પ્રકરણ 7

કણોનાં તંત્રો અને ચાકગતિ
(SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION)

7.1 પ્રસ્તાવના
7.2 દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર
7.3 દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ
7.4 કણોના તંત્રનું રેખીય વેગમાન
7.5 બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર
7.6 કોણીય વેગ અને તેનો રેખીય વેગ સાથે સંબંધ
7.7 ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન
7.8 દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન
7.9 જડત્વની ચાકમાત્રા
7.10 લંબ અને સમાંતર અક્ષોનાં પ્રમેયો
7.11 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિની શુદ્ધ ગતિકી
7.12 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનું ગતિશાસ્ત્ર
7.13 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં કોણીય વેગમાન
7.14 લોટણ ગતિ
સારાંશ
ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ
સ્વાધ્યાય
વધારાનું સ્વાધ્યાય

7.1 પ્રસ્તાવના (INTRODUCTION)

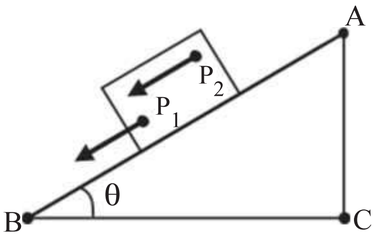
અગાઉનાં પ્રકરણોમાં આપણે મુખ્યત્વે એક જ કણની ગતિને ધ્યાનમાં લીધી હતી. (કણને એક દળબિંદુ (point mass) તરીકે રજૂ કર્યું છે. વ્યવહારમાં તેનું કોઈ કદ નથી.) ત્યાર બાદ આવા પદાર્થોની ગતિને એક કણની ગતિ તરીકે વર્ણવી શકાય છે એમ ધારી લઈને, આપણા અભ્યાસનાં આ પરિણામોને ચોક્કસ કદના પદાર્થોની ગતિને પણ લાગુ પાડ્યા છે.

દૈનિક જીવનમાં આપણા સંપર્કમાં આવતો કોઈ પણ વાસ્તવિક પદાર્થ પરિમિત કદ ધરાવે છે. મોટા (વિસ્તરીત) પદાર્થો (પરિમિત કદના પદાર્થો)ની ગતિ સમજવા ઘણી વખત કણોના આદર્શ સ્વરૂપનું મૉડેલ અપૂરતું હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે આ અપૂર્ણતાથી આગળ વધવાનો પ્રયાસ કરીશું. તેમજ આપણે વિસ્તૃત પદાર્થોની ગતિને સમજવાનો પણ પ્રયાસ કરીશું. એક વિસ્તૃત પદાર્થ, પ્રથમ તો, કણોનું એક તંત્ર છે. હવે આપણે સમગ્રપણે તંત્રની ગતિની વિચારણાથી શરૂ કરીશું. કણોના આ તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (centre of mass) અહીં મુખ્ય સંકલ્પના હશે. આપણે કણોના આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ તથા વિસ્તરીત પદાર્થોની ગતિ સમજવામાં આ સંકલ્પનાની ઉપયોગિતાની ચર્ચા કરીશું.

મોટા વિસ્તરીત પદાર્થો સાથે સંકળાયેલ ઘણીબધી સમસ્યાઓ, તેમને દૃઢ પદાર્થો (rigid bodies) તરીકે વિચારીને ઉકેલી શકાય છે. **આદર્શ રીતે એક દૃઢ પદાર્થ એ એક સંપૂર્ણપણે ચોક્કસ અને અપરિવર્તિત આકાર ધરાવતો પદાર્થ છે. આવા પદાર્થના કણોની બધી જ જોડીઓ વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.** દૃઢ પદાર્થની આ વ્યાખ્યા પરથી સ્પષ્ટ છે કે કોઈ વાસ્તવિક પદાર્થ પૂર્ણતઃ દૃઢ નથી. કારણ કે વાસ્તવિક પદાર્થો બળોના પ્રભાવ હેઠળ વિરૂપ થાય છે. પરંતુ ઘણીબધી પરિસ્થિતિઓમાં આ વિરૂપતા અવગણ્ય હોય છે. બીજી તરફ, ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં કે જ્યાં પૈડાઓ, ભમરડાઓ, સ્ટીલના સ્તંભો, અણુઓ અને ગ્રહો જેવા પદાર્થો સામેલ છે ત્યાં તેઓનું મરડાવું, વાંકું વળવું કે કંપન કરવું ને આપણે અવગણીશું અને તેમને દૃઢ તરીકે ગણીશું.

