ਇਹ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਹੈ।
ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਉਹ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਘਟਕ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਅਕਾਸ਼ ਨੀਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਘਾਹ ਹਰਾ ਹੈ।

(ii) ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਠੰਢ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) 0 ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਇੱਕ ਰਿਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵਾਰੀ-ਵਾਰੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨੇ :

p: ਅਕਾਸ਼ ਨੀਲਾ ਹੈ।
q: ਘਾਹ ਹਰਾ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

p: ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੈ।
q: ਠੰਢ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(iii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
q: ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(iv) ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

p: *0 ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*
q: *0 ਇੱਕ ਰਿਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

(i) ਇੱਕ ਵਰਗ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ ਚੁਣਿਆ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iv) ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਹਰਿਆਣਾ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

(v) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(vi) 2, 4 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ 24 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਵਰਗ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ ਹੈ।

(iv) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਹਰਿਆਣਾ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

q: ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(v) ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: $\sqrt{2}$ *ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

q: $\sqrt{2}$ *ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ ਪਹਿਲਾ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

(vi) ਇਸ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: 2 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

q: 4 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

r: 8 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ 'ਅਤੇ' 'ਜਾਂ' ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਸ ਮਹੱਤਵ ਰੱਖਦੇ ਹਨ। ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਲਿਖੋ :

(i) ਚੇਨੱਈ, ਤਮਿਲਨਾਡੂ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

(iv) ਸੰਖਿਆ 2 ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

(v) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ?

(i) ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹਨ?

(i) ਸੰਖਿਆ 3 ਅਭਾਜ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਧਨ ਹਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹਨ।

(iii) ਸੰਖਿਆ 100, ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3, 11 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

14.4 ਖ਼ਾਸ ਸ਼ਬਦ/ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ (Special Words/Phrases)

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ 'ਅਤੇ', 'ਜਾਂ' ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਯੋਜਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ ਸਮਝ ਸਕੀਏ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

14.4.1 ***ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' (The word 'And') :*** ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

p: ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਘਟਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

q: ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

r: ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ।
ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5, 6 ਅਤੇ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਵਿਘਟਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

q: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

r: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆ 6 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

s: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਦੋ ਸੱਚ ਹਨ।
ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

1. ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਣ।
2. ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਵੀ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਵੇ (ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਕੁਝ ਘਟਕ ਕਥਨ ਜਾਂ ਸਾਰੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ।

(i) ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਸਿੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਫੈਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) 0 ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਿਣ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੇ ਦੋ ਪੈਰ ਅਤੇ ਦੋ ਅੱਖਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਸਿੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਫੈਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

p: 0 ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

q: 0 ਹਰੇਕ ਰਿਣ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਦੂਜਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

(iii) ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: 'ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੇ ਦੋ ਪੈਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।'

q: 'ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੀਆਂ ਦੋ ਅੱਖਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।'

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: ਐਲਕੋਹਲ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਮਿਸ਼ਰਨ ਨੂੰ ਰਸਾਇਣਿਕ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਐਲਕੋਹਲ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਅੱਗੇ ਟਿੱਪਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਹ ਨਹੀਂ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਕਿ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ', ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ।

14.4.2 ***ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ (The word "Or")*** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p: ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚਾ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।' ਭਾਵ ਇਹ ਕਥਨ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

p: 'ਕਿਸੇ ਢਾਬੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ 'ਥਾਲੀ' ਦੇ ਨਾਲ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਜਾਂ ਪੇਪਸੀ ਵੀ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।'

ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਜਿਹੜਾ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਨਹੀਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਉਹ ਥਾਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਪੇਪਸੀ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਥਾਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਪੇਪਸੀ ਨਹੀਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਉਹ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਲੈ

ਸਕਦਾ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੋਵੇਂ ਵਸਤੂਆਂ ਭਾਵ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਅਤੇ ਪੇਪਸੀ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦਾ ਇਹ ਨਿਵੇਕਲਾ 'ਜਾਂ' ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਕਥਨ (ਹੋਰ) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

'ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ, ਜਿਸਨੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਸੂਕਸ਼ਮ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਐਮ.ਐਸ.ਸੀ. ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।'

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਣ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਹ ਸੂਕਸ਼ਮ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਨਾਲ ਹੀ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਾ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਵੀ ਇਸ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦੋਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਜਾਨਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਉਸ ਸਮੇਂ ਜਾਂਚਾਂਗੇ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਵੇਕਲਾ 'ਜਾਂ' ਜਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਜਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਆਪਣਾ ਉੱਤਰ ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਦੱਸੋ।

(i) ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਪਾਸਪੋਰਟ ਜਾਂ ਮਤਦਾਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਛੁੱਟੀ ਜਾਂ ਐਤਵਾਰ ਦੇ ਦਿਨ ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) ਤੀਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਫਰੈਂਚ ਭਾਸ਼ਾ ਜਾਂ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਕੋਲ ਪਾਸਪੋਰਟ ਅਤੇ ਮਤਦਾਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ ਵੀ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਕੂਲ ਛੁੱਟੀ ਦੇ ਦਿਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਬੰਦ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਵੀ ਹੋਣ।

(iv) ਇੱਥੇ ਵੀ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਤੀਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਫਰੈਂਚ ਅਤੇ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਦੋਨੋਂ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦਾ।

ਸੰਯੋਜਕ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯਮ

1. ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਇੱਕ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਘੱਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਣ।
2. ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ (ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਘੱਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

q: *ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।*

r: *ਉਹ (ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।*

ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ q ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ r ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ r ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ q ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ p ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 7 ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

q: *ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

r: *ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ q ਅਤੇ r ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ p ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

p: 'ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਛੁੱਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।'

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

q: *ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਛੁੱਟੀ ਹੈ।*

r: *ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।*

q ਅਤੇ r ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਹੀ ਸੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਮੁੰਬਈ, ਕੋਲਕਾਤਾ ਜਾਂ ਕਰਨਾਟਕ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

q : *ਮੁੰਬਈ, ਕੋਲਕਾਤਾ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।*

r : *ਮੁੰਬਈ, ਕਰਨਾਟਕ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।*

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਕਥਨਾਂ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ।

(i) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਜਾਂ ਸਕੂਲ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖੇ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਆਇਤ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪੰਜ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p: $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

q: $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: *ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

q: *ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਦੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਕੋਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸਕੂਲ ਦੇ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਪੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਦੋਨੋਂ ਕਾਗਜ਼ਾਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ। ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ (Quantifiers Phrases) "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ "ਜਾਂ" 'ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਲਈ/ ਹਰੇਕ ਲਈ" ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਖਾਸ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਚਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ 'ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਆਇਤ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਆਇਤ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ" ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਦਾ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਹੈ। ਆਉ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਵ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ,

'ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ p ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ S ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ p ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਵਿੱਚ 'ਹਰੇਕ ਲਈ' ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਇਹ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਖਾਸ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਵਿੱਚ ਉਹ ਖ਼ਾਸ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਜਾਨਣਾ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਕ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਜਕ ਨੂੰ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਲਿਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ :

1. ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ y ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $y < x$
2. ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ y ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $y < x$

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੰਜ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਅਰਥ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੰਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ (1) ਸੱਚ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ (2) ਝੂਠ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਗਣਿਤੀ ਵਾਕ ਦੇ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਲਈ ਸੰਯੋਜਕਾਂ ਜਾਂ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਠੀਕ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ, ਨਾ ਹੀ ਪਹਿਲਾਂ ਤੇ ਨਾਂ ਹੀ ਬਾਦ ਵਿੱਚ,

ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਸੰਯੋਜਕ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਅਤੇ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਨੂੰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਈ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖਾਸ ਸ਼ਬਦਾਂ/ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਅਰਥ ਸਮਝਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਖ਼ਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਫੇਰ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ :

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਧਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਰੇਤ ਧੁੱਪ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਗਰਮ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰਾਤ ਨੂੰ ਜਲਦੀ ਠੰਢੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) $x = 2$ ਅਤੇ $x = 3$; ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ।

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜੋ ਆਪਣੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ x, $(x + 1)$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਭਾਰਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਰਾਜ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰਾਜਧਾਨੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

3. ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ :

(i) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਲਈ $x + y = y + x$ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $x + y = y + x$ ਸੱਚ ਹੈ।

4. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' 'ਨਿਵੇਕਲਾ' ਹੈ ਜਾਂ 'ਸ਼ਾਮਿਲ' ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ :

(i) ਸੂਰਜ ਚੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਚੰਨ ਢਲਦਾ ਹੈ।

(ii) ਡਰਾਇਵਿੰਗ ਲਾਈਸੈਂਸ ਦੇ ਆਵੇਦਨ ਲਈ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਰਾਸ਼ਨ ਕਾਰਡ ਜਾਂ ਪਾਸਪੋਰਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਧਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

14.5 ਅੰਤਰਭਾਵ/ਸ਼ਰਤਬੱਧ ਕਥਨ (Implications/Conditional Statements)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ 'ਜੇਕਰ–ਤਾਂ', 'ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਅਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

'ਜੇਕਰ–ਤਾਂ' ਦੇ ਨਾਲ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬੜਾ ਆਮ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

r: ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਪਘਟਨਾਂ p ਅਤੇ q ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ।

p : ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ।

q : ਤੁਸੀ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

ਤਾਂ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ p ਸੱਚ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ q ਜ਼ਰੂਰ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਸਭ ਤੋਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ p ਝੂਠ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ q ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿੰਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ q ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ p ਦੇ ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਣ ਦਾ q ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤੱਥ ਵੀ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਅੰਤਰਨਿਹਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ *p ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਕਈ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। *"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।"*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

p : *ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

q: *ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ :

1. 'p ਅੰਤਰਭਾਵ q' ਨੂੰ $p \Rightarrow q$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀਕ '$\Rightarrow$' ਅੰਤਰਭਾਵ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ 'ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ' ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਅੰਤਰਨਿਹਤ ਹੈ ਕਿ 'ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ'।

2. p, q ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
3. 'p ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q' ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
4. 'q ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ p ਦੇ ਲਈ।' ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
5. '$\sim q$ ਅੰਤਰਭਾਵ $\sim p$'। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ,ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

14.5.1 *ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ* (Contrapositive and converse) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਥਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਵਾਲੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ,

ਜੇਕਰ ਭੌਤਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੈਵਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ

"ਜੇਕਰ ਜੈਵਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿਚ ਤਬਦੀਲੀ ਨਹੀਂ"

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸਮਾਨ ਅਰਥ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 9 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 3 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਜੰਮੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤਿੰਨ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ,

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 9 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਜੰਮੇ ਹੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਬਾਹੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ q ਨਹੀਂ ਤਾਂ p ਨਹੀਂ' ਭਾਵ 'ਜੇਕਰ $\sim q$, ਤਾਂ $\sim p$' ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਵਿਲੋਮ ਕਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ q ਤਾਂ p' ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ

p : *'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 10 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 5 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।' ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ*

q : *'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 10 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।'*

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A-ਗਰੇਡ ਮਿਲੇਗਾ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a > b$ ਤਾਂ $a - b$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

(i) ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ n^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ n ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A–ਗਰੇਡ ਮਿਲਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਹਨ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $a > b$ ਤਾਂ $(a – b)$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਫੇਰ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

(i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ab ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p : *ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ।*

q : *ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ।*

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p : a ਅਤੇ b ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

q : ab ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਪ੍ਰਤੀਕ '$\Leftrightarrow$' ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ p ਅਤੇ q ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮਤਲ ਰੂਪ ਹਨ।

(i) 'p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q'

(ii) 'q ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ p'

(iii) 'p ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ q ਦੇ ਲਈ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ

(iv) $p \Leftrightarrow q$

ਇੱਥੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦੋ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਮਿਲਾਓ।

(i) p: ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੀ ਚਾਰਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

(ii) p: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਵੀ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।

q: ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਵੀ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਕੋਈ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.4

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ–ਤਾਂ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪੰਜ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ x ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੇ ਠੰਢਾ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਘੱਟ ਹੈ।

(iv) ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਗਿਆਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(v) x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ x ਸੰਖਿਆ 4 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ 'ਜੇਕਰ–ਤਾਂ' ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) ਤੁਹਾਨੂੰ ਨੌਕਰੀ ਮਿਲਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਹਾਡੀ ਯੋਗਤਾ ਚੰਗੀ ਹੈ।

(ii) ਕੇਲੇ ਦਾ ਰੁੱਖ ਫੁੱਟੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ਗਰਮ ਵਾਤਾਵਰਨ ਵਿਚ ਰਹੇ।

(iii) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ–ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A^+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ, ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ।

4. ਹੇਠਾਂ (a) ਅਤੇ (b) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਪਛਾਣੋ।

(a) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਸਰਦੀਆਂ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਹਨ।

(i) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਠੰਢ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਸਰਦੀਆਂ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ।

(b) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

14.6 ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ (Validating Statements)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਕਥਨ ਕਿਹੜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ? ਇਹ ਕਹਿਣ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕਦੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਝੂਠ ਹੈ ?

ਉੱਤੇ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ "ਅਤੇ" ਅਤੇ "ਜਾਂ" ਵਿੱਚੋਂ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ "ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ" ਅਤੇ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਸ਼ਰਤ ਦਾ ਜਾਂ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਅਤੇ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕੁਝ ਆਮ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਨਿਯਮ 1 : ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕਥਨ "p ਅਤੇ q" ਸੱਚ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਰਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਸਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਚਰਨ 1 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਥਨ p ਸੱਚ ਹੈ।

ਚਰਨ 2 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਥਨ q ਸੱਚ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 2 ਸੰਯੋਜਕ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਹਨ ਤਾਂ ਕਥਨ "p ਜਾਂ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ 1 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਝੂਠ ਹੈ, q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ q ਝੂਠ ਹੈ, p ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

ਨਿਯਮ 3 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ 1 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ, q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ)।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ q ਝੂਠ ਹੈ, p ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਝੂਠ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ)।

ਨਿਯਮ 4 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਕਥਨ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) *ਜੇਕਰ p ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ q ਸੱਚ ਹੈ।* (ii) *ਜੇਕਰ q ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ p ਸੱਚ ਹੈ।*

ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਜੇਕਰ $x, y \in \mathbf{Z}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਹਨ ਤਾਂ xy ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $p : x, y \in \mathbf{Z}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਹਨ।

$q : xy$ *ਟਾਂਕ ਹੈ।*

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਨੂੰ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ ਅਸੀਂ q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

p ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$x = 2m + 1$ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ m ਲਈ।

$y = 2n + 1$ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ n ਲਈ।

ਇਸ ਲਈ $xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$= 2(2mn + m + n) + 1$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ xy ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 2 ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂਚਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਸੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ q ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨ q ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$\sim q$: *ਗੁਣਨਫਲ xy ਜਿਸਤ ਹੈ।*

ਇਹ ਕੇਵਲ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ x ਜਾਂ y ਜਿਸਤ ਹੋਣ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਕਿ :

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, 'ਜੇਕਰ $x, y \in \mathbf{Z}$ 'ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ xy ਟਾਂਕ ਹਨ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ x ਅਤੇ y ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।'

ਹੱਲ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਾ ਤੋਂ ਬੁਲਾਈਏ :

p : xy ਟਾਂਕ ਹੈ।

q : x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਜਾਂਚ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੁਣ, $\sim q$: ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੋਇਆ ਕਿ x (ਜਾਂ y) ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਤਾਂ, $x = 2n$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $xy = 2ny$ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ xy ਜਿਸਤ ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p : ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ।

q : ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਦੂਜਾ ਵੀ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

14.6.1 *ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ (By Contradiction)* ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ p ਸੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਡੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਰਿਣਾਮ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ p ਨੂੰ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਵੇਖੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ :

p: $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

$\sqrt{7}$ ਇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{7}=\frac{a}{b}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਤੇ : $7=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \Rightarrow 7$ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $a = 7c$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a^2 = 49c^2$ ਅਤੇ $a^2 = 7b^2$

$\Rightarrow 7b^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow 7$ ਸੰਖਿਆ b ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 7 ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਸਾਡੀ ਮਾਨਤਾ 'a ਅਤੇ b ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਮਨੌਤ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮਾਨਤਾ ਕਿ $\sqrt{7}$ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ' ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਕਿ '$\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ' ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ 'ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਆਪ ਹੀ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ :

'ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ n ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਝੂਠ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ $\sim q$ ' ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਖੋਜਣਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਭਾਜ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਸੰਖਿਆ 9 ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਟਿੱਪਣੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਤੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.5

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਥਨ

p: 'ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ $x^3 + 4x = 0$, ਤਾਂ $x = 0$, ਸੱਚ ਹੈ'।

(i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ (ii) ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ (iii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਰਾਹੀਂ

2. ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਥਨ "ਕਿਸੇ ਵੀ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ $a^2 = b^2$ ਹੈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a = b$" ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ :

p: ਜੇਕਰ x ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ x ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

4. ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ :

(i) p: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਧਿਕ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

(ii) q: ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 1 = 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਮੂਲ 0 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਝੂਠ ਹੈ ? ਹਰੇਕ ਲਈ ਵੈਧ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

(i) p: ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਰਧਵਿਆਸ ਉਸਦੀ ਜੀਵਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) q: ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(iii) r: ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਕਿਸੇ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

(iv) s: ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $x > y$ ਤਾਂ $-x < -y$ ਹੈ।

(v) t : $\sqrt{11}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਸਿੱਧ ਕਰੋ। ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚ ਲਈ ਵਰਤੋ ਕਰੋ ਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

t: ਤੁਸੀਂ ਭਿਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਵਰਖਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਵੋ।

ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਕਰੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿਚ ਹੋਵੋ। ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p : ਜਦੋਂ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਤੁਸੀਂ ਭਿੱਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ।

q : ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤੁਸੀ ਭਿੱਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ।

ਇਥੇ ਦੋਨੋਂ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ੇਧਣ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਲਈ $x^2 > x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) q: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $x^2 = 2$ ਹੈ।

(iii) r: ਹਰੇਕ ਪੰਛੀ ਦੇ ਪੰਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) s: ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਤਰ ਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) p ਦਾ ਨਿਸ਼ੇਧਣ "ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ" ਹੋਵੇਗਾ, ਭਾਵ ਸ਼ਰਤ $x^2 > x$ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$\sim p$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $x^2 < x$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ q ਇੱਕ ਇਹੋ ਜੇਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $x^2 = 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\sim q$: ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $x^2 = 2$ ਹੈ।

ਜਿਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$\sim q$: ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ $x^2 \neq 2$ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਸ਼ੇਧਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ:

$\sim r$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪੰਛੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਪੰਖ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਸ਼ੇਧਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

$\sim s$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਤਰ ਤੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ" ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕਰੋ। "ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।"

ਹੱਲ : ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ ਕਿ n^2 ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹਨ :

p : ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ।

q : n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਤਾਂ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਵੈਧਤਾ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਂਚਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਕੀ ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਅਤੇ "ਜੇਕਰ q ਤਾਂ p" ਸੱਚ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 1 : "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q"

ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਕਥਨ "ਜੇਕਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ" ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ ਕੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ? ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ n ਟਾਂਕ ਹੈ, ਤਾਂ $n = 2k + 1$ ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$

n^2, ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ 1 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਜੇਕਰ q, ਤਾਂ p

ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ n ਟਾਂਕ ਹੈ।'

ਜੇਕਰ q, ਤਾਂ p ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

(ਭਾਵ $\sim p \Rightarrow \sim q$) ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ,

'ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਵੀ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $n = 2k$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ n^2 ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

t: ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

p : ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ।

q : ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ।

ਸ਼ਰਤ ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ p, q ਦੇ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਭਾਵ ਜੁਰਮਾਨਾ ਹੋਣ ਲਈ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਣਾ ਕਾਫ਼ੀ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇੱਥੇ "80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਣਾ" ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ q, p ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ। ਇੱਥੇ "ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ" ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 14 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਹਰੇਕ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, ਲਈ ਸੰਖਿਆ $x - 1$ ਵੀ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) q: ਸਾਰੀਆਂ ਬਿੱਲੀਆਂ ਖਰੋਂਚਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) r: ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, ਲਈ ਜਾਂ ਤਾਂ $x > 1$ ਜਾਂ $x < 1$.

(iv) s: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $0 < x < 1$.

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੇਕਰ 1 ਅਤੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) q: ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਧੁੱਪ ਵਾਲਾ ਦਿਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) r: ਜੇਕਰ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਲੱਗਦੀ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) p: ਸਰਵਰ ਤੇ ਲਾਗ ਆਨ ਕਰਨ ਲਈ ਪਾਸਵਰਡ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰਰੀ ਹੈ।

(ii) q: ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਟਰੈਫ਼ਿਕ ਵਿੱਚ ਰੁਕਾਵਟ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) r: ਤੁਸੀਂ ਵੇਬਸਾਈਟ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਫ਼ੀਸ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ।

4. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋਬਾਰਾ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ।

(ii) q: ਤੁਹਾਡੇ ਰਾਹੀਂ A-ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ ਲਗਾਤਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋ।

(iii) r: ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਇਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5. ਹੇਠਾਂ ਦੋ ਕਥਨ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p : 25 *ਸੰਖਿਆ* 5 *ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

q : 25 *ਸੰਖਿਆ* 8 *ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਰਾਹੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਲਿਖੋ। ਦੋਵੇਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਜਾਂਚੋ।

6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਕਰੋ।

(i) p: ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਾ ਜੋੜਫਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਵਿਲੋਮ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ)

(ii) q: ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ $n > 3$, ਤਾਂ $n^2 > 9$ (ਵਿਲੋਮ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ)।

7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪੰਜ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥ ਸਮਾਨ ਹੋਣ:

q: 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਅਧਿਕ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।'

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ :

- ◆ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਵਾਕ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ।
- ◆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ :

– ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ : ਜੇਕਰ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਤਾਂ '$\sim p$ ਝੂਠ ਹੈ' ਕਥਨ p ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ ਹੈ ਇਸਨੂੰ $\sim p$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

- ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਕਥਨ :
  ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਬਣੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।
- ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਦੀ ਅਤੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ' ਅਤੇ 'ਹਰੇਕ ਲਈ' ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ।
- ਅੰਤਰਭਾਵ (ਸ਼ਰਤਾਂ) 'ਜੇਕਰ', 'ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਅਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ'
  ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ' p ਤਾਂ q ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- p ਅੰਤਰਭਾਵ q (ਪ੍ਰਤੀਕ $p \Rightarrow q$ ਤੋਂ ਦੱਸਿਆ)
- p ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ q ਦੇ ਲਈ।
- q ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ p ਦੇ ਲਈ।
- p ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q
- $\sim q$ ਅੰਤਰਭਾਵ $\sim p$
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਉਲਟ ਕਥਨ $q \Rightarrow p$ ਹੈ।
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਕਥਨ p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

◆ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
  (i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ
  (ii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਕਮ ਵਿਧੀ
  (iii) ਵਿਰੋਧ ਵਿਧੀ
  (iv) ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵਿਧੀ

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰ ਤੇ ਪਹਿਲਾ ਸ਼ੋਧ-ਪ੍ਰਬੰਧ *Aristotle* (384 ਈ. ਪੂ.-322 ਈ. ਪੂ.) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਸ਼ੋਧ-ਪ੍ਰਬੰਧ ਨਿਗਮਨਾਤਮ ਵਿਵੇਚਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਸੀ, ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਗਿਆਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸ਼ਾਖਾ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਇੱਕ ਅਧਾਰ ਦਿੰਦਾ ਸੀ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਸਤਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤਗ G. W. Leibnitz (1646 – 1716) ਨੇ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਯਾਂਤਰਿਕ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਉਨੀਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤਗ *George Boole* (1815–1864) ਅਤੇ *Augustus De Morgan* (1806–1871) ਨੇ ਉਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਕਾਰ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਤਰਕਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਕੀਤੀ।

— ❖ —

ਅਧਿਆਇ 15

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ
(Statistics)

❖ *"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates." – A.L.BOWLEY & A.L. BODDINGTON* ❖

15.1 ਭੂਮਿਕਾ

Karl Pearson (1857-1936)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ (ਮੰਤਵ) ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੱਕ ਪਹੁਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਰਾਹੀਂ ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ ਰਾਹੀਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਨਿਧਿਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ, ਮਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਤਿੰਨ ਮਾਪ ਹਨ। ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਦਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਅੰਕੜੇ ਕਿਸ ਸਥਾਨ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਹੋਰ ਚੰਗੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਖਿੰਡਾਵ ਹੈ (ਬਿਖਰਾਵ ਹੈ ਜਾਂ) ਉਹ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਚਾਰਾਂ ਪਾਸੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਕੱਠਾ ਹਨ।

ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਪਿਛਲੇ ਦਸ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71
ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B
ਮੱਧਮਾਨ	53	53
ਮੱਧਿਕਾ	53	53

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ) ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

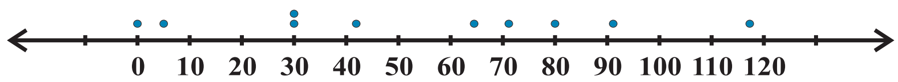
ਅਤੇ, ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਮਾਪ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :.

ਜੇਕਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n}{2}\right)$ ਵੀਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਭਾਵ 53 ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਸਮਾਨ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਹੈ ? ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਨਹੀਂ। ਕਿਉਂਕਿ A ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਵਿੱਚ 0 (ਘੱਟੋ-ਘੱਟ) ਤੋਂ 117 (ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਤੱਕ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ B ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ 46 (ਘੱਟੋ-ਘੱਟ) ਤੋਂ 60 (ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਤੱਕ ਹੈ।

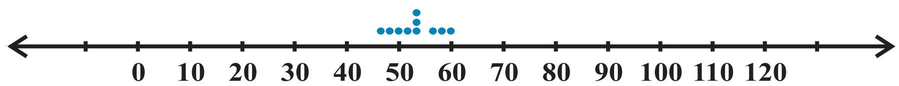
ਆਉ ਅਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਸਕੋਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 15.1 ਅਤੇ 15.2)

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਲਈ



ਚਿੱਤਰ 15.1

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਲਈ



ਚਿੱਤਰ 15.2

ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨੇੜੇ-ਨੇੜੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ (ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ) ਦੇ ਇਰਦ-ਗਿਰਦ ਗੁੱਛਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਬਿਖਰਾਵ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਵੱਧ ਫੈਲੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੂਚਨਾ ਦੇਣ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਬਿਖਰਾਵ ਇਕ ਹੋਰ ਖੰਡ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਬਦਲਾਵ ਜਾਂ ਬਿਖਰਾਵ ਦੇ ਵਰਣਨ ਲਈ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸੰਖਿਆ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਮਾਪ (Measure of dispersion) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਖੇਪਣ ਦੇ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮਾਪਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅਤੇ ਬਿਨਾਂ-ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮਾਪਣ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

15.2 ਵਿਖੇਪਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ (Measure of Dispersion)

ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੇਪਣ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਅਤੇ ਉੱਥੇ ਦਿੱਤੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਖੇਪਣ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਾਪ ਹਨ :

(i) ਸੀਮਾ (Range) (ii) ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ (Quartile deviation) (iii) ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation) (iv) ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation).

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

15.3 ਸੀਮਾ (Range)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ A ਅਤੇ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਕੋਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ, ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੌੜਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਲਈ ਸੀਮਾ $= 117 - 0 = 117$

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਲਈ ਸੀਮਾ $= 60 - 46 = 14$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸੀਮਾ A > ਸੀਮਾ B ਹੈ ਇਸ ਲਈ A ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦਾ ਖਿੰਡਾਅ ਵੱਧ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ B ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਲੜੀ ਦੀ ਸੀਮਾ = ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ – ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮਾਨ

ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਦਾ ਮੋਟਾ-ਮੋਟਾ ਗਿਆਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੁੱਝ ਨਹੀਂ ਦੱਸਦਾ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਦੇ ਹੋਰ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ (ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ) ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਖੇਪਣ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮਾਪ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਤੇ ਵਿਸਤਾਰਪੂਰਵਕ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

15.4 ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean Deviation)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ ਸਥਿਰ ਮਾਨ 'a' ਤੋਂ ਅੰਤਰ $(x - a)$ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ a ਵਿਚਲਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਮੁੱਲ 'a' ਤੋਂ ਵਿਖੇਪਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ a ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਮਾਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਵਿਚਲਨ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$) ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਨਾਲ ਹੀ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ} = \frac{\text{ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}} = \frac{0}{n} = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ-ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਮਾਪਣ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਉਚਿਤ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰੇਕ ਮਾਨ ਦੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਤੋਂ ਵਿਖੇਪਨ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੇਂਦਰੀ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ 'a' ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ M.D.(a) ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\text{'}a\text{' ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮਾਪ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਸਿੱਖੀਏ।

15.4.1 ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation for ungrouped data) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਚਰਣ 1 : ਉਸ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ 'a' ਹੈ।

ਚਰਣ 2 : ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ x_i ਦਾ a, ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਭਾਵ $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, . . . , x_n - a$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਰਣ 3 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲੱਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿਉ। ਭਾਵ $|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, ..., |x_n - a|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਰਨ 4 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

$$\text{ਭਾਵ} \quad \text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|, \text{ ਜਿੱਥੇ } \bar{x} = \text{ਮੱਧਮਾਨ}$$

ਅਤੇ
$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|, \text{ ਜਿੱਥੇ M = ਮੱਧਿਕਾ}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ M ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਾ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਆਓ ਹੁਣ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਚਰਣ 1 : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

ਚਰਣ 2 : ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$, ਤੋਂ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਵਿਚਲਨ $x_i - \bar{x}$

ਭਾਵ 6 – 9, 7 – 9, 10 – 9, 12 – 9, 13 – 9, 4 – 9, 8 – 9, 12 – 9, ਹਨ।

ਜਾਂ –3, –2, 1, 3, 4, –5, –1, 3 ਹਨ।

ਚਰਣ 3 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ $|x_i - \bar{x}|$

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 ਹਨ।

ਚਰਣ 4 : ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਰਣਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਭਾਵ $|x_i - \bar{x}|$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

ਇਸ ਲਈ $$\sum_{i=1}^{20}|x_i - \bar{x}| = 124$$

ਅਤੇ $$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 11 ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਮੱਧਿਕਾ $= \left(\dfrac{11 \ + \ 1}{2}\right)$ਵੀਂ ਜਾਂ 6 ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ = 9 ਹੈ।

ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ $|x_i - \text{M}|$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ।

6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

ਇਸ ਲਈ $$\sum_{i=1}^{11}|x_i - \text{M}| = 58$$

ਅਤੇ $$\text{M.D.}\left(\text{M}\right) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}|x_i - \text{M}| = \frac{1}{11}\times 58 = 5.27$$

15.4.2 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation for grouped data) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Discrete frequency distribution)

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Continuous frequency distribution)

ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

(a) ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Discrete frequency distribution) : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ n ਭਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f_1, f_2, ..., f_n$ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ :

$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ ... \ x_n$

$f : f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ ... \ f_n$

(i) ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about mean)

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ $\overline{x}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

ਜਿੱਥੇ $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਤੋਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\text{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਤਦ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\overline{x}$ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਸਾਰੇ i =1, 2,..., n ਲਈ $|x_i - \overline{x}|$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\text{M.D.}\,(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \overline{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\text{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \overline{x}|$$

(ii) ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about median) : ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਮਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਤਦ ਉਸ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{N}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਥੋੜ੍ਹੀ ਵੱਧ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ N ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਇਹ ਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮੱਧ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਮੰਨੀ ਹੋਈ ਮੱਧਿਕਾ ਹੈ। ਮਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਮਧਿਕਾਂ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

ਹੱਲ : ਆਉ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 15.1 ਬਣਾਈਏ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕਾਲਮ ਪਰਿਕਲਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਲਗਾਈਏ।

ਸਾਰਣੀ 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \bar{x}| = 92$$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

ਅਤੇ
$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i \; |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਹੋਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। (ਸਾਰਣੀ 15.2)।

ਸਾਰਣੀ 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

ਹੁਣ N = 30 ਹੈ ਜੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ 15ਵੀਂ ਅਤੇ 16ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 18 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰੇਖਣ 13 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ $\text{M} = \dfrac{15 \text{ ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ} + 16 \text{ ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ}}{2} = \dfrac{13+13}{2} = 13$

ਹੁਣ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਭਾਵ $|x_i - \text{M}|$ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.3 ਵਿਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 15.3

$\|x_i - \text{M}\|$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\|x_i - \text{M}\|$	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \text{M}| = 149$$

ਇਸ ਲਈ

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{8} f_i\,|x_i - \text{M}|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Continuous frequency distribution) : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉਹ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਬਿਨਾਂ ਅੰਤਰ ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	12	18	27	20	17	6

(i) ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about mean) : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ (class) ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਖੰਡਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	2	3	8	14	8	3	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 15.4 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.4

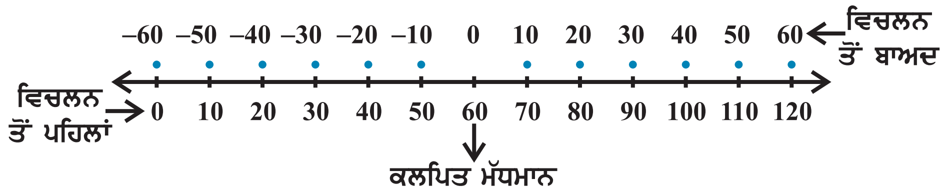
ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ f_i	ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ x_i	$f_i x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

ਇੱਥੇ
$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = 400$$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

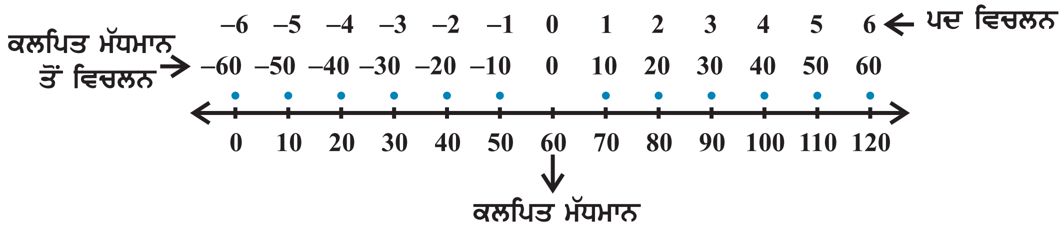
ਅਤੇ
$$\mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਛੋਟੀ (ਲਘੂ) ਵਿਧੀ (Shortcut method for calculating mean deviation about mean) : ਅਸੀਂ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ (step deviation method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\bar{x}$ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪਰਿਕਲਨ ਤੋਂ ਬਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮੱਧ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਨੇੜੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ) ਦਾ ਇਸ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵਿਚਲਨ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (origin) ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਬਦਲਕੇ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਤੇ ਲੈ ਜਾਣਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸ਼ਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.3

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨਵੇਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਲੈਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਬਦਲਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.4

ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਨੂੰ ਛੋਟਾ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਤੋਂ ਗੁਣਨ ਜਿਹੀਆਂ ਗਣਨਾਵਾਂ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਨਵਾਂ ਚਲ $d_i = \frac{x_i - a}{h}$, ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ 'a' ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ h ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਤਾਂ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ $\bar{x}$ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \times h$$

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਲਗਾਈਏ।

ਅਸੀਂ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ $a = 45$ ਅਤੇ $h = 10$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.5 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.5

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
	f_i	x_i				
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

ਇਸ ਲਈ

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h$$

$$= 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

ਅਤੇ $$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i \left| x_i - \bar{x} \right| = \frac{400}{40} = 10$$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ $\bar{x}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਉਂਞ ਹੀ ਹੈ।

(ii) ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about median) : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਉਂਞ ਹੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਅੰਤਰ ਕੇਵਲ ਵਿਚਲਨ ਲੈਣ ਦੇ ਸਮੇਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਮੱਧਿਕਾ ਲੈਣ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਆਉ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਗਾਈਏ ਤਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਉਸ ਵਰਗ ਨੂੰ ਪੱਕਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਵਰਗ ਨੂੰ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \frac{\frac{\text{N}}{2} - \text{C}}{f} \times h$$

ਜਿੱਥੇ ਮਧਿਕਾ ਵਰਗ ਉਹ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{\text{N}}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਕੁਝ ਵੱਧ ਹੋਵੇ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ N ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ l, ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f, ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ c ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ h ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ x_i ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਭਾਵ $|x_i - \text{M}|$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਤਾਂ $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \text{M} \right|$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	6	7	15	16	4	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠਲੀ ਸਾਰਣੀ 15.6 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.6

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ	$\lvert x_i - \text{Med.}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \text{Med.}\rvert$
	f_i	$(c.f.)$	x_i		
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

ਇੱਥੇ N=50, ਇਸ ਲਈ $\frac{N}{2}$ ਜਾਂ 25ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 20-30 ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 20-30 ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਹੈ।

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ਇੱਥੇ $l = 20$, $C = 13$, $f = 15$, $h = 10$ ਅਤੇ $N = 50$

ਇਸ ਲਈ $$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$$

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16 \text{ ਹੈ।}$$

ਅਭਿਆਸ 15.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17
2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ 4 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17
4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.

ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਤਿਦਿਨ	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ਉੱਚਾਈ (ਸੈਂ.ਮੀ.ਵਿੱਚ)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	9	13	26	30	12	10

11. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	8	14	16	4	2

12. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ 100 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦੇ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਉਮਰ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਉਮਰ	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
ਸੰਖਿਆ	5	6	12	14	26	12	16	9

[ਸੰਕੇਤ : ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚੋਂ 0.5 ਘਟਾਉ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ 0.5 ਜੋੜ ਕੇ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।]

15.4.3 ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦੀਆਂ ਕਮੀਆਂ ਜਾਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of mean deviation) : ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਚਰਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਲਈ ਸਹੀ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਤੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ) ਮਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਵੱਧ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਤ ਵਾਰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਸੰਤੋਸ਼ਜਨਕ ਨਤੀਜਾ ਦੇ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਤੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਹੋਰ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਗਣਨਾਵਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਮਾਪ ਹੈ।

15.5 ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Variance and Standard Deviation)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਮਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮਧ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ ਲਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ, ਮਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਤਪੰਨ ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਲੈ ਕੇ ਵੀ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ੱਕ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਇਹ ਵਰਗ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, n ਪ੍ਰੇਖਣ ਹਨ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਤਾਂ

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2 -\bar{x})^2 + ...+ (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ਜੇਕਰ ਇਹ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ $(x_i-\bar{x})$ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਛੋਟਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, x_3,...,x_n$ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਚਲਨ ਘਟ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਇਹ ਜੋੜ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਚਲਨ ਵੱਧ ਹੈ। ਤਾਂ, ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੋੜ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਮਾਪ ਦਾ ਸੰਤੋਸ਼ਜਨਕ ਪ੍ਰਤੀਕ ਹੈ?

ਆਉ ਇਸਦੇ ਲਈ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ 5, 15, 25, 35, 45, 55 ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ A ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 30 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $\bar{x}$ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੂਹ B ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੇ 31 ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{y} = 30$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 30 ਹੈ।

ਸਮੂਹ B ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i - \bar{y})^2 = (15 - 30)^2 + (16 - 30)^2 + (17 - 30)^2 + ... + (44 - 30)^2 + (45 - 30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + ... + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 14^2 + 15^2$$

$$= 2\,[15^2 + 14^2 + ... + 1^2]$$

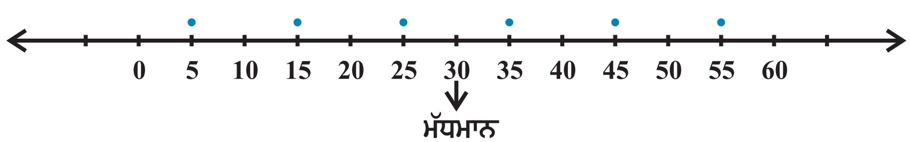
$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)\,(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = $\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $n = 15$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕਹਿਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ 31 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ B ਦਾ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ A ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵੱਧ ਵਿਖੇਪਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਖਿੰਡਾਅ (ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਪਸਾਰ -25 ਤੋਂ 25 ਹੈ) ਸਮੂਹ B ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ (ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਪਸਾਰ –15 ਤੋਂ 15 ਹੈ) ਵੱਧ ਹੈ।

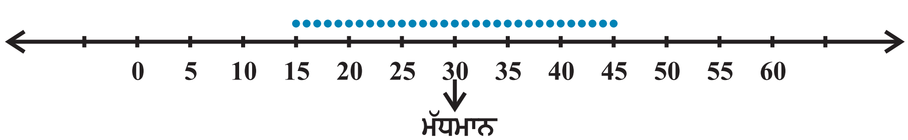
ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ :

ਸਮੂਹ A ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 15.5

ਸਮੂਹ B ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :



ਚਿੱਤਰ 15.6

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਸਹੀ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਅਸੀਂ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੂਹ A ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੱਧਮਾਨ $= \frac{1}{6} \times 1750 = 291.6$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਲਈ ਇਹ $\frac{1}{31} \times 2480 = 80$ ਹੈ।

ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਸਮੂਹ B ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨਿਰੂਪਣ ਤੋਂ ਮੇਲ ਖਾਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$ ਨੂੰ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਸਹੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਭਾਵ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮਧ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ (variance) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ σ^2 (ਸਿਗਮਾ ਦਾ ਵਰਗ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ਹੈ।}$$

15.5.1 *ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard Deviation)*

ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਅਤੇ $\bar{x}$ ਦੀ ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੀ ਇਕਾਈ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਸਰਨ ਵਿੱਚ $(x_i - \bar{x})$ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਸਹੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ σ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad ... (1)$$

ਆਉ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 15.7 ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ 14 ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 10 ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 15.7

x_i	$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ = ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ + $\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h = 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$

ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ, $(\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 ਇੱਕ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation of a discrete frequency distribution)

ਮੰਨ ਲਉ ਦਿਤੀ ਹੋਈ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$x: \quad x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots, x_n$

$f: \quad f_1, \; f_2, \; f_3, \ldots, f_n$

ਇਸ ਵੰਡ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$ ... (2)

ਜਿੱਥੇ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

ਹੱਲ : ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \; \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420, \; \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \frac{1}{30} \times 420 = 14$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 ***ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation of a continuous frequency distribution)*** ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਉਸਨੂੰ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਅਪਣਾਈ ਹੋਈ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ n ਵਰਗਾਂ ਵਾਲੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਉਸਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ x_i ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2},$$

ਜਿੱਥੇ $\bar{x}$ ਵੰਡ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਲਈ ਹੋਰ ਸੂਤਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ } (\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\,x_i)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2\sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \bar{x}^2\,N - 2\bar{x}\,.\,N\,\bar{x}\right] \quad \left[\text{ਇਥੇ } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \text{ ਜਾਂ } \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\bar{x}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

ਜਾਂ
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2\right]$$

ਇਸ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}$ ... (3)

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	3	7	12	15	8	3	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.9 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.9

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (f_i)	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ}\left(\sigma^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.10 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.10

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

ਹੁਣ ਸੂਤਰ (3) ਰਾਹੀਂ

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48\times 9652-(614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296-376996}$$

$$= \frac{1}{48}\times 293.77 = 6.12$$

ਇਸ ਲਈ, ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (σ) = 6.12

15.5.4 *ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਛੋਟੇ ਤਰੀਕੇ (Shortcut method to find variance and standard deviation)* ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਜਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ x_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ 'A' ਹੈ ਅਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਨੂੰ $\frac{1}{h}$ ਗੁਣਾ ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। (ਇੱਥੇ h ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਨਵਾਂ ਚਲ y_i ਹੈ।

ਭਾਵ $y_i = \frac{x_i - A}{h}$ ਜਾਂ $x_i = A + hy_i$ ... (1)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ ... (2)

(1) ਤੋਂ x_i ਨੂੰ (2) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(A + hy_i)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{N}\left(A\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= A\,.\frac{N}{N} + h\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{N} \qquad \left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \sum_{i=1}^{n} f_i = N\right)$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = A + h\,\bar{y}$ ... (3)

ਹੁਣ ਚਲ x ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ, $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(A + hy_i - A - h\,\bar{y})^2 \qquad ((1) \text{ ਅਤੇ } (3) \text{ ਰਾਹੀਂ})$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\,(y_i - \bar{y})^2$$

$$= \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \bar{y})^2 = h^2 \times \text{ ਚਲ } y_i \text{ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ}$$

ਭਾਵ $\sigma_x^{\,2} = h^2\sigma_y^{\,2}$

ਜਾਂ $\sigma_x = h\sigma_y$ ... (4)

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad \text{... (5)}$$

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 11 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ (5) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਲਘੂ (ਛੋਟੀ) ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਵਰਗ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	3	7	12	15	8	3	2

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ A = 65 ਹੈ। ਇੱਥੇ $h = 10$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.11 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 15.11

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i\,y_i$	$f_i\,y_i^2$
	f_i	x_i				
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
90-100	2	95	3	9	6	18
	N = 50				– 15	105

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$

ਪ੍ਰਸਰਨ $\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^{\,2} - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right]$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{201} \quad = 14.18$

ਅਭਿਆਸ 15.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ

3. ਤਿੰਨ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 10 ਗੁਣਜ ਦਾ

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. ਲਘੂ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.

ਵਰਗ	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	2	3	5	10	3	5	2

8.

ਵਰਗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	5	8	15	16	6

9. ਲਘੂ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਚਾਈ (ਸੇ.ਮੀ. ਵਿੱਚ)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ (ਡਿਜ਼ਾਇਨ) ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸ (ਮਿ. ਮੀ. ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਵਿਆਸ	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	15	17	21	22	25

ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਣਾ ਲਵੋ। ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 ਲਵੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅੱਗੇ ਵਧੋ।]

15.6 ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ (Analysis of Frequency Distributions)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਕੁਝ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਉਹੀ ਇਕਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਭਿੰਨ ਇਕਾਈਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਵੰਡਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਵਿਖੇਪਨ ਦੀਆਂ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਵੇ। ਇਕਾਈ ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient of variation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ C.V. ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \;,\; \bar{x} \neq 0,$$

ਇੱਥੇ σ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਹਨ।

ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੇ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਘੱਟ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (Consistent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

15.6.1 *ਦੋ ਸਮਾਨ ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ (Comparison of two frequency distributions with same mean)* ਮੰਨ ਲਉ $\bar{x}_1$ ਅਤੇ σ_1 ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ ਅਤੇ $\bar{x}_2$ ਅਤੇ σ_2 ਦੂਜੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ।

ਤਾਂ $\quad$ C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = $\dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

ਅਤੇ $\quad$ C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = $\dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad$ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ (ਮੰਨ ਲਉ)

ਇਸ ਲਈ $\quad$ C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = $\dfrac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100$ $\quad$ ... (1)

ਅਤੇ $\quad$ C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = $\dfrac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100$ $\quad$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ C.V. ਦੀ ਤੁਲਨਾ σ_1 ਅਤੇ σ_2 ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਨ ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (ਜਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ) ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਵਿਖੇਪਿਤ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਛੋਟੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (ਜਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ) ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (Consistent) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਤਨਖਾਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

	A	B
ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	5000	6000
ਔਸਤ ਮਾਸਿਕ ਤਨਖਾਹ	₹ 2500	₹ 2500
ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ	81	100

ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਕਾਰਖਾਨੇ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਕਾਰਖਾਨੇ A ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ A (σ_1^2) = 81

ਇਸ ਲਈ, ਕਾਰਖਾਨੇ A ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ A (σ_1) = 9

ਨਾਲ ਹੀ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ B (σ_2^2) = 100

ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (σ_2) = 10

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਔਸਤ ਤਨਖਾਹ ਸਮਾਨ ਹੈ ਭਾਵ ₹ 2500 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਵੱਡੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਾਲੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਦੋ ਤਨਖਾਹਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ 60 ਅਤੇ 70 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 21 ਅਤੇ 16 ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਕੀ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = 70, $\sigma_2 = 16$

ਮੰਨ ਲਉ $\bar{x}_1$ ਅਤੇ $\bar{x}_2$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਹਨ, ਤਾਂ

$$\text{C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

ਇਸ ਲਈ $$60 = \frac{21}{\bar{x}_1} \times 100 \text{ ਜਾਂ } \bar{x}_1 = \frac{21}{60} \times 100 = 35$$

ਅਤੇ $$\text{C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$$

ਭਾਵ $$70 = \frac{16}{\bar{x}_2} \times 100 \text{ ਜਾਂ } \bar{x}_2 = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x}_1 = 35$ ਅਤੇ $\bar{x}_2 = 22.85$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜਮਾਤ 11 ਦੇ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਕੱਦ ਅਤੇ ਭਾਰ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

	ਕੱਦ	ਭਾਰ
ਮੱਧਮਾਨ	162.6 ਸੈ. ਮੀ.	52.36 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ
ਪ੍ਰਸਰਨ	127.69 ਸੈਂ. ਮੀ.	23.1361 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਦ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕੱਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਰਨ = 127.69 ਸੈਂ. ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਕੱਦਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ = $\sqrt{127.69}$ ਸੈਂ. ਮੀ. = 11.3 ਸੈਂ. ਮੀ.

ਦੁਬਾਰਾ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਰਨ = 23.1361 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ.

ਇਸ ਲਈ ਭਾਰਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ = $\sqrt{23.1361}$ ਸੈਂ. ਮੀ.= 4.81 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ.

ਹੁਣ ਕੱਦਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ = $\dfrac{\text{ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ}}{\text{ਮੱਧਮਾਨ}} \times 100$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

ਅਤੇ ਭਾਰਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ = $\dfrac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਭਾਰ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਦਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਖਿੰਡਾਅ ਹੈ :

ਅੰਕ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ਸਮੂਹ A	9	17	32	33	40	10	9
ਸਮੂਹ B	10	20	30	25	43	15	7

2. ਸ਼ੇਅਰਾਂ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਸਥਿਰਤਾ ਹੈ।

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਦੀਆਂ ਦੋ ਫ਼ਰਮਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਨਤੀਜੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

	ਫ਼ਰਮ A	ਫ਼ਰਮ B
ਤਨਖਾਹ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	586	648
ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ	₹ 5253	₹ 5253
ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ	100	121

(i) A ਅਤੇ B ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਫ਼ਰਮ ਆਪਣੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਤਨਖਾਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ?

(ii) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਫ਼ਰਮ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

4. ਟੀਮ A ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਖੇਲੇ ਗਏ ਫੁੱਟਬਾਲ ਮੈਚਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਗੋਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0	1	2	3	4
ਮੈਚਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	1	9	7	5	3

ਟੀਮ B ਰਾਹੀਂ ਖੇਡੇ ਗਏ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਗੋਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 2 ਪ੍ਰਤੀ ਮੈਚ ਅਤੇ ਗੋਲਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ 1.25 ਸੀ। ਕਿਸ ਟੀਮ ਨੂੰ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (consistent) ਸਮਝ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ?

5. 50 ਵਨਸਪਤੀ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x (ਸੈਂ. ਮੀ. ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਭਾਰ y (ਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212,\ \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8,\ \sum_{i=1}^{50} y_i = 261,\ \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਭਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 16 : 20 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ 5 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ 2 ਤੋਂ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_{20}$ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ 5 ਹੈ ਅਤੇ $n = 20$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ } (\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ਭਾਵ } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

ਜਾਂ $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100 \qquad \text{... (1)}$$

ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਪ੍ਰੇਖਣ y_i ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $$y_i = 2x_i \text{ i.e., } x_i = \frac{1}{2}y_i$$

ਇਸ ਲਈ $$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 \cdot \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

ਭਾਵ $$\bar{y} = 2\bar{x} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

x_i ਅਤੇ $\bar{x}$ ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100 \quad \text{ਭਾਵ} \quad \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 400$$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ = $\frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਾਠਕ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਕਿ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ k, ਤੋਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਬਣੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦਾ k^2 ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਪੰਜ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 4.4 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ 8.24 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ 1, 2 ਅਤੇ 6 ਹਨ ਤਾਂ ਹੋਰ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਅਤੇ y ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੜੀ 1, 2, 6, x, y ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x} = 4.4 = \frac{1+2+6+x+y}{5}$

ਜਾਂ $22 = 9 + x + y$

ਇਸ ਲਈ $x + y = 13$ ... (1)

ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਸਰਨ $= 8.24 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$

ਭਾਵ $8.24 = \frac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2 \times 4.4\,(x+y) + 2 \times (4.4)^2\right]$

ਜਾਂ $41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + y^2 = 97$ ... (2)

ਪਰੰਤੂ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad \text{... (3)}$$

(2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$2xy = 72 \quad \text{... (4)}$$

(2) ਵਿਚੋਂ (4) ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ

$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72$ ਭਾਵ $(x - y)^2 = 25$

ਜਾਂ $x - y = \pm 5$ ... (5)

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (5) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$x = 9, \quad y = 4$ ਜਦੋਂ $x - y = 5$

ਜਾਂ $x = 4, \quad y = 9$ ਜਦੋਂ $x - y = -5$

ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ 4 ਅਤੇ 9 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਨੂੰ 'a', ਤੋਂ ਵਧਾਇਆ ਜਾਵੇ ਜਿੱਥੇ a ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਜਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਪ੍ਰਸਰਨ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$

ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ 'a ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੋਣਗੇ।

$$y_i = x_i + a \quad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{y}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

ਭਾਵ $\bar{y} = \bar{x} + a$ ... (2)

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \quad \text{[(1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ]}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਮੂਲ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਸੀ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਜਾਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ 100 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 40 ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ 5.1 ਪਤਾ ਕੀਤਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸਨੇ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰੇਖਣ 40 ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ 50 ਲੈ ਲਿਆ ਸੀ। ਠੀਕ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕੀ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $(n) = 100$

ਗਲਤ ਮੱਧਮਾਨ $(\bar{x}) = 40,$

ਗਲਤ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = 5.1$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ਭਾਵ $$40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \quad \text{ਜਾਂ} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$$

ਭਾਵ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਗਲਤ ਜੋੜ $= 4000$

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਸਹੀ ਜੋੜ = ਗਲਤ ਜੋੜ $- 50 + 40$

$$= 4000 - 50 + 40 = 3990$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ} = \frac{\text{ਸਹੀ ਜੋੜ}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$$

ਨਾਲ ਹੀ $$\text{ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2}$$

ਭਾਵ $$5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$$

ਜਾਂ $$26.01 = \frac{1}{100} \times \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$$

ਹੁਣ $$\text{ਸਹੀ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$$

ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$= \sqrt{\frac{\text{ਸਹੀ } \sum x_i^2}{n} - (\text{ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

ਅਧਿਆਇ 15 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਅੱਠ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 9 ਅਤੇ 9.25 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣ 6, 7, 10, 12, 12 ਅਤੇ 13 ਹਨ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਸੱਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 16 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪੰਜ ਪ੍ਰੇਖਣ 2, 4, 10, 12, 14 ਹਨ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ σ^2 ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a\bar{x}$ ਅਤੇ $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ ਹਨ।

5. ਵੀਹ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ 8 ਗਲਤ ਹੈ। ਹੇਠ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ਗਲਤ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ। (ii) ਉਸਨੂੰ 12 ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ।

6. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ ਪੰਜਾਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਤਿੰਨ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਗਣਿਤ, ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

ਵਿਸ਼ਾ	ਗਣਿਤ	ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ	ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ
ਮੱਧਮਾਨ	42	32	40.9
ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ	12	15	20

ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

7. 100 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 20 ਅਤੇ 3 ਹਨ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ 21, 21 ਅਤੇ 18 ਗਲਤ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਗਲਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

◆ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਮਾਪ (ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਮਾਪ) : ਸੀਮਾ, ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ, ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਮਾਪ ਹਨ।

ਸੀਮਾ = ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ – ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ

- ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \qquad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum |x_i - \text{M}|}{n}$$

ਜਿੱਥੇ $\bar{x}$ = ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ M = ਮੱਧਿਕਾ

- ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\text{N}}, \qquad \text{M.D.}(\text{M}) = \frac{\sum f_i |x_i - \text{M}|}{\text{N}}, \text{ ਜਿੱਥੇ } \text{N} = \sum f_i$$

- ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

- ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

- ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

- ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲਘੂ ਵਿਧੀ

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\text{N}^2} \left[\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i \right)^2 \right], \quad \sigma = \frac{h}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i \right)^2},$$

ਜਿੱਥੇ $y_i = \dfrac{x_i - \text{A}}{h}$

- ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (C.V.) $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \ \bar{x} \neq 0$

ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ (ਬਰਾਬਰ) ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੀ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਵੱਧ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਘੱਟ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਲੈਟਿਨ ਸ਼ਬਦ 'status' ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਰਾਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਇਨਸਾਨੀ ਸੱਭਿਅਤਾ ਜਿੰਨੀ ਪੁਰਾਣੀ ਹੈ। ਸ਼ਾਇਦ ਸਾਲ 3050 ਈ. ਪੂ. ਵਿੱਚ ਯੂਨਾਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਜਨਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ। ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਗਭਗ 2000 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰਨ ਦੀ ਵਧੀਆਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੀ। ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚੰਦਰਗੁਪਤ ਮੌਰਿਆ (324-300 ਈ. ਪੂ.) ਦੇ ਰਾਜ ਦੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ

ਕੌਟਿਲਿਆ (ਲਗਭਗ 300 ਈ. ਪੂ.) ਦੇ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਇੱਕਠੇ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਮਿਲਿਆ ਹੈ। ਅਕਬਰ ਦੇ ਸ਼ਾਸਨਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਸਰਵੇਖਣਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਅਬੁਲ ਫਜ਼ਲ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ ਆਈਨੇ ਅਕਬਰੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਲੰਦਨ ਦੇ ਕਪਤਾਨ John Graunt (1620-1675) ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪਿਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। Jacob Bernoulli (1654-1705) ਨੇ 1713 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ “Ars Conjectandi’ ਵਿਚ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਹੈ।

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਵਿਕਾਸ ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਖੇਡਾਂ ਅਤੇ ਸੰਯੋਗ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਵਿਕਾਸ ਜਾਰੀ ਰਿਹਾ। ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ Francis Galton (1822-1921) ਨੇ ਜੀਵ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ (Biometry) ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦਾ ਰਸਤਾ ਪੱਕਾ ਕੀਤਾ। Karl Pearson (1857-1936) ਨੇ ਕਈ ਵਰਗ ਪਰੀਕਸ਼ਣ (Chi square test) ਅਤੇ ਇੰਗਲੈਂਡ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਦੇ ਅਸਥਾਪਨ ਦੇ ਨਾਲ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਧੁਨਿਕ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪਿਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਅਨੁਵਾਂਸ਼ਿਕੀ, ਜੀਵ-ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਸਿੱਖਿਆ, ਖੇਤੀਬਾੜੀ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ।

ਅਧਿਆਇ 16

ਸੰਭਾਵਨਾ
(Probability)

❖*Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. – JOHN ARBUTHNOT* ❖

16.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਭਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{6}$ ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਕੁੱਲ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜੇ 1,2,3,4,5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜੇ 2,4,6 (ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ) ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੁੱਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਪੁਰਾਣਾ ਸਿਧਾਂਤ (classical theory of probability) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Kolmogorov (1903-1987)

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਤੇ ਇੱਕਤਰਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ (statistical approach) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਵਿਚ ਕੁਝ ਗੰਭੀਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਤੇ ਨਹੀਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਨੰਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪੁਰਾਣੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਕਾਰਨ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇੱਕ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੂਜੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਰਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੂਸ ਦੇ ਗਣਿਤਗ A.N. Kolmogorov ਨੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅਧਾਰ' (Foundation of Probability) ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਕੁਝ ਅਟਲ ਤੱਥ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ, ਜਿਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਕੁਝ ਮੂਲ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (Random Experiment), ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (Sample Space) ਘਟਨਾਵਾਂ (Events) ਆਦਿ। ਆਉ ਇਹਨਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

16.2 ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (Random Experiments)

ਆਮ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਕਈ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਚਾਹੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਵੀ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਵੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਾ ਜਾਣਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਹਿ

ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵੀ ਕਈ ਪ੍ਰਯੋਗੀ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਉਣ ਤੇ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚਿੱਤ (head) ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਪਟ (tail) ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਤੀਜਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(*i*) ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣ।

(*ii*) ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦੇ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਨਤੀਜਾ ਦੱਸਣਾ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬੇਤਰਤੀਬ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ?

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਨਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ।

16.2.1 ***ਨਤੀਜਾ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (Outcomes and sample space)*** ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਨਤੀਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪਾਸੇ ਦੇ ਉਪਰੀ ਫਲਕ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ 1, 2, 3, 4, 5 ਜਾਂ 6 ਹਨ। ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤ S ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸਾ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਵੀ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ (ਇੱਕ ₹ 1 ਦਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ₹ 2 ਦਾ) ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਿੱਕੇ ਇਸ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਹਨ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨਾਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਤੇ ਚਿਤ (H) ਜਾਂ ਪਟ (T) ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ :

ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਤੇ ਚਿਤ = (H,H) = HH

ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤੇ ਪਟ = (H,T) = HT

ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤੇ ਚਿਤ = (T, H) = TH

ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਤੇ ਪਟ = (T,T) = TT

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HH, HT, TH, TT} ਹੈ।

> ☛ **ਟਿੱਪਣੀ** ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ H ਅਤੇ T ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ ਹਨ। ਸਰਲਤਾ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਅਰਧ-ਵਿਰਾਮ (comma) ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਪਾਸੇ (dice) ਦੇ ਜੋੜੇ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ) ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮਨ ਲਉ ਕਿ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 1 ਅਤੇ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ (dice) ਤੇ 2 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ (1, 2) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ ਨੀਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 3 ਅਤੇ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ 5 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ (3,5) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ (x, y) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ x ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਤੇ y ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$S = \{(x, y) : x$ ਨੀਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ y ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

ਇਸ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $6 \times 6 = 36$ ਹੈ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲਈ ਸਹੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੀ ਜੇਬ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ₹ 1, ਇੱਕ ₹ 2 ਅਤੇ ਇੱਕ ₹ 5 ਦੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਉਹ ਆਪਣੀ ਜੇਬ 'ਚੋਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਕੱਢਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕਿਸੇ ਵਿਅਸਤ ਰਾਜ ਮਾਰਗ ਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਲਿਖਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਓ ₹ 1 ਦਾ ਸਿੱਕਾ Q ਤੋਂ, ₹ 2 ਦਾ ਸਿੱਕਾ H ਤੋਂ ਅਤੇ ₹ 5 ਦਾ ਸਿੱਕਾ R ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜੇਬ 'ਚੋਂ ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ Q, H ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ Q ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਵਾਰ ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ H ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ QH ਜਾਂ QR ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, H ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਬਾਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਸਿੱਕਾ Q ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ HQ ਅਤੇ HR ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਬਾਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਸਿੱਕਾ H ਜਾਂ Q ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮ RH ਜਾਂ RQ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {QH, QR, HQ, HR, RH, RQ} ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਵਿਅਸਤ ਰਾਜਮਾਰਗ ਤੇ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 0 (ਕਿਸੇ ਦੁਰਘਟਨਾ ਨਾ ਹੋਣ ਤੇ) ਜਾਂ 1 ਜਾਂ 2 ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{0,1,2,...\}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਥੈਲੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 3 ਨੀਲੀ ਅਤੇ 4 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ B_1, B_2, B_3 ਅਤੇ ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ W_1, W_2, W_3, W_4 ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ ਹੈ। ਇੱਥੇ HB_i ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਗੇਂਦ B_i ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। HW_i ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਹੈ ਅਤੇ ਗੇਂਦ W_i ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ T_i ਦਾ ਅਰਧ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ (ਪਾਸੇ ਤੇ) i ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਬਾਰ-ਬਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਇਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਜਾਂ ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਜਾਂ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S= {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...} ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 16.1

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 7 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. X ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 2 ਮੁੰਡੇ ਅਤੇ 2 ਕੁੜੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ Y ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 1 ਮੁੰਡਾ ਅਤੇ 3 ਕੁੜੀਆਂ ਹਨ। ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਕਮਰਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਫੇਰ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
7. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ, ਇੱਕ ਸਫ਼ੇਦ ਰੰਗ ਦਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਾਸਾ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ, ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪਾਸੇ ਦਾ ਰੰਗ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪਰਲੇ ਫਲਕ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ 2 ਬੱਚਿਆਂ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਲੜਕੇ-ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   (i) ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ ਜਨਮ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਬੱਚਾ ਲੜਕਾ ਜਾਂ ਲੜਕੀ ਹੈ ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

   (ii) ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਾਨਣ ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?
9. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 1 ਲਾਲ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ 3 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਰੱਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਪ੍ਰਤਿ ਸਥਾਪਤ ਕੀਤੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਫੇਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਬਲਬ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਬਲਬ ਨੂੰ ਜਾਂਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਖਰਾਬ (D) ਜਾਂ ਠੀਕ (N) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ ਚਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਫੇਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵੰਨਗੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਕਾਗਜ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਪਰਚੀਆਂ ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3 ਅਤੇ 4 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਚੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਪਰਚੀਆਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੂਜੀ ਬਿਨਾ ਬਦਲੇ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
14. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
15. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 2 ਲਾਲ ਅਤੇ 3 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।
16. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੈ?

16.3 ਘਟਨਾ (Event)

ਅਸੀਂ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ (Universal set) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸੰਬੰਧਿਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HH, HT, TH, TT} ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਉਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਤੱਥ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੇ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ S ਦੇ ਤੱਤ ਕੇਵਲ HT ਅਤੇ TH ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਤੱਤ ਇੱਕ ਸਮੂਹ E = { HT, TH} ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ E ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਤੇ S ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਗਤਤਾ ਹੈ :

ਘਟਨਾ ਦਾ ਵਰਣਨ	'S' ਦਾ ਸੰਗਤ ਉਪ-ਸਮੂਹ
ਪਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਠੀਕ ਦੋ ਹੈ	A = {TT}
ਪਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 1 ਹੈ	B = {HT, TH, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 1 ਹੈ	C = {HT, TH, TT}
ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ	D = { HT, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੈ	S = {HH, HT, TH, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ	ϕ

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਕਿਸੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਕੋਈ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

16.3.1 ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ (Occurrence of an event) ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ E ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 1 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ 2 ਜਾਂ 3 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਨਤੀਜਾ w ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $w \in E$। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ w ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ $w \notin E$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ।

16.3.2 *ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of events)* ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1. ਅਸੰਭਵ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ (Impossible and Sure Events) ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਵੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ϕ ਨੂੰ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਅਤੇ S ਭਾਵ ਪੂਰਨ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਉ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਸੰਗਤ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਘਟਨਾ E ਦੀਆ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਵਲ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੀ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਦੇ ਉਪਰੀ ਫਲਕ ਤੇ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ ਅਸੰਭਵ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘਟਨਾ $E = \phi$ ਇੱਕ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ F 'ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$, ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $F = S$ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ ਹੈ।

2. ਸਰਲ ਘਟਨਾ (Simple Event) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਘਟਨਾ E ਨੂੰ ਸਰਲ ਜਾਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਿਸਦੇ ਦਿੱਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ n ਵੱਖ ਹਿੱਸੇ ਹੋਣ ਵਿੱਚ n ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਸ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

$E_1= \{HH\}, E_2=\{HT\}, E_3= \{ TH\}$ ਅਤੇ $E_4=\{TT\}$

3. ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ (Compound Events) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ :

E : ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

F : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

G : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ, ਆਦਿ।

ਇਹਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ S ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$E = \{HTT,THT,TTH\}$

$F = \{HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$

$G= \{TTT, THT, HTT, TTH\}$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

16.3.3 *ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of events)* ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਭਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਭਾਵ ਸੰਘ, ਕਾਟ, ਅੰਤਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਪੂਰਕ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਸਮਝਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਸਮੂਹ ਸੰਕੇਤਨਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ A, B, C ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ।

1. ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ (Complementary Event) ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ A ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ A' ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। A' ਨੂੰ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $A=\{HTH, HHT, THH\}$ ਘਟਨਾ 'ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਟ ਦਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਨਤੀਜਾ HTT ਦੇ ਹੋਣ ਤੇ ਘਟਨਾ A ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਕਿੰਤੂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘਟਨਾ A ਲਈ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਭਾਵ,

$$A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਜਾਂ $A' = \{\omega : \omega \in S$ ਅਤੇ $\omega \notin A\} = S - A$ ਹੈ।

2. ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' (Event 'A or B') ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਘ $A \cup B$ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਾਰੇ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ '$A \cup B$' ਘਟਨਾ A ਜਾਂ B ਜਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ '$A \cup B$' ਨੂੰ 'A ਜਾਂ B' ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' $= A \cup B$

$= \{\omega : \omega \in A$ ਜਾਂ $\omega \in B\}$

3. ਘਟਨਾ 'A ਅਤੇ B' (Event 'A and B') ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ $A \cap B$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ A ਅਤੇ B ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਭਾਵ 'A ਅਤੇ B' ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ 'A ਅਤੇ B' ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਮੂਹ $A \cap B$ ਘਟਨਾ 'A ਅਤੇ B' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ ਅਤੇ $\omega \in B\}$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ A 'ਪਹਿਲੀ ਸੁੱਟੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ 'ਅਤੇ ਘਟਨਾ B 'ਦੋ ਸੁੱਟਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 11 ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ ਅਤੇ $B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

ਇਸ ਲਈ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੀ ਸੁੱਟ ਤੇ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਸੁੱਟਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 11 ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

4. ਘਟਨਾ 'A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' (The Event 'A but not B') ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A–B ਉਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ 'A–B' ਘਟਨਾ 'A' ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$A - B = A \cap B'$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ B ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ (i) A ਜਾਂ B (ii) A ਅਤੇ B (iii) A ਕਿੰਤੂ B ਨਹੀਂ (iv) 'A ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 3, 5\}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ

(i) 'A ਜਾਂ B' $= A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) 'A ਅਤੇ B' $= A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' $= A - B = \{2\}$

(iv) 'A ਨਹੀਂ' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 *ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ (Mutually exclusive events)* ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ A 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ B 'ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ A ਘਟਨਾ B ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲਾ ਕਰ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ

$A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 4, 6\}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \cap B = \phi$, ਭਾਵ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦੂਜੀ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਇੱਕਠੀ ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋਬਾਰਾ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ A 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ B '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 2, 3\}$

ਹੁਣ $3 \in A$ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $3 \in B$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

16.3.5 *ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ (Exhaustive events)* ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ। ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ :

A: '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

B: '2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪਰੰਤੂ 5 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

ਅਤੇ C: '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

ਤਾਂ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ ਅਤੇ $C = \{5, 6\}$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S$$

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀਆਂ n ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

ਤਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਨੂੰ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਸਰਵਾਂਗੀ ਕਹਿਲਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇ।

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $i \neq j$ ਲਈ $E_i \cap E_j = \phi$ ਇਸ ਕਰਕੇ E_i ਅਤੇ E_j ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਅਤੇ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿਲਾਂਦੀਆ ਹਨ।

ਆਉ ਹੋਰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਦੋ ਪਾਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

A: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ'

B: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ'

C: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ'

D: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 11 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ'

ਇਨ੍ਹਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਜੋੜੀਆਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ 36 ਹਿੱਸੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4),$
$(4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

B = {(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)}

C = {(1, 1), (2, 1), (1, 2)} ਅਤੇ D = {(6, 6)}

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ ਅਤੇ $B \cap D \neq \phi$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੋੜੇ (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $C \cap D = \phi$ ਇਸ ਲਈ C ਅਤੇ D ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

A: 'ਕੋਈ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ', B: 'ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ C: 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ'। ਕੀ ਇਹ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} ਹੈ।

ਅਤੇ A = {TTT}, B = {HTT, THT, TTH}, ਅਤੇ C = {HHT, HTH, THH, HHH}

ਹੁਣ $A \cup B \cup C$ = {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} = S

ਇਸ ਲਈ, A, B ਅਤੇ C ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ ਅਤੇ $B \cap C = \phi$

ਇਸ ਲਈ, ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਭਾਵ ਉਹ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ A, B ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ E 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਦਰਸਾਉਂਦਾ' ਹੈ ਅਤੇ F 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ?
2. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :
   - (i) A: ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
   - (ii) B : ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ।
   - (iii) C: ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।
   - (iv) D : ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
   - (v) E: 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
   - (vi) F : ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਘੱਟ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ
3. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :

   A: ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। B : ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 2 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

   C: ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 7 ਹੈ ਅਤੇ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

   ਇਹਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਜੋੜੇ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ?

4. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਵੇਖਣੀਆਂ' ਨੂੰ A ਨਾਲ, ਘਟਨਾ 'ਦੋ ਚਿੱਤ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਟ ਵੇਖਣਾ' ਨੂੰ B ਨਾਲ, ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਪਟ ਵੇਖਣੇ' ਨੂੰ C ਨਾਲ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਵੇਖਣਾ' ਨੂੰ D ਨਾਲ, ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ

(i) ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ ? (ii) ਸਰਲ ਹਨ ? (iii) ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਹਨ ?

5. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

(i) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਕਿ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ।

(iii) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iv) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਸਰਵਾਂਗੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(v) ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਸਰਵਾਂਗੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

6. ਦੋ ਪਾਸੇ ਸੁੱਟੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

A: ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ

B: ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ

C: ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ≤ 5 ਹੋਣਾ।

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :

(i) A' (ii) B ਨਹੀਂ (iii) A ਜਾਂ B (iv) A ਅਤੇ B

(v) A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ (vi) B ਜਾਂ C (vii) B ਅਤੇ C (viii) $A \cap B' \cap C'$

7. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਨੂੰ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੱਸੋ (ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ) :

(i) A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

(ii) A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ।

(iii) $A = B'$

(iv) A ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(v) A ਅਤੇ B' ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(vi) A', B', C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

16.4 ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ (Axiomatic Approach of Probability)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ ਦੇ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਲਈ ਕਈ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਜਾਂ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਾਪ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬਣਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ, ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ ਜਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਵਰਣਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ P ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ S ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲ [0,1] ਹੈ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(i) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਲਈ $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ (iii) ਤੋਂ ਇਹ ਅਨੁਸਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $P(\phi) = 0$ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $F = \phi$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ E ਅਤੇ ϕ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਵੈਸਿਧੀ (iii) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ ਜਾਂ $P(E) = P(E) + P(\phi)$ ਭਾਵ $P(\phi) = 0$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹਨ ਭਾਵ

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \text{ ਹੈ।}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿਧ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

(i) ਹਰੇਕ $0 \le P(\omega_i) \le 1$ ਲਈ $\omega_i \in S$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ω_i ਲਈ $P(A) = \sum P(\omega_i),\ \omega_i \in A$

ਟਿੱਪਣੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ-ਤੱਤ ਸਮੂਹ $\{\omega_i\}$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤਨ ਦੀ ਸੁਵਿਧਾ ਲਈ ਅਸੀਂ $P(\{\omega_i\})$ ਨੂੰ $P(\omega_i)$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ H ਅਤੇ T ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆ $\frac{1}{2}$ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ,

ਭਾਵ $P(H) = \frac{1}{2}$

ਅਤੇ $P(T) = \frac{1}{2}$ ...(1)

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਤਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ,

ਅਤੇ $P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ H ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{2}$ ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $P(H) = \frac{1}{4}$ ਅਤੇ $P(T) = \frac{3}{4}$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ...(2)

ਕੀ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਸਵੈਸਿਧ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ?

ਹਾਂ, ਇਸ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ H ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$ ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਅਸੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ (1) ਅਤੇ (2), H ਅਤੇ T ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੈਧ ਹਨ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਨਤੀਜਿਆਂ H ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p ਅਤੇ $(1 - p)$ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ $0 \le p \le 1$ ਅਤੇ $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$

ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੀ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਕਈ (ਜਾਂ ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਉਚਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਨੰਤ) ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{\omega_1, \omega_2,..., \omega_6\}$ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਵੈਧ ਹਨ ?

ਨਤੀਜੇ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

ਹੱਲ : (a) ਸ਼ਰਤ (i): ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ $p(\omega_i)$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ (ii) ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਹੈ।

(b) ਸ਼ਰਤ (i) ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ $p(\omega_i)$ ਜਾਂ ਤਾਂ 0 ਹੈ ਜਾਂ 1 ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ (ii) ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਹੈ।

(c) ਸ਼ਰਤ (i) ਦੋ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p(\omega_5)$ ਅਤੇ $p(\omega_6)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(d) ਕਿਉਂਕਿ $p(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(e) ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

16.4.1 *ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of an event)* ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰਮਿਤ ਕਲਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗਾ (ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਅਤੇ ਖਰਾਬ (ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਯੁਕਤ) ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਸਾਨੂੰ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਖਰਾਬ ਕਲਮਾਂ ਮਿਲ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG} ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ B ਇੱਕ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਜਾਂ ਖਰਾਬ ਕਲਮ ਨੂੰ ਅਤੇ G ਚੰਗੀ ਜਾਂ ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਕਲਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।
ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ :	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
ਸੰਭਾਵਨਾ :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਠੀਕ ਇੱਕ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਕਲਮ ਦਾ ਕੱਢਣਾ' ਨੂੰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੱਢਣਾ' ਨੂੰ B ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ ਅਤੇ $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

ਹੁਣ $P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB)$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

ਅਤੇ $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB)$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਨਾ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ਹੈ।

ਮਨ ਲਓ ਕਿ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹਨ :

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ E 'ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਨਤੀਜਾ ਹੈ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਇੱਥੇ $E = \{HH, TT\}$

ਹੁਣ ਸਾਰੇ $P(E) = \Sigma P(\omega_i)$, ਲਈ $\omega_i \in E$

$$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4}+\frac{9}{28}=\frac{4}{7}$$

ਘਟਨਾ F: 'ਠੀਕ ਦੋ ਚਿਤ' ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, $F = \{HH\}$

ਅਤੇ $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of equally likely outcomes) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \text{ ਹੈ।}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹਨ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਸਰਲ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਾਰੇ $\omega_i \in S$ ਲਈ $P(\omega_i) = p$, ਜਿੱਥੇ $0 \le p \le 1$

ਕਿਉਂਕਿ $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ ਇਸ ਲਈ $p + p + ... + p$ (n ਵਾਰੀ) $= 1$

ਜਾਂ $np = 1$ ਜਾਂ $p = \frac{1}{n}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਕੋਈ ਇੱਕ ਘਟਨਾ E, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $n(S) = n$ ਅਤੇ $n(E) = m$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ :

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਕੁੱਲ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

16.4.3 *ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ) (Probability of the event 'A or B')* ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਭਾਵ $P(A \cup B)$ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਮੰਨ ਲਉ, A = {HHT, HTH, THH} ਅਤੇ B = {HTH, THH, HHH} 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \cup B$ = {HHT, HTH, THH, HHH}

ਹੁਣ $$P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$$

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $$P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$$

ਅਤੇ $$P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

ਬਿੰਦੂਆਂ HTH ਅਤੇ THH, A ਅਤੇ B ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਹਨ। $P(A) + P(B)$ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ HTH ਅਤੇ THH (ਭਾਵ $A \cap B$ ਦੇ ਹਿੱਸੇ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਗਿਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B)$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $A \cap B$ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ $P(A) + P(B)$ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(A \cup B) = \quad p(\omega_i), \quad \omega_i \quad A \quad B$$

