Rightarrow$ कर्ण $= 2$

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{2}$ और $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण-6

यदि $\tan\theta = \frac{9}{40}$ तो $\sec\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\theta = \frac{9}{40} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ लम्ब $= 9$ और आधार $= 40$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $9^2 + 40^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow 81+1600 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow$ कर्ण$^2 = 1681 \Rightarrow$ कर्ण $= 41$

$\therefore \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{41}{40}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{41}{9}$

उदाहरण-7

यदि $\sec A = \frac{25}{24}$ तो $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sec A = \frac{25}{24} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ कर्ण $= 25$ और आधार $= 24$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, लम्ब$^2 +$ आधार$^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow$ लम्ब$^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ लम्ब$^2 + 576 = 625 \Rightarrow$ लम्ब$^2 = 49 = 7^2 \Rightarrow$ लम्ब $= 7$

$\therefore \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$ और $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$

$$\therefore \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{\frac{7}{25} + \frac{24}{25}}{\frac{7}{25} - \frac{24}{25}} = \frac{\frac{31}{25}}{-\frac{17}{25}} = \frac{31}{25} \times -\frac{25}{17} = -\frac{31}{17}$$

उदाहरण-8

यदि $\sin A = \frac{15}{17}$ तो $\frac{\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin A = \frac{15}{17} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow$ लम्ब $= 15$ और कर्ण $= 17$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

Scanned by CamScanner

$15^2 +$ अधार$^2 = 17^2 \Rightarrow$ अधार$^2 = 289 - 225 = 64 = 8^2 \Rightarrow$ आधार $= 8$

$\therefore \operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{17}{15}$ और $\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{8}{15}$

$$\therefore \frac{\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A} = \frac{\frac{17}{15} + \frac{8}{15}}{\frac{17}{15} - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{25}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{25}{15} \times \frac{15}{9} = \frac{25}{9}$$

उदाहरण-9

यदि $\tan A = \frac{5}{12}$ तो $\frac{\sin A + \cos A - \tan A}{\sec A + \operatorname{cosec} A - \cot A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$\tan A = \frac{5}{12} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ लम्ब $= 5$ और आधार $= 12$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, कर्ण$^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 \Rightarrow$ कर्ण $= 13$

$$\therefore \frac{\sin A + \cos A - \tan A}{\sec A + \operatorname{cosec} A - \cot A}$$

$$= \frac{\frac{5}{13} + \frac{12}{13} - \frac{5}{12}}{\frac{13}{12} + \frac{13}{5} - \frac{12}{5}} = \frac{\frac{17}{13} - \frac{5}{12}}{\frac{13}{12} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{204 - 65}{13 \times 12}}{\frac{65 + 12}{12 \times 5}} = \frac{\frac{139}{13 \times 12}}{\frac{77}{12 \times 5}} = \frac{139}{13 \times 12} \times \frac{12 \times 5}{77} = \frac{695}{1001} \Rightarrow Ans$$

उदाहरण-10

यदि $\sec A = \frac{5}{4}$ तो $\frac{4\tan A + 3\cot A - 5\sin A}{5\sin A + 4\sec A - 8\tan A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sec A = \frac{5}{4} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ कर्ण $= 5$ और आधार $= 4$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, लम्ब$^2 + 16 = 25 \Rightarrow$ लम्ब$^2 = 9 = 3^2 \Rightarrow$ लम्ब $= 3$

$$\therefore \frac{4\tan A + 3\cot A - 5\sin A}{5\sin A + 4\sec A - 8\tan A} = \frac{4 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{4}{3} - 5 \times \frac{3}{5}}{5 \times \frac{3}{5} + 4 \times \frac{5}{4} - 8 \times \frac{3}{4}} = \frac{3 + 4 - 3}{3 + 5 + (-6)} = \frac{4}{2} = 2$$

मानक सहरूप्यता (Standerd Identities) या मानक सर्वसमिकाएं

एक से अधिक चरों वाले उस समीकरण को सर्वसमिका कहते हैं जो उक्त चरों के सभी मानों से सन्तुष्ट हो जाता है। समीकरण के सन्तुष्ट होने का अर्थ यह है कि चर का मान रखने पर समीकरण के बायें पक्ष और दायें पक्ष का मान बराबर आये। त्रिकोणमिति में मूलभूत सर्वसमिकाएं (मानक सर्वसमिकाएं) निम्नलिखित हैं-

(1) $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (3) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

इनसे हम निम्नलिखित अन्य सूत्र प्राप्त कर सकते हैं-

(1) $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ से $Sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ या $\cos^2 = 1 - \sin^2\theta$

(2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ से $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ या $\sec^2 - \tan^2\theta = 1$

(3) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ से $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$ या $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1

यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ तो $\sec\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ से $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

Scanned by CamScanner

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ और $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{2}{1} = 2$

उदाहरण-4

यदि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\sec\theta$ और $\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow$ लम्ब $= \sqrt{3}$ और कर्ण $= 2$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $(\sqrt{3})^2 +$ आधार$^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow 3 +$ आधार$^2 = 4$

$\therefore$ आधार$^2 = 4 - 3 = 1 = 1^2 \Rightarrow$ आधार $= 1$

$\therefore \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{2}{1} = 2$ और $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

उदाहरण-5

यदि $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो $\sin\theta$ और $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ लम्ब $= 1$ और आधार $= \sqrt{3}$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $1^2 + (\sqrt{3})^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow 1+3 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow$ कर्ण$^2 = 4 \Rightarrow$ कर्ण $= 2$

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{2}$ और $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण-6

यदि $\tan\theta = \frac{9}{40}$ तो $\sec\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\theta = \frac{9}{40} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ लम्ब $= 9$ और आधार $= 40$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $9^2 + 40^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow 81+1600 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow$ कर्ण$^2 = 1681 \Rightarrow$ कर्ण $= 41$

$\therefore \sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{41}{40}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{41}{9}$

उदाहरण-7

यदि $\sec A = \frac{25}{24}$ तो $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sec A = \frac{25}{24} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ कर्ण $= 25$ और आधार $= 24$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, लम्ब$^2 +$ आधार$^2 =$ कर्ण$^2 \Rightarrow$ लम्ब$^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ लम्ब$^2 + 576 = 625 \Rightarrow$ लम्ब$^2 = 49 = 7^2 \Rightarrow$ लम्ब $= 7$

$\therefore \sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{7}{25}$ और $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{24}{25}$

$$\therefore \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{\frac{7}{25} + \frac{24}{25}}{\frac{7}{25} - \frac{24}{25}} = \frac{\frac{31}{25}}{-\frac{17}{25}} = \frac{31}{25} \times -\frac{25}{17} = -\frac{31}{17}$$

उदाहरण-8

यदि $\sin A = \frac{15}{17}$ तो $\frac{\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin A = \frac{15}{17} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \Rightarrow$ लम्ब $= 15$ और कर्ण $= 17$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

Scanned by CamScanner

$15^2 +$ अधार$^2 = 17^2 \Rightarrow$ अधार$^2 = 289 - 225 = 64 = 8^2 \Rightarrow$ आधार $= 8$

$\therefore \ \operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{17}{15}$ और $\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{8}{15}$

$$\therefore \ \frac{\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A} = \frac{\frac{17}{15} + \frac{8}{15}}{\frac{17}{15} - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{25}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{25}{15} \times \frac{15}{9} = \frac{25}{9}$$

उदाहरण-9

यदि $\tan A = \frac{5}{12}$ तो $\frac{\sin A + \cos A - \tan A}{\sec A + \operatorname{cosec} A - \cot A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$\tan A = \frac{5}{12} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ लम्ब $= 5$ और आधार $= 12$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, कर्ण$^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 \Rightarrow$ कर्ण $= 13$

$$\therefore \ \frac{\sin A + \cos A - \tan A}{\sec A + \operatorname{cosec} A - \cot A}$$

$$= \frac{\frac{5}{13} + \frac{12}{13} - \frac{5}{12}}{\frac{13}{12} + \frac{13}{5} - \frac{12}{5}} = \frac{\frac{17}{13} - \frac{5}{12}}{\frac{13}{12} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{204-65}{13 \times 12}}{\frac{65+12}{12 \times 5}} = \frac{\frac{139}{13 \times 12}}{\frac{77}{12 \times 5}} = \frac{139}{13 \times 12} \times \frac{12 \times 5}{77} = \frac{695}{1001}$$

उदाहरण-10

यदि $\sec A = \frac{5}{4}$ तो $\frac{4\tan A + 3\cot A - 5\sin A}{5\sin A + 4\sec A - 8\tan A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sec A = \frac{5}{4} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} \Rightarrow$ कर्ण $= 5$ और आधार $= 4$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, लम्ब$^2 + 16 = 25 \Rightarrow$ लम्ब$^2 = 9 = 3^2 \Rightarrow$ लम्ब $= 3$

$$\therefore \ \frac{4\tan A + 3\cot A - 5\sin A}{5\sin A + 4\sec A - 8\tan A} = \frac{4 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{4}{3} - 5 \times \frac{3}{5}}{5 \times \frac{3}{5} + 4 \times \frac{5}{4} - 8 \times \frac{3}{4}} = \frac{3 + 4 - 3}{3 + 5 + (-6)} = \frac{4}{2} = 2$$