7.1.1 એક દૃઢ પદાર્થને કયા પ્રકારની ગતિ હોઈ શકે છે ? (What kind of motion can a rigid body have ?)

ચાલો, દૃઢ પદાર્થોની ગતિના કેટલાંક ઉદાહરણો લઈને આ પ્રશ્નને ઉકેલવાનો પ્રયાસ કરીએ. એક લંબચોરસ બ્લૉકથી શરૂ કરીએ જે એક ઢળતા સમતલ (inclined plane) પર આજુ બાજુ ખસ્યા વગર નીચે તરફ સરકે છે. આ બ્લૉક

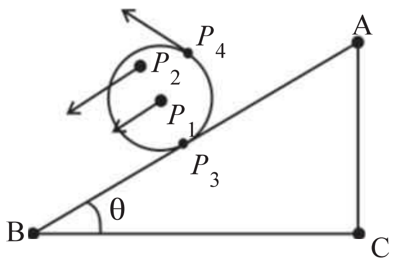


આકૃતિ 7.1 *ઢળતા સમતલ પર એક બ્લૉકની નીચે તરફ સ્થાનાંતરણ (સરકતી) ગતિ (આ બ્લૉકના કોઈ પણ બિંદુ જેવા કે P_1 અથવા P_2 સમયની કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગથી ગતિ કરે છે.)*

એક દૃઢ પદાર્થ છે. આ સમતલ પર તેની નીચે તરફની ગતિ એવી છે કે પદાર્થના તમામ કણો એકસાથે આગળ વધી રહ્યા છે. એટલે કે કોઈ પણ સમયે બધા જ કણો સમાન વેગ ધરાવે છે. અહીં દૃઢ પદાર્થ શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશનલ) ગતિમાં છે. (આકૃતિ 7.1)

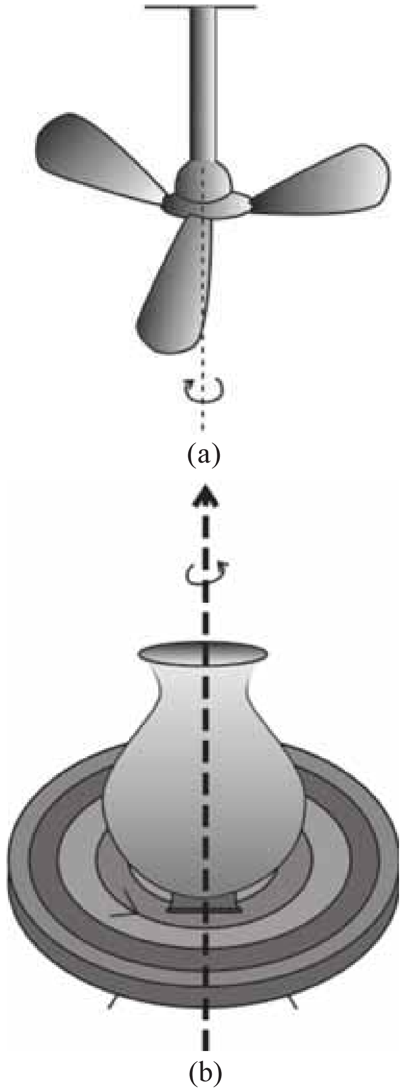
શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશનલ) ગતિમાં તે પદાર્થનો દરેક કણ કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગ ધરાવે છે.

