गुणा
(Multiplication)

विशेष स्थितियाँ

हमारा सुझाव है कि समय की बचत के लिए आप 30 तक का पहाड़ा याद रखें। इससे गणना में सहायता मिलती है। वैसे भी गुणा में दक्ष होना जरूरी है क्योंकि हमारे मतलब के प्राय: सभी प्रश्नों में इसका इस्तेमाल रहता ही है।

आइए, 10 से ऊपर की संख्या से गुणा करने की विधि पर विचार करें।

***11 से गुणा* (Multiplication by 11)**

पहला चरण: गुण्य (multiplicand) के अंतिम अंक को गुणनफल के अंतिम अंक (दायीं ओर स्थित) के रूप में लिख देते हैं।

दूसरा चरण: गुण्य का प्रत्येक अंक अपने दाहिनी ओर स्थित अंक के साथ जोड़ दिया जाता है।

उदा. 1: सरल करें: $5892 \times 11 = ?$

हल: ***पहला चरण:*** 5892 का अंतिम अंक (2) उत्तर के अंतिम अंक के रूप में लिख दें:

$$\frac{5892 \times 11}{2}$$

दूसरा चरण: 5892 का प्रत्येक अंक अपनी दाहिनी ओर स्थित अंक के साथ जोड़ दिया जाता है। $9 + 2 = 11$; पंक्ति के नीचे 1 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें। $8 + 9 + 1 = 18$; अधोरेखा के नीचे 8 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें। $5 + 8 + 1 = 14$; अधोरेखा के नीचे 4 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।

$$\frac{5892 \times 11}{12}$$ (9 + 2 = 11, अधोरेखा के नीचे 1 लिखें एवं 1 को लेकर आगे बढ़ें)

$$\frac{5892 \times 11}{812}$$ (8 + 9 + 1 = 18, अधोरेखा के नीचे 8 लिखें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें)

$$\frac{5892 \times 11}{4812}$$ (5 + 8 + 1 = 14, अधोरेखा के नीचे 4 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण: 5892 के पहले अंक 5 को 1 के साथ जोड़कर गुणनफल के बायीं ओर स्थित पहले अंक के रूप में लिख देते हैं।

$$\frac{5892 \times 11}{64812}$$

∴ उत्तर है: **64812**

जैसा कि आपने देखा, गुणा का प्रत्येक अंक दो बार इस्तेमाल किया जाता है, पहले एक संख्या के रूप में एवं फिर एक पड़ोसी के रूप में यदि सावधानी बरती जाए, तो तीनों चरणों का काम

एक चरण में भी संपन्न किया जा सकता है और इस अकेले चरण को **"add the right neighbour"** नाम दिया जा सकता है।

गुणा की क्रिया शुरू करने से पूर्व संख्या के आरंभ में एक '0' डाल देना चाहिए। इसके बाद ही अंकों को पड़ोसी से जोड़ने की क्रिया दुहराई जानी चाहिए।

$\frac{05892 \times 11}{2}$ [चूँकि '2' के दायीं ओर कोई संख्या नहीं है, इसलिए हमें कुछ भी जोड़ने की अवश्यकता नहीं है।]

$\frac{05892 \times 11}{4812}$ ----जैसा कि आप पहले कर चुके हैं।

$\frac{05892 \times 11}{64812}$ ----$0+5+1=6$

इस उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो गया होगा कि गुण्य के शुरू में '0' क्यों लगा देते हैं। इससे हमें इस बात का स्मरण बना रहता है कि अभी गणना जारी रखनी है। इसके अभाव में, संभवत: हम '6' लिखना भूलकर 4812 को ही अपना उत्तर मान लेते। उत्तर में अंकों की संख्या गुण्य के मुकाबले एक अधिक है, और '0' हमें इसकी याद दिलाता है।

नमूने के प्रश्न: सरल करें:

1) 111111×11 2) 23145×11 3) 89067×11 4) 5776800×11
5) 1122332608×11

उत्तर: 1) 1222221 2) 254595 3) 979737 4) 63544800
5) 12345658688

***12 से गुणा* (Multiplication by 12)**

12 से गुणा करने के लिए ***'गुण्य के प्रत्येक अंक को 2 से गुणा करें एवं पड़ोसी अंक के साथ जोड़ दें।'***

यह प्रक्रिया 11 से गुणा करने के समान ही है। फर्क केवल इतना है कि पड़ोसी अंक से जोड़ने से पहले हम गुण्य के अंकों को 2 से गुणा कर देते हैं।

उदाहरण के लिए,

***उदा.* 1:** $5324 \times 12 = ?$

हल: ***पहला चरण:*** $\frac{05324 \times 12}{8}$ [4 को 2 से गुणा करें एवं '0' जोड़ दें, क्योंकि इसका कोई पड़ोसी नहीं है]