मानक सहरूप्यता (Standerd Identities) या मानक सर्वसमिकाएं

एक से अधिक चरों वाले उस समीकरण को सर्वसमिका कहते हैं जो उक्त चरों के सभी मानों सन्तुष्ट हो जाता है। समीकरण के सन्तुष्ट होने का अर्थ यह है कि चर का मान रखने पर समीकरण बायें पक्ष और दायें पक्ष का मान बराबर आये। त्रिकोणमिति में मूलभूत सर्वसमिकाएं (मानक सर्वसमिका निम्नलिखित हैं-

(1) $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ (3) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

इनसे हम निम्नलिखित अन्य सूत्र प्राप्त कर सकते हैं-

(1) $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ से $Sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ या $\cos^2 = 1 - \sin^2\theta$

(2) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ से $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ या $\sec^2 - \tan^2\theta = 1$

(3) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ से $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$ या $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1

यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ तो $\sec\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ से $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

Scanned by CamScanner

या $\frac{9}{25}+\cos^2\theta=1$ या $\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$

अत: $\cos\theta=\frac{4}{5}$ से $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}$

उदाहरण-2

यदि $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ से $1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\sec^2\theta$

या $1+\frac{1}{3}=\sec^2\theta \Rightarrow \frac{4}{3}=\sec^2\theta$ या $\sec\theta=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरण-3

$\frac{\cot^2 A-1}{1-\tan^2 A}$ का मान क्या होगा?

हल $\frac{\cot^2 A-1}{1-\tan^2 A}=\frac{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}=\frac{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos^2-\sin^2 A}{\cos^2 A}}$

$$\frac{(\cos^2 A-\sin^2 A)}{\sin^2 A}\times\frac{\cos^2 A}{(\cos^2 A-\sin^2 A)}=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\cot^2 A$$

उदाहरण-4

$\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sec A+\tan A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sec A+\tan A}=\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}}$

$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\frac{(1+\sin A)}{\cos A}}=\frac{1}{\cos A}-\frac{\cos A}{(1+\sin A)}=\frac{1+\sin A-\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 A+\sin A}{\cos A(1+\sin A)}=\frac{\sin^2 A+\sin A}{\cos A(1+\sin A)}=\frac{\sin A(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}=\tan A$$

उदाहरण-5

$\frac{1}{\sec A-\tan A}-\frac{1}{\cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{1}{\sec A-\tan A}-\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}}-\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\frac{(1-\sin A)}{\cos A}}-\frac{1}{\cos A}$

$$=\frac{\cos A}{(1-\sin A)}-\frac{1}{\cos A}=\frac{\cos^2 A-1+\sin A}{(1-\sin A)\cos A}=\frac{\sin A-1+\cos^2 A}{(1-\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-(1-\cos^2 A)}{(1-\sin A).\cos A}=\frac{\sin A-\sin^2 A}{(1-\sin A).\cos A}=\frac{\sin A(1-\sin A)}{(1-\sin A)\cos A}=\tan A$$

Scanned by CamScanner

उदाहरण-6

$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

$=\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A.\cos A+\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A.\cos A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)+(\sin^2 A+\cos^2 A)=1+1=2$

उदाहरण-7

$\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\operatorname{cos\,ec}\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{2\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}}$

$$\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$

उदाहरण-8

$\tan\theta+\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$

$$=\frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}.\frac{1}{\cos\theta}=\operatorname{cosec}\theta.\sec\theta$$

उदाहरण-9

$\cot\theta-\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$

$$=\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}=\frac{2.\cos 2\theta}{2\sin\theta.\cos\theta}=\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=2\cot 2\theta$$

उदाहरण-10

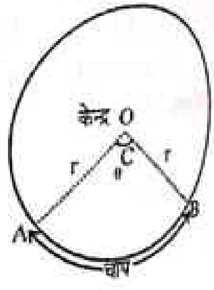
$\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos 2\theta+\cos\theta+1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos 2\theta+\cos\theta+1}=\frac{2\sin\theta.\cos\theta+\sin\theta}{2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

डिग्री (अंश) और रेडियन माप [Degree And Radian Measures]

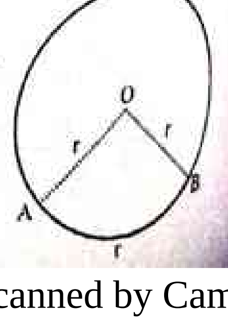
कोण मापने की वृत्तीय पद्धति में कोण की इकाई रेडियन होती है। किसी बिन्दु के चारों ओर 360^0 का कोण बनता है, जो रेडियन इकाई में 2π के बराबर होता है। अतः 2π रेडियन $=360^0$ अर्थात् π रेडियन $=180^0$ । रेडियन का संकेत c होता है इसलिए $\pi^c=180^0$।



वृत्त के केन्द्र पर बना कोण- किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण (रेडियन में), चाप और त्रिज्या की लम्बाइयों के अनुपात के बराबर होता है।

अर्थात् केन्द्र कोण $=\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लम्बाई}}$ अर्थात् $\theta^c=\frac{AB}{r}$

1 रेडियन- वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई वाले चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण 1 रेडियन कहलाता है। जैसे चित्र में यदि चाप AB की लम्बाई त्रिज्या r के बराबर हो तो केन्द्र पर बना कोण AOB की माप 1 रेडियन होगी।



Scanned by CamScanner

या $\frac{9}{25}+\cos^2\theta=1$ या $\cos^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$

अतः $\cos\theta=\frac{4}{5}$ से $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}$

उदाहरण-2

यदि $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ से $1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\sec^2\theta$

या $1+\frac{1}{3}=\sec^2\theta \Rightarrow \frac{4}{3}=\sec^2\theta$ या $\sec\theta=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरण-3

$\frac{\cot^2 A-1}{1-\tan^2 A}$ का मान क्या होगा?

हल $\frac{\cot^2 A-1}{1-\tan^2 A}=\frac{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}=\frac{\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin^2 A}}{\frac{\cos^2-\sin^2 A}{\cos^2 A}}$

$$\frac{(\cos^2 A-\sin^2 A)}{\sin^2 A}\times\frac{\cos^2 A}{(\cos^2 A-\sin^2 A)}=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\cot^2 A$$

उदाहरण-4

$\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sec A+\tan A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\sec A+\tan A}=\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}}$

$$=\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\frac{(1+\sin A)}{\cos A}}=\frac{1}{\cos A}-\frac{\cos A}{(1+\sin A)}=\frac{1+\sin A-\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 A+\sin A}{\cos A(1+\sin A)}=\frac{\sin^2 A+\sin A}{\cos A(1+\sin A)}=\frac{\sin A(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}=\tan A$$

उदाहरण-5

$\frac{1}{\sec A-\tan A}-\frac{1}{\cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{1}{\sec A-\tan A}-\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}}-\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\frac{(1-\sin A)}{\cos A}}-\frac{1}{\cos A}$

$$=\frac{\cos A}{(1-\sin A)}-\frac{1}{\cos A}=\frac{\cos^2 A-1+\sin A}{(1-\sin A)\cos A}=\frac{\sin A-1+\cos^2 A}{(1-\sin A)\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-(1-\cos^2 A)}{(1-\sin A).\cos A}=\frac{\sin A-\sin^2 A}{(1-\sin A).\cos A}=\frac{\sin A(1-\sin A)}{(1-\sin A)\cos A}=\tan A$$

Scanned by CamScanner

उदाहरण-6

$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2$

$=\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A.\cos A+\sin^2 A+\cos^2 A-2\sin A.\cos A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)+(\sin^2 A+\cos^2 A)=1+1=2$

उदाहरण-7

$\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}{2\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}}$

$$\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$

उदाहरण-8

$\tan\theta+\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$

$$=\frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}.\frac{1}{\cos\theta}=\operatorname{cosec}\theta.\sec\theta$$

उदाहरण-9

$\cot\theta-\tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$

$$=\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}=\frac{2.\cos 2\theta}{2\sin\theta.\cos\theta}=\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=2\cot 2\theta$$

उदाहरण-10

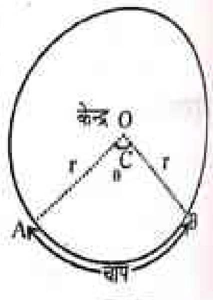
$\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos 2\theta+\cos\theta+1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos 2\theta+\cos\theta+1}=\frac{2\sin\theta.\cos\theta+\sin\theta}{2\cos^2\theta-1+\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

डिग्री (अंश) और रेडियन माप [Degree And Radian Measures]

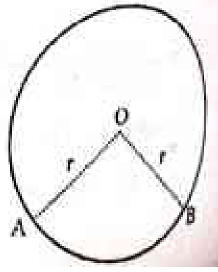
कोण मापने की वृत्तीय पद्धति में कोण की इकाई रेडियन होती है। किसी बिन्दु के चारों ओर 360^0 का कोण बनता है, जो रेडियन इकाई में 2π के बराबर होता है। अतः 2π रेडियन $=360^0$ अर्थात् π रेडियन $=180^0$ । रेडियन का संकेत c होता है इसलिए $\pi^c=180^0$।



वृत्त के केन्द्र पर बना कोण- किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण (रेडियन में), चाप और त्रिज्या की लम्बाइयों के अनुपात के बराबर होता है।

अर्थात् केन्द्र कोंण $=\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लम्बाई}}$ अर्थात् $\theta^c=\frac{AB}{r}$

1 रेडियन- वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई वाले चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण 1 रेडियन कहलाता है। जैसे चित्र में यदि चाप AB की लम्बाई त्रिज्या r के बराबर हो तो केन्द्र पर बना कोण AOB की माप 1 रेडियन होगी।



Scanned by CamScanner

चूंकि $\pi^c = 180^0$ अतः $1^c = \left(\frac{180^0}{\pi}\right) = \left(\frac{180 \times 7}{22}\right)^0$ = 57 अंश 16 मिनट 21.8 सेकण्ड

$\therefore 1^c = 57^0 16' 21.8''$

किसी बहुभुज के कोण- किसी बहुभुज में (जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षष्ठभुज इत्यादि) दो प्रकार के कोण होते हैं- (1) अन्तःकोण (2) बहिष्कोण। बहुभुज में जितनी भुजाएं होती हैं, उतने ही अन्तः कोण और उतने ही बहिष्कोण बनते हैं।

(1) बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग = (भुजाओं की संख्या $\times$ 2 – 4) समकोण
= (2n – 4) समकोण = $(2n - 4) \times 90^0$

जहां n बहुभुज में कुल भुजाओं की संख्या है।

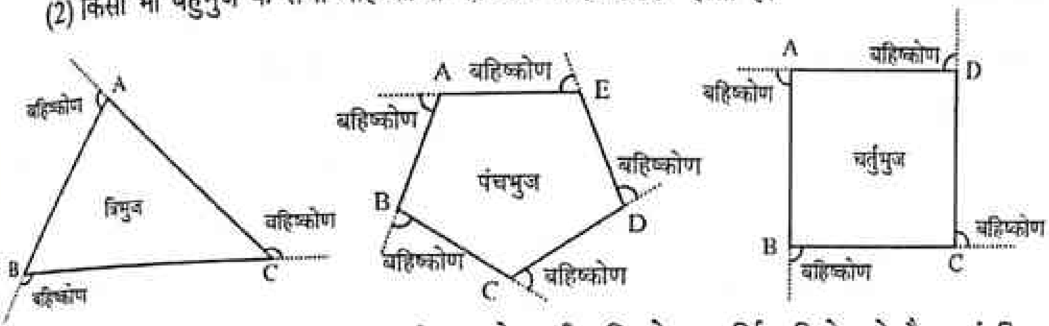
जैसे (a) त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग = $(2 \times 3 - 4) \times 90^0 = 2 \times 90^0 = 180^0$

(b) चतुर्भुज के चारों अतः कोणों का योग = $(2 \times 4 - 4) \times 90^0 = 4 \times 90^0 = 360^0$

(c) पंचभुज के पांचों अन्तः कोणों का योग = $(2 \times 5 - 4) \times 90^0 = 6 \times 90^0 = 540^0$

(d) षष्ठभुज के सभी, अन्तः कोणों का योग = $(2 \times 6 - 4) \times 90^0 = 8 \times 90^0 = 720^0$

(2) किसी भी बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग सदैव 360^0 होता है।



उपर्युक्त चित्रों में क्रमशः त्रिभुज तथा पंचभुज के सभी बहिष्कोण प्रदर्शित किये गये है। जहां त्रिभुज ABC के सभी तीनों बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

चतुर्भुज ABCD के सभी चारों बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

पंचभुज ABCDE के सभी पांचों बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

इसी प्रकार षट्भुज के सभी छः बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1 42 सेमी त्रिज्या के केन्द्र पर 33 सेमी लम्बाई का चाप कितना कोण अन्तरित करेगा?

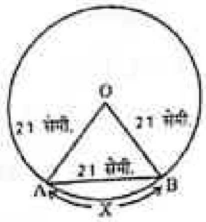
हल : केन्द्र पर बना कोण $= \left(\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लम्बाई}}\right)$ रेडियन

$= \frac{33}{42}$ रेडियन $= \frac{11}{14}$ रेडियन

चूंकि π रेडियन = 180^0 अर्थात $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

अतः अंश में केन्द्र कोण $= \left(\frac{11}{14} \times \frac{180}{\pi}\right)^0 = \left(\frac{11}{14} \times \frac{180^0}{22} \times 7\right)^0 = 45^0$

उदाहरण-2 21 सेमी त्रिज्या के वृत्त में 21 सेमी लम्बी जीवा खींची जाय तो उसके चाप की लम्बाई कितनी होगी?



हलः चित्र में त्रिज्या OA = OB = 21 सेमी जीवा AB = 21 सेमी

अतः Δ OAB समबाहु त्रिभुज हुआ, जिसका प्रत्येक कोण 60^0 का होगा।

$\therefore$ केन्द्र कोण AOB = 60^0 = $60 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन = $\frac{\pi}{3}$ रेडियन

Scanned by CamScanner

चूंकि जीवा AB का AXB चाप है अतः केन्द्र कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लम्बाई}}$ से

$\frac{\pi}{3} = \frac{AXB}{21} \Rightarrow AXB = \frac{\pi \times 21}{3} = \frac{22}{7} \times 7 = 22$ सेमी

उदाहरण-3 एक खिलाड़ी किसी वृत्ताकार पथ पर दौड़ता है यदि पथ की त्रिज्या 70 मी० है तो पथ के केन्द्र पर 36^0 का कोण बनाने तक वह कितनी दूरी तय कर लेगा?

हल- चित्र के अनुसार यदि खिलाड़ी स्थान A से दौड़ता है तो केन्द्र पर 36^0 का कोण बनाने तक वह B तक की दूरी AB अर्थात् चाप को तय करेगा।

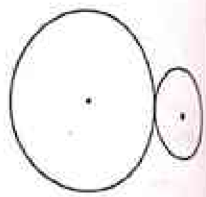
चूंकि $1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ रेडियन अतः $36^0 = \left(36 \times \frac{\pi}{180}\right)$ रेडियन $= \frac{\pi}{5}$ रेडियन

अब केन्द्र कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ से $\frac{\pi}{5} = \frac{\text{चाप } AB}{70} \Rightarrow AB = \frac{22}{7} \times \frac{70}{5} = 44$ मी०

उदाहरण-4 6 सेमी व्यास का एक वृत्त 21 सेमी व्यास के दूसरे वृत्त को स्पर्श करते हुए घूमता है। यदि बड़ा वृत्त स्थिर रहता है तो छोटावृत्त एक पूरा चक्कर घूमने में उसके केन्द्र पर कितने रेडियन का कोण बनायेगा?

हल : अतः चाप की लम्बाई = छोटे वृत्त की परिध $= 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times \frac{6}{2} = 6\pi$ सेमी

अब बड़े वृत्त के केन्द्र पर बना कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}} = \left(\frac{6\pi}{\frac{21}{2}}\right)$



रेडियन $= \frac{6\pi \times 2}{21} = \frac{4\pi}{7}$ रेडियन

उदाहरण-5 निम्नलिखित में प्रत्येक आकृति के एक बहिष्कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए- (a) समबाहु त्रिभुज (b) वर्ग (c) समपंचभुज (d) समषट्भुज

हल: (a) समबाहु त्रिभुज के तीनों बहिष्कोणों का योग $= 360^0$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज का एक बहिष्कोण $= \frac{360}{3} = 120^0 = \left(120 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^c$

[क्योंकि $180^0 = \pi$ रेडियन या $1^0 = \frac{\pi}{180}$ रेडियन]

(b) वर्ग के चारों बहिष्कोणों का योग = 360^0

$\therefore$ एक बहिष्कोण $= \frac{360^0}{4} = 90^0 = \left(90 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

(c) समपंचभुज के पांचों बहिष्कोणों का योग = 360^0

$\therefore$ एक बहिष्कोण $= \frac{360^0}{5} = 72^0 = \left(72 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2\pi}{5}\right)^c$

(d) समषट्भुज के सभी 6 बहिष्कोणों का योग $= 360^0$

$\therefore$ एक बहिष्कोण $= \frac{360^0}{6} = 60^0 = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$

उदाहरण-6 निम्नलिखित में प्रत्येक आकृति के एक अन्तः कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए- (a) समबाहु त्रिभुज (b) आयत (c) समपंचभुज (d) समषट्भुज

हल: किसी भी बहुभुज के सभी कोणों का योग $= (2n-4) \times 90^0$ जहां n भुजाओं की संख्या है।

(a) समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = $(2 \times 3 - 4) \times 90^0 = 2 \times 90^0 = 180^0$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज का एक अंतः कोण $= \frac{180^0}{3} = 60^0 = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$

(b) आयत के चारों अन्तः कोणों का योग $= (2 \times 4 - 4) \times 90^0 = 360^0$

Scanned by CamScanner

चूंकि $\pi^c = 180^0$ अतः $1^c = \left(\frac{180^0}{\pi}\right) = \left(\frac{180 \times 7}{22}\right)^0$ = 57 अंश 16 मिनट 21.8 सेकण्ड

$1^c = 57^0 16' 21.8''$

किसी बहुभुज के कोण-किसी बहुभुज में (जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षष्ठभुज इत्यादि) दो प्रकार के कोण होते हैं- (1) अन्त:कोण (2) बहिष्कोण। बहुभुज में जितनी भुजाएं होती हैं, उतने ही अन्त: कोण और उतने ही बहिष्कोण बनते हैं।

(1) बहुभुज के सभी अन्त: कोणों का योग = (भुजाओं की संख्या × 2 – 4) समकोण
= (2n – 4) समकोण = $(2n - 4) \times 90^0$

जहां n बहुभुज में कुल भुजाओं की संख्या है।

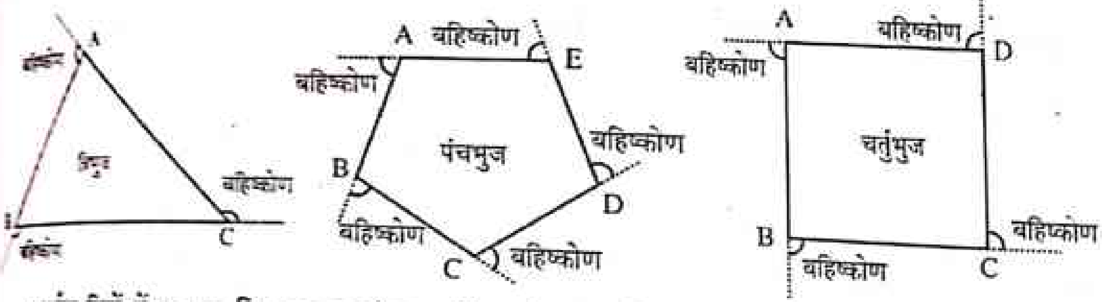
जैसे (a) त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग = $(2 \times 3 - 4) \times 90^0 = 2 \times 90^0 = 180^0$

(b) चतुर्भुज के चारों अत: कोणों का योग = $(2 \times 4 - 4) \times 90^0 = 4 \times 90^0 = 360^0$

(c) पंचभुज के पांचों अन्त: कोणों का योग = $(2 \times 5 - 4) \times 90^0 = 6 \times 90^0 = 540^0$

(d) षष्ठभुज के सभी, अन्त: कोणों का योग = $(2 \times 6 - 4) \times 90^0 = 8 \times 90^0 = 720^0$

(2) किसी भी बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग सदैव 360^0 होता है।



उपर्युक्त चित्रों में क्रमशः त्रिभुज तथा पंचभुज के सभी बहिष्कोण प्रदर्शित किये गये है। जहां त्रिभुज ABC के सभी तीनों बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

चतुर्भुज ABCD के सभी चारों बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

पंचभुज ABCDE के सभी पांचों बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

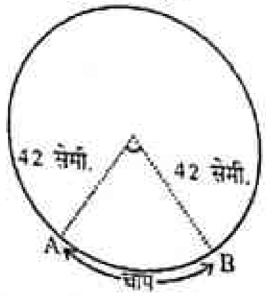
इसी प्रकार षट्भुज के सभी छ: बहिष्कोणों का योग = 360^0 = 4 समकोण

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1 42 सेमी त्रिज्या के केन्द्र पर 33 सेमी लम्बाई का चाप कितना कोण अन्तरित करेगा?

हल : केन्द्र पर बना कोण = $\left(\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लम्बाई}}\right)$ रेडियन

$= \frac{33}{42}$ रेडियन $= \frac{11}{14}$ रेडियन



चूंकि π रेडियन = 180^0 अर्थात $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

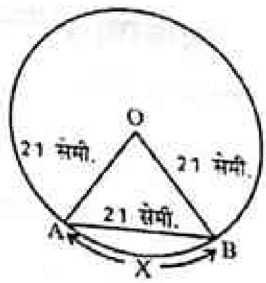
अतः अंश में केन्द्र कोण = $\left(\frac{11}{14} \times \frac{180}{\pi}\right)^0 = \left(\frac{11}{14} \times \frac{180^0}{22} \times 7\right)^0 = 45^0$

उदाहरण-2 21 सेमी त्रिज्या के वृत्त में 21 सेमी लम्बी जीवा खींची जाय तो उसके चाप की लम्बाई कितनी होगी?

हल: चित्र में त्रिज्या OA = OB = 21 सेमी जीवा AB = 21 सेमी

अतः Δ OAB समबाहु त्रिभुज हुआ, जिसका प्रत्येक कोण 60^0 का होगा।

∴ केन्द्र कोण AOB = $60^0 = 60 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= \frac{\pi}{3}$ रेडियन

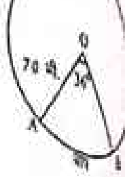


Scanned by CamScanner

चूंकि जीवा AB का AXB चाप है अतः केन्द्र कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या की लम्बाई}}$ से

$\frac{\pi}{3} = \frac{AXB}{21} \Rightarrow AXB = \frac{\pi \times 21}{3} = \frac{22}{7} \times 7 = 22$ सेमी

उदाहरण-3 एक खिलाड़ी किसी वृत्ताकार पथ पर दौड़ता है यदि पथ की त्रिज्या 70 मी० है। पथ के केन्द्र पर 36^0 का कोण बनाने तक वह कितनी दूरी तय कर लेगा?



हल- चित्र के अनुसार यदि खिलाड़ी स्थान A से दौड़ता है तो केन्द्र पर 36^0 का कोण बनाने तक वह B तक की दूरी AB अर्थात् चाप को तय करेगा।

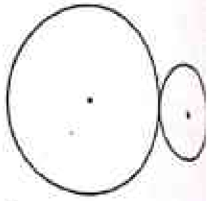
चूंकि $1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ रेडियन अतः $36^0 = \left(36 \times \frac{\pi}{180}\right)$ रेडियन $= \frac{\pi}{5}$ रेडियन

अब केन्द्र कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ से $\frac{\pi}{5} = \frac{\text{चाप } AB}{70} \Rightarrow AB = \frac{22}{7} \times \frac{70}{5} = 44$ मी०

उदाहरण-4 6 सेमी व्यास का एक वृत्त 21 सेमी व्यास के दूसरे वृत्त को स्पर्श करते हुए घूम है। यदि बड़ा वृत्त स्थिर रहता है तो छोटावृत्त एक पूरा चक्कर घूमने में उसके केन्द्र पर कितने रेडियन का कोण बनायेगा?

हल : अतः चाप की लम्बाई = छोटे वृत्त की परिध $= 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times \frac{6}{2} = 6\pi$ सेमी

अब बड़े वृत्त के केन्द्र पर बना कोण $= \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की त्रिज्या}} = \left(\frac{6\pi}{\frac{21}{2}}\right)$



रेडियन $= \frac{6\pi \times 2}{21} = \frac{4\pi}{7}$ रेडियन

उदाहरण-5 निम्नलिखित में प्रत्येक आकृति के एक बहिष्कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए- (a) समबाहु त्रिभुज (b) वर्ग (c) समपंचभुज (d) समषट्भुज

हलः (a) समवाहु त्रिभुज के तीनों वहिष्कोणों का योग $= 360^0$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज का एक बहिष्कोण $= \frac{360}{3} = 120^0 = \left(120 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^c$

[क्योंकि $180^0 = \pi$ रेडियन या $1^0 = \frac{\pi}{180}$ रेडियन]

(b) वर्ग के चारों बहिष्कोणों का योग $= 360^0$

$\therefore$ एक वहिष्कोण $= \frac{360^0}{4} = 90^0 = \left(90 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

(c) समपंचभुज के पांचों बहिष्कोणों का योग $= 360^0$

$\therefore$ एक वहिष्कोण $= \frac{360^0}{5} = 72^0 = \left(72 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2\pi}{5}\right)^c$

(d) समषट्भुज के सभी 6 वहिष्कोणों का योग $= 360^0$

$\therefore$ एक बहिष्कोण $= \frac{360^0}{6} = 60^0 = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$

उदाहरण-6 निम्नलिखित में प्रत्येक आकृति के एक अन्तः कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए- (a) समवाहु त्रिभुज (b) आयत (c) समपंचभुज (d) समषट्भुज

हलः किसी भी बहुभुज के सभी कोणों का योग $= (2n-4) \times 90^0$ जहां n भुजाओं की संख्या हैं।

(a) समवाहु त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= (2 \times 3 - 4) \times 90^0 = 2 \times 90^0 = 180^0$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज का एक अंतः कोण $= \frac{180^0}{3} = 60^0 = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$

(b) आयत के चारों अन्तः कोणों का योग $= (2 \times 4 - 4) \times 90^0 = 360^0$

Scanned by CamScanner

$\therefore$ एक अन्तः कोण $= \frac{360^0}{4} = 90^0 = \left(90 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

(c) समपंचभुज के पांचों अन्तः कोणों का योग $= (2\times5-4)\times 90^0 = 540^0$

$\therefore$ एक अन्तः कोण $= \frac{540^0}{5} = 108^0 = \left(108 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{3\pi}{5}\right)^c$

(d) समषट्भुज के सभी 6 अन्तः कोणों का योग $= (2\times6-4)\times 90^0 = 720^0$

$\therefore$ एक अन्तः कोण $= \frac{720^0}{6} = 120^0 = \left(120 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^c$

उदाहरण-7 एक समकोण त्रिभुज में लम्ब और आधार बराबर लम्बाई के हैं। न्यूनकोणों का मान रेडियन इकाई में ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि समकोण त्रिभुज में लम्ब और आधार बराबर लम्बाई के हैं। अतः दोनों न्यूनकोण 45^0 45^0 के होंगे, क्यों कि एक कोण 90^0 का है।

$\therefore$ प्रत्येक न्यूनकोण का मान $= 45^0 = \left(45 \times \frac{\pi}{180^0}\right)^c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c$

उदाहरण-8 किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों में अन्तर 10^0 है। प्रत्येक न्यूनकोण का मान रेडियन इकाई में ज्ञात कीजिए।

हल- माना दोनों न्यूनकोण क्रमशः α तथा β

$\therefore \alpha - \beta = 10^0$ —(1) और $\alpha + \beta = 90^0$ —(2)

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर $2\alpha = 100^0 \Rightarrow \alpha = \frac{100^0}{2} = 50^0$

$\therefore$ पहला न्यूनकोण $\alpha = \left(50 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{5\pi}{18}\right)^c$

समीकरण 2 में $\alpha = 50^0$ रखने पर, $50 + \beta = 90^0 \Rightarrow \beta = 90^0 - 50 = 40^0$

$\therefore$ दूसरा न्यूनकोण $= 40 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= \left(\frac{2\pi}{9}\right)^c$

उदाहरण-9 किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों में अन्तर $\left(\frac{\pi}{9}\right)^c$ है प्रत्येक न्यूनकोण का मान अंश में ज्ञात कीजिए।

हल- माना दोनों न्यूनकोण क्रमशः α और β हैं।

$\therefore \alpha - \beta = \frac{\pi}{9}$ ....(1) और $\alpha + \beta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$ ....(ii)

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर $2\alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi + 9\pi}{18} = \left(\frac{11\pi}{18}\right)^c$

$\therefore \alpha = \left(\frac{11\pi}{18\times2}\right)^c = \left(\frac{11\pi}{36}\right)^c = \left(\frac{11\times180}{36}\right)^c = 55^0 =$ पहला कोण

समीकरण 2 में $= \frac{11\pi}{36}$ रखने पर $\frac{11\pi}{36} + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{22\pi}{36} = \left(\frac{7\pi}{36}\right)^c$

$\therefore$ दूसरा न्यूनकोण $= \left(\frac{7\pi}{36}\right)^c = \left(\frac{7\times180}{36}\right)^0 = 35^0$

उदाहरण-10 किसी पंचभुज के चार कोण क्रमशः 90^0, 120^0, 110^0, 80^0 है। पांचवें कोण का मान रेडियन इकाई में ज्ञात कीजिए।

हल: पंचभुज के पाचों अन्तः कोणों का योग $= (2n-4)\times 90^0$

$\therefore$ $90 + 120 + 110 + 80 +$ पांचवा कोण $= (2\times5-4)\times 90$

Scanned by CamScanner

$\therefore$ 400 + पांचवा कोण = 540 $\Rightarrow$ पांचवा कोण $= 140^0 = \left(\frac{140 \times \pi}{180}\right)^c = \left(\frac{7\pi}{9}\right)$

अनुपूरक कोण अर्थात् कोटिपूरक कोण अर्थात पूरककोण (Complementary Angles)

जिन दो कोणों का योग 90^0 होता है, उन्हें एक-दूसरे का कोटिपूरक कोण कहते हैं,

जैसे (a) 60^0 और 30^0 का योग 90^0 होता है। अतः 60^0 का कोटिपूरक कोण 30^0 है और 30^0 का कोटिपूरक कोण 60^0 है।

(b) 35^0 और 55^0 का योग 90^0 होता है। अतः 35^0 का कोटिपूरक कोण 55^0 है और 55^0 का कोटिपूरक कोण 35^0 है।

(c) 50^0 और 40^0 का योग 90^0 होता है। अतः 40^0 का कोटिपूरक कोण 50^0 है और 50^0 का कोटिपूरक कोण 40^0 है।

(d) यदि कोई कोण θ^0 हो तो उसका कोटिपूरक कोण $(90-\theta^0)$ है।

कोण θ के पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार बदलते हैं।

← सूत्र → ←——— उदाहरण ———→

$\sin(90-\theta) = \cos\theta \Rightarrow \sin 50 = \cos 40, \sin 30 = \cos 60, \sin 35 = \cos 55$

$\cos(90-\theta) = \sin\theta \Rightarrow \cos 50 = \sin 40, \cos 30 = \sin 60, \cos 35 = \sin 55$

$\tan(90-\theta) = \cot\theta \Rightarrow \tan 50 = \cot 40, \tan 30 = \cot 60, \tan 35 = \cot 55$

$\cot(90-\theta) = \tan\theta \Rightarrow \cot 50 = \tan 40, \cot 30 = \tan 60, \cot 35 = \tan 55$

$\sec(90-\theta) = \operatorname{cosec}\theta \Rightarrow \sec 50 = \operatorname{cosec} 40, \sec 30 = \operatorname{cosec} 60, \sec 35 = \operatorname{cosec} 55$

$\operatorname{cosec}(90-\theta) = \sec\theta \Rightarrow \operatorname{cosec} 50 = \sec 40, \operatorname{cosec} 30 = \sec 60, \operatorname{cosec} 35 = \sec 55$

सम्पूरक कोण (Supplementary Angles)

जिन दो कोणों का योग 180^0 होता है, उन्हें एक-दूसरे का सम्पूरक कोण कहते हैं। जैसे-

(a) 110^0 और 70^0 के कोण एक-दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

(b) 95^0 और 85^0 के कोण एक-दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

(c) यदि एक कोण α हो तो उसका सम्पूरक कोण (180-α) होगा।

कोण θ के सम्पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार बदलते हैं-

← सूत्र → ←——— उदाहरण ———→

$\sin(180-\theta) = \sin\theta \Rightarrow \sin 110 = \sin 70, \sin 80 = \sin 100$

$\cos(180-\theta) = -\cos\theta \Rightarrow \cos 110 = -\cos 70, \cos 80 = -\cos 100$

$\tan(180-\theta) = -\tan\theta \Rightarrow \tan 110 = -\tan 70, \tan 80 = -\tan 100$

$\cot(180-\theta) = -\cot\theta \Rightarrow \cot 110 = -\cot 70, \cot 80 = -\cot 100$

$\sec(180-\theta) = -\sec\theta \Rightarrow \sec 110 = -\sec 70, \cot 80 = -\cot 100$

$\operatorname{cosec}(180-\theta) = \operatorname{cosec}\theta \Rightarrow \operatorname{cosec} 110 = \operatorname{cosec} 70, \operatorname{cosec} 80 = \operatorname{cosec} 100$

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{\sin 43^0}{\cos 47^0}$ (b) $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0}$ (c) $\tan 46^0 - \cot 44^0$

हल: (a) $\frac{\sin 43^0}{\cos 47^0} = \frac{\sin 43^0}{\sin 43^0} = 1$

(b) $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0} = \frac{\tan 65^0}{\tan 65^0} = 1$

(c) $\tan 46^0 - \cot 44^0 = \tan 46^0 - \tan 46^0 = 0$

उदाहरण-2 $\cos 51^0 - \sin 39^0 + \sin 37^0 - \cos 53^0$ का मान क्या होगा?

Scanned by CamScanner

$\therefore$ एक अन्तः कोण $= \frac{360^0}{4} = 90^0 = \left(90 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

(c) समपंचभुज के पांचों अन्त: कोणों का योग $= (2\times5-4)\times90^0 = 540^0$

$\therefore$ एक अन्तः कोण $= \frac{540^0}{5} = 108^0 = \left(108 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{3\pi}{5}\right)^c$

(d) समषट्भुज के सभी 6 अन्तः कोणों का योग $= (2\times6-4)\times90^0 = 720^0$

$\therefore$ एक अन्तः कोण $= \frac{720^0}{6} = 120^0 = \left(120 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^c$

उदाहरण-7 एक समकोण त्रिभुज में लम्ब और आधार बराबर लम्बाई के हैं। न्यूनकोणों का मान रेडियन इकाई में ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि समकोण त्रिभुज में लम्ब और आधार बराबर लम्बाई के हैं। अतः दोनों न्यूनकोण 45^0 45^0 के होंगे, क्यों कि एक कोण 90^0 का है।

$\therefore$ प्रत्येक न्यूनकोण का मान $= 45^0 = \left(45 \times \frac{\pi}{180^0}\right)^c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c$

उदाहरण-8 किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों में अन्तर 10^0 है। प्रत्येक न्यूनकोण का मान रेडियन इकाई में ज्ञात कीजिए।

हल- माना दोनों न्यूनकोण क्रमशः α तथा β

$\therefore \alpha - \beta = 10^0$ —(1) और $\alpha + \beta = 90^0$ —(2)

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर $2\alpha = 100^0 \Rightarrow \alpha = \frac{100^0}{2} = 50^0$

$\therefore$ पहला न्यूनकोण $\alpha = \left(50 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{5\pi}{18}\right)^c$

समीकरण 2 में $\alpha = 50^0$ रखने पर, $50 + \beta = 90^0 \Rightarrow \beta = 90^0 - 50 = 40^0$

$\therefore$ दूसरा न्यूनकोण $= 40 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन $= \left(\frac{2\pi}{9}\right)^c$

उदाहरण-9 किसी समकोण त्रिभुज के न्यूनकोणों में अन्तर $\left(\frac{\pi}{9}\right)^c$ है प्रत्येक न्यूनकोण का मान अंश में ज्ञात कीजिए।

हल- माना दोनों न्यूनकोण क्रमशः α और β हैं।

$\therefore \alpha - \beta = \frac{\pi}{9}$ ....(1) और $\alpha + \beta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$ ....(ii)

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर $2\alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi + 9\pi}{18} = \left(\frac{11\pi}{18}\right)^c$

$\therefore \alpha = \left(\frac{11\pi}{18\times2}\right)^c = \left(\frac{11\pi}{36}\right)^c = \left(\frac{11\times180}{36}\right)^c = 55^0 =$ पहला कोण

समीकरण 2 में $= \frac{11\pi}{36}$ रखने पर $\frac{11\pi}{36} + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{22\pi}{36} = \left(\frac{7\pi}{36}\right)^c$

$\therefore$ दूसरा न्यूनकोण $= \left(\frac{7\pi}{36}\right)^c = \left(\frac{7\times180}{36}\right)^0 = 35^0$

उदाहरण-10 किसी पंचभुज के चार कोण क्रमशः 90^0, 120^0, 110^0, 80^0 है। पांचवें कोण का मान रेडियन इकाई में ज्ञात कीजिए।

हल: पंचभुज के पाचों अन्तः कोणों का योग $= (2n-4)\times90^0$

$\therefore$ $90 + 120 + 110 + 80 +$ पांचवा कोण $= (2\times5-4)\times90$

$\therefore$ $400 +$ पांचवा कोण $= 540 \Rightarrow$ पांचवा कोण $= 140^0 = \left(\frac{140 \times \pi}{180}\right)^c = \left(\frac{7\pi}{9}\right)^c$

अनुपूरक.कोण अर्थात् कोटिपूरक कोण अर्थात पूरककोण (Complementary Angles)

जिन दो कोणों का योग 90^0 होता है, उन्हें एक-दूसरे का कोटिपूरक कोण कहते हैं।

जैसे (a) 60^0 और 30^0 का योग 90^0 होता है। अतः 60^0 का कोटिपूरक कोण 30^0 है और 30
का कोटिपूरक कोण 60^0 है।

(b) 35^0 और 55^0 का योग 90^0 होता है। अतः 35^0 का कोटिपूरक कोण 55^0 है और 55
का कोटिपूरक कोण 35^0 है।

(c) 50^0 और 40^0 का योग 90^0 होता है। अतः 40^0 का कोटिपूरक कोण 50^0 है और 50
का कोटिपूरक कोण 40^0 है।

(d) यदि कोई कोण θ^0 हो तो उसका कोटिपूरक कोण $(90-\theta^0)$ है।

कोण θ के पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार बदलते हैं।

← सूत्र → ←—— उदाहरण ——→

$\sin(90-\theta) = \cos\theta \Rightarrow \sin 50 = \cos 40, \sin 30 = \cos 60, \sin 35 = \cos 55$

$\cos(90-\theta) = \sin\theta \Rightarrow \cos 50 = \sin 40, \cos 30 = \sin 60, \cos 35 = \sin 55$

$\tan(90-\theta) = \cot\theta \Rightarrow \tan 50 = \cot 40, \tan 30 = \cot 60, \tan 35 = \cot 55$

$\cot(90-\theta) = \tan\theta \Rightarrow \cot 50 = \tan 40, \cot 30 = \tan 60, \cot 35 = \tan 55$

$\sec(90-\theta) = \operatorname{cosec}\theta \Rightarrow \sec 50 = \operatorname{cosec} 40, \sec 30 = \operatorname{cosec} 60, \sec 35 = \operatorname{cosec} 55$

$\operatorname{cosec}(90-\theta) = \sec\theta \Rightarrow \operatorname{cosec} 50 = \sec 40, \operatorname{cosec} 30 = \sec 60, \operatorname{cosec} 35 = \sec 55$

सम्पूरक कोण (Supplementary Angles)

जिन दो कोणों का योग 180^0 होता है, उन्हें एक-दूसरे का सम्पूरक कोण कहते हैं। जैसे-

(a) 110^0 और 70^0 के कोण एक-दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

(b) 95^0 और 85^0 के कोण एक-दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

(c) यदि एक कोण α हो तो उसका सम्पूरक कोण $(180-\alpha)$ होगा।

कोण θ के सम्पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार बदलते हैं-

← सूत्र → ←—— उदाहरण ——→

$\sin(180-\theta) = \sin\theta \Rightarrow \sin 110 = \sin 70, \sin 80 = \sin 100$

$\cos(180-\theta) = -\cos\theta \Rightarrow \cos 110 = -\cos 70, \cos 80 = -\cos 100$

$\tan(180-\theta) = -\tan\theta \Rightarrow \tan 110 = -\tan 70, \tan 80 = -\tan 100$

$\cot(180-\theta) = -\cot\theta \Rightarrow \cot 110 = -\cot 70, \cot 80 = -\cot 100$

$\sec(180-\theta) = -\sec\theta \Rightarrow \sec 110 = -\sec 70, \cot 80 = -\cot 100$

$\operatorname{cosec}(180-\theta) = \operatorname{cosec}\theta \Rightarrow \operatorname{cosec} 110 = \operatorname{cosec} 70, \operatorname{cosec} 80 = \operatorname{cosec} 100$

उदाहरणार्थ हल प्रश्न

उदाहरण-1 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{\sin 43^0}{\cos 47^0}$ (b) $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0}$ (c) $\tan 46^0 - \cot 44^0$

हल: (a) $\frac{\sin 43^0}{\cos 47^0} = \frac{\sin 43^0}{\sin 43^0} = 1$

(b) $\frac{\tan 65^0}{\cot 25^0} = \frac{\tan 65^0}{\tan 65^0} = 1$

(c) $\tan 46^0 - \cot 44^0 = \tan 46^0 - \tan 46^0 = 0$

उदाहरण-2 $\cos 51^0 - \sin 39^0 + \sin 37^0 - \cos 53^0$ का मान क्या होगा?

Scanned by CamScanner

हल: $= \cos 51^0 - \sin 39^0 + \sin 37^0 - \cos 53^0$

$= \sin 39^0 - \sin 39^0 + \sin 37^0 - \sin 37^0 = 0$

उदाहरण-3 $\left(\frac{\sin 31^0}{\cos 59^0}\right)^2 + \left(\frac{\cos 29^0}{\sin 61^0}\right)^2 - 1$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\left(\frac{\sin 31^0}{\cos 59^0}\right)^2 + \left(\frac{\cos 29^0}{\sin 61^0}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\sin 31^0}{\sin 31^0}\right)^2 + \left(\frac{\sin 61^0}{\sin 61^0}\right) - 1$

$= 1^2 + 1^2 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$

उदाहरण-4 $\frac{\sin(90-A).\cos(90-A)}{\cot A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{\sin(90-A).\cos(90-A)}{\cot A} = \frac{\cos A.\sin A}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\cos A.\sin A.\sin A}{\cos A} = \sin^2 A$

उदाहरण-5 $\cos(90+\theta) - \cos\theta.\cot(90-\theta)$ का मान क्या होगा?

हल: $\cos(90+\theta) - \cos\theta.\cot(90-\theta)$

$= \sin\theta - \cos\theta.\tan\theta = \sin\theta - \cos\theta.\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta - \sin\theta = 0$

उदाहरण-6 $\tan 25^0.\tan 55^0.\tan 65^0.\tan 35^0$ का सरलतम मान क्या होगा?

हल: $\tan 25^0.\ \tan 55^0.\ \tan 65^0.\ \tan 35^0$

$= \tan 25^0.\ \tan 55^0.\ \cot 25^0.\ \cot 55^0 = \tan 25^0 \times \tan 55^0\ \frac{1}{\tan 55^0}.\frac{1}{\tan 25^0} = 1$

उदाहरण-7 सरल कीजिए- $\sin 38^0.cosec 142^0 + .\cos 35^0.\sec 155^0$

हल $\sin 38^0.\ cosec\ 142^0 + \cos 35^0.\ \sec 155^0$

$= \sin 38^0.\ cosec\ (180^0 - 38^0) + \cos 35^0.\ \sec\ (180^0 - 35^0)$

$= \sin 38^0.\ cosec\ 38^0 + \cos 35^0.- \sec 35^0$

$= \sin 38^0.\frac{1}{\sin 38^0} + \cos 35^0 \times -\frac{1}{\cos 35^0} = 1 - 1 = 0$

उदाहरण-8 सरल कीजिए- $\cos 24^0 + \cos 55^0 + \cos 125^0 + \cos 156^0$

हल : $\cos 24^0 + \cos 55^0 + \cos 125^0 + \cos 156^0$

$= \cos 24^0 + \cos 55^0 + \cos(180^0 - 55^0) + \cos(180^0 - 24^0)$

$= \cos 24^0 + \cos 55^0 - \cos 55^0 - \cos 24^0 = 0$

विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

कोण	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

Scanned by CamScanner

अति विशिष्टि कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\quad \sin 75^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\quad \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\quad \cos 75^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\quad \cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\tan 15^0 = 2-\sqrt{3}$ $\quad \tan 75^0 = 2+\sqrt{3}$ $\quad \sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\cot 15^0 = 2+\sqrt{3}$ $\quad \cot 75^0 = 2-\sqrt{3}$ $\quad \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\quad \cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\quad \tan\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \sqrt{2}$

उदाहरण-1 $\frac{1-\sin 60^0}{\cos 60^0}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1-\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = 2-\sqrt{3}$

उदाहरण-2 सरल कीजिए- $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1+\sin 30^0 - \cos 60^0}$

हल: $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1+\sin 30^0 - \cos 60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$

उदाहरण-3 $\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$ का सरलतम मान ज्ञात कीजिए

हल: $\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3} = \sin\frac{180}{4}.\cos\frac{180}{6}.\tan\frac{180}{3}$

$\sin 45^0.\cos 30^0.\tan 60^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

उदाहरण-4 $\tan 30^0 \sec 45^0 - \tan 60^0 \sec 30^0$ का मान कितना होगा?

हल: $\tan 30^0 \sec 45^0 - \tan 60^0 . \sec 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{1}.\frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

उदाहरण-5 सरल कीजिए $\frac{\sin 60^0 - \cos 60^0}{\sin 30^0 + \cos 30^0}$

हल: $\frac{\sin 60^0 - \cos 60^0}{\sin 30^0 + \cos 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = (2-\sqrt{3})$

उदाहरण-6 $\left[\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0.\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0\right] \div \left[\tan 75^0.\cot 75^0\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

Scanned by CamScanner

हल: $= \cos 51^0 - \sin 39^0 + \sin 37^0 - \cos 53^0$

$= \sin 39^0 - \sin 39^0 + \sin 37^0 - \sin 37^0 = 0$

उदाहरण-3 $\left(\frac{\sin 31^0}{\cos 59^0}\right)^2 + \left(\frac{\cos 29^0}{\sin 61^0}\right)^2 - 1$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\left(\frac{\sin 31^0}{\cos 59^0}\right)^2 + \left(\frac{\cos 29^0}{\sin 61^0}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\sin 31^0}{\sin 31^0}\right)^2 + \left(\frac{\sin 61^0}{\sin 61^0}\right) - 1$

$= 1^2 + 1^2 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$

उदाहरण-4 $\frac{\sin(90-A).\cos(90-A)}{\cot A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{\sin(90-A).\cos(90-A)}{\cot A} = \frac{\cos A.\sin A}{\frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{\cos A.\sin A.\sin A}{\cos A} = \sin^2 A$

उदाहरण-5 $\cos(90+\theta) - \cos\theta.\cot(90-\theta)$ का मान क्या होगा?

हल: $\cos(90+\theta) - \cos\theta.\cot(90-\theta)$

$= \sin\theta - \cos\theta.\tan\theta = \sin\theta - \cos\theta.\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta - \sin\theta = 0$

उदाहरण-6 $\tan 25^0.\tan 55^0.\tan 65^0.\tan 35^0$ का सरलतम मान क्या होगा?

हल: $\tan 25^0.\tan 55^0.\tan 65^0.\tan 35^0$

$= \tan 25^0.\tan 55^0.\cot 25^0.\cot 55^0 = \tan 25^0 \times \tan 55^0 \frac{1}{\tan 55^0}.\frac{1}{\tan 25^0} = 1$

उदाहरण-7 सरल कीजिए- $\sin 38^0.\operatorname{cosec} 142^0 + .\cos 35^0.\sec 155^0$

हल $\sin 38^0.\operatorname{cosec} 142^0 + \cos 35^0.\sec 155^0$

$= \sin 38^0.\operatorname{cosec}(180^0 - 38^0) + \cos 35^0.\sec(180^0 - 35^0)$

$= \sin 38^0.\operatorname{cosec} 38^0 + \cos 35^0.- \sec 35^0$

$= \sin 38^0.\frac{1}{\sin 38^0} + \cos 35^0 \times -\frac{1}{\cos 35^0} = 1 - 1 = 0$

उदाहरण-8 सरल कीजिए- $\cos 24^0 + \cos 55^0 + \cos 125^0 + \cos 156^0$

हल : $\cos 24^0 + \cos 55^0 + \cos 125^0 + \cos 156^0$

$= \cos 24^0 + \cos 55^0 + \cos(180^0 - 55^0) + \cos(180^0 - 24^0)$

$= \cos 24^0 + \cos 55^0 - \cos 55^0 - \cos 24^0 = 0$

विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

कोण	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

Scanned by CamScanner

अति विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\sin 75^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\cos 75^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\tan 15^0 = 2-\sqrt{3}$ $\tan 75^0 = 2+\sqrt{3}$ $\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\cot 15^0 = 2+\sqrt{3}$ $\cot 75^0 = 2-\sqrt{3}$ $\cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\tan\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \sqrt{2}-1$

उदाहरण-1 $\frac{1-\sin 60^0}{\cos 60^0}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1-\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = 2-\sqrt{3}$

उदाहरण-2 सरल कीजिए- $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1+\sin 30^0 - \cos 60^0}$

हल: $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1+\sin 30^0 - \cos 60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$

उदाहरण-3 $\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$ का सरलतम मान ज्ञात कीजिए

हल: $\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3} = \sin\frac{180}{4}.\cos\frac{180}{6}.\tan\frac{180}{3}$

$\sin 45^0.\cos 30^0.\tan 60^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

उदाहरण-4 $\tan 30^0 \sec 45^0 - \tan 60^0 \sec 30^0$ का मान कितना होगा?

हल: $\tan 30^0 \sec 45^0 - \tan 60^0 . \sec 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{1}.\frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

उदाहरण-5 सरल कीजिए $\frac{\sin 60^0 - \cos 60^0}{\sin 30^0 + \cos 30^0}$

हल: $\frac{\sin 60^0 - \cos 60^0}{\sin 30^0 + \cos 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = (2-\sqrt{3})$

उदाहरण-6 $\left[\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0.\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0\right] \div \left[\tan 75^0.\cot 75^0\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

Scanned by CamScanner

हल : $\left[\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0.\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0\right] \div \left[\tan 75^0.\cot 75^0\right]$

$= \left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right] \div \left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right]$

$= \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}{4} \div (4-3) = \frac{(2-\sqrt{2})}{4} \times 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

उदाहरण-7 सरल कीजिए- $\sin 18^0.\cos 36^0 - \sin 75^0.\cos 75^0$

हल : $\sin 18^0.\cos 36^0 - \sin 75^0.\cos 75^0 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{4}.\frac{(\sqrt{5}+1)}{4} - \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}.\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$

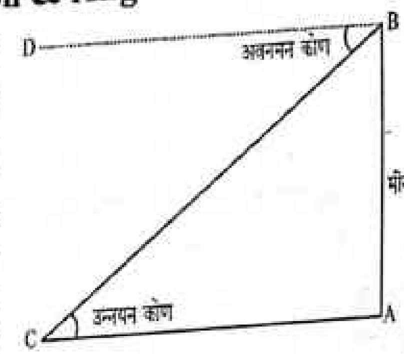
$\frac{5-1}{16} - \frac{3-1}{8} = \frac{4}{16} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

उदाहरण-8 सरल कीजिए $\frac{\tan 15^0 + \cot 15^0}{\sin 15^0.\cos 15^0}$

हल: $\frac{\tan 15^0 + \cot 15^0}{\sin 15^0.\cos 15^0} = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} \times \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}} = \frac{4}{\frac{3-1}{8}} = \frac{4}{\left(\frac{2}{8}\right)} = 4 \times \frac{8}{2} = 16$

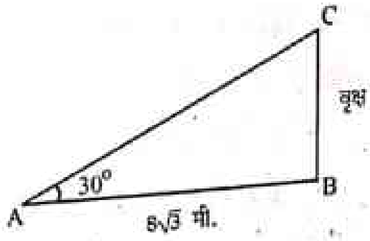
ऊँचाई और दूरी (Height and Distance)

उन्नयन कोण और अवनमन कोण (Angle of Elevation & Angle of Dipression)



चित्र में AB एक मीनार है, जिसकी आधार रेखा (क्षैतिज रेखा) AC है। जब आधार रेखा के बिन्दु C से मीनार की चोटी को देखा जायेगा तो आंख पर ∠ACB बनेगा और जब चोटी से बिन्दु C को देखा जायेगा तो आंख पर ∠CBD बनेगा। इस प्रकार आंख उठाकर किसी बिन्दु को देखने पर आंख पर बनने वाले कोण उन्नयन कोण कहलाता है। जबकि आंख को झुकाकर किसी बिन्दु को देखने पर आंख पर बनने वाला कोण अवनमन कोण कहलाता है। इस स्थिति में एक समकोण त्रिभुज की कल्पना की जाती है, जिससे सम्बन्धित जानकारी त्रिकोणमितीय फलनों के माध्यम से ज्ञात की जाती है।

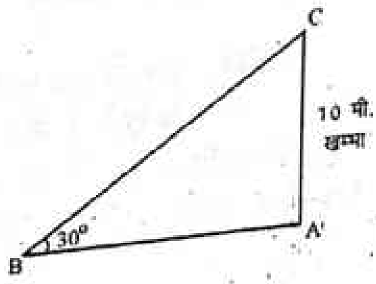
उदाहरणार्थ हल प्रश्न



उदाहरण-1 सम्मुख चित्र में BC एक वृक्ष है। किसी समय उसकी परछाई AB, $8\sqrt{3}$ मी थी। यदि उस समय वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण 30^0 का रहा हो तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि $\tan 30 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ अतः $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{8\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 8$ मी०

∴ वृक्ष की ऊँचाई $= BC = 8$ मी०



उदाहरण-2 10 मी० लम्बा खम्भा भूमि पर उर्ध्वाधर खड़ा है। उसके आधार से कितनी दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर उसके शिखर का उन्नयन कोण 30^0 का बनेगा।

हल- चित्रानुसार 10 मी०लम्बा खम्भा AC है और उसके शिखर का उन्नयन कोण $ABC = 30^0$

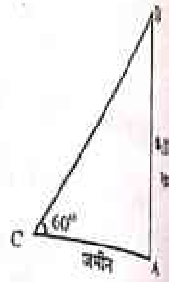
Scanned by CamScanner

अब $\tan 30 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AB} \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$ मी०

अत: आधार A से $10\sqrt{3}$ मी० दूरी पर उन्नयन कोण बनेगा

उदाहरण-3 $8\sqrt{3}$ मी०ऊँचे खम्भे के शिखर से एक तार को बांधकर तार का दूसरा सिरा जमीन में गाड़ा गया है। तार का दूसरा सिरा जमीन से 60^0 का कोण बना रहा हो तो तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



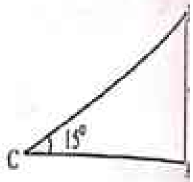
हल- चित्रानुसार जमीन पर खड़ा खम्भा AB तथा उसके शिखर से बंधा तार BC है।

$\sin 60^0 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{8\sqrt{3}}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 16$ मी०

$\therefore$ तार की लम्बाई = BC = 16 मी०

उदाहरण-4 15 मी०ऊँचे बिजली के पोल की परछाई कितनी लम्बी होगी, यदि उसकी शिखर का उन्नयनकोण 15^0 का हो?



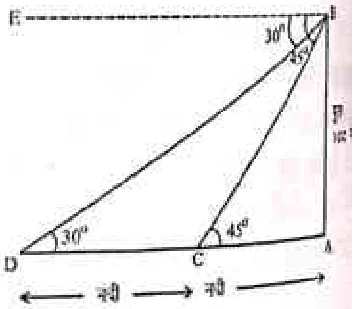
हल- चित्रानुसार पोल AB की परछाई AC है।

$\therefore \quad \tan 15^0 = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{15}{AC}$

$\therefore \; 2-\sqrt{3} = \frac{15}{AC} \Rightarrow AC = \frac{15}{2-\sqrt{3}} = \frac{15\times(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{30+15\sqrt{3}}{4-3}$

$= 30+15 \times 1.732 = 30+25.980 = 55.98$ मी०

उदाहरण-5 एक नदी पर बना एक पुल 100 मी० ऊँचा है। नदी के जल सतह पर स्थित दो बिन्दुओं से (जो एक ही सीध में है) पुल के उच्चतम् बिन्दु से अवनमन कोण क्रमश: 30^0, 45^0 हैं। दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



हल- चित्रानुसार पुल की अधिकतम ऊँचाई का बिन्दु B है।

जहां से जल सतह पर स्थित दो बिन्दुओं D और C से बने अवनमन कोण क्रमश: ∠ DB तथा ∠ CBE हैं।

$\therefore \angle ADB = \angle DBE = 30$ और $\angle ACB = \angle CBE = 45^0$ (क्योंकि एकान्तर कोण है)

अब Δ ABC में $\tan 45 = \frac{100}{AC} \Rightarrow 1 = \frac{100}{AC} \Rightarrow AC = 100$ मी०

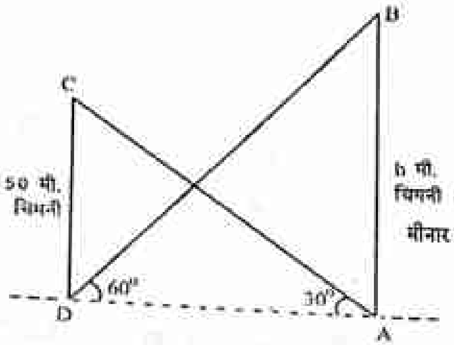
पुन: ΔABD में $\tan 30 = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{DC+100} \Rightarrow DC+100 = 100\sqrt{3}$

$\therefore DC = 100\sqrt{3} - 100 = 100\times 1.732 - 100 = 173.2 - 100 = 73.2$ मी०

$\therefore$ दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी = DC = 73.2 मी०

उदाहरण-6 एक चिमनी और एक मीनार एक ही समतल पर खड़ी हैं। मीनार के ऊपरी सिरे से चिमनी के आधार का उन्नयन कोण 60^0 हैं। तथा चिमनी के उपरी सिरे से मीनार के आधार का उन्नयन

कोण 30^0 है यदि चिमनी 50^0 मी० ऊँची हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल- चित्रानुसार Δ ADC में

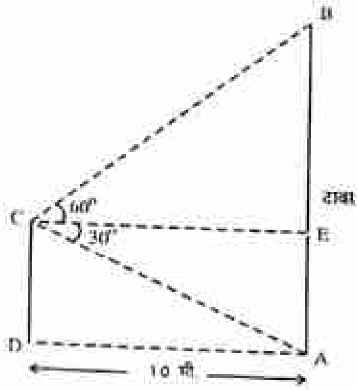
$\tan 30 = \frac{50}{AD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{AD} \Rightarrow AD = 50\sqrt{3}$

पुनः ΔABD में $\tan 60 = \frac{h}{AD}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{50\sqrt{3}} \Rightarrow h = 50\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 150$ मी

$\therefore$ मीनार की ऊँचाई $(h) = 150$ मी०

उदाहरण-7 एक मन्दिर के शिखर से एक टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60^0 तथा टावर के आधार का अवनमन कोण 30^0 है। यदि मन्दिर और टावर एक-दूसरे से 10 मी० दूरी पर हों तो, टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल- चित्रानुसार AB टावर और CD मन्दिर है।

ΔACE में $\tan 30 = \frac{AE}{CE}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AE}{10} \Rightarrow AE = \frac{10}{\sqrt{3}}$ मी०

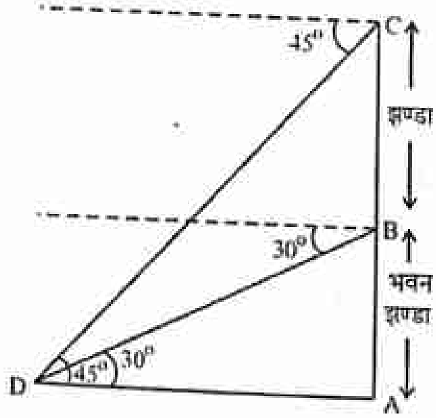
पुनः ΔBCE में $\tan 60 = \frac{BE}{CE}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 10\sqrt{3}$

$\therefore$ टावर की ऊँचाई

$= AE + BE = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{10\sqrt{3}}{1} = \frac{10+30}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}}$ मी०

उदाहरण-8 एक भवन पर एक झण्डा लगा है। भवन के आधार से जाने वाले समतल पर स्थित किसी बिन्दु से झण्डे के शिखर और आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45^0 और 30^0 है। यदि भवन 40 मी० ऊँचा है तो झण्डे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल- चित्रानुसार AB भवन तथा BC झण्डा है।

जहां भवन AB की ऊँचाई = 40 मी०

ΔADC में $\tan 45 = \frac{AC}{AD}$

$\therefore 1 = \frac{40+BC}{AD} \Rightarrow AD = 40 + BC$

पुनः ΔADB में $\tan 30 = \frac{AB}{AD}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{40+BC} \Rightarrow 40 + BC = 40\sqrt{3}$

$\therefore BC = 40\sqrt{3} - 40 = 40 \times 1.7 - 40 = 68 - 40 = 28$ मी०

$\therefore$ झण्डे BC की ऊंचाई = 28 मी० लगभग

अभ्यास प्रश्न

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio) पर आधारित प्रश्न

1. यदि $\cot\theta = \frac{35}{12}$ तो, $\sin\theta$ का मान होगा-

(a) $\frac{37}{35}$ (b) $\frac{35}{37}$ (c) $\frac{12}{37}$ (d) $\frac{37}{12}$

Scanned by CamScanner