ચાલો હવે, તે જ ઢળતા સમતલ પર ધાતુના અથવા લાકડાના એક નળાકારની નીચેની તરફ ગબડતી ગતિ (rolling motion)ને ધ્યાનમાં લો (આકૃતિ 7.2). આ સમસ્યામાં દૃઢ પદાર્થ, એટલે કે નળાકાર, જે ઢળતા સમતલની ટોચથી તળિયે સ્થાનાંતરિત થાય છે અને આમ, તેને સ્થાનાંતરણ ગતિ છે. પરંતુ આકૃતિ 7.2 એમ દર્શાવે છે કે તેના બધા જ કણો કોઈ પણ ક્ષણે એક સરખા વેગ સાથે આગળ ગતિ કરી રહ્યા નથી. આમ, આ પદાર્થ તેથી શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ધરાવતો નથી. એટલે કે તેની ગતિમાં સ્થાનાંતરણની સાથે 'બીજું કંઈક છે.'



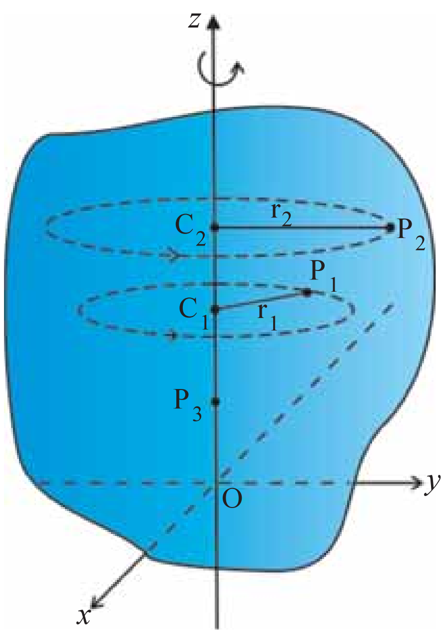
આકૃતિ 7.2 *નળાકારની રોલીંગ ગતિ. તે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ગતિ નથી. કોઈ એક ક્ષણે બિંદુઓ P_1, P_2, P_3 અને P_4ના વેગો અલગ અલગ છે. (તીરો વડે દર્શાવેલ છે.) વાસ્તવમાં, જો નળાકાર સરક્યા વિના ગબડતો હોય, તો કોઈ પણ ક્ષણે સંપર્કબિંદુ P_3 નો વેગ શૂન્ય છે.*

આ 'કંઈક બીજું' શું છે તે સમજવા માટે, ચાલો આપણે કોઈ એક દૃઢ પદાર્થ લઈએ કે જેને એ રીતે નિયંત્રિત કરવામાં આવેલ હોય કે તે સ્થાનાંતરણ ગતિ ન કરી શકે. એક દૃઢ પદાર્થને, સ્થાનાંતરણ ગતિ ન ધરાવે તે રીતે નિયંત્રિત કરવાની સૌથી સામાન્ય રીત એ છે કે, તેને એક સુરેખાને અનુલક્ષીને સ્થિર કરી દેવામાં આવે. આવા પદાર્થની એક માત્ર શક્ય ગતિ એ **ચાકગતિ (Rotational motion)** છે. એ રેખા કે જેને અનુલક્ષીને આ પદાર્થ સ્થિર છે તેને તેની **ભ્રમણ અક્ષ (ધરી) (Axis of rotation)** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જો તમે આસપાસ જુઓ તો સિલીંગ પંખો. કુંભારનો ચાકડો, મેળામાંનો એક વિશાળ ફાળકો (જાયન્ટ વ્હીલ), ચકડોળ (મેરી-ગો રાઉન્ડ) અને બીજાં એવાં ઘણાં ઉદાહરણો જોવા મળશે કે તેમાં ચાકગતિ (પરિભ્રમણ) કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને થતી હોય છે (આકૃતિ (7.3 (a) અને (b)).



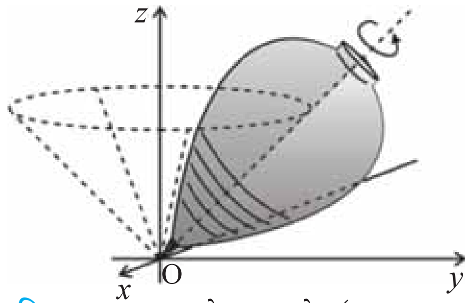
આકૃતિ 7.3 *સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ*
(a) સિલીંગ પંખો
(b) કુંભારનો ચાકડો

ચાલો, આપણે એ સમજવા પ્રયત્ન કરીએ કે, ચાકગતિ શું છે, ચાકગતિનાં લક્ષણો કયાં છે. તમે જોશો કે **સ્થિર અક્ષને**

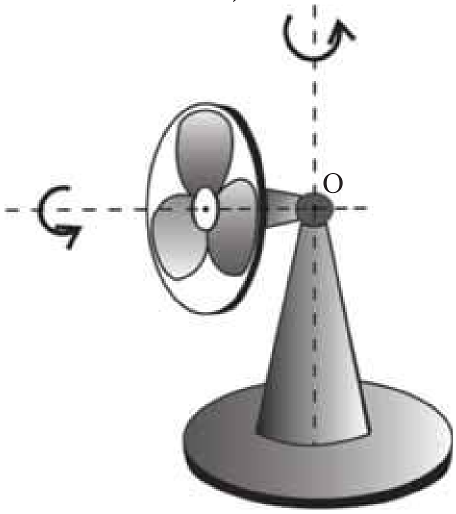


આકૃતિ 7.4 *z-અક્ષને અનુલક્ષીને દઢ પદાર્થનું પરિભ્રમણ (આ પદાર્થનું દરેક બિંદુ જેમકે P_1 અથવા P_2 એ આ અક્ષ પર જેનું કેન્દ્ર (C_1 કે C_2) હોય તેવું વર્તુળ બનાવે છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા (r_1 કે r_2) તે આ અક્ષથી બિંદુ (P_1 કે P_2) સુધીનું લંબઅંતર છે. P_3 જેવું અક્ષ પર આવેલ બિંદુ સ્થિર રહે છે.)*

અનુલક્ષીને દઢ પદાર્થના પરિભ્રમણમાં, પદાર્થનો દરેક કણ વર્તુળમાં ફરે છે, જે વર્તુળ અક્ષના લંબસમતલમાં છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે. આકૃતિ 7.4 એ એક સ્થિર અક્ષ (નિર્દેશ-ફ્રેમની *z*-અક્ષ)ને અનુલક્ષીને એક દઢ પદાર્થની ચાકગતિ દર્શાવે છે. એક સ્થિર અક્ષથી r_1 અંતર પર દઢ પદાર્થના યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરાયેલા એક કણ P_1ને ધ્યાનમાં લો. આ કણ P_1 સ્થિર અક્ષ પર તેના કેન્દ્ર C_1 સાથે r_1 ત્રિજ્યાનું વર્તુળ બનાવે છે. આ વર્તુળ અક્ષના લંબસમતલમાં છે. આ આકૃતિમાં દઢ પદાર્થનો બીજો કણ P_2 પણ દર્શાવેલ છે. P_2 સ્થિર અક્ષથી r_2 અંતર પર છે. આ કણ P_2 એ r_2 ત્રિજ્યાના વર્તુળ પર ગતિ કરે છે કે જેનું અક્ષ પર કેન્દ્ર C_2 છે. આ વર્તુળ પણ અક્ષના લંબસમતલમાં છે. નોંધ કરો કે P_1 અને P_2 દ્વારા બનાવેલ વર્તુળો અલગ અલગ સમતલમાં આવેલા હોઈ શકે છે; જોકે, આમ છતાં આ બંને સમતલો સ્થિર અક્ષને લંબ છે. અક્ષ પર કોઈ P_3 જેવા કણ માટે $r = 0$ છે. પદાર્થ જ્યારે ચાકગતિ કરતો હોય ત્યારે પણ આવો દરેક કણ સ્થિર જ રહે છે. આ અપેક્ષિત છે કારણ કે અક્ષ સ્થિર જ રહે છે.



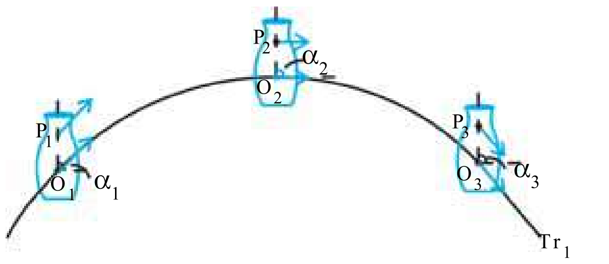
આકૃતિ 7.5 (*a*) *ફરતો ભમરડો (આ ભમરડાનું જમીન સાથેનું સંપર્ક-બિંદુ, તેની અણિ O, તે સ્થિર છે.)*



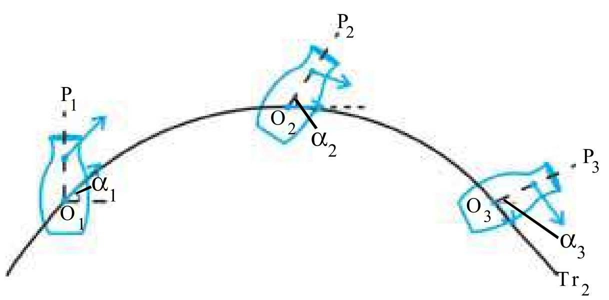
આકૃતિ 7.5 (*b*) *ફરતા ટેબલ-ફેનનું આધારબિંદુ O સ્થિર છે.*

પરિભ્રમણનાં કેટલાંક ઉદાહરણોમાં, જોકે ધરી સ્થિર ન પણ હોય. આ પ્રકારની ચાકગતિનું જાણીતું ઉદાહરણ એ જમીન પર ફરતો ભમરડો છે [આકૃતિ 7.5 (a)]. (આપણે અહીં એમ ધારીએ છીએ કે ભમરડો એક સ્થાનેથી બીજા સ્થાને સ્થાનાંતરિત થતો નથી જેથી તેને સ્થાનાંતરણ ગતિ પણ નથી.) અનુભવથી આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે, આવા ફરતા ભમરડાની (સ્પિનિંગ ટોપની) અક્ષ, જમીન સાથેના તેના સંપર્ક-બિંદુમાંથી પસાર થતી અભિલંબને ફરતે ગતિ કરે છે જે આકૃતિ 7.5(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક શંકુ બનાવે છે. (ભમરડાની અક્ષનું ઉર્ધ્વઅક્ષને અનુલક્ષીને આ રીતે ફરવું તેને **ઘૂર્ણન (precession)** કહેવામાં આવે છે. એ ધ્યાન રાખો કે, **જમીન સાથેનું ભમરડાનું સંપર્ક-બિંદુ સ્થિર છે.** કોઈ પણ ક્ષણે, ભમરડાની પરિભ્રમણ અક્ષ સંપર્ક-બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આ પ્રકારના પરિભ્રમણનું બીજું સરળ ઉદાહરણ એ દોલન કરતો (Oscillating) ટેબલ-ફેન અથવા પૅડેસ્ટલ-ફેન છે. તમે એવું જોયું હશે કે આવા પ્રકારના પંખાની ભ્રમણાક્ષ સમક્ષિતિજ સમતલમાં દોલિત (એક બાજુથી બીજી બાજુ) ગતિ ધરાવે છે અને આ ગતિ ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને હોય છે જે એ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે કે જ્યાં તે અક્ષ કિલકિત છે (આકૃતિ 7.5 (b)માં બિંદુ O).

જ્યારે પંખો ફરતો હોય છે અને તેની અક્ષ એક બાજુથી બીજી બાજુ ગતિ કરે છે, ત્યારે પણ આ બિંદુ સ્થિર રહે છે. આમ, ચાકગતિના વધુ સામાન્ય કિસ્સાઓમાં, જેમકે ભમરડા અથવા પૅડેસ્ટલ-ફેનના પરિભ્રમણમાં દઢ પદાર્થનું **એક બિંદુ સ્થિર રહે છે, નહિ કે એક રેખા.** આ કિસ્સામાં અક્ષ સ્થિર નથી. તેમ છતાં તે હંમેશા એક સ્થિર બિંદુમાંથી પસાર થાય છે. આપણા અભ્યાસમાં જોકે આપણે મોટે ભાગે ચાકગતિના એવા સરળ અને વિશિષ્ટ કિસ્સા જોઈશું કે જેમાં એક રેખા (એટલે કે અક્ષ) સ્થિર હોય. આમ, આપણા માટે ચાકગતિ એ ફક્ત એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને હશે. સિવાય કે બીજું વિશેષમાં જણાવ્યું હોય.



આકૃતિ 7.6(a) *દઢ પદાર્થની ગતિ જે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ છે.*



આકૃતિ 7.6(b) *દઢ પદાર્થની ગતિ જે સ્થાનાંતરિત અને ચાકગતિનું મિશ્રણ છે.*

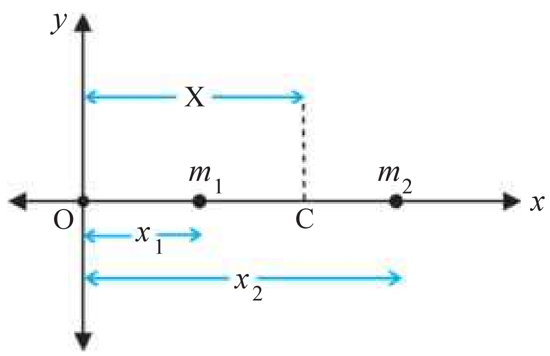
આકૃતિ 7.6(*a*) અને 7.6 (*b*) એક જ પદાર્થની જુદી જુદી ગતિને સમજાવે છે. ધ્યાન રહે કે P એ પદાર્થનું કોઈ યાદચ્છિક બિંદુ છે; O પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે. જેને હવે પછીના પરિચ્છેદમાં વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે. અહીં એ કહેવું પૂરતું છે કે O બિંદુના ગતિપથો એ જ પદાર્થના સ્થાનાંતરીય ગતિપથો Tr_1 અને Tr_2 છે. ત્રણ અલગ અલગ સમયે, બિંદુઓ O અને Pની સ્થિતિઓ બંને આકૃતિઓ 7.6 (*a*) અને (*b*)માં અનુક્રમે O_1, O_2, O_3 અને P_1, P_2, P_3 દ્વારા દર્શાવવામાં આવેલ છે. આકૃતિ 7.6(*a*) પરથી જોઈ શકાય છે કે, શુદ્ધ સ્થાનાંતરણની સ્થિતિમાં, પદાર્થના O અને P જેવા કોઈ પણ કણોનો વેગ સમાન હોય છે. નોંધ લો કે, આ કિસ્સામાં OPનું નમન (orientation), એટલે કે OP એ એક નિશ્ચિત દિશા છે - દા. ત., સમક્ષિતિજ, સાથે બનાવેલ કોણ સમાન રહે છે એટલે કે $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. *આકૃતિ* 7.6 (*b*) સ્થાનાંતરણ અને ચાકગતિના મિશ્રણનો કિસ્સો દર્શાવે છે. આ કિસ્સામાં કોઈ પણ સમયે O અને Pના વેગો અલગ અલગ હોઈ શકