ज्यामिति (Geometry)

❑ रेखाएं एवं कोण

➢ **रेखा खंड**—एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिंदु हो एक रेखा खंड कहलाता है। जैसे एक रेखा AB है जिसके अंत बिंदु A तथा B है रेखा खंड कहलाता है।

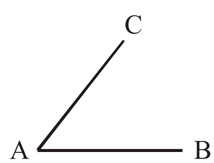
➢ **संरेख बिंदु**—जब एक रेखा पर तीन या अधिक बिंदु हों तो वे संरेख बिंदु कहलाते हैं। जैसे-बिंदु

A,C तथा B संरेख बिंदु हैं।

➢ **असंरेख बिंदु**—जब तीन या अधिक बिंदु एक रेखा पर न हो तो असंरेख बिंदु कहलाते है।

नोट— एक बिंदु से होकर अनंत रेखाएं खीची जा सकती हैं, जबकि दो बिंदु से होकर केवल एक रेखा खींची जा सकती है।

- **कोण**—जब दो किरणें एक ही अंत बिंदु से प्रारंभ होती है तो एक कोण बनता है। कोण को बनाने वाली दोनों किरणें भुजा कहलाती है। चित्र से माना अंत बिंदु A से दो किरणें AB तथा AC प्रारंभ होती हैं तो AB तथा AC भुजा होंगी तथा भुजाओं के बीच कोण A होगा।



☞ **कोण के प्रकार**

1. **न्यूनकोण**—0^0 से 90^0 के बीच के कोण को न्यूनकोण कहते हैं।
2. **समकोण**—90^0 के कोण को समकोण कहते हैं।
3. **अधिक कोण**—90^0 से अधिक और 180^0 से कम माप के कोण को अधिक कोण कहते हैं।
4. **ऋजुकोण**— 180^0 के कोण को ऋजु कोण कहते हैं।
5. **प्रतिवर्ती कोण**— 180^0 से अधिक परंतु 360^0 से कम माप का कोण प्रतिवर्ती कोण कहलाता है।

☞ **परीक्षोपयोगी महत्वपूर्ण कोण**

(i) पूरक कोण—यदि दो कोणों का योग 90^0 हो तो उन्हें परस्पर पूरक कोण या कोटि पूरक कोण कहते हैं। यदि कोण α तथा β परस्पर पूरक कोण हों तो

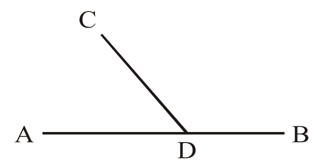
$\alpha + \beta = 90^0$

(ii) सम्पूरक कोण—यदि दो कोणों का योग 180^0 हो तो उन्हें परस्पर सम्पूरक कोण कहते हैं। यदि कोण α तथा β परस्पर सम्पूरक कोण हों तो

$\alpha + \beta = 180^0$

(iii) आसन्न कोण—वैसे दो कोण जिसकी एक भुजा उभयनिष्ठ हो तथा एक ही शीर्ष बिंदु हो, तो ऐसे कोणों को आसन्न कोण कहते हैं।

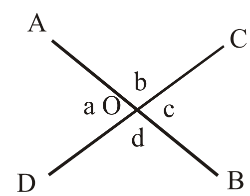
माना दो कोण ADC तथा BDC हैं जिसकी उभयनिष्ठ (Common) भुजा CD है तथा शीर्ष D है।



इसलिए आसन्न कोण ADC और BDC है। आसन्न कोणों का योग हमेशा 180^0 के बराबर होता है।

अर्थात $\angle ADC + \angle BDC = 180^0$

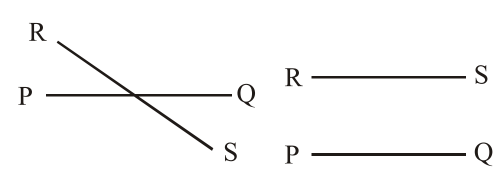
(iv) शीर्षाभिमुख कोण—जब दो रेखाएं किसी बिंदु पर एक-दूसरे को काटती हैं तो एक-दूसरे के सामने के कोण परस्पर बराबर होते है तथा इन्हें शीर्षाभिमुख कोण कहा जाता है।



ऊपर आकृति में दो रेखाएं AB तथा CD एक-दूसरे को बिंदु O पर काटती हैं तो

$$\left.\begin{array}{l}\angle a = \angle c \\ \angle b = \angle d\end{array}\right\}$$ **शीर्षाभिमुख कोण**

- **प्रतिच्छेदी रेखाएं और अप्रतिच्छेदी रेखाएं**—दो भिन्न रेखाओं PQ तथा RS को दो तरह से खींचा जा सकता है या तो रेखाएं PQ और RS एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करेंगी या प्रतिच्छेद नहीं करेंगी। जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।

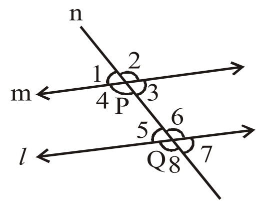


चित्र (i) चित्र (ii)

रेखा PQ तथा RS चित्र (i) में प्रतिच्छेद रेखाएंहै, जबकि चित्र (ii) में समांतर रेखाएं हैं। समांतर रेखाओं में विभिन्न बिंदुओं पर उभयनिष्ठ दूरी समान होती हैं।

➢ **तिर्यक रेखा**—वह रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है एक तिर्यक रेखा कहलाती है।

माना दो रेखाएं l तथा m हैं जिसे एक तिर्यक रेखा n, बिंदु P तथा Q पर काटती है। रेखा P तथा Q पर चार कोण 1,2,3, 4 तथा 5, 6, 7, 8 बनाती है।



$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$, बाह्य कोण तथा $\angle 3,\ \angle 4,\ \angle 5,\ \angle 6$ आंतरिक कोण कहलाते हैं।

☞ **कोणों में निम्नलिखित संबंध है—**

(a) **संगत कोण**—निम्नवत कोण एक-दूसरे के संगत कोण कहलाते हैं—

(i) $\angle 1$और $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ और $\angle 6$

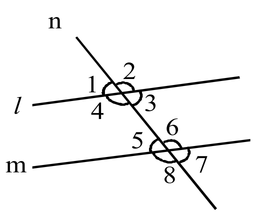
(iii) $\angle 4$और $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ और $\angle 7$

(b) **एकांतर अंतः कोण—**(i) $\angle 4$ और $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ और $\angle 5$ एकांतर अंतः कोण हैं।

