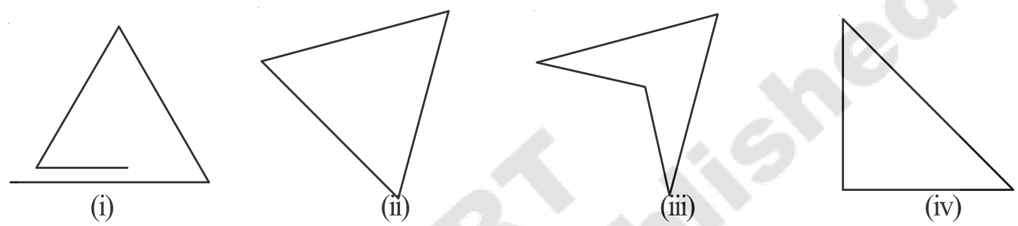
త్రిభుజము - ధర్మాలు

5

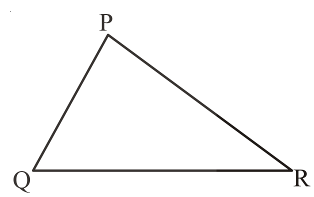
5.0 పరిచయం

మీరు త్రిభుజాలను గురించి క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. కింది పటాలను చూడండి. వీటిలో త్రిభుజాలేవో తెలుపండి.



వీనిలో కొన్ని పటాలు మాత్రమే త్రిభుజాలు కదా! ఇలా ఎందుకు కొన్ని పటాలు మాత్రమే త్రిభుజాలు అవుతున్నాయో నీ స్నేహితులలో చర్చించు? మూడు భుజాలు గల సంవృత పటాలనే త్రిభుజాలంటారని మనకు తెలుసు.

ప్రక్క పటములో త్రిభుజము PQR ను పరిశీలించు. దీనిలో



(i) మూడు భుజాలు కలవు. అవి $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$

(ii) మూడు కోణాలు కలవు. అవి $\angle PQR, \angle QRP, \angle RPQ$

(iii) మూడు శీర్షాలు కలవు. అవి P, Q, R

ఈ త్రిభుజములో శీర్షము P కి ఎదుటి భుజము QR. మరి శీర్షములు Q,R లకు ఎదుటి భుజాలు ఏవో నీవు చెప్పగలవా?

ఇదే త్రిభుజములో $\angle QPR$ కోణానికి ఎదురుగా వున్న భుజము $\overline{QR}$.

అదే విధంగా $\angle PQR$ కోణానికి ఎదురుగావున్న భుజమేదో నీవు చెప్పగలవా?

ప్రయత్నించండి

ఉమ ఒక త్రిభుజము మూడు సరేఖీయ బిందువులతో ఏర్పడుతుందని భావిస్తున్నది. నీవు ఉమతో ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

సూచన : మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు ఒకే రేఖపై వుంటే, వానిని సరేఖీయ బిందువులు అంటాం.

గమనిక : LM = రేఖా ఖండము LM పొడవు. $\overline{LM}$ = రేఖా ఖండము LM

$\overrightarrow{LM}$ = కిరణము LM $\overleftrightarrow{LM}$ = సరళరేఖ LM

©SCERT not to be republished

5.1 త్రిభుజాలు - రకాలు

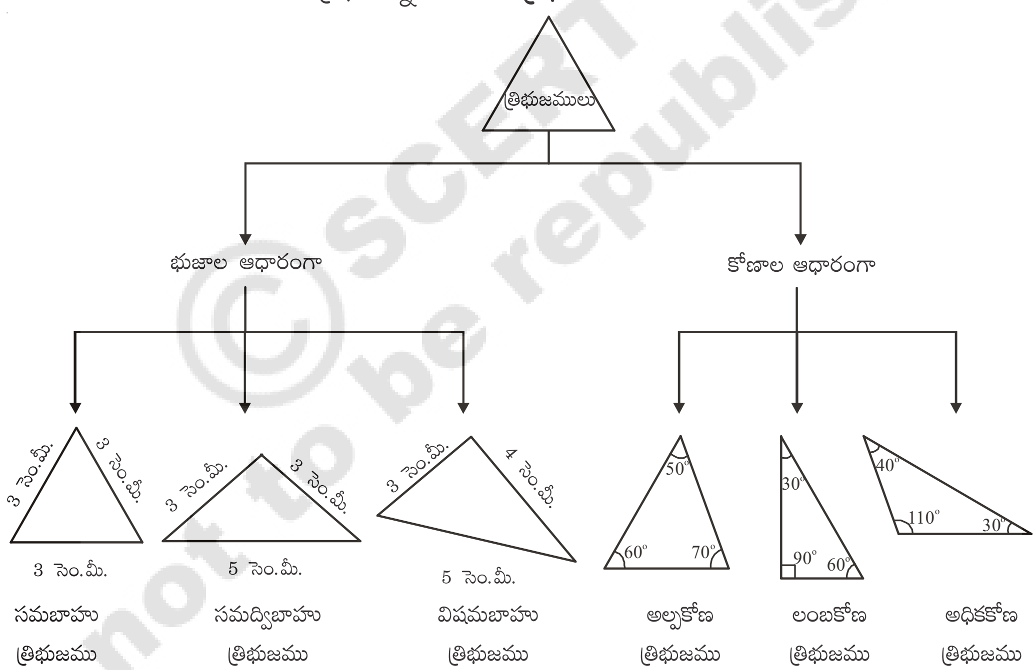
త్రిభుజాలను వాని భుజాల పొడవుల ఆధారంగా మరియు వాని కోణాల ఆధారంగా విభజించవచ్చు.

భుజాల పొడవుల ఆధారంగా త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

- మూడు భుజాల పొడవులు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని **సమబాహు త్రిభుజము** అంటారు.
- ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవులు మాత్రమే సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని **సమద్విబాహు త్రిభుజము** అంటారు.
- మూడు భుజాల పొడవులు వేరు వేరుగా వున్న త్రిభుజాన్ని **విషమ బాహు త్రిభుజము** అంటారు.

అదే విధంగా కోణాల ఆధారంగా కూడా త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

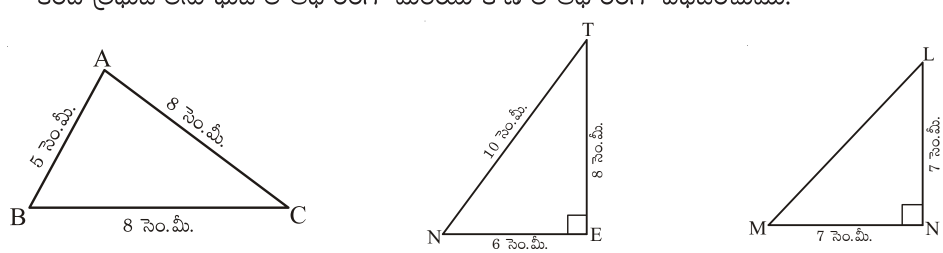
- మూడు కోణాలు అల్పకోణాలైన త్రిభుజాన్ని **అల్పకోణ త్రిభుజ**మంటారు.
- ఒక కోణం అధిక కోణంగా గల త్రిభుజాన్ని **అధికకోణ త్రిభుజ** మంటారు.
- ఒక కోణం లంబకోణంగా గల త్రిభుజాన్ని **లంబకోణ త్రిభుజము** అంటారు.

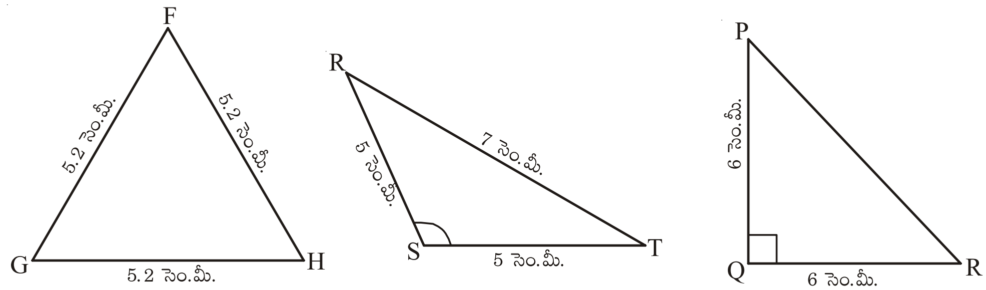


© SCERT not to be republished

ఇవి చేయండి

1. కింది త్రిభుజాలను భుజాల ఆధారంగా మరియు కోణాల ఆధారంగా విభజించుము.



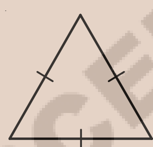
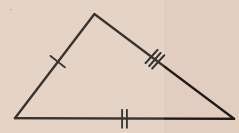
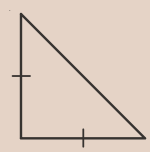
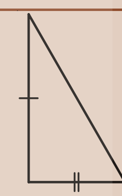
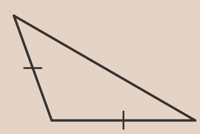
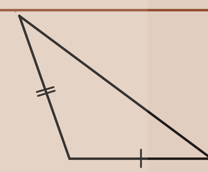


2. ΔABC యొక్క మూడు భుజాలను, మూడు కోణాలను పేర్కొనుము?

3. ΔPQR లో శీర్షము Q కు ఎదురుగా వున్న భుజం ఏది?

4. Δ LMN లో $\overline{LM}$ భుజానికి ఎదురుగా గల కోణం ఏది?

5. ΔRST లో $\overline{RT}$ భుజానికి ఎదురుగా గల శీర్షం ఏది?

	సమబాహు	సమద్విబాహు	విషమబాహు
అల్ప కోణము			
లంబ కోణము			
అధిక కోణము			

ప్రయత్నించండి :

1. పేపరును పైన చర్చించిన వివిధ రకాల త్రిభుజాలుగా కత్తిరించండి. నీ త్రిభుజాలను నీ మిత్రుని త్రిభుజాలతో పోల్చుము

2. ఒక త్రిభుజములో ఒకటి కంటే ఎక్కువ లంబకోణాలు వుండవని రష్మి అంటున్నది. రష్మితో నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

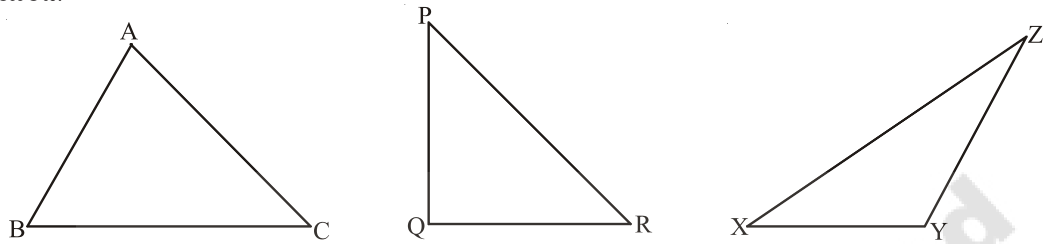
3. రెండు కంటే ఎక్కువ అల్పకోణాలు కలిగిన త్రిభుజాలు వుండవు అని కమల్ అంటున్నాడు. కమల్‌తో నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

© SCERT not to be republished

5.2 త్రిభుజ భుజాల మధ్య సంబంధము

5.2.1 త్రిభుజములో రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము

కింది పటములో చూపిన విధంగా ఏవైనా మూడు త్రిభుజాలు ΔABC, ΔPQR మరియు ΔXYZ లను గీయండి.



స్కేలు సహాయముతో పై త్రిభుజాల భుజాల పొడవులను కనుగొని వాని విలువలను క్రింది పట్టికలో పొందు పరచండి.

త్రిభుజము	భుజం పొడవు	రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము	ఇది నిజమేనా?	అవును / కాదు
ΔABC	$\overline{AB}$ =	$\overline{AB}+\overline{BC}$ =	$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{CA}$	
	$\overline{BC}$ =	$\overline{BC}+\overline{CA}$ =	$\overline{BC}+\overline{CA}>\overline{AB}$	
	$\overline{CA}$ =	$\overline{CA}+\overline{AB}$ =	$\overline{CA}+\overline{AB}>\overline{BC}$	
ΔPQR	$\overline{PQ}$ =	$\overline{PQ}+\overline{QR}$ =	$\overline{PQ}+\overline{QR}>\overline{RP}$	
	$\overline{QR}$ =	$\overline{QR}+\overline{RP}$ =	$\overline{QR}+\overline{RP}>\overline{PQ}$	
	$\overline{RP}$ =	$\overline{RP}+\overline{PQ}$ =	$\overline{RP}+\overline{PQ}>\overline{QR}$	
ΔXYZ	$\overline{ZX}$ =	$\overline{XY}+\overline{YZ}$ =	$\overline{XY}+\overline{YZ}>\overline{ZX}$	
	$\overline{XY}$ =	$\overline{YZ}+\overline{ZX}$ =	$\overline{YZ}+\overline{ZX}>\overline{XY}$	
	$\overline{YZ}$	$\overline{ZX}+\overline{XY}$ =	$\overline{ZX}+\overline{XY}>\overline{YZ}$	

© SCERT not to be republished

పై పట్టిక నుంచి ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువని మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణకు ΔABC లో, $\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{CA}$

$$\overline{BC}+\overline{CA}>\overline{AB}$$

$$\overline{CA}+\overline{AB}>\overline{BC}$$

5.2.2 త్రిభుజంలో రెండు భుజాల పొడవుల భేదం

పై ఉదాహరణలో పేర్కొన్న త్రిభుజాలనే తీసుకొనుము. వాని భుజాల పొడవులను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచండి.

త్రిభుజము	భుజాల పొడవులు	రెండు భుజాల పొడవుల బేధము	ఇది నిజమేనా?	అవును/కాదు
ΔABC	AB =	BC–CA =	BC – AC < AB	
	BC =	CA–AB =	CA – AB <BC	
	CA=	AB–BC =	AB – BC <CA	
ΔPQR	PQ =	QR–RP =	QR – RP <PQ	
	QR =	RP–PQ =	RP – PQ <QR	
	RP =	PQ–QR =	PQ – QR <RP	
ΔXYZ	XY=	YZ–ZX =	YZ – ZX <XY	
	YZ =	ZX–XY =	ZX – XY <YZ	
	ZX =	XY–YZ =	XY – YZ <ZX	

పై పట్టిక నుంచి ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల భేదము మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువని నిర్ధారించగలము. అనగా

ఉదాహరణకు ΔABC లో $\overline{AB} - \overline{BC} < \overline{CA}$; $\overline{BC} - \overline{AB} < \overline{CA}$

$\overline{BC} - \overline{CA} < \overline{AB}$; $\overline{CA} - \overline{BC} < \overline{AB}$

$\overline{CA} - \overline{AB} < \overline{BC}$; $\overline{AB} - \overline{CA} < \overline{BC}$

ప్రయత్నించండి :

ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల కొలతలు 6 సెం.మీ మరియు 9 సెం.మీ. అయిన మూడవ భుజం కొలతకు సరిపడు సాధ్యమయ్యే కొలతలన్నింటిని రాయుము.

ఉదాహరణ 1: భుజాల పొడవులు 6 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 8 సెం.మీ గా గల త్రిభుజం ఏర్పడుతుందా?

సాధన : త్రిభుజ భుజాల పొడవులు

$\overline{AB}$ = 6 సెం.మీ

$\overline{BC}$ = 5 సెం.మీ

$\overline{CA}$ = 8 సెం.మీ

ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం అనగా $\overline{AB} + \overline{BC} = 6 + 5 = 11 > 8$

$\overline{BC} + \overline{CA} = 5 + 8 = 13 > 6$

$\overline{CA} + \overline{AB} = 8 + 6 = 14 > 5$

ఇచ్చట ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా వుంది కనుక పైన తెల్పిన కొలతలతో త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

© SCERT not to be republished

అభ్యాసం - 1

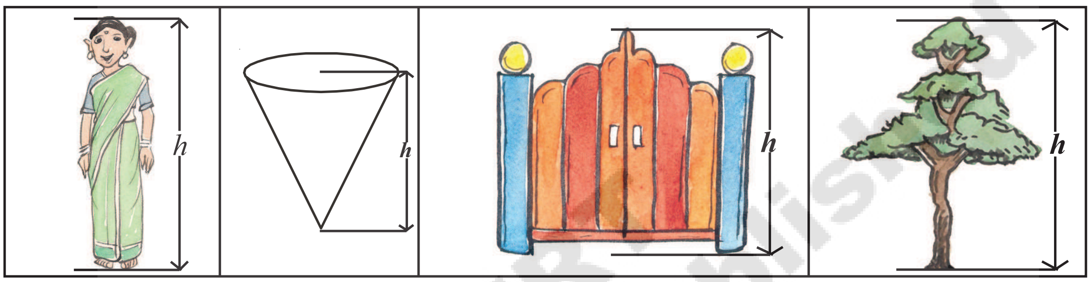
1. ఈ కింది కొలతలు భుజాలుగా తీసుకుంటే ఏవి త్రిభుజాలను ఏర్పరుస్తాయి? ఏవి ఏర్పరచవో సకారణంగా తెలుపుము?

(i) 3 సెం.మీ, 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ. (ii) 6 సెం.మీ, 6 సెం.మీ, 6 సెం.మీ.

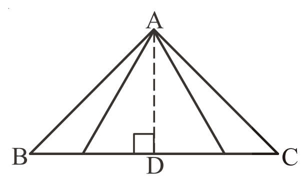
(iii) 4 సెం.మీ, 4 సెం.మీ, 8 సెం.మీ. (iv) 3 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 7 సెం.మీ.

5.3 త్రిభుజము - ఎత్తులు :

మన నిత్య జీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో 'ఎత్తు' అనే పదాన్ని ఉపయోగిస్తూ ఉంటాము. అయితే క్రింది పటాల ఎత్తును ఎలా కనుగొంటావు.



పై పటాల ఎత్తును కనుగొనుటకు పటములలో చూపిన విధంగా పటము యొక్క పై భాగము నుంచి ఆధారము వరకూ గల దూరాన్ని కొలుస్తాము కదా! ఇదే విధానాన్ని త్రిభుజము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుటకు కూడా ఉపయోగిస్తాం.

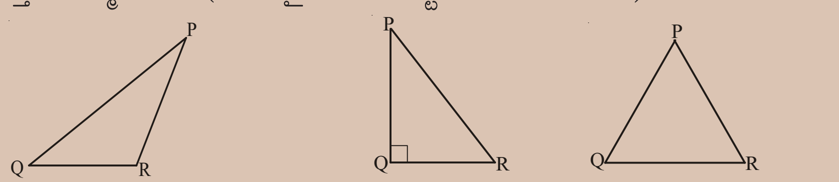


ఇచ్చిన త్రిభుజము ABC లో శీర్షము A నుంచి భూమి $\overline{BC}$ కి గల దూరమునే ఎత్తు అంటాం. అయితే పటములో చూపిన విధంగా A నుంచి $\overline{BC}$ కి అనేక దూరాలను రేఖాఖండాలుగా మనము ఊహించవచ్చు. వీనిలో ఎత్తును ఏ రేఖా ఖండము తెలియజేస్తుంది?

ΔABC లో A నుంచి $\overline{BC}$ కి గీయబడిన లంబమునే ఎత్తు అంటాం. కనుక $\overline{AD}$ ఎత్తు అవుతుంది. ఈ విధమైన ఎత్తులను త్రిభుజంలోని ప్రతి శీర్షం నుంచి ఎదుటి భుజం మీదకు గీయవచ్చు.

ప్రయత్నించండి.

(i) కింది త్రిభుజాలలో P నుంచి $\overline{QR}$ కు అదే విధముగా మిగిలిన రెండు శీర్షాల నుంచి కూడా ఎత్తులను నిర్మించుము. (అవసరమైతే మూలమట్టాలు ఉపయోగించుము).



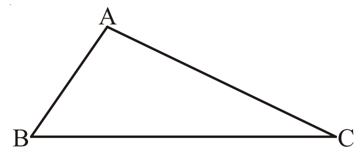
అధిక కోణ త్రిభుజము | లంబకోణ త్రిభుజము | అల్పకోణ త్రిభుజము

(ii) ఒక త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు ఎల్లప్పుడూ దాని అంతరములోనే వుంటుందా?

(iii) ఏ త్రిభుజములో రెండు ఎత్తులు దాని రెండు భుజాలుగా వుంటాయో ఊహించగలవా?

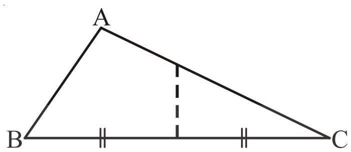
©SCERT not to be republished

5.4 త్రిభుజము - మధ్యగత రేఖలు

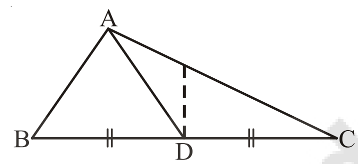


ఒక పేపరు పై త్రిభుజము ABC ని గీచి కత్తిరించుము.

ఇపుడు త్రిభుజము యొక్క B ,C. శీర్షాలు ఒకదానికొకటి ఏకీభవించే విధంగా మడత పెట్టుము. ఈ మడత పటము 1 లో చూపినట్లు BC భుజాన్ని ఖండించును. ఖండన బిందువు BC మధ్య బిందువు అవుతుంది.



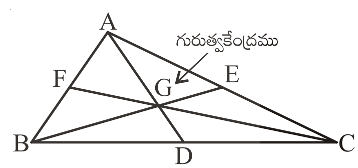
పటం 1



పటం 2

ఈ బిందువును D గా గుర్తించి AD ని కలుపుము. ఇదే విధంగా A,C తో ఏకీభవించునట్లు మరియు A,B తో ఏకీభవించునట్లు మడిచి AC, AB ల మధ్యబిందువులను కనుగొని వానిని వరుసగా E ,F లుగా గుర్తించి BE , CF లను కలుపుము

AD, BE , CF లు వరుసగా శీర్షాలు A,B,C ల నుంచి వాని ఎదుటి భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపు రేఖా ఖండాలు. వీనినే త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖలు అంటాము.



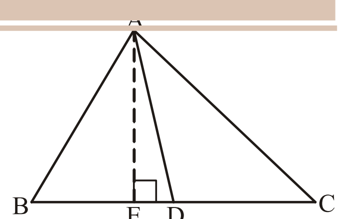
ఒక త్రిభుజంలో మూడు మధ్యగత రేఖలను నిర్మిస్తే అవి పటములో చూపిన విధంగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. ఈ ఖండన బిందువునే గురుత్వ కేంద్రము (G) అంటారు.

ఈ విధంగా త్రిభుజంలో ఒక శీర్షం నుంచి దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఖండమునే మధ్యగత రేఖ అంటాము. ఈ మధ్యగత రేఖల ఖండన బిందువునే గురుత్వ కేంద్రము (G) అంటాము.

ప్రయత్నించండి

లంబకోణ మరియు అధికకోణ త్రిభుజాల ఆకారంలో పేపర్లను కత్తిరించి పైన చెప్పిన విధంగా వాని గురుత్వకేంద్రములను కనుగొనండి.

అభ్యాసం - 2



1. ప్రక్కపటము ΔABC లో BC మధ్య బిందువు D అయిన

   (i) AD ని ______________________ అంటాము

   (ii) AE ని ______________________ అంటాము

2. ఏ రకమైన త్రిభుజంలో దాని రెండు భుజాలే రెండు ఎత్తులుగా వుంటాయి?

3. ఒక త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖ ఎల్లపుడూ ఆ త్రిభుజం యొక్క అంతరములోనే వుంటుందా?

© SCERT not to be republished

4. ఒక త్రిభుజములో ఎత్తు ఎల్లపుడూ ఆ త్రిభుజం యొక్క అంతరములోనే వుంటుందా?

5. (i) ΔXYZ లో శీర్షము Y కి ఎదురుగా గల భుజమేది?

(ii) ΔPQR లో భుజం PQ కు ఎదురుగా గల కోణమేది?

(iii) ΔABC లో AC భుజానికి కి ఎదురుగా గల శీర్షమేది?

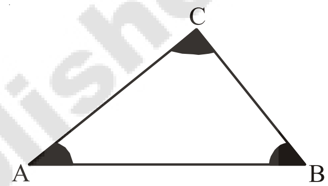
5.5 త్రిభుజ ధర్మాలు

5.5.1 త్రిభుజము - మూడు కోణాల మొత్తము

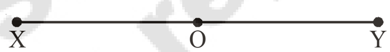
క్రింది నాలుగు కృత్యాల ద్వారా త్రిభుజం యొక్క ఈ ధర్మాన్ని గురించి నేర్చుకుందాం.

కృత్యము 1

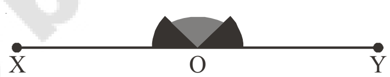
1. ఒక తెల్ల కాగితముపై త్రిభుజము ABC గీచి పటములో చూపిన విధంగా దాని కోణాలకు రంగులు వేయండి.



2. రంగులు వేసిన కోణభాగాలను కత్తిరించండి.
3. వేరే కాగితముపై XY రేఖను గీచి దానిమీద ఒకచోట 'O' ను గుర్తించుము



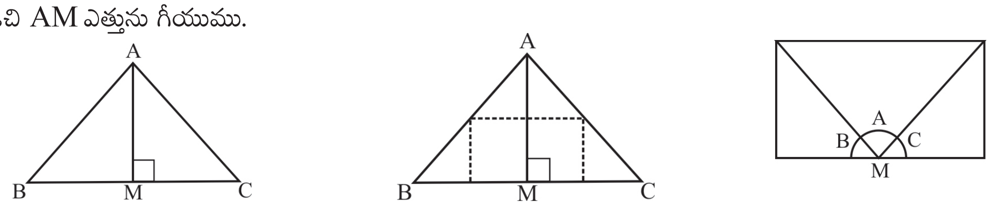
4. కత్తిరించిన మూడు కోణీయ భాగాల శీర్షాలు 'O' వద్ద కలిసే విధంగా క్రింది పటములో చూపిన విధముగా అతికించుము.



ఇలా అతికించినపుడు ఈ మూడూ కలసి ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

కృత్యము 2

ఒక పేపరును తీసుకొని దీని నుంచి త్రిభుజము ABC ని కత్తిరించుము. ABC త్రిభుజాన్ని తగిన విధంగా మడిచి AM ఎత్తును గీయుము.

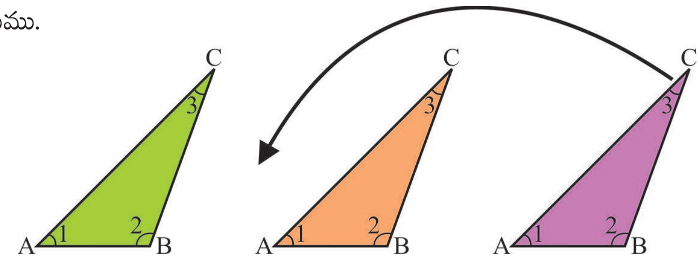


(i) (ii) (iii)

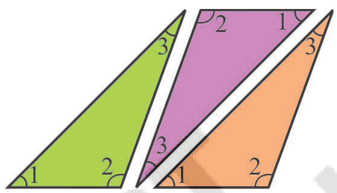
ఇపుడు మూడు శీర్షాలు A,B,C లు M వద్ద కలిసే విధంగా మడత పెట్టిన మూడు కోణాలు A, B,C లు కలసిన ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం గమనించవచ్చు. కనుక $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

కృత్యము 3

ఒక త్రిభుజం ABC యొక్క మూడు నమూనాలను తయారుచేయుము. వాని కోణాలకు పటములో చూపిన విధంగా 1,2,3 లను గుర్తించుము.



ఈ మూడు నమూనాలను ప్రక్క పటములో చూపిన విధంగా అమర్చుము



బిందువు 'O' వద్ద గల $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ గురించి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఈ మూడు కలసి ఒక సరళకోణంగా ఏర్పడం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

కృత్యము 4

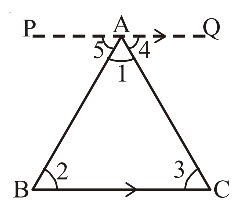
నీ నోట్‌బుక్‌లో ΔABC, ΔPQR, ΔXYZ లను గీయుము. ఈ త్రిభుజాల కోణాల కొలతలను కోణమాని సహాయంతో కనుగొనుము. ఫలితాలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరుచుము.

త్రిభుజము	కోణాల కొలతలు	కోణాల మొత్తం
ΔABC	$\angle A$ =....., $\angle B$ =....., $\angle C$ =.....,	$\angle A + \angle B + \angle C =$
ΔPQR	$\angle P$ =....., $\angle Q$ =....., $\angle R$ =.....,	$\angle P + \angle Q + \angle R =$
ΔXYZ	$\angle X$ =....., $\angle Y$ =....., $\angle Z$ =.....,	$\angle X + \angle Y + \angle Z =$

కోణాలను కొలిచేటపుడు కొలతలలో ఏర్పడే చిన్న చిన్న దోషాలను పరిగణలోనికి తీసుకొంటే త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^oగా పొందవచ్చు.

ఇపుడు "త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తము 180^o యొక్క తార్కిక నిరూపణను పరిశీలిద్దాం.

త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o అని నిరూపించుట :



సామాన్య వివరణ : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o

దత్తాంశము : ABC ఒక త్రిభుజము

సారాంశము : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

నిర్మాణము : BC కి సమాంతరంగా A గుండా PQ రేఖను నిర్మించుము.

©SCERT not to be republished

నిరూపణ (ఉపపత్తి) :

కోణాలను పటములో చూపిన విధంగా అంకెలతో గుర్తించుము.

పటం నుండి $\angle 2 = \angle 5$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle 3 = \angle 4$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (పై రెండు సమీకరణాలను కూడటం ద్వారా)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ ($\angle 1$ ని రెండు వైపులా కూడటం ద్వారా)

$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ (సరళరేఖపై ఏదైనా బిందువు వద్ద కోణము)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

అనగా త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180°.

ఉదాహరణ 1 : ΔABC లో $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, అయిన $\angle C$ ను కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC లో $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180°)

$30^\circ + 45^\circ + \angle C = 180^\circ$

$75^\circ + \angle C = 180^\circ$

$\angle C = 180^\circ - 75^\circ$

$\therefore \angle C = 105^\circ$

ఉదాహరణ 2 : ΔABC లో $\angle A = 3\angle B$ మరియు $\angle C = 2\angle B$. అయిన త్రిభుజములోని మూడు కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ [త్రిభుజములోని మూడుకోణాల మొత్తం]

$3\angle B + \angle B + 2\angle B = 180^\circ$ [$\angle A = 3\angle B$, $\angle C = 2\angle B$]

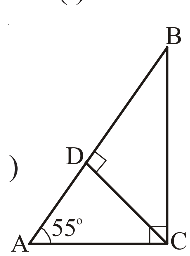
$6\angle B = 180^\circ$

$\angle B = 30^\circ$

మరియు $\angle A = 3\angle B = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$

$\angle C = 2\angle B = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

ఉదాహరణ 3 : ΔABC లో C వద్ద లంబకోణము కలదు. $CD \perp AB$ మరియు $\angle A = 55^\circ$ అయిన (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle BCD$ (iii) $\angle ABC$ లను కనుగొనుము.