दूसरा चरण: $\frac{05324 \times 12}{88}$ [$2 \times 2 = 4; 4 + 4 = 8$]

तीसरा चरण: $\frac{05324 \times 12}{888}$ [$3 \times 2 = 6; 6 + 2 = 8$]

चौथा चरण: $\frac{05324 \times 12}{3888}$ [5 × 2 = 10; 10 + 3 = 13; अधोरेखा के नीचे 3 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें]

अंतिम चरण: $\frac{05324 \times 12}{63888}$ [0 × 2 =0; 0 + 5 + 1 = 6]

उत्तर हुआ 63888। निश्चय ही आपको इस बात का अहसास हो गया होगा कि गुणा करने की यह विधि न केवल आसान है बल्कि संक्षिप्त भी।

अभ्यास के प्रश्न

सरल करें :

1) 35609 × 12 2) 11123009 × 12 3) 456789 × 12
4) 22200007 × 12 5) 444890711 × 12

उत्तर: 1) 427308 2) 132476108 3) 5481468 4) 266400084
5) 5338688532

_13 से गुणा_ (Multiplication by 13)

किसी संख्या को 13 से गुणा करने के क्रम में ***'उस संख्या के हर अंक को तिगुना करके उसके पड़ोसी अंक के साथ जोड़ देते हैं'***।

यह प्रक्रिया 12 से गुणा करने की विधि के अनुरूप ही है। फर्क केवल इतना है कि यहाँ हम गुण्य के अंकों को उसके पड़ोसी के साथ जोड़ने से पूर्व तिगुना कर देते हैं।

यदि हम 9483 को 13 से गुणा करना चाहते हैं तो हम निम्न प्रकार से आगे बढ़ते हैं।

पहला चरण: $\frac{09483 \times 13}{9}$ [3 का तिगुना हुआ 9। अब चूँकि 3 के दाहिनी ओर कोई अंक नहीं है, इसलिए 9 को अधोरेखा के नीचे लिख दें।]

दूसरा चरण: $\frac{09483 \times 13}{79}$ [8 × 3 + 3 = 27; 7 नीचे लिख दें एवं 2 को लेकर आगे बढ़ें।]

तीसरा चरण: $\frac{09483 \times 13}{279}$ [4 × 3 + 8 + 2 = 22; 2 नीचे लिख दें एवं दो के साथ आगे बढ़ें]

चाथा चरण: $\frac{09483 \times 13}{3279}$ [9 × 3 + 4 + 2 = 33; 3 नीचे लिख दें एवं तीन के साथ आगे बढ़ें]

अंतिम चरण: $\frac{09483 \times 13}{123279}$ [0 × 3 + 9 + 3 = 12, इसे नीचे लिख दें]

∴ उत्तर है: 123279

इसी तरह हम 14, 15 आदि से गुणा करने की संक्षिप्त विधि भी इजाद कर सकते हैं। पर ऐसा करने के क्रम में हमें गुण्य के अंकों को चौगुना, पाँच-गुना करना पड़ेगा, और हर बार हमें एक बड़ी संख्या के साथ आगे बढ़ने के लिए बाध्य होना होगा। इस प्रकार की बड़ी संख्याओं से गुणा करने का हमलोगों के पास इससे आसान विधि उपलब्ध है।

पर क्या आप उपर्युक्त तरीके से 21, 31 आदि से गुणा करने की विधि बना सकते हैं? यह बहुत कठीन नहीं है। प्रयास कीजिए।

***9 से गुणा* (Multiplication by 9)**

पहला चरण: गुण्य के दायीं ओर स्थित अंतिम अंक को 10 में से घटाएँ। इससे उत्तर के दायीं ओर का अंतिम अंक मिल जाता है।

दूसरा चरण: दायीं ओर के दूसरे अंक को 9 में से घटाएँ और इसे दायीं ओर स्थित अपने पड़ोसी अंक से जोड़ दें।

तीसरा चरण: अब आप उपर्युक्त ढंग से बढ़ते हुए क्रमशः '0' पर पहुँच जाते हैं, पड़ोसी अंक में से 1 घटाकर शेष लिख दें। यह उत्तर के बायीं ओर का अंक होगा।

उदा. 1. $8576 \times 9 = ?$

हल:
$$\frac{08576 \times 9}{77184}$$

पहला चरण: 10 में से 6 घटाएँ। $10 - 6 = 4$; इसे नीचे लिख दें।

दूसरा चरण: 7 को 9 में से घटाएँ एवं 6 जोड़ दें।

$(9-7)+6=8$; इसे नीचे लिख दें।

तीसरा चरण: $(9-5)+7=11$; 1 नीचे लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।

चौथा चरण: $(9-8)+5+1=7$; इसे नीचे लिख दें।

अंतिम चरण: बायीं ओर '0' है, इसलिए हम 8 में से एक घटाकर शेष '7' को नीचे लिख देते हैं। इस प्रकार उत्तर आया: 77184