ਕਿਉਂਕਿ $$A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$$

ਇਸ ਲਈ

$$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A-B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in B - A\right]$$

(ਕਿਉਂਕਿ A–B, $A \cap B$ ਅਤੇ B – A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ I) ... (1)

ਨਾਲ ਹੀ $P(A) + P(B) = \left[\sum p(\omega_i)\ \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum p(\omega_i)\ \forall \omega_i \in B\right]$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A-B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B - A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B-A)\right]$$

$$\left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$$

$$= P(A \cup B) + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right]$$ [(1) ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ]

$$= P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਵਿਕਲਪਿਕ ਪ੍ਰਮਾਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$A \cup B = A \cup (B - A)$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ $B - A$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਅਤੇ $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, ਜਿੱਥੇ $A \cap B$ ਅਤੇ $B - A$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (iii) ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad \text{... (2)}$$

ਅਤੇ

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \quad \text{... (3)}$$

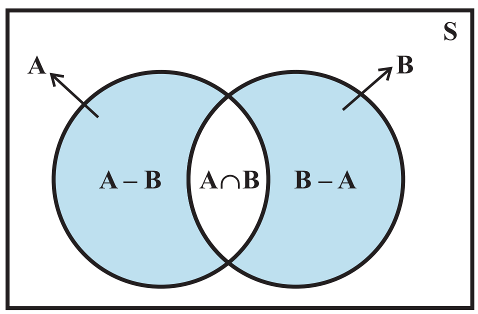
(2) ਵਿੱਚੋਂ (3) ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ਜਾਂ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ਉੱਧਰ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਵੇਨ-ਆਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 16.1) ਦਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਕੇ ਵੀ ਦੋਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 16.1

ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਅਸੰਯੁਕਤ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਭਾਵ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $A \cap B = \phi$

ਇਸ ਲਈ $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਅਸੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

ਜੋ ਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (iii) ਹੀ ਹੈ।

16.4.4 ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ 'ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of event 'not A') 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਅੰਕਿਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਲੇ ਦਸ ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਡੇਕ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਘਟਨਾ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ 1, 2, 3,...,10 ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨ ਲਈਏ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ਨਾਲ ਹੀ ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ' = $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

ਹੁਣ $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

ਨਾਲ ਹੀ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ A' ਅਤੇ A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ (exclusive) ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ (exhaustive) ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $A \cap A' = \phi$ ਅਤੇ $A \cup A' = S$

ਜਾਂ $P(A \cup A') = P(S)$

ਹੁਣ $P(A) + P(A') = 1$, (ਸਵੈਸਿੱਧ (ii) ਅਤੇ (iii) ਰਾਹੀਂ)

ਜਾਂ $P(A') = P(A \text{ ਨਹੀਂ}) = 1 - P(A)$

ਆਉ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਾ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੱਢੇ ਗਏ ਪੱਤੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ।
(ii) ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(iii) ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ (ਭਾਵ ਚਿੜੀ ਜਾਂ ਹੁਕਮ ਦਾ)।
(iv) ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(v) ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਦੋਂ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 52 ਹੈ।

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ A ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 13 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ਭਾਵ, ਇੱਕ ਇੱਟ ਦਾ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{4}$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ B ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ B' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ C ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 26 ਹੈ।

ਭਾਵ $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$

(iv) ਅਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ (i) ਵਿੱਚ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ A′ ਜਾਂ 'A ਨਹੀਂ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਹੁਣ P(A ਨਹੀਂ) = 1 − P(A) = $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(v) ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ C′ ਜਾਂ 'C ਨਹੀਂ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ P(C ਨਹੀਂ) = 1 − P (C) = $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 9 ਡਿਸਕਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ, 3 ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਅਤੇ 2 ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਡਿਸਕਾਂ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਥੈਲੇ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਡਿਸਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ (i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (ii) ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (iii) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (iv) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ (v) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੋਈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ

A : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

B : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

C : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

(i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 4, ਭਾਵ, n (A) = 4

ਇਸ ਕਰਕੇ P(A) = $\frac{4}{9}$

(ii) ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2, ਭਾਵ, n (B) = 2

ਇਸ ਕਰਕੇ P(B) = $\frac{2}{9}$

(iii) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3, ਭਾਵ, n(C) = 3

ਇਸ ਕਰਕੇ P(C) = $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(iv) ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਘਟਨਾ 'ਡਿਸਕ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, 'C ਨਹੀਂ' ਹੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P(C ਨਹੀਂ) = 1 − P(C) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ P(C − ਨਹੀਂ) = $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(v) ਘਟਨਾ 'ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਡਿਸਕ ਜਾਂ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਡਿਸਕ' ਦਾ ਸਮੂਹ (A ∪ C) ਤੋਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ, A ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ

$$P(A \text{ ਜਾਂ } C) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲ ਹੋਏ। ਅਨਿਲ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.05 ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.10 ਹੈ। ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.02 ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

(a) ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਣਗੇ।

(b) ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

(c) ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ E ਅਤੇ F ਘਟਨਾਵਾਂ (ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = 0.02$

ਤਾਂ

(a) ਘਟਨਾ 'ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਣਗੇ' ਨੂੰ $E' \cap F'$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ E' ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ', ਭਾਵ ਅਨਿਲ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ F' ਘਟਨਾ 'F ਨਹੀਂ', ਭਾਵ 'ਆਸ਼ਿਮਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ' ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (ਡੀ-ਮਾਰਗਨ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ)

ਹੁਣ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

ਜਾਂ $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

ਇਸ ਲਈ $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ)

= 1 − P (ਦੋਵੇਂ ਪਾਸ ਹੋਣਗੇ)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) ਘਟਨਾ 'ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ' ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ :

'ਅਨਿਲ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ'

ਜਾਂ 'ਅਨਿਲ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗੀ'

ਭਾਵ, $E \cap F'$ ਜਾਂ $E' \cap F$, ਜਿੱਥੇ $E \cap F'$ ਅਤੇ $E' \cap F$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ P(ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ)

$= P(E \cap F' \text{ or } E' \cap F)$

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਪੁਰਖ ਅਤੇ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਉਣੀ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ (a) ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਾ ਹੋਵੇ ? (b) ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਹੋਵੇ ? (c) ਦੋਵੇਂ ਪੁਰਖ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ = 2 + 2 = 4 ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਨੂੰ ${}^4C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਾ ਹੋਣ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਹਨ। ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋਵਾਂ ਦਾ ਚੁਣਨਾ ${}^2C_2 = 1$ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, P (ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਹੀਂ) $= \dfrac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \dfrac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{6}$

(b) ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। ਦੋ ਪੁਰਖਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਨਣ ਦੇ ਵੀ ${}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਚੁਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਾਲ ਕਰਨ ਦੇ ${}^2C_1 \times {}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $$P\,(\text{ਇੱਕ ਪੁਰਖ}) = \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \frac{2\times 2}{2\times 3} = \frac{2}{3}$$

(c) ਦੋ ਪੁਰਖਾਂ ਨੂੰ ${}^2C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $$P\,(\text{ਦੋ ਪੁਰਖ}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$$

ਅਭਿਆਸ 16.3

1. ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7\}$ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹਨ :

ਨਤੀਜਾ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	– 0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

3. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(ii) 3 ਜਾਂ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iii) 1 ਜਾਂ 1 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iv) 6 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(v) 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

4. ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ।

(a) ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ?

(b) ਪੱਤੇ ਦਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

(c) ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪੱਤਾ (i) ਇੱਕਾ ਹੈ (ii) ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।

5. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕਾ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਤਲ ਤੇ 1 ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤਲ ਤੇ 6 ਅੰਕਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (i) 3 ਹੈ। (ii) 12 ਹੈ।

6. ਨਗਰ ਪਰਿਸ਼ਦ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਪੁਰਖ ਅਤੇ ਛੇ ਔਰਤਾਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਲਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਪਰਿਸ਼ਦ ਮੈਂਬਰ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਔਰਤ ਦੇ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

7. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਹਰੇਕ ਚਿਤ ਤੇ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਜਿੱਤਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪਟ ਤੇ 1.50 ਰੁਪਿਆ ਹਾਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਾਰ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਭਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

8. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲੇ ਗਏ ਹਨ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਤਿੰਨ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (ii) 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (iii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iv) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (v) ਇੱਕ ਵੀ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋਣਾ (vi) 3 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(vii) ਠੀਕ 2 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (viii) ਕੋਈ ਵੀ ਪਟ ਨਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (ix) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2}{11}$ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਸ਼ਬਦ 'ASSASSINATION' ਤੋਂ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅੱਖਰ (i) ਇੱਕ ਸਵਰ (vowel) ਹੈ। (ii) ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ (consonant) ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਚੁਣੀਆਂ ਗਈਆਂ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਲਾਟਰੀ ਸਮਿਤੀ ਨੇ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਰੱਖੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਲਾਟਰੀ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? [**ਸੰਕੇਤ :** ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।]

12. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ P(A) ਅਤੇ P(B) ਯੁਕਤੀ ਸੰਗਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

13. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :

	P(A)	**P(B)**	**P(A ∩ B)**	**P(A ∪ B)**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	. . .
(ii)	0.35	. . .	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	. . .	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{1}{5}$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B, ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ P(A ਜਾਂ B) ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ P(E ਅਤੇ F) = $\frac{1}{8}$, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
(i) P(E ਜਾਂ F), (ii) P(E ਨਹੀਂ ਅਤੇ F ਨਹੀਂ)

16. ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ P(E ਨਹੀਂ ਅਤੇ F ਨਹੀਂ) = 0.25, ਦੱਸੋ ਕਿ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

17. ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 ਅਤੇ P(A ਅਤੇ B) = 0.16 ਪਤਾ ਕਰੋ :
(i) P(A ਨਹੀਂ), (ii) P(B ਨਹੀਂ) (iii) P(A ਜਾਂ B)

18. ਇੱਕ ਪਾਠਸ਼ਾਲਾ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਦੇ 40% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 30% ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਜਮਾਤ ਦੇ 10% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਵੇਂ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਜਮਾਤ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੋਵੇਗਾ।

19. ਇੱਕ ਦਾਖਲਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਟੈਸਟਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਸ਼੍ਰੇਣੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਪਹਿਲੇ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.8 ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.7 ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.95 ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਟੈਸਟਾਂ ਨੂੰ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

20. ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਅੰਗਰੇਜੀ ਅਤੇ ਹਿੰਦੀ ਦੋਨਾਂ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.5 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਸ਼ਾ ਪਾਸ ਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.1 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਗਰੇਜੀ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.75 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਿੰਦੀ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

21. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 30 ਨੇ ਐਨ.ਸੀ.ਸੀ., 32 ਨੇ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਅਤੇ 24 ਨੇ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ :

(i) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਜਾਂ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

(ii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਨਾ ਤਾਂ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

(iii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਪਰ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਛੁੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੀਨਾ ਨੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਢੰਗ ਨਾਲ A, B, C ਅਤੇ D ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ :

(i) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

(ii) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ C ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

(iii) A ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ ?

(iv) A ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜਾਂ ਦੂਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ ?

(v) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

ਹੱਲ : ਵੀਨਾ ਦੁਆਰਾ ਚਾਰ ਸ਼ਹਿਰਾਂ A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਸਫ਼ਰ ਦੇ ਭਿੰਨ ਢੰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4! ਭਾਵ 24 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n(S) = 24$

ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 24 ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA
CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA
DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA} ਹੈ।

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਵੀਨਾ A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰਦੀ ਹੈ' ਨੂੰ E ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB
ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$