(c) **एकांतर बाह्य कोण—**(i) $\angle 1$ और $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ और $\angle 8$ एकांतर बाह्य कोण हैं।

(d) **बाह्य कोण तथा अंतःकोण—**उपर्युक्त चित्र में तिर्यक रेखा n दो रेखाओं l तथा m को बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेद कर रही है। यहां प्रत्येक बिंदु पर चार कोण बन रहे हैं। $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ बाह्य कोण तथा $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ अंतःकोण कहलाते हैं।

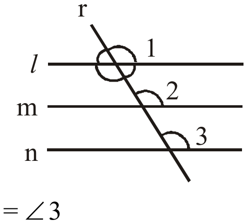
(e) **यदि दो समांतर रेखाओं को तिर्यक रेखा काटे—** माना दो समांतर रेखाएं l तथा m तथा तिर्यक रेखा n है तो एकांतर अंतःकोण समान होते हैं तथा संगत कोण भी समान होते हैं।



अर्थात $\left.\begin{array}{l}\angle 4 = \angle 6 \\ \angle 3 = \angle 5\end{array}\right\}$ **एकांतर कोण**

$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 5 \\ \angle 2 = \angle 6 \\ \angle 4 = \angle 8 \\ \angle 3 = \angle 7\end{array}\right\}$ **संगत कोण**

तीन समांतर रेखाओं पर प्रतिच्छेद रेखा— माना तीन समांतर रेखाएं, l, m, n हैं तथा प्रतिच्छेद रेखा r है।



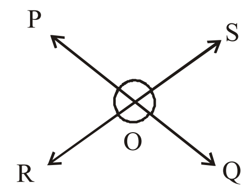
तो $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

इसी प्रकार अन्य कोण भी निकाले जा सकते हैं।

☞ **उदाहरणार्थ प्रश्न देखें**

प्रश्न 1. रेखाएं PQ और RS परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle POR = 75^0$ तो $\angle ROQ$, $\angle QOS$, $\angle SOP$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा के किसी बिंदु पर अंतरित कोण 180^0 होता है।



$\because\ \angle POR + \angle ROQ = 180^0$ होगा

$\therefore$ प्रश्न से $\angle POR$ का मान रखने पर

$75^0 + \angle ROQ = 180^0$

$\angle ROQ = 180^0 - 75^0$

$\angle ROQ = 105^0$

$\because$ शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।

$\therefore\ \angle POR = \angle QOS$

$\therefore\ \angle QOS = 75^0$

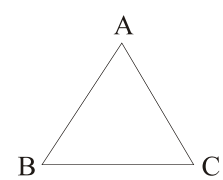
तथा $\angle ROQ = \angle SOP$

$105^0 = \angle SOP$

$\therefore\ \angle SOP = 105^0$

❑ त्रिभुज

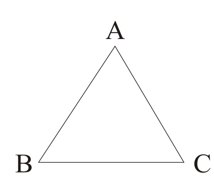
तीन रेखाओं से घिरी हुई आकृति को त्रिभुज कहते हैं।



मान लिया तीन भुजा AB, BC, CA है तथा कोण $\angle A, \angle B, \angle C$ है।

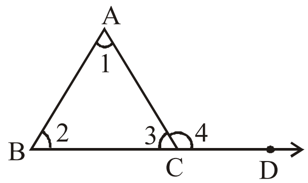
● गुण

1. किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180^0 होता है यदि त्रिभुज ABC के कोण $\angle A, \angle B, \angle C$ है तो



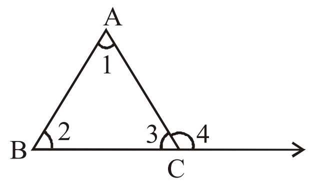
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

2. किसी त्रिभुज का बहिष्कोण सुदूर अंतः कोणों के योगफल के बराबर होता है।



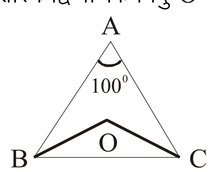
एक त्रिभुज ABC लेने पर बहिष्कोण $\angle ACD$ सुदूर अतः कोण के बराबर होगा अर्थात $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

3. किसी न्यूनकोण त्रिभुज का बहिष्कोण हमेशा किसी एक अंतः कोण से बड़ा होता है।



माना एक न्यूनकोण त्रिभुज ABC है तो $\angle 4 > \angle 1, \angle 2, \angle 3$

4. किसी त्रिभुज के दो कोणों के आंतरिक समद्विभाजक द्वारा बनाया गया कोण तीसरे कोण का आधा और 90^0 का योग होता है। अर्थात यदि एक त्रिभुज ABC में $\angle BAC = 100^0$ है तथा $\angle$ ABC और $\angle BCA$ का आंतरिक द्विभाजक बिंदु O पर मिलते हैं। तो

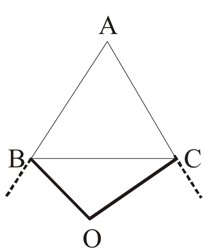


$$\angle BOC = \frac{\angle BAC}{2} + 90^0$$

$$= \frac{100^0}{2} + 90^0 = 50^0 + 90^0 = 140^0$$

5. किसी त्रिभुज के दो कोणों के बाह्य द्विभाजक द्वारा बनाया गया कोण, समकोण में तीसरे कोण का आधा घटाने पर प्राप्त होता है अर्थात माना एक त्रिभुज ABC जिसका बाह्य द्विभाजक, बिंदु O पर मिलते हैं।

$$\angle BOC = 90^0 - \frac{\angle BAC}{2}$$

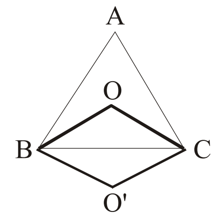


नोट—किसी त्रिभुज के दो कोणों के अंतः समद्विभाजक द्वारा बनाया गया कोण अधिक कोण तथा बाह्य समद्विभाजक द्वारा बनाया गया कोण न्यूनकोण होता है।