సాధన : ΔACD లో

$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180^\circ$ (త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం 180°)

$\Rightarrow 55^\circ + 90^\circ + \angle ACD = 180^\circ$

© SCERT not to be republished

$\Rightarrow \quad 145^\circ + \angle ACD = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle ACD = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$

$\therefore \angle ACD = 35^\circ$

(ii) ΔABC లో

$\angle ACB = 90^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ {పటము నుంచి $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$)

$35^\circ + \angle BCD = 90^\circ$ ((i) నుంచి $\angle ACD = 35^\circ$)

$\angle BCD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

(iii) ΔABC లో

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ [త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం]

$\angle ABC + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ (దత్తాంశము నుంచి)

$\angle ABC + 145^\circ = 180^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - 145^\circ$

అనగా $\angle ABC = 35^\circ$

ఉదాహరణ 4 : ఒక త్రిభుజములో కోణాలు 2 : 3 : 4 నిష్పత్తిలో కలవు. అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : కోణాల నిష్పత్తి = 2 : 3 : 4

నిష్పత్తిలోని పదాల మొత్తము = 2 + 3 + 4 = 9

త్రిభుజంలో కోణాల మొత్తము = 180°

కనుక మొదటి కోణము $= \frac{2}{9} \times 180^\circ = 40^\circ$

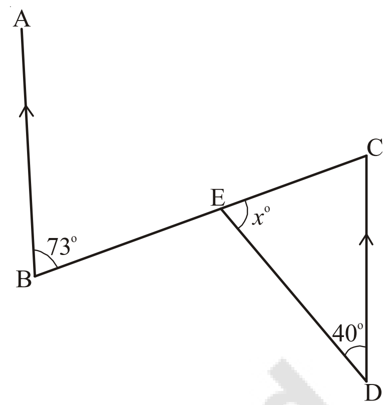
రెండవ కోణము $= \frac{3}{9} \times 180^\circ = 60^\circ$

మూడవ కోణము $= \frac{4}{9} \times 180^\circ = 80^\circ$

$\therefore$ త్రిభుజములోని కోణాలు = $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

© SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 5 : ప్రక్క పటములో కోణము x ను కనుగొనుము



సాధన : $\angle ECD = \angle ABC = 73^o$

(AB || CD కనుక ఈ రెండూ ఏకాంతర కోణాలు)

ΔECD లో

$\angle CED + \angle EDC + \angle DCE = 180^o$

$x^o + 40^o + 73^o = 180^o$

$x^o + 113^o = 180^o$

$x^o = 180^o - 113^o$

$x^o = 67^o$

ఉదాహరణ 6 : ΔABC లో ఒక కోణము 40^o మరియు మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానము. అయిన మిగిలిన రెండు కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle C = 40^o$ మరియు $\angle A = \angle B = x^o$ అనుకొనుము.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తము)

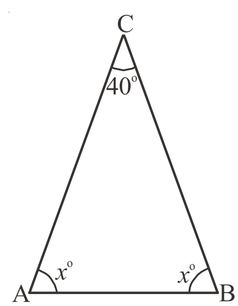
$x^o + x^o + 40^o = 180^o$

$2x^o + 40^o = 180^o$

$2x = 180^o - 40^o$

$2x = 140^o$

$x^o = 70^o$



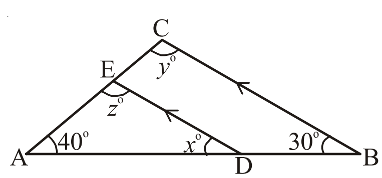
కనుక రెండు సమాన కోణాలలో ప్రతి కోణము 70^o

ఉదాహరణ 7 : ప్రక్క పటము ΔABC లో D,E లు వరుసగా AB,AC ల మీద బిందువులు మరియు DE || BC, $\angle B = 30^o$, $\angle A = 40^o$, అయిన (i) x (ii) y (iii) z విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : (i) $\angle ADE = \angle ABC$ (DE||BC కనుక ఈ రెండు సదృశ్య కోణాలు)

$\therefore x^o = 30^o$

(ii) ΔABC లో



(దత్తాంశము)

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

$40^o + 30^o + y^o = 180^o$

$70^o + y^o = 180^o$ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore y^o = 180^o - 70^o = 110^o$

© SCERT not to be republished

(iii) ΔADE లో

$$\angle D + \angle A + \angle E = 180^\circ \quad \text{(త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం)}$$

$$30^\circ + 40^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

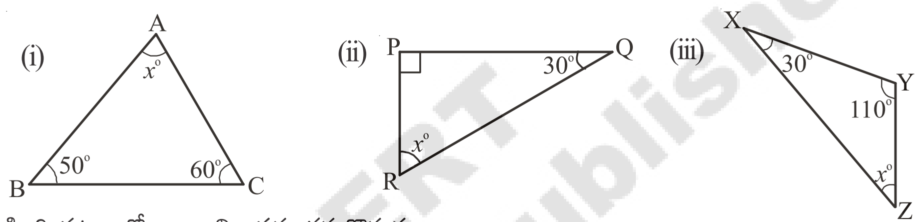
$$70^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

$$z^\circ = 180^\circ - 70^\circ$$

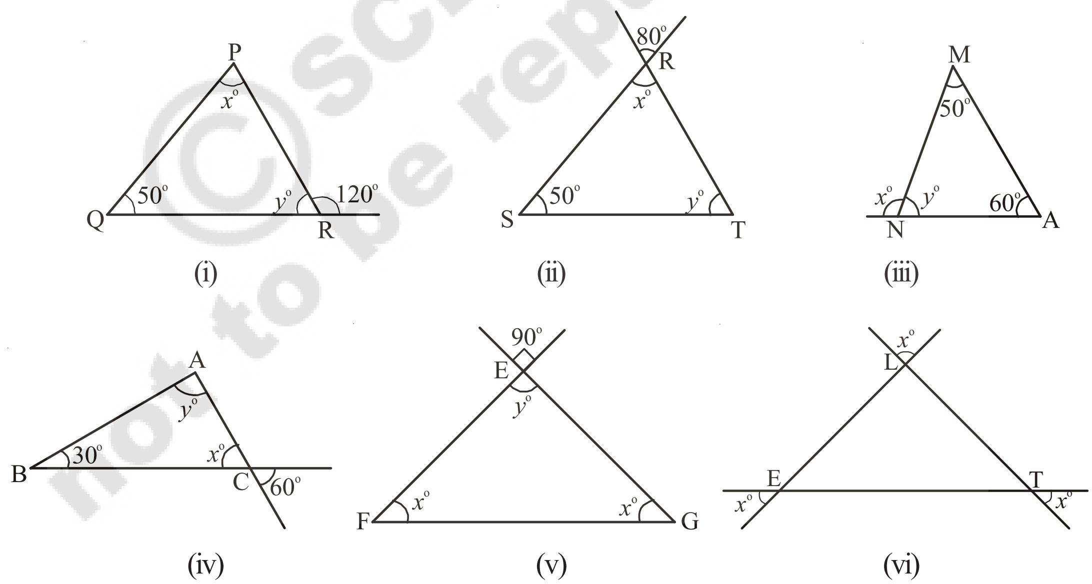
$$z^\circ = 110^\circ$$

అభ్యాసం - 3

1. కింది త్రిభుజాలలో x^0 విలువను కనుగొనుము.



2. కింది పటాలలో x , y విలువను కనుగొనుము.



3. త్రిభుజాల రెండు కోణాల కొలతలు కింది నీయబడినాయి. మూడవ కోణం కొలతను కనుగొనుము.

   (i) $38^\circ, 102^\circ$ (ii) $116^\circ, 30^\circ$ (iii) $40^\circ, 80^\circ$

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక అల్పకోణము 30° అయిన రెండవ అల్పకోణం ఎంత?

© SCERT not to be republished

5. క్రింది వాక్యాలు సత్యమో, అసత్యమో రాయండి?

(i) ఒక త్రిభుజం రెండు లంబ కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.

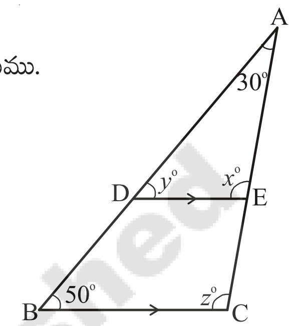
(ii) ఒక త్రిభుజం రెండు అల్ప కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.

(iii) ఒక త్రిభుజం రెండు అధిక కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.

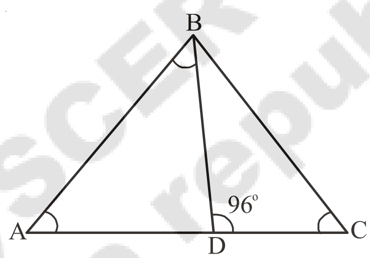
(iv) ఒక త్రిభుజంలోని ప్రతీ కోణము 60^o కంటే తక్కువ వుండవచ్చు.

6. ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి $1 : 2 : 3$ అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

7. ప్రక్కపటంలో $DE||BC$, $\angle A = 30^o$, $\angle B = 50^o$ అయిన x, y, z విలువను కనుగొనుము.



8. పక్క పటంలో $\angle ABD = 3\angle DAB$ మరియు $\angle BDC = 96^o$ అయిన $\angle ABD$ ని కనుగొనుము?

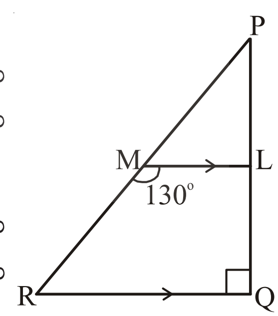


9. ΔPQR లో $\angle P = 2\angle Q$ మరియు $2\angle R = 3\angle Q$, అయిన ΔPQR లోని కోణాలను కనుగొనుము

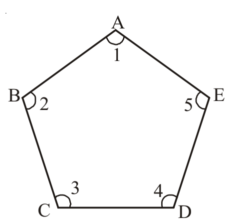
10. ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి $1 : 4 : 5$ అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము

11. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు అల్పకోణాలు $2 : 3$. నిష్పత్తిలో కలవు. అయిన ఆ రెండు అల్పకోణాలను కనుగొనుము.

12. ప్రక్క పటము ΔPQR లో Q వద్ద లంబకోణం కలదు $ML||RQ$ మరియు $\angle LMR = 130^o$. అయిన $\angle LPM$, $\angle PML$ మరియు $\angle PRQ$ లను కనుగొనుము.

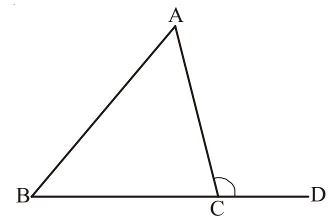


13. క్రింది ABCDE పటంలో $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ విలువను కనుగొనుము? (సూచన : పటం అంతరంలో ఏదయినా ఒక బిందువు P ను గుర్తించి, అన్ని శీర్షాలకు కలపండి)



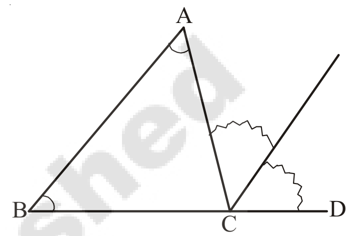
©SCERT not to be republished

5.5.2 త్రిభుజము - బాహ్యకోణము



ΔABC త్రిభుజాన్ని గీచి పటము (1) లో చూపిన విధంగా BC భుజాన్ని D వరకూ పొడిగించుము. ఈ సమయములో ఏర్పడిన $\angle ACD$ ని పరిశీలించుము. ఇది త్రిభుజము యొక్క బాహ్యములో కలదు కనుక C వద్ద త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణము అంటారు.

పటము (1) నుంచి $\angle ACD$ కి $\angle ACB$ ఆసన్న కోణమని గమనించవచ్చు. ఈ కోణము కాకుFigure 1Figure 2దా ABC త్రిభుజములోని మిగిలిన రెండు కోణాలు అనగా $\angle A$ లేదా $\angle BAC$ మరియు $\angle B$ లేదా $\angle CBA$ లను $\angle ACD$. యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు అంటాము. ఇపుడు A,B కోణాలను కత్తిరించి పటము (2) లో చూపిన విధంగా వానిని C వద్ద ఒక దాని ప్రక్కన ఒక దానిని ఉంచుము..



ఈ రెండు కోణాలు కలసి $\angle ACD$ కోణం తో ఏకీభవించాయా?

అనగా $\angle ACD = \angle A + \angle B$ అని నీవు చెప్పగలవా?

ఈ కృత్యము నుండి **"ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము"**ని మనము చెప్పగలము.

ఇవి చేయండి

త్రిభుజం ABC ని గీచి దానికి C వద్ద $\angle ACD$ బాహ్యకోణమును ఏర్పరుచుము. కోణమాని సహాయంతో $\angle ACD, \angle A, \angle B$ లను కొలవండి.

ఇపుడు $\angle A + \angle B$ ని కనుగొని $\angle ACD$ తో పోల్చండి. $\angle ACD$ మరియు $\angle A + \angle B$ సమానమేనా?

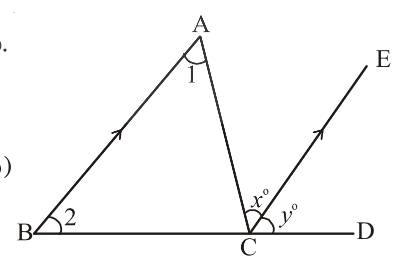
ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమని తార్కికంగా కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సామాన్య వివరణ : ఒక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

దత్తాంశము : ΔABC లో $\angle ACD$ బాహ్యకోణం.

సారాంశము : $\angle ACD = \angle A + \angle B$

నిర్మాణము : C నుంచి $\overline{BA}$ కు సమాంతరంగా CE ని నిర్మించుము.



నిరూపణ (ఉపపత్తి) :

$\angle 1 = \angle x$ ($BA \parallel CE$, $\overline{AC}$ తిర్యగ్రేఖ, కనుక ఇవి ఏకాంతర కోణాలు)

$\angle 2 = \angle y$ ($BA \parallel CE$, $\overline{BD}$ తిర్యగ్రేఖ కనుక ఇవి సదృశ్య కోణాలు)

$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$ (పటం నుంచి $\angle x + \angle y = \angle ACD$)

$\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$

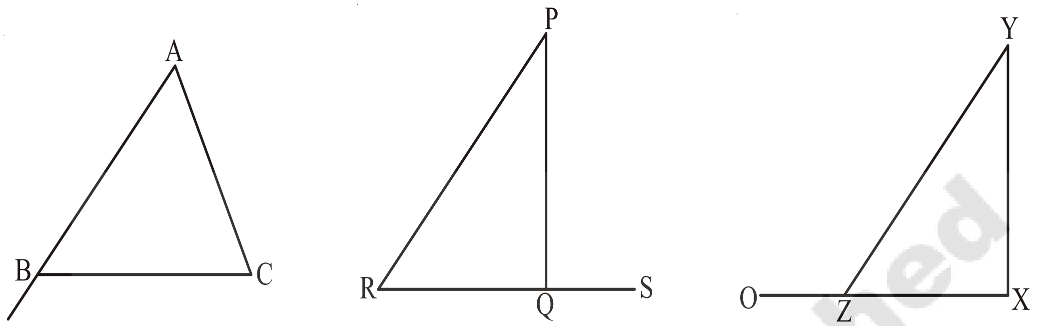
అనగా త్రిభుజంలో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణం దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము.

దీనిని త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణ ధర్మం అంటాము.

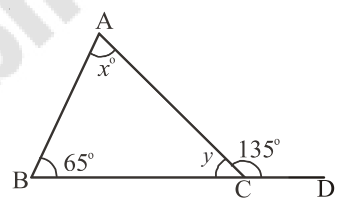
© SCERT not to be republished

ఇది చేయండి

క్రింది పటాల నకలు గీయుము. ప్రతీ సందర్భంలో బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమవుతుందేమో సరిచూడుము.



ఉదాహరణ 8 : ప్రక్క పటములో x, y విలువలను కనుగొనుము.



సాధన : $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

(బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$$135^\circ = 65^\circ + x^\circ$$

$$135^\circ - 65^\circ = x^\circ$$

$$\therefore x^\circ = 70^\circ$$

మరియు $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$ (త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం)

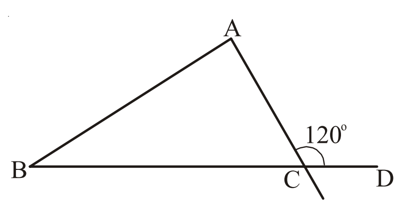
$$65^\circ + 70^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$135^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$y^\circ = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\therefore y^\circ = 45^\circ$$

ఉదాహరణ 9 : ఒక త్రిభుజములో ఒక బాహ్యకోణము 120° దాని అంతరాభిముఖ కోణాలు $1 : 5$ నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనుము.



సాధన :

$$\angle ACD = 120^\circ$$

$$\angle ACD = \angle A + \angle B$$

$$\angle A + \angle B = 120^\circ$$

కానీ $\angle B : \angle A = 1 : 5$

© SCERT not to be republished

$$\angle B = \frac{1}{6} \times 120^o = 20^o$$

$$\angle A = \frac{5}{6} \times 120^o = 100^o$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం)

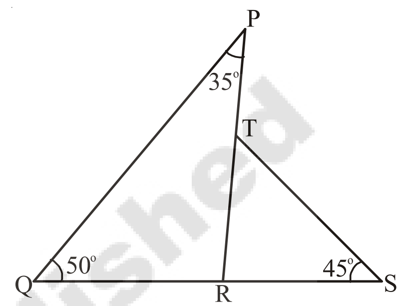
$100^o + 20^o + \angle C = 180^o$

$\therefore \angle C = 180^o - 120^o = 60^o$

ఉదాహరణ 10 : ప్రక్క పటములో

(i) $\angle PRS$ (ii) $\angle PTS$ (iii) $\angle STR$

(iv) $\angle PRQ$ లను కనుగొనుము.



సాధన : (i) ΔPQR లో $\angle PRS$ బాహ్యకోణం

$\angle RQP$ మరియు $\angle QPR$ లు అంతరాభి ముఖ కోణాలు

$\angle PRS = \angle RQP + \angle QPR$ (బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$\angle PRS = 50^o + 35^o = 85^o$

(ii) ΔRST లో $\angle PTS$ బాహ్యకోణం మరియు $\angle SRT, \angle RST$ లు అంతరాభిముఖ కోణాలు

$\therefore \angle PTS = \angle SRT + \angle RST$

$\angle PTS = 85^o + 45^o$ $(\angle SRT = \angle PRS = 85^o)$

$\angle PTS = 130^o$

(iii) ΔRST లో

$\angle STR + \angle RST + \angle SRT = 180^o$

$\angle STR + 45^o + 85^o = 180^o$

$\angle STR + 130^o = 180^o$

$\therefore \angle STR = 180^o - 130^o = 50^o$

(iv) $\angle PRQ + \angle PRS = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

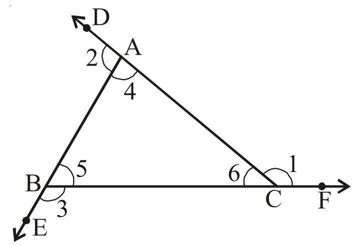
$\angle PRQ + 85^o = 180^o$

$\angle PRQ = 180^o - 85^o$

$\angle PRQ = 95^o$

© SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 11 : పటములో చూపబడిన ΔABC యొక్క బాహ్యకోణాల మొత్తము 360^o అని చూపుము.



సాధన : $\angle 2 + \angle 4 = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

$\angle 3 + \angle 5 = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

$\angle 6 + \angle 1 = 180^o$ (రేఖీయద్వయము)

పై వానిని ఇరువైపులా కూడగా

$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1 = 180^o + 180^o + 180^o$

$(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540^o$

కానీ $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^o$ అని మనకు తెలుసు (త్రిభుజములోని మూడుకోణాల మొత్తం)

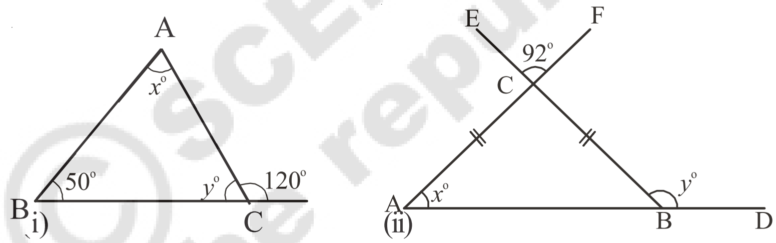
కనుక $180^o + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o - 180^o$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^o$

$\therefore$ ఒక త్రిభుజములోని బాహ్యకోణాల మొత్తము $= 360^o$.

ఉదాహరణ 12 : క్రింది పటాలలో x మరియు y విలువలను కనుగొనుము



సాధన : (i) $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ (బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$x^o + 50^o = 120^o$

$x^o = 120^o - 50^o = 70^o$

$\angle ACB + \angle ACD = 180^o$ (రేఖీయద్వయం)

$y^o + 120^o = 180^o$

$y^o = 180^o - 120^o = 60^o$

(ii) $\angle ACB = \angle ECF = 92^o$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$\angle CAB = \angle CBA$ (సమాన భుజాలకు ఎదురుగా గల కోణాలు సమానం)

ΔABC లో

$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^o$

$x^o + x^o + 92^o = 180^o$

$2x = 180^o - 92^o = 88^o$

© SCERT not to be republished

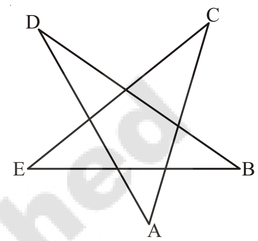
$$\therefore \quad x^o = \frac{88}{2} = 44^o$$

ఇంకా $\quad \angle ABC + y^o = 180^o$ (రేఖీయద్వయం)

$$y^o = 180^o - x^o$$

$$\therefore \quad y^o = 180^o - 44^o = 136^o$$

ఉదాహరణ 13 : ప్రక్కపటములో $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + LE$ విలువను కనుగొనుము?



సాధన : పటములో చూపిన విధంగా కోణాలను గుర్తించుము

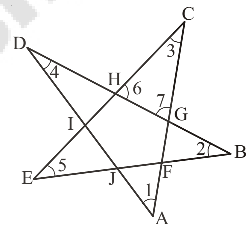
ΔGHC లో $\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^o$ .... (1)

ΔEHB లో $\angle 6 = \angle 5 + \angle 2$ ....(2)

ΔAGD లో $\angle 7 = \angle 1 + \angle 4$ ....(3)

(బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

(2), (3) లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా



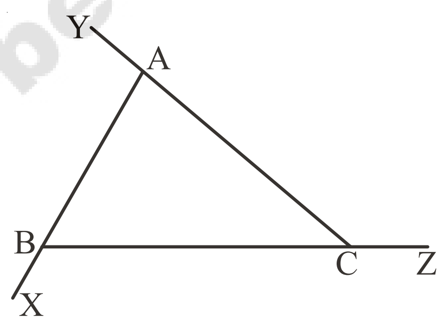
$\Rightarrow \quad \angle 3 + \angle 5 + \angle 2 + \angle 1 + \angle 4 = 180^o$

$\Rightarrow \therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^o$

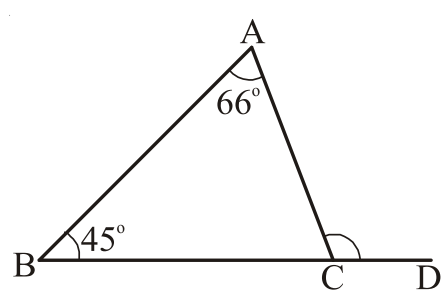
అనగా $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^o$

అభ్యాసం - 4

1. ΔABC యొక్క అంతర, బాహ్యకోణాలను పేర్కొనుము.

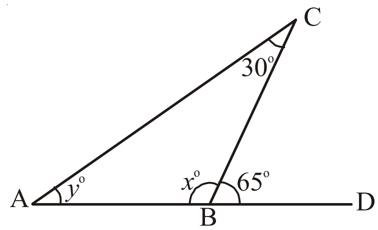


2. ప్రక్కపటము ΔABC లో $\angle ACD$ విలువను కనుగొనుము.

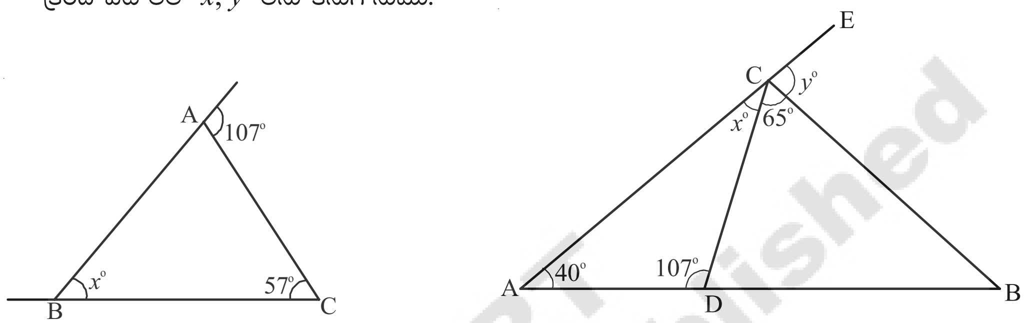


© SCERT not to be republished

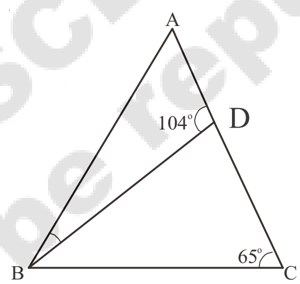
3. x,y కోణాల విలువలను కనుగొనుము.



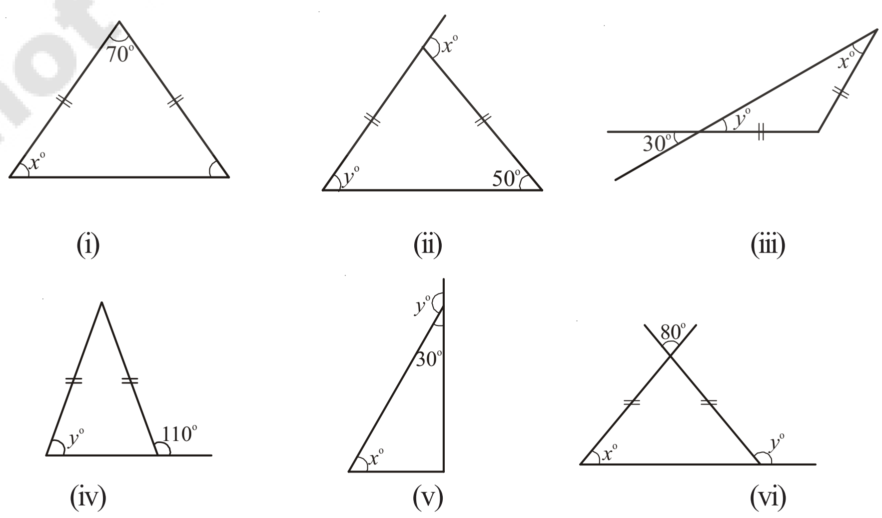
4. క్రింది పటాలలో x, y లను కనుగొనుము.



5. పటములో ∠BAD = 3 ∠DBA, అయిన ∠CDB, ∠DBC మరియు ∠ABC లను కనుగొనుము.



6. క్రింది పటాలలో x, y విలువను కనుగొనుము.



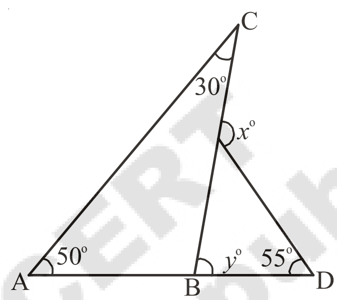
7. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము125^o మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలు 2 : 3. నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనుము.

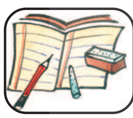
8. ΔPQR లో బాహ్యకోణము $\angle PRS = 105^o$ మరియు $Q = 70^o$, అయిన $\angle P$. విలువను కనుగొనుము. $\angle PRS > \angle P$ అవుతుందా?

9. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 130^o మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలలో ఒక దాని విలువ 60^o అయిన రెండవ కోణము విలువ ఎంత?

10. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 105^o మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలు 2 : 5, నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనుము.

11. పటములో x మరియు y లను కనుగొనుము.





మనం నేర్చుకున్నవి

1 (i) ఏవైనా మూడు రేఖా ఖండాలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటమునే త్రిభుజము అంటాము.

(ii) భుజాల పొడవుల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు

- మూడు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమబాహు త్రిభుజమంటారు.
- కనీసం ఏవైనా రెండు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజము అంటారు.
- మూడు భుజాలు వేరువేరు పొడవులు కలిగియున్న త్రిభుజాన్ని విషమబాహు త్రిభుజము అంటారు.

(iii) కోణాల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు

- అన్ని కోణాలు అల్పకోణాలైన త్రిభుజాన్ని అల్పకోణ త్రిభుజమంటారు.
- ఒక కోణం అధికకోణంగా గల త్రిభుజాన్ని అధికకోణ త్రిభుజమంటారు.
- ఒక కోణం లంబకోణమైన త్రిభుజాన్ని లంబకోణ త్రిభుజము అంటారు.

2. మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలను కలిపి త్రిభుజం యొక్క 6 అంశాలు అంటాము.

3. త్రిభుజ భుజాల పొడవుల మధ్య సంబంధము :

(i) ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువ

© SCERT not to be republished

(ii) ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల బేధము మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువ

4. త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షం నుంచి ఎదుటి భుజం మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఖండమును మధ్యగత రేఖ అంటారు. త్రిభుజములో ఇలాంటి మధ్యగత రేఖలు మూడు వుంటాయి.

5. త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షం నుంచి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబమును ఎత్తు అంటాము. ఇలాంటి ఎత్తులు త్రిభుజములో మూడింటిని నిర్మించవచ్చు.

6. త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^{o}.

7. త్రిభుజంలో ఏదైనా ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాభి ముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము.

సూచన : LM = LM రేఖాఖండం యొక్క పొడవు

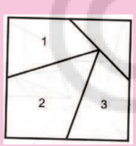
$\overline{LM}$ = రేఖా ఖండం LM

$\overrightarrow{LM}$ = కిరణం LM

$\overleftrightarrow{LM}$ = సరళ రేఖ LM

© SCERT not to be republished

అట్ట ముక్కలతో తమాషా!



ఒక చతురస్రాకార అట్ట ముక్కను తీసుకోండి. దాని భుజాల మధ్య బిందువును గుర్తించి, పటంలో చూపిన విధంగా రేఖలను గీయండి. వాటి వెంబడి చతురస్రాన్ని 4 భాగాలుగా విభజించి వాటితో ఒక త్రిభుజం ఏర్పడేటట్లు అమర్చండి.