अभ्यास के लिए प्रश्न

1) $34 \times 9 = ?$ 2) $569 \times 9 = ?$ 3) $1328 \times 9 = ?$ 4) $56493 \times 9 = ?$
5) $89273258 \times 9 = ?$

उत्तर

1) 306 2) 5121 3) 11952 4) 508437 5) 803459322

हम इस नियम पर अधिक जोर नहीं देंगे, क्योंकि कभी-कभी यह आवश्यकता से अधिक जटिल सिद्ध होता है।

दूसरी विधि :

पहला चरण: दी गई संख्या के दायीं ओर एक शून्य डाल दें। उदाहरण के लिए 8576 को लिखें: 85760

दूसरा चरण: दी गई संख्या को इस संख्या में से घटा दें:

$85760 - 8576 = 77184$

25 *से गुणा* (Multiplication by 25)

मान लीजिए, आपको 125690258 को 25 से गुणा करना है। संभवतः आप गुणा करने

की सामान्य विधि अपनाएँगे। पर बेहतर यह होगा कि आप दिए हुए संख्या को 100 से गुणा करके 4 से भाग दे दें। ऐसा करने के क्रम में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखें:

पहला चरण: संख्या के अंत में दो '0' डाल दें, क्योंकि इसे 100 से गुणा करना है।

दूसरा चरण: इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में 4 से भाग दे दें। इस प्रकार आपका उत्तर हुआ: $12569025800 \div 4 = 3142256450$

निश्चय ही यह विधि आपकी सामान्य विधि से आसान है।

गुणा की 10^x -आधारी पद्धति (10^x -Base Method of Multiplication)

इस विधि की व्याख्या के लिए एक उदाहरण लीजिए।

उदा. 1: मान लीजिए हमें 9 को 8 से गुणा करना है।

हल:

पहला चरण: 10 को ऐसे घातांक के साथ लेते हैं जो गुण्य के मान के निकटतम हो। यहाँ हमारा काम $10^1 = 10$ से चल जाएगा।

दूसरा चरण: 9 एवं 8 को ऊपर-नीचे करके बायीं ओर लिख दें।

तीसरा चरण: दोनों को 10 में से घटाएँ एवं शेष 1 एवं 2 को दाहिनी ओर ऋण चिह्न (–) के साथ लिख दें।

चौथा चरण: इस प्रकार गुणनफल का दो भाग होगा-एक बायीं ओर तथा दूसरा दायीं ओर। आप चाहें तो दोनों भागों में फर्क करने के लिए इन दोनों के बीच एक विभाजक रेखा खींच सकते हैं।

पाँचवाँ चरण: मूल संख्या 9 में से (–2) को तिर्यक रूप में घटाएँ। $(9-2) = 7$, या फिर 8 में से 1 तिर्यक रूप से घटाएँ। $(8-1) = 7$ यह उत्तर का वाम-पक्ष हुआ।

छठा चरण: दोनों ऋणात्मक अंकों को आपस में गुणा करें (1 एवं 2)। गुणनफल 2 है। और इस प्रकार हमें उत्तर का दायाँ पक्ष मिलेगा।

इस विधि को रेखाओं के सहारे भी निरूपित किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 9 \;\; -1 \\ \underline{8 \;\; -2} \\ 7 \;/\; 2 \end{array} \quad \therefore \text{ उत्तर } = 72$$

यह विधि हर स्थिति के लिए उपयोगी है और इसलिए इसके अनंत अनुप्रयोग संभव हैं। इस विधि को समझने के लिए अन्य उदाहरण भी देखिए।

$$\begin{array}{r} 9 \;\; -1 \\ \underline{9 \;\; -1} \\ 8 \;/\; 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \;\; -1 \\ \underline{7 \;\; -3} \\ 6 \;/\; 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \;\; -1 \\ \underline{6 \;\; -4} \\ 5 \;/\; 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \;\; -2 \\ \underline{8 \;\; -2} \\ 6 \;/\; 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \;\; -2 \\ \underline{7 \;\; -3} \\ 5 \;/\; 6 \end{array}$$

नोट: उत्तर की दाहिनी ओर उतनी ही संख्याएँ होनी चाहिए, जितना 10 का घातांक है। ऊपर के सभी उदाहरणों में 10 का घातांक 1 रहा है। इसलिए उपर्युक्त सभी उदाहरणों में उत्तर के दाहिने पक्ष में केवल एक अंक ही मौजूद रहा है। लेकिन यदि ऋणात्मक अंकों को गुणा