6. किसी त्रिभुज के बाह्य समद्विभाजक तथा अंतः समद्विभाजक के कोणों का योग संपूरक कोण होता है अर्थात दोनों कोणों का योग 180^0 होता है। अर्थात

$$\angle BOC + \angle BO'C = 90 + \frac{\angle BAC}{2} + 90 - \frac{\angle BAC}{2}$$

$$= 180^0$$

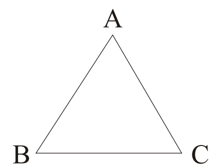


● त्रिभुज के प्रकार

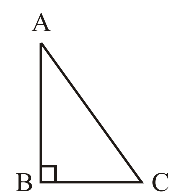
☞ कोण के आधार पर

कोण के आधार पर त्रिभुज निम्नलिखित प्रकार के होते हैं।

1. **न्यूनकोण त्रिभुज—**यदि त्रिभुज के तीनों कोणों का मान 90^0 से कम हो तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज होता है।
माना एक न्यूनकोण त्रिभुज ABC जिसमें $\angle A, \angle B, \angle C$ का मान हमेशा 90^0 से कम होगा।



2. **समकोण त्रिभुज—**यदि त्रिभुज के एक कोण का मान 90^0 हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है अर्थात किसी त्रिभुज के दो कोणों का योग तीसरे कोण के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।



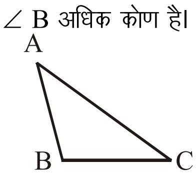
$\therefore \quad \angle A + \angle C = \angle B$

या $\angle B = 90^0$

3. **अधिक कोण त्रिभुज —**यदि त्रिभुज के एक कोण का मान 90^0 से अधिक हो तो त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज होता है। या किसी त्रिभुज के दो कोणों का योग तीसरे कोण से छोटा हो तो त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज होता है। माना एक अधिक कोण त्रिभुज ABC है। जिसमें कोण $\angle$ B अधिक कोण है।

यदि $\angle B > \angle A + \angle C$

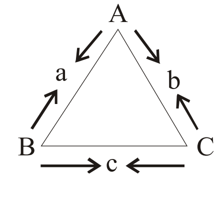
या $\angle B > 90^0$



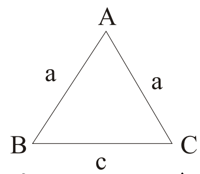
☞ भुजा के आधार पर

भुजा के आधार पर त्रिभुज निम्नलिखित प्रकार के होते हैं—

1. **विषम बाहु त्रिभुज—** ऐसे त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई भिन्न होती है।
जैसे–
त्रिभुज ABC में
AB = a इकाई
BC = c इकाई
AC = b इकाई



2. समद्विबाहु त्रिभुज—त्रिभुज की दो भुजा समान तथा एक भुजा भिन्न होती है।



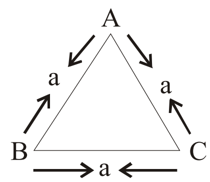
त्रिभुज ABC में

AB = AC = a इकाई

B C = c इकाई

3. समबाहु त्रिभुज—समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएं समान होती है। अर्थात ΔABC में

AB = B C = CA = a इकाई



● त्रिभुज का क्षेत्रफल

☞ विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

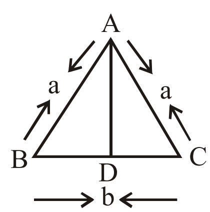
माना एक विषमबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा की लंबाई a, b तथा c है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

जहां $S = \frac{a+b+c}{2}$ या $\frac{\text{तीनों भुजाओं का योग}}{2}$

नोट- उपरोक्त सूत्र किसी भी प्रकार के त्रिभुज के लिए उपयोगी है यदि तीनों भुजाओं का मान ज्ञात हो।

☞ समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

माना एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC है जिसकी भुजा AB = AC = a तथा BC = b है।



समद्विबाहु त्रिभुज में बिंदु A से आधार पर लंब AD खींचने पर जो आधार को दो बराबर भागों में समद्विभाजित करेगा।

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times AD \times BC$

$= \frac{1}{2} \times h \times b$

[$\because$ समकोण त्रिभुज ABD में लंब^2 = कर्ण^2 – आधार^2]

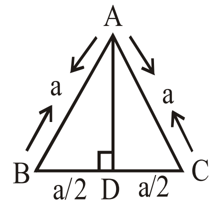
$= \frac{1}{2} b \times \sqrt{\left(\frac{4a^2 - b^2}{4}\right)}$ $\left[\therefore \mathbf{h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \right]$

$= \frac{1}{2} b \times \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$ $\left[\textbf{क्योंकि BD = CD} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}} \right]$

$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

☞ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

माना समबाहु त्रिभुज की भुजा a है।



समबाहु त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर लंब डाला गया है AD, जो त्रिभुज की ऊंचाई है।

ΔABC में

$BD = CD = \frac{a}{2}$

समकोण ΔADB में

$AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$AD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$AD^2 = \frac{3a^2}{4}$

$AD = \sqrt{3}\,\frac{a}{2}$

अब ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊंचाई

$= \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{3}\,\frac{a}{2}$

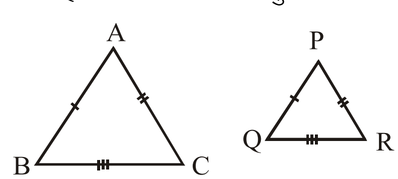
$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

अतः समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

● त्रिभुजों के गुण

☞ दो त्रिभुजों के समरूप होने के नियम

1. दो त्रिभुज समरूप त्रिभुज होंगे यदि उनकी संगत भुजाएं आनुपातिक होगी अर्थात यदि दो त्रिभुज ABC और PQR हों तो

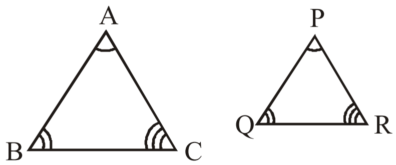


$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore$ ΔABC तथा ΔPQR समरूप होंगे या $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

2. यदि दो त्रिभुज के संगत कोण बराबर हों तो त्रिभुज समरूप त्रिभुज होते हैं।

अर्थात ΔABC और ΔPQR में–



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

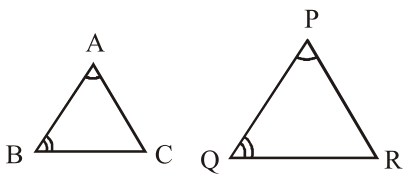
$\therefore \quad \angle A = \angle P$

$\angle B = \angle Q$

$\angle C = \angle R$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR$

3. यदि एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों तो त्रिभुज समरूप त्रिभुज होता है अर्थात

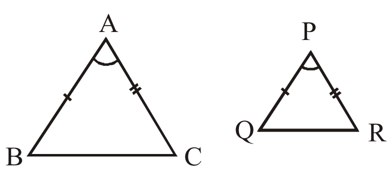


$\angle A = \angle P$

$\angle B = \angle Q$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR$

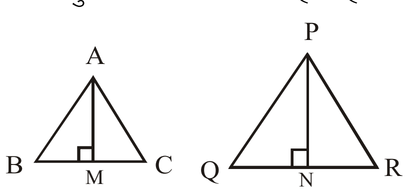
4. यदि दो त्रिभुजों में दो संगत भुजाओं का युग्म आनुपातिक हो तथा उनके मध्य अंतरित कोण समान हो तो त्रिभुज समरूप त्रिभुज होते हैं।



$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ तथा $\angle A = \angle P$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR$

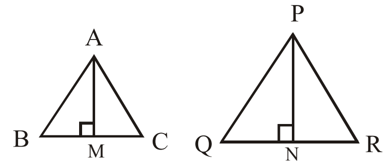
5. समरूप त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्गों के बराबर होता है।



$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}}$

$$= \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AM^2}{PN^2}$$

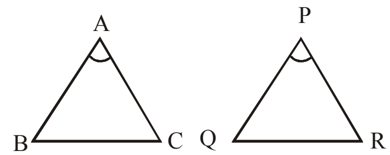
6. समरूप त्रिभुज की संगत भुजाओं, शीर्ष लंब तथा परिमिति का अनुपात समान होता है। अर्थात



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{AM}{PN} = \frac{(AB+BC+AC)}{(PQ+QR+PR)}$$

- **दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने के नियम**

(i) यदि दोनों त्रिभुज की सभी भुजाएं समान हो अर्थात



$AB = PQ$

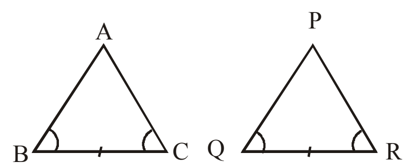
$BC = QR$

$AC = PR$

तो ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम त्रिभुज होंगे।

या $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

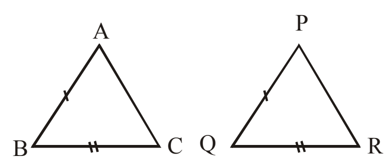
(ii) एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों के बराबर हो तथा दोनों त्रिभुज की एक भुजा भी बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



$\angle B = \angle Q$ तथा $BC = QR$

$\angle C = \angle R \quad \therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$

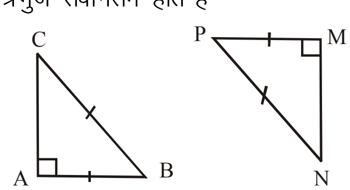
(iii) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएं तथा उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा उनके अंतर्गत कोण के समान हो तो त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज होता है।



$AB = PQ, \quad BC = QR$

तथा $\angle B = \angle Q \therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$

(iv) यदि समकोण त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और उसकी एक भुजा के बराबर हो तो ऐसे दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं–



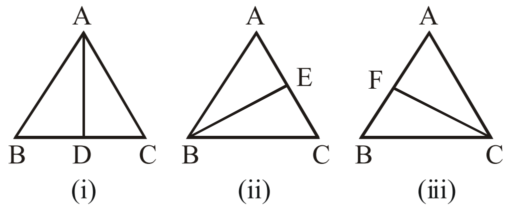
दिए गए चित्र में $BC = PN$ तथा $AB = MP$

तो $\Delta ABC \cong \Delta MPN$

❑ माध्यिका

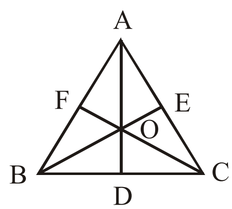
किसी त्रिभुज के शीर्ष से सामने की भुजा को समद्विभाजित करते हुए खींची गई रेखा को माध्यिका कहते हैं।

जैसे- ABC में AD, BE तथा CF माध्यिका हैं जो BC, AC और AB को दो बराबर भागों में बांटती हैं।



- **माध्यिका का प्रतिच्छेद बिंदु—** त्रिभुज के शीर्षों से खींची गई माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिंदु माध्यिकाओं को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है तथा माध्यिकाओं का यह प्रतिच्छेद बिंदु केंद्रक या गुरुत्वकेंद्र या मध्य केंद्र कहलाता है।

  यहां ΔABC की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिंदु O है, जो केंद्रक है।



$\therefore \quad AO : OD = 2 : 1$

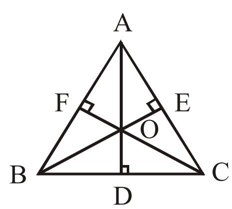
$BO : OE = 2 : 1$

$CO : OF = 2 : 1$

- **लंब केंद्र**

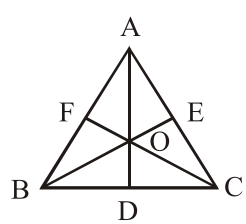
त्रिभुज के तीनों शीर्षों से सामने की भुजा पर डाले गए, लंबों का प्रतिच्छेद बिंदु लंब केंद्र कहलाता है।

इस प्रकार ΔABC का लंब केंद्र O है।



- **परि केंद्र**

त्रिभुज की भुजाओं के लंबार्धकों का प्रतिच्छेद बिंदु परिकेंद्र कहलाता है तथा परिकेंद्र से शीर्षों की दूरी समान होती है।



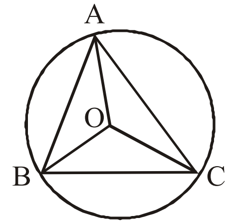
चित्र से त्रिभुज का परिकेंद्र O है।

तथा OA = OB = OC

- **परिवृत्त की त्रिज्या**

त्रिभुज के परिवृत्त (ऐसा वृत्त जो तीनों शीर्षों से होकर जाता है) की त्रिज्या तथा त्रिभुज के परिकेंद्र से शीर्षों की दूरी बराबर होती है।

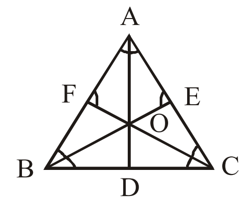
अर्थात OA = OB = OC = परिवृत्त की त्रिज्या



- **अंतः केंद्र**

त्रिभुज के कोण अर्द्धकों का प्रतिच्छेद बिंदु अंतः केंद्र कहलाता है तथा यह अंतः केंद्र भुजाओं से समान दूरी पर होता है।

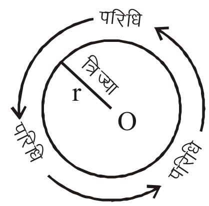
अर्थात OD = OE = OF



❑ वृत्त

किसी स्थिर बिंदु के परितः एक नियत दूरी पर गतिशील बिंदु का पथ, वृत्त कहलाता है। वह स्थिर बिंदु वृत्त का केंद्र तथा वह नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या होती है।

माना स्थिर बिंदु O के परितः r नियत दूरी पर चारों ओर जो पथ बनता है उसे वृत्त कहते हैं।

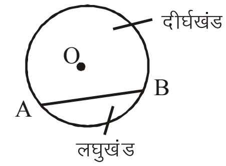


- **परिधि—**वृत्त का परिमाप परिधि ही होती है।

  $\therefore$ वृत्त की परिधि $= 2\pi r$
- **त्रिज्या—**वृत्त के केंद्र से परिमाप (परिधि) तक की दूरी त्रिज्या होती है। अर्थात त्रिज्या = r
- **व्यास—**त्रिज्या के दो गुने को व्यास कहते हैं।

  इसलिए व्यास = 2 r
- **जीवा**

  वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा जीवा कहलाती है।

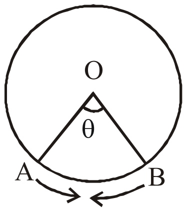


चित्र से AB वृत्त की जीवा है

वृत्त की सबसे बड़ी जीवा केंद्र से होकर जाती है तथा वृत्त की त्रिज्या का दोगुना या व्यास के बराबर होती है।

वृत्त की जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है। बड़ा खंड, दीर्घ वृत्त खंड तथा छोटा खंड, लघु वृत्त खंड कहलाता है।

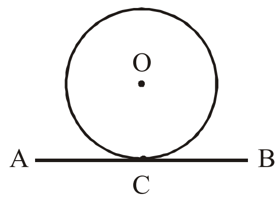
- **चाप**—परिधि पर स्थित दो बिंदुओं के बीच के भाग को चाप कहा जाता है।



चित्र से AB वृत्त का चाप है। चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण की माप को चाप का अंश माप कहा जाता है यहां पर चाप का अंश माप θ है।

- **स्पर्श रेखा**

वह सीधी रेखा जो किसी वृत्त के परिधि पर केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है स्पर्श रेखा कहलाती है।



चित्र में रेखा AB केवल बिंदु C पर वृत्त को स्पर्श कर रही है अतः रेखा ACB स्पर्श रेखा है।

परीक्षोपयोगी प्रश्न

1. Δ ABC परिवृत्त में DE रेखा A शीर्ष बिंदु पर इस प्रकार स्पर्श करती है कि DE || BC । यदि AB = 17 सेमी. तो AC की लंबाई किसके बराबर होगी?

(a) 16.0 सेमी. (b) 16.8 सेमी.
(c) 17.3 सेमी. (d) 17 सेमी.

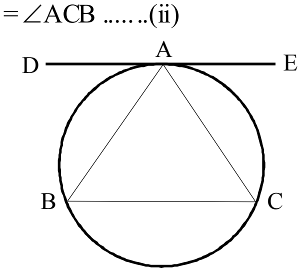
उत्तर—(d)

माना ΔABC के परिवृत्त का केंद्र O है तथा शीर्ष A पर स्पर्श रेखा DE है

अतः ∠CAE = ∠ABC (प्रमेय से) .....(i)

तथा DE || BC

अतः ∠CAE = ∠ACB ....(ii)



समी. (i) और समी. (ii) से

∠ABC = ∠ACB

अतः AB = AC

AC = 17 **[∵ AB = 17 सेमी.]**

2. I और O त्रिभुज ABC के क्रमशः अंतःकेंद्र और परिकेंद्र हैं। बढ़ाई गई रेखा AI, ΔABC के परिवृत्त को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करती है। यदि $\angle ABC = x^o$, $\angle BID = y^o$ और $\angle BOD = z^o$, तो $\frac{z+x}{y} =$

(a) 3 (b) 1 (c) 2 (d) 4

उत्तर—(c)

दिया है $\angle ABC = x^o$

$\angle BID = y^o$

$\angle BOD = z^o$

तो $\frac{z+x}{y} = ?$

माना Δ ABC के कोण क्रमशः

$\angle A = 70^o$

प्रश्न में दिया है $\angle B = 80^o = x$

$\angle C = 30^o$

चित्र से $\angle BID = y = 75^o$

$\angle ABC = x = 80^o$

$\angle BOD = z = 70^o$ **(वृत्तखंड प्रमेय से)**

$\angle y = 35^o + 40^o = 75^o$

$\therefore \angle BID = 75^o$

$\angle x = 80^o$

$\angle z = 35 \times 2 = 70^o$ **(∵ O केंद्र है)**

(∴ चाप BD द्वारा ∠BOD = Z= 2 × ∠ BAD)

$\therefore \frac{z+x}{y} = \frac{70+80}{75^o} = 2$

द्वितीय विधि—

$\angle ABC = x^0$

$\angle BID = y^0$

$\angle BOD = z^0$

$\frac{z+x}{y} = ?$

ΔAIB में

माना $\angle BAI = \theta/2$

$\angle BID = \angle ABI + \angle BAI$

(ΔAIB में ∠BID बहिष्कोण है।)

$y^0 = \frac{x^0}{2} + \frac{\theta}{2}$

$\angle BOD = z^0 = 2 \times \frac{\theta}{2}$ **(प्रमेय से)**

$\therefore z^0 = \theta$

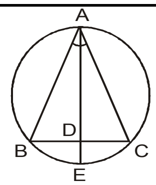
अब $\frac{z^0 + x^0}{y^0} = \frac{\theta + x^0}{\frac{x^0}{2} + \frac{\theta}{2}} \Rightarrow 2$

3. एक त्रिभुज ABC के कोण BAC का द्विभाजक, भुजा BC को बिंदु D पर प्रतिच्छेदित करता है और ΔABC के परिवृत्त को

E पर मिलता है तो यह सदा सत्य होता है कि AB . AC + DE.AE=

(a) AD^2 (b) AE^2 (c) CE^2 (d) CD^2

उत्तर–(b)



$\therefore\ AB \times AC + DE \times AE$

$= AB \times AC + (AE - AD)\,AE \quad (\because \mathbf{DE = AE - AD})$

$= AB \times AC + AE^2 - AD \times AE$

$= AB \times AC - AD \times AE + AE^2$

$= AD \times AE - AD \times AE + AE^2 \quad (\because \mathbf{AB \times AC = AD \times AE})$

$= AE^2$

4. AB और CD एक वृत्त की दो समांतर जीवा हैं जो केंद्र के विपरीत ओर स्थित हैं और उनके बीच की दूरी 17 सेमी. है। AB और CD की लंबाई क्रमशः 10 सेमी. और 24 सेमी. है वृत्त की त्रिज्या (सेमी. में) है–

(a) 16 (b) 9 (c) 13 (d) 30

उत्तर–(c)

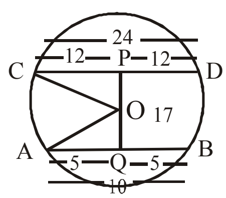
माना वृत्त का O केंद्र है तथा O से AB और CD पर लंब PQ डाला गया है।

$\therefore\ CP = \frac{24}{2} = 12$ सेमी. तथा $AQ = \frac{10}{2} = 5$ सेमी.

$\because$ वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$\therefore$ माना $PO = x$

$OQ = 17 - x$



ΔOQA में

$OA^2 = QO^2 + AQ^2$

$= (17-x)^2 + 5^2$ ....(i)

ΔOCP में

$OC^2 = PO^2 + PC^2$

$OA^2 = 12^2 + x^2$ ......(ii) ($\because$ **OA = OC = वृत्त की त्रिज्या**)

$\therefore$ समी. (i) और समी. (ii) से

$12^2 + x^2 = (17-x)^2 + 5^2$

$144 + x^2 = 289 + x^2 - 34x + 25$

$144 + x^2 = 314 + x^2 - 34x$

$34x = 314 - 144$

$34x = 170$

$x = \frac{170}{34} = 5$

x का मान समी. (ii) में रखने पर

$OA^2 = 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25 = 169$

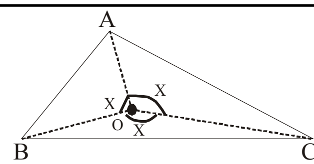
$OA = \sqrt{13 \times 13}$ OA = 13 सेमी.

5. किसी विषमबाहु त्रिभुजाकार पार्क ABC के भीतर एक खंभा सीधा खड़ा है। यदि हर कोने से खंभे के शिखर का उन्नयन कोण वही हो, तो Δ ABC में खंभे का पद है-

(a) केंद्रक पर (b) परिकेंद्र पर

(c) अंत:केंद्र पर (d) लंबकेंद्र पर

उत्तर–(b)



यदि हर कोने से खंभे के शिखर का उन्नयन कोण समान हैं तो बिंदु O से त्रिभुज के हर कोने, समान दूरी पर होंगे।

अर्थात OA = OB = OC

परिकेंद्र, त्रिभुज के तीनों शीर्ष बिंदुओं से सम्दूरस्थ होता है।

अतः ΔABC में खंभे का पद परिकेंद्र पर है।

6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण 30° 45' 15" और 28° 14' 45" हैं तो रेडियन में तीसरा कोण है-

(a) $\frac{\pi^o}{2}$ (b) $\frac{3\pi^o}{10}$ (c) $\frac{2\pi^o}{3}$ (d) $\frac{3\pi^o}{5}$

उत्तर–(c)

माना ΔABC का कोण $\angle A = 30°\ 45'15"$ है।

तथा $\angle B = 28°\ 14'45"$

$\because\ \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\therefore\ 30°\ 45'15" + 28°\ 14'\ 45" + \angle C = 180°$

$\therefore\ \angle C = 180° - (30°\ 45'15" + 28°\ 14'\ 45")$

$\angle C = 180° - (59°) = 121°$

$\therefore\ \angle C$ का मान रेडियन में $= \frac{121}{180} \times \pi$

$= \frac{2\pi^o}{3}$ (लगभग)

7. ΔABC में $AB = BC = K$, $AC = \sqrt{2}\,K$ तो ΔABC क्या है?

(a) समद्विभुज त्रिभुज (b) समकोणीय त्रिभुज

(c) समभुज त्रिभुज (d) लंबसमद्विभुज त्रिभुज

उत्तर–(d)

ΔABC में $AB = BC = K$

तथा $AC = \sqrt{2}\,K$

$\therefore\ AB^2 = K^2 = BC^2$

तथा $AC^2 = 2K^2$

$\therefore\ AB^2 + BC^2 = K^2 + K^2$

$AB^2 + BC^2 = 2K^2$

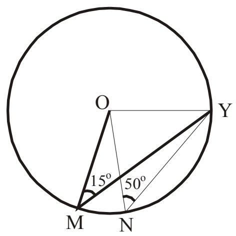
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\because$ समकोण त्रिभुज में

लंब^2 + आधार^2 = कर्ण^2 तथा समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाएं समान होती है।

अतः प्रश्न में दी गई जानकारी के आधार पर दिया गया त्रिभुज समकोण समद्विबाहु या लंब समद्विभुज त्रिभुज है।

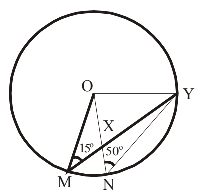
8. दी गई आकृति में, $\angle ONY = 50^o$ और $\angle OMY = 15^o$ है, तो $\angle MON$ का मान क्या है?



(a) 40^o (b) 20^o (c) 70^o (d) 30^o

उत्तर—(c)

वृत्त का केंद्र O है।
ΔOMY में
$\angle OMY = 15^o$
$\because \angle OMY = \angle OYM$
[$\because$ OM=OY = त्रिज्या]
$\therefore \angle OYM = 15^o$
ΔONY में
$\angle ONY = 50^o$
अब ON = OY (त्रिज्या)
$\therefore \angle OYN = \angle ONY$
$\therefore \angle OYN = 50^o$



अत: $\angle MYN = 50^o - 15^o \Rightarrow 35^o$
$\therefore \angle NXY = \{180^o - (50^o + 35^o)\}$
$\therefore \angle NXY = 95^o$
$\therefore \angle MXO = 95^o$ **(शीर्षाभिमुख कोण)**
$\therefore \angle MON = 180^o - (95^o + 15^o)$ **(Δ MXO में)**
$= 180^o - 110^o \Rightarrow 70^o$

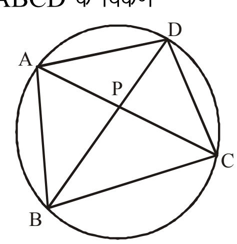
9. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे का बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो यह सदा सच होता है कि-

(a) AP. BP = CP. DP (b) AP. CD = AB. CP
(c) BP. AB = CD. CP (d) AP. CP = BP. DP

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2013

उत्तर—(d)

चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण



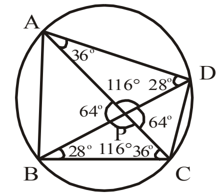
AC तथा BD एक-दूसरे को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो चक्रीय चतुर्भुज के विकर्णों के भागों के गुणनफल आपस में विकर्ण के बराबर होते हैं। अर्थात AP.CP = BP.DP

10. चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु P है। यदि $\angle APB = 64^o$ और $\angle CBD = 28^o$ है, तो $\angle ADB$ का माप क्या है?

(a) 32^o (b) 56^o (c) 28^o (d) 36^o

उत्तर—(c)

चक्रीय चतुर्भुज ABCD में
$\angle APB = 64^o$
$\therefore \angle CPD = 64^o$
($\because \angle APB = \angle CPD$ तथा $\angle APD = \angle BPC$)
$\because \angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle APD = 360^o$
$64^o + \angle BPC + 64^o + \angle BPC = 360^o$
$128^o + 2\angle BPC = 360^o$
$\therefore 2\angle BPC = 360^o - 128^o$
$= 232^o$
$\therefore \angle BPC = \frac{232^o}{2}$
$= 116^o$

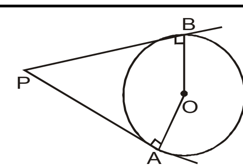


$\therefore \Delta BPC$ में
$\angle B + \angle P + \angle C = 180^o$
$28^o + 116^o + \angle C = 180^o$
$\angle C = 180^o - (28^o + 116^o)$
$\angle BCP = 36^o$
$\because \angle BCP = \angle PAD =$ एकांतर कोण
$\therefore \Delta APD$ में
$\angle APD + \angle DAP + \angle ADP = 180^o$
$36^o + 116^o + \angle ADB = 180^o$
($\because \angle ADP = \angle ADB$)
$\angle ADB = 180^o - 152^o$
$= 28^o$

11. PA और PB एक बाह्य बिंदु P से O केंद्र वाले एक वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएं हैं जहां बिंदु A तथा B स्पर्श के बिंदु हैं। चतुर्भुज OAPB अवश्य होगा-

(a) एक आयत (b) एक समचतुर्भुज
(c) एक वर्ग (d) एक वृत्तीय

उत्तर—(d)



$\because$ चतुर्भुज OAPB में $\angle A$ तथा $\angle B$ और $\angle P$ तथा $\angle O$ आमने-सामने है।
$\because \angle A + \angle B = 180^o$
$\because$ आमने-सामने के कोण यदि संपूरक हों तो चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज होता है।
$\therefore$ चतुर्भुज OAPB एक वृत्तीय होगा।

12. O केंद्र तथा 5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त की 8 सेमी. लंबी एक जीवा PQ है। इसकी P तथा Q पर बनी स्पर्श रेखाएं बिंदु T पर परस्पर काटती हैं। तदनुसार, TP की लंबाई कितनी होगी?

(a) $\frac{15}{4}$ सेमी. (b) $\frac{20}{3}$ सेमी.

(c) $\frac{21}{4}$ सेमी. (d) $\frac{10}{3}$ सेमी.

उत्तर—(b)

समकोण त्रिभुज PRO में

$\therefore OR^2 = PO^2 - PR^2$

$= 25 - 16 \Rightarrow 9$

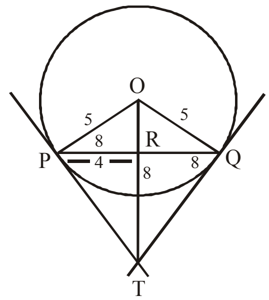
$\therefore OR = \sqrt{9} \Rightarrow 3$ सेमी.

$\therefore PO^2 = OR \times OT$

$25 = 3 \times (3 + RT)$

$25 = 9 + 3RT$

$RT = \frac{16}{3}$



पुनः समकोण त्रिभुज PRT में

$TP^2 = PR^2 + RT^2$

$= 4^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2$

$= 16 + \frac{256}{9} \Rightarrow \frac{400}{9}$

$TP = \sqrt{\frac{400}{9}} \Rightarrow \frac{20}{3}$ सेमी.

13. ΔABC में E और D क्रमशः AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार बिंदु हैं कि $\angle ABC = \angle ADE$ है। यदि AE = 3 सेमी. AD = 2 सेमी. और EB = 2 सेमी. तो DC की लंबाई कितनी है?

(a) 4 सेमी. (b) 4.5 सेमी.

(c) 5.0 सेमी. (d) 5.5 सेमी.

उत्तर—(d)

Δ ADE तथा Δ ABC में

$\angle B = \angle D = x$

तथा $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ है)

$\therefore \angle E = \angle C$

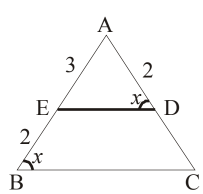
अतः कोण-कोण-कोण समरूपता द्वारा

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{2}{5} = \frac{3}{AC}$

$\therefore AC = \frac{15}{2} = 7.5$



$\therefore DC = 7.5 - 2 = 5.5$ सेमी.

14. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। विकर्ण AC और BD, P पर मिलते हैं। यदि $\angle APB = 110^o$ और $\angle CBD = 30^o$ है, तो $\angle ADB$ का माप कितना है?

(a) 80^o (b) 30^o (c) 55^o (d) 70^o

उत्तर—(a)

प्रश्नानुसार

चक्रीय चतुर्भुज ABCD है।

विकर्ण AC तथा BD बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

$\because$ चक्रीय चतुर्भुज के नियम से

$\angle CBD = \angle CAD$

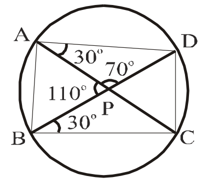
$\therefore \angle CAD = 30^o$

चित्र से

$\angle APD = 180^o - \angle APB$

$= 180^o - 110^o$

$= 70^o$



$\therefore \Delta APD$ में

$\angle ADP + \angle DPA + \angle PAD = 180^o$

$\angle ADP + 70^o + 30^o = 180^o$

$\angle ADP = 180^o - 100^o = 80^o$

15. एक चतुर्भुज ABCD की सभी भुजाएं एक वृत्त को छूती हैं। उसमें यदि AB = 6 सेमी., BC = 7.5 सेमी., CD = 3 सेमी. हों तो DA कितनी होगी?

(a) 3.5 सेमी. (b) 4.5 सेमी. (c) 2.5 सेमी. (d) 1.5 सेमी.

उत्तर—(d)

वृत्त के परिगत बनाए गए चतुर्भुज के आमने-सामने की भुजाओं का योग समान होता है।

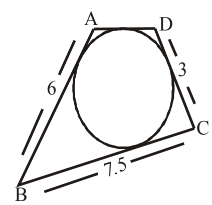
चित्र से स्पष्ट है

AB + CD = BC + AD

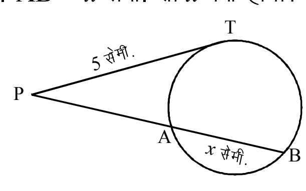
6 + 3 = 7.5 + AD

AD = 9 – 7.5

= 1.5 सेमी.



प्रश्न 16. दी गई आकृति में PAB वृत्त की छेदक रेखा है और PT वृत्त की P से स्पर्शज्या है। यदि PT = 5 सेमी., PA = 4 सेमी. AB = x सेमी. तो x क्या होगा?



(a) 5 सेमी. (b) $\frac{9}{4}$ सेमी. (c) $\frac{4}{9}$ सेमी. (d) $\frac{2}{3}$ सेमी.

उत्तर—(b)

$\because PT^2 = PA \times PB$

$5^2 = 4 \times (4 + x)$

$$25 = 16 + 4x$$
$$4x = 25 - 16$$
$$4x = 9$$
$$x = \frac{9}{4} \text{ सेमी.}$$

17. यदि ΔABC के शीर्ष कोण $\angle A$ का बाहरी द्विभाजक आधार BC के समांतर है, तो ΔABC क्या है?

(a) समकोणीय (b) समद्विबाहु त्रिभुज (c) विषमबाहु (d) समभुज

उत्तर—(b)

माना त्रिभुज ABC है।

$\therefore$ जिसका $\angle A$ का बाह्य द्विभाजक AD है।

$\because$ AD, BC के समांतर है।

$\therefore \angle EAD = \angle ABC$ (चित्र से)

$\therefore$ माना $\angle BAC = \theta$

$\therefore \angle CAE = 180 - \theta$

$\therefore \angle CAD = \frac{\angle CAE}{2}$

(बाह्य द्विभाजक)

$$= \frac{180^0 - \theta}{2} \Rightarrow 90^0 - \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \angle EAD = 180^0 - \theta - \left(90^0 - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \angle ABC = 90^0 - \frac{\theta}{2}$$

$\therefore \Delta ABC$ में $\angle ACB = 180^0 - (\angle ABC + \angle BAC)$

$$= 180^0 - \theta - \left(90^0 - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 90^0 - \frac{\theta}{2}$$

ΔABC में $\angle ABC$ तथ्य $\angle ACB$ का मान समान है। इसलिए उनके सामने की भुजा भी समान होगी। अतः त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

18. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का B पर बना कोण समकोण है। उसमें D, ΔABC के अंतर्गत एक बिंदु है। उस बिंदु D से ΔABC की भुजाओं AB तथा AC पर बनाए लंबों के पाद क्रमशः P तथा Q हैं। तदनुसार, यदि AP = a सेमी., AQ = b सेमी. तथा $\angle BAD = 15°$ हो, तो sin 75° कितना होगा?

(a) $\frac{2b}{\sqrt{3}a}$ (b) $\frac{a}{2b}$ (c) $\frac{\sqrt{3}a}{2b}$ (d) $\frac{2a}{\sqrt{3}b}$

उत्तर—(c)

समकोण ΔAPD में

$$\angle A + \angle P + \angle D = 180°$$
$$15° + 90° + \angle D = 180°$$
$$\therefore \angle D = 180^0 - (90^0 + 15^0)$$

$$\angle ABC = 180^0 - 105^0 \Rightarrow 75^0 ...(i)$$

पुनः ΔABC में AB = BC

$\therefore$ ΔABC के दो कोण समान होंगे

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$
$$\angle A + 90 + \angle A = 180^0 \quad (\because \angle A = \angle C)$$
$$2\angle A = 180^0 - 90^0 \Rightarrow 90^0$$
$$\angle A = 45°$$

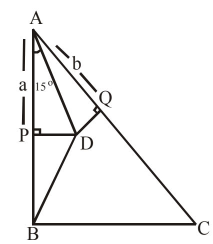
$\therefore$ ΔQDA में

$$\angle QDA + \angle DAQ + \angle AQD = 180°$$
$$\angle QDA + (\angle BAC - \angle BAD) + 90° = 180°$$
$$(\because \angle DAQ = \angle BAC - \angle BAD)$$
$$\therefore \angle QDA + (45° - 15°) + 90° = 180°$$
$$\angle QDA = 60°$$

पुनः ΔQDA में $\frac{AQ}{AD} = \sin 60°$

$$\frac{b}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AD = \frac{2b}{\sqrt{3}} \quad .....(ii)$$



ΔADP में

$$\sin 75° = \frac{AP}{AD} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2b}{\sqrt{3}}}$$ **[समी. (i) से]**

$$= \frac{\sqrt{3}a}{2b}$$

19. दो वृत्त C_1 और C_2 एक-दूसरे को आंतरिक स्तर पर बिंदु P पर छूते हैं। दो रेखाएं PCA और PDB क्रमशः वृत्त C_1 को C, D पर और वृत्त C_2 को A, B पर मिलती हैं। यदि $\angle BDC = 120^o$, तो $\angle ABP$ का मान बताएं।

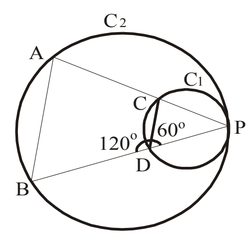
(a) 60^o (b) 80^o (c) 100^o (d) 120^o

उत्तर—(a)

दो वृत्त C_1 तथा C_2 हैं।

तथा $\angle BDC = 120^o$

$$\therefore \angle CDP = 180^o - \angle BDC$$
$$= 180^o - 120^o$$
$$= 60^o .... (i)$$



चित्र से AB || CD

$\therefore \angle BAP = \angle DCP$

तथा $\angle ABP = \angle CDP$

$= 60^o$ **[समी. (i) से]**