करने से एक से अधिक अंकों की संख्या मिले तो ऐसी परिस्थिति में आप क्या करेंगे? उदाहरण के लिए, यदि 7 को 6 से गुणा करना हो तो,

$$\begin{array}{ll} 7 & -3 \\ 6 & -4 \\ \hline 3\ / & {}_{1}2 \end{array}$$

यह समस्या गुणा की सामान्य विधि से हल हो जाती है, जिसके मुताबिक दायीं ओर के शेष को बायीं ओर की संख्या के साथ जोड़ देते हैं। इसलिए ऊपर के उदाहरण में, 12 का 2 दायीं ओर लिखकर 1 को बायीं ओर लेकर आगे बढ़ते हैं और इसे 3 में जोड़ देते हैं। इस प्रकार हमें 7 एवं 6 के गुणनफल के रूप में 42 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{ll} 7 & -3 \\ 6 & -4 \\ \hline 4\ / & 2 \end{array}$$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में गुण्य एवं गुणक 10 से कम थे, पर यदि ये 10 से अधिक हों, फिर क्या करेंगे?

उदा. 2: $12 \times 11 = ?$

हल:

$$\begin{array}{ll} 12 & +2 \\ 11 & +1 \\ \hline 13\ / & 2 \end{array}$$

यहाँ भी वही विधि लागू होगी। केवल तिर्यक-घटाव की जगह तिर्यक-जोड़ का प्रयोग करना होगा।

उदा. 3: हल करें: $16 \times 11 = ?, 18 \times 12 = ?, 19 \times 13 = ?, 17 \times 17 = ?, 12 \times 13 = ?$

हल:

$$\begin{array}{ll} 16 & +6 \\ 11 & +1 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{17/6 = 176} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 18 & +8 \\ 12 & +2 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{20/{}_{1}6 = 216} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 19 & +9 \\ 13 & +3 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{22/{}_{2}7 = 247} \end{array}$$

शेष प्रश्नों को स्वयं हल करें।

यदि एक संख्या 10 से बड़ी हो एवं दूसरी 10 से छोटी तो उसका गुणनफल निकालना

उदा. 4: हल करें: $12 \times 9 = ?$

हल:

$$\begin{array}{ll} 12 & +2 \\ 9 & +-1 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{11/\bar{2} = 108} \end{array}$$

ऋण एवं धन संख्याओं के गुणनफल से ऋण-संख्या मिलती है, इसलिए दायीं ओर स्थित संख्याओं के गुणनफल से प्राप्त ऋणात्मक संख्या (-2) को 10 में से घटाना होगा। इस प्रकार

i) उत्तर का दायाँ पक्ष 10 में से घटाते हैं।

ii) उत्तर के वाम पक्ष में से 1 घटाते हैं।

उदा. 5: सरल करें: $14 \times 6 = ?$

$$\begin{array}{cc} 14 & +4 \\ 6 & -4 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{=10 / {}_1\bar{6} = 9/\bar{6} = 84} \end{array}$$

दायीं ओर प्राप्त होता है (–16)। गुणा के सामान्य नियम के मुताबिक 10 में से 1 घटाते हैं। शेष क्रिया उदा.-4 की तरह ही संपन्न करते हैं।

थोड़े अभ्यास के बाद यह क्रिया मन में ही संपन्न की जा सकती है। इसलिए पाठकों को सुझाव दिया जाता है कि इस प्रकार के प्रश्नों का अभ्यास जितना हो सके कर लें।

अभ्यास प्रश्न

सरल करें:

1) 12×11 2) 13×12 3) 14×7 4) 11×6

5) 17×13 6) 19×15 7) 18×8

उत्तर:

1) 132 2) 156 3) 98 4) 66 5) 221 6) 285 7) 144

जब गुणक एवं गुण्य 100 के करीब हों, तब हमारा आधार 100 = (10^2) होना चाहिए। ऐसी स्थिति में उत्तर के दायें पक्ष में दो अंक होंगे। शेष नियमों में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

उदा. 6: हल करें: (1) $91 \times 96 = ?$ (2) $99 \times 98 = ?$

हल:

(1)
$$\begin{array}{cc} 91 & -9 \\ 96 & -4 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{87/36 = 8736} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{cc} 99 & -1 \\ 98 & -2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{97/02 = 9702} \end{array}$$

उदा. 7: हल करें: (1) $93 \times 92 = ?$ (2) $93 \times 93 = ?$ (3) $97 \times 96 = ?$ (4) $89 \times 85 = ?$

हल:

(1)
$$\begin{array}{cc} 93 & -7 \\ 92 & -8 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{85/56 = 8556} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{cc} 93 & -7 \\ 93 & -7 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{86/49 = 8649} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{cc} 97 & -3 \\ 96 & -4 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{93/12 = 9312} \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{cc} 89 & -11 \\ 85 & -15 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{74 / {}_1 65 = 7565} \end{array}$$

उदा. 8: हल करें: (1) $102 \times 89 = ?$ (2) $105 \times 92 = ?$

(3) $107 \times 91 = ?$ (4) $115 \times 92 = ?$

हल:

(1)
$$\begin{array}{cc} 102 & +2 \\ 98 & -2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{100/\overline{04} = 9996} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{cc} 105 & +5 \\ 92 & -8 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{97/\overline{40} = 9660} \end{array}$$

प्रश्न संख्या (3) एवं (4) को स्वयं हल करें।

नोट: यदि उत्तर का दायाँ पक्ष ऋणात्मक हो तो इसे 100 में से घटा देते हैं तथा बायें पक्ष में से एक घटा लिया जाता है।

उदा. 9: हल करें: (1) $102 \times 103 = ?$ (2) $105 \times 107 = ?$
(3) $111 \times 117 = ?$ (4) $115 \times 108 = ?$

हल:

(1)
$$\begin{array}{ll} 102 & +2 \\ 103 & +3 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{105/06 = 10506} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ll} 105 & +5 \\ 107 & +7 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{112/35 = 11235} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ll} 111 & +11 \\ 117 & +17 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{128/{}_{1}87 = 12987} \end{array}$$

प्रश्न संख्या (4) को स्वयं हल करें।

उदा. 10: हल करें: (1) $998 \times 981 = ?$ (2) $978 \times 983 = ?$
(3) $1112 \times 995 = ?$ (4) $1118 \times 985 = ?$
(5) $1107 \times 1113 = ?$

हल: यहाँ हमारा आधार $100 = (10^3)$ होगा। इस प्रकार उत्तर के दाएँ पक्ष में तीन अंक होंगे।

(1)
$$\begin{array}{ll} 998 & -2 \\ 981 & -19 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{979/038 = 979038} \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ll} 978 & -22 \\ 983 & -17 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{961/374 = 961374} \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ll} 1112 & +112 \\ 995 & -5 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{1107/\overline{56}0 = 1106440} \end{array}$$

प्रश्न संख्या (4) एवं (5) को स्वयं हल करें।

अपवर्त्य एवं उप-अपवर्त्य

उपरोक्त सभी उदाहरणों में गुणक और गुण्य या दोनों में से कोई एक आधार के करीब था, जिससे हमें शेष कम प्राप्त होता था। इससे गुणा में आसानी होती थी। पर यदि गुणा करने के लिए दो ऐसी संख्याएँ दे दी जाएँ, जिनमें से कोई भी आधार के निकट नहीं हो तो क्या करेंगे? ऐसी स्थिति में, हम किसी उपयुक्त आधार का अपवर्त्य या उप-अपवर्त्य को कामचलाऊ आधार बना लेते हैं; इसकी सहायता से सारी गणनाएँ करते हैं और फिर प्राप्त परिणाम में उसी अनुपात में गुणा या भाग देते हैं।

मान लीजिए, हमें 47 को 49 से गुणा करना है। ये दोनों ही संख्याएँ 10 या 100 से काफी दूर हैं। यदि इनमें से किसी एक को आधार बना लें तो गणना में मुसीबत का सामना करना पड़ेगा। इसलिए 100 को सैद्धांतिक आधार के रूप में स्वीकार कर लेते हैं; और इसके उप-अपवर्त्य 50 को कामचलाऊ आधार के रूप में स्वीकार कर लेते हैं।

$$\begin{array}{ll} 47 & -3 \\ 49 & -1 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{2)\,46/03 = 2303} \end{array}$$

पहला चरण: 50 को कामचलाऊ आधार बनाते हैं।

दूसरा चरण: तिर्यक-घटाव की क्रिया से हमें बायीं ओर 46 प्राप्त होता है।

तीसरा चरण: चूँकि हमारा कामचलाऊ आधार 100 से व्युत्पन्न है, इसलिए दायीं ओर दो अंक होंगे।

चौथा चरण: चूँकि 50, 100 का आधा है, इसलिए 46 को दो से विभाजित करें।

$46 \div 2 = 23$; यही उत्तर का वाम-पक्ष है।

पाँचवाँ चरण: उत्तर का दाहिना-पक्ष '03' अप्रभावित रहता है।

अथवा,

यदि 100 को 'सैद्धांतिक आधार' एवं 50 को 'कामचलाऊ आधार' बनाने के बजाए, 10 को सैद्धांतिक आधार मानकर इसके अपवर्त्य 50 को कामचलाऊ आधार बनाया जा सकता है तो ऐसा करने पर उत्तर के वाम-पक्ष में 5 से गुणा करना होगा।

$$\begin{array}{l} 47 \quad -3 \\ \underline{49 \quad -1} \\ 5 \times 46/3 \end{array}$$

$230/3 = 2303$

दायें पक्ष में केवल एक अंक होगा, क्योंकि यहाँ 10 का घातांक '1' है। क्या आप उपरोक्त प्रश्न को 10 को 'सैद्धांतिक आधार' एवं 40 को 'कामचलाऊ आधार' बनाकर हल कर सकते हैं?

उदा. 2: हल करें: (1) $48 \times 49 = ?$ (2) $47 \times 46 = ?$

हल: (1) कामचलाऊ आधार $= \dfrac{100}{2} = 50$

$$\begin{array}{l} 48 \;-2 \\ \underline{49 \;-1} \\ 2)\,47/02 \end{array} = 23\frac{1}{2}/02 = 23/52 = 2352$$

यहाँ 47 एक विषम संख्या है, जिसे दो से विभाजित करने पर एक भिन्न संख्या $23\frac{1}{2}$ मिलता है। जिस प्रकार $\frac{1}{2}$ रुपया दायाँ-पक्ष की ओर ले जाया जाता है, ठीक वैसे ही $23\frac{1}{2}$ का आधा (1/2) दायीं ओर (50 के रूप में) ले जाया जाता है।

दूसरा प्रश्न भी इसी तरह हल करें।

गुणा का सामान्य नियम

हमने अभी कुछ खास-खास स्थितियों के संदर्भ में गुणा करने की प्रक्रिया की चर्चा की। अब हम गुणा के एक ऐसे 'सामान्य नियम' की चर्चा करेंगे, जो सभी स्थितियों पर लागू होता हो। विशिष्ट परिस्थितियों के लिए प्रयुक्त सभी नियमों का स्मरण रख पाना जरा मुश्किल होता है, इसलिए गुणा के 'सामान्य सूत्र' से परिचित होना जरूरी है।

दो अंकों की संख्या से गुणा

उदा॰ 1: सरल करें: (1) $12 \times 13 = ?$

(2) $17 \times 18 = ?$

(3) $87 \times 92 = ?$

हल: 1) $12 \times 13 = ?$

पहला चरण: गुणक एवं गुण्य में इकाई के स्थान पर स्थित अंकों को आपस में गुणा करें

1 2
1 3
6 (2 × 3)

दूसरा चरण: अब तियर्क-गुणन का सहारा लें। 3 को 1 से गुणा करें एवं 1 को 2 से। दोनों उत्पादों को जोड़ दें एवं 6 के बायीं ओर लिख दें।

1 2
1 3
56 (3 × 1 + 2 × 1)

तीसरा चरण: अंतिम चरण में हम गुणक एवं गुण्य दोनों के बायीं ओर स्थित अंकों को आपस में गुणा करते हैं।

1 2
1 3
156 (1 × 1)

(2) 17 × 18 = ?

पहला चरण:

1 7
1 8
6 [7 × 8 = 56; 6 लिख दें एवं 5 लेकर आगे बढ़ें]

दूसरा चरण:

1 7
1 8
0 6 [1 × 8 + 7 × 1 +5 = 20; '0' लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें]

तीसरा चरण:

1 7
1 8
306 [1 × 1 + 2 = 3; इसे लिख दें]

(3) 87 × 92 = ?

पहला चरण:

8 7
9 2
4 (7 × 2 = 14, 4 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें)

दूसरा चरण:

```
 8  7
  ⤫
 9  2
------
 0  4
```
(8 × 2 + 9 × 7 + 1 =80, '0' लिख दें एवं 8 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण:

```
 8  7
 ↕
 9  2
------
8004
```
(8×9+8=80)

अभ्यास प्रश्न

सरल करें :

1) 57 × 43	2) 51 × 42	3) 38 × 43	4) 56 × 92
5) 81 × 19	6) 23 × 99	7) 29 × 69	8) 62 × 71
9) 17 × 37	10) 97 × 89		

उत्तर

1) 2451	2) 2142	3) 1634	4) 5152
5) 1539	6) 2277	7) 2001	8) 4402
9) 629	10) 8633		

उदा. 2: हल करें : 1) 325 × 17 = ? 2) 4359 × 23 = ?

उत्तर (1): ***पहला चरण:***

```
 3  2  5
       ↕
    1  7
---------
       5
```
(5 × 7 = 35, 5 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें)

दूसरा चरण:

```
 3  2  5
     ⤫
    1  7
---------
    2  5
```
(2 × 7 + 5 × 1 + 3 = 22, 2 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण:

```
 3  2  5
   ⤫
    1  7
---------
 5  2  5
```
(3 × 7 + 2 × 1 + 2 = 25, 5 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

नोट: तिर्यक-गुणन की प्रक्रिया तब तक जारी रखें, जब तक कि ऐसे सभी जोड़े समाप्त नहीं हो जाते। उपरोक्त दूसरे चरण में हमने 25 एवं 17 का तिर्यक-गुणन किया एवं तीसरे चरण में 32 एवं 17 का तिर्यक-गुणन किया गया।

चौथा चरण:

```
3 2 5
  1 7
-------
5 5 2 5
```
(3 × 1 + 2 = 5, इसे लिख दें)

(2) ***पहला चरण:***

```
4 3 5 9
    2 3
-------
      7
```
(9 × 3 = 27, 7 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

दूसरा चरण:

```
4 3 5 9
    2 3
-------
    5 7
```
(5 × 3 + 9 × 2 + 2 = 35, 5 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण:

```
4 3 5 9
    2 3
-------
  2 5 7
```
(3 × 3 + 5 × 2 + 3 = 22, 2 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

चौथा चरण:

```
4 3 5 9
    2 3
-------
0 2 5 7
```
(4 × 3 + 3 × 2 + 2 = 20, 0 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

पाँचवाँ चरण:

```
4 3 5 9
  2 3
-------
1 0 0 2 5 7
```
(4 × 2 + 2 = 10; इसे लिख दें)

हमलोग सभी चरणों को एक साथ भी लिख सकते हैं:

```
              4 3 5 9
                2 3
-------------------------------------
4×2/4×3+2×3/3×3+5×2/5×3+9×2/9×3
```
$= 10 \quad {}_{2}0 \quad {}_{2}2 \quad {}_{3}5 \quad {}_{2}7$

$= 100257$

अथवा, हम बिना बीच के चरणों को लिखे भी उत्तर तक पहुँच सकते हैं। केवल एक बात

स्मरण रखना होगा और वह है ***'संख्याओं को साथ लेकर आगे बढ़ना'***।

$$\begin{array}{r} 4359 \\ 23 \\ \hline 10\,{}_{2}0\,{}_{2}2\,{}_{3}5\,{}_{2}7 \end{array} \quad \text{अथवा} \quad \begin{array}{r} 4359 \\ 23 \\ \hline 100257 \end{array}$$

आपको एक ही चरण में गणना कर लेने की इस तकनीक में निपुणता हासिल कर लेनी चाहिए। उपरोक्त चरणों का तब तक अध्ययन कीजिए जब तक कि आप तिर्यक-गुणन की इस विधि को हृदयंगम नहीं कर लेते।

तीन अंकों वाली संख्या से गुणा

उदा. 1: हल करें:

1) 321 × 132 = ? 2) 4562 × 345 = ? 3) 69712 × 641 = ?

हल: 1) ***पहला चरण:***

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \ (1 \times 2 = 2)$$

दूसरा चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 7\ 2 \end{array} \ (2 \times 2 + 3 \times 1 = 7)$$

तीसरा चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 3\ 7\ 2 \end{array}$$ (2 × 3 + 3 × 2 + 1 × 1 = 13, 3 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।)

चौथा चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 2\ 3\ 7\ 2 \end{array}$$ (3 × 3 + 1 × 2 + 1 = 12, 2 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।)

पाँचवाँ चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 4\ 2\ 3\ 7\ 2 \end{array} \ (1 \times 3 + 1 = 4)$$

या,

321
132
$1\times3/3\times3+1\times2/2\times3+3\times2+1\times1/2\times2+3\times1/1\times2$

$= 4 \quad {}_{1}2 \quad {}_{1}3 \quad 7 \quad 2$

$=42372$

(2)

4562
345
$4\times3/4\times4+3\times5/5\times4+4\times5+3\times6/5\times5+4\times6+3\times2/5\times6+4\times2/2\times5$

$= 15 \quad {}_{3}7 \quad {}_{6}3 \quad {}_{5}8 \quad {}_{3}9 \quad {}_{1}0$

$=1573890$

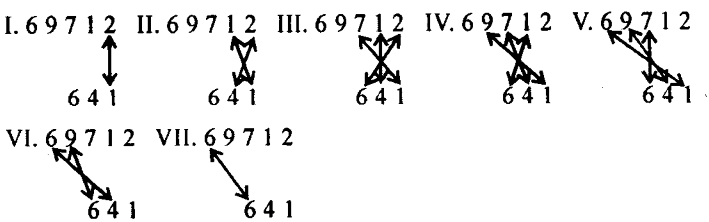
(3)

69712
641
$6\times6/4\times6+6\times9/1\times6+4\times9+6\times7/1\times9+4\times7+6\times1/1\times7+4\times1+6\times2/1\times1+4\times2/1\times2$

$=44 \quad {}_{8}6 \quad {}_{8}8 \quad {}_{4}5 \quad {}_{2}3 \quad 9 \quad 2$

$=44685392$

नोट: क्या आपने तिर्यक-गुणन की क्रिया को भली प्रकार समझ लिया? क्या आपने इस बात पर ध्यान दिया कि तिर्यक-गुणन कि क्रिया के दौरान अंक किस प्रकार घटते, बढ़ते एवं यथावत बने रहते हैं? प्रश्न संख्या (3) पर जरा सरसरी नजर डालिए। उत्तर की पहली कतार में आप यदि दायीं से बायीं ओर बढ़ें तो आप पाएँगे कि पहले भाग में गुणन-क्रिया केवल एक बार ही संपन्न की गई है और यह क्रिया है (1 × 2)। दूसरे भाग में गुणा की क्रिया दो बार संपन्न की गई है (1 × 1 एवं 4 × 2), तीसरे भाग में तीन बार (1 × 7, 4 × 1 एवं 6 × 2), चौथे भाग में तीन बार (1 × 9, 4 × 7 एवं 6 × 1), 5वें भाग में तीन बार (1 × 6, 4 × 9 एवं 6 × 7), छठे भाग में दो बार (4 × 6 एवं 6 × 9) तथा अंतिम भाग में केवल एक बार (6 × 6) गुणा की क्रिया दुहराई गई है। तिर्यक-गुणन में अंकों की भागीदारी को निम्नलिखित रेखाचित्र के सहारे दर्शाया जा सकता है।



अंकों के प्रत्येक जोड़े के लिए तिर्यक-गुणन की विधि ही अपनायी जाती है।

चार अंकों वाली संख्या से गुणा

उदा. हल करें:	1) 4325 × 3216
2) 646329 × 8124

हल: 1) $4325 \times 3216 = ?$

पहला चरण:

```
 4 3 2 5
 3 2 1 6
-------
       0
```
$(5 \times 6 = 30$, 0 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें।)

दूसरा चरण:

```
 4 3 2 5
 3 2 1 6
-------
     0 0
```
$(2 \times 6 + 1 \times 5 + 3 = 20$, 0 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें।)

तीसरा चरण:

```
 4 3 2 5
 3 2 1 6
-------
   2 0 0
```
$(3 \times 6 + 2 \times 1 + 5 \times 2 + 2 = 32$, 2 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें।)

चौथा चरण:

```
 4 3 2 5
 3 2 1 6
-------
 9 2 0 0
```
$(4 \times 6 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 5 \times 3 + 3 = 49$, 9 लिख दें एवं 4 के साथ आगे बढ़ें।)

पाँचवाँ चरण:

```
   4 3 2 5
   3 2 1 6
---------
 0 9 2 0 0
```
$(4 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 4 = 20$, 0 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें।)

छठा चरण:

```
     4 3 2 5
     3 2 1 6
-----------
 9 0 9 2 0 0
```
$(4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 = 19$, 9 लिख दें एवं 1 लेकर आगे बढ़ें।)

सातवाँ चरण:

4 3 2 5

3 2 1 6

1 3 9 0 9 2 0 0 (4 × 3 + 1 = 13, इसे लिख दें)

उत्तर: 13909200

2) 646329 × 8124 = ?

इस प्रश्न को स्वयं हल करें एवं प्रयुक्त चरणों को सहभागी अंकों के रेखा-चित्रीय प्रस्तुतीकरण से मिलाकर देखें।

पहला चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

दूसरा चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

तीसरा चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

चौथा चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

पाँचवाँ चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

छठा चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

सातवाँ चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

आठवाँ चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

नौवाँ चरण: 6 4 6 3 2 9 / 8 1 2 4

अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित को सरल करें:

1) 234 × 456	2) 336 × 678	3) 872 × 431	4) 2345 × 67
5) 345672 × 456	6) 569 × 952	7) 458 × 908	8) 541 × 342
9) 666 × 444	10) 8103 × 450	11) 56321 × 672	12) 1278 × 569
13) 5745 × 562	14) 4465 × 887	15) 8862 × 341	

उत्तर:

1) 106704	2) 227808	3) 375832	4) 157115
5) 15726432	6) 541688	7) 415864	8) 185022
9) 295704	10) 3646350	11) 37847712	12) 727182
13) 3228690	14) 3960455	15) 3021942	

गुणनफल की जाँच

उदा. 1: $15 \times 13 = 195$

आंकिक योग: $6 \times 4 = 6$

या, $24 = 6$

या, $6 = 6$; इसलिए हमारा गुणनफल सही है।

उदा. 2: $69712 \times 641 = 44685392$

आंकिक योग: $7 \times 2 = 5$

या, $14 = 5$

या, $5 = 5$; इसलिए गुणनफल सही है।

उदा. 3: $321 \times 132 = 42372$

आंकिक योग: $6 \times 6 = 0$

या, $36 = 0$

या, $0 = 0$; इसलिए गुणनफल सही है।

पर यदि किसी को उत्तर 43227 प्राप्त हो और वह अपने गुणनफल को जाँचना चाहे तो देखिए क्या होता है।

$321 \times 132 = 43227$

आंकिक योग: $6 \times 6 = 0$

या, $36 = 0$

या, $0 = 0$

इससे प्रमाणित होता है कि गुणनफल सही है, पर वस्तुत: यह गलत है। इस प्रकार हम पाते हैं कि यदि हमारी किस्मत खराब हो तो गलत उत्तर भी परीक्षण पर खरे उतरते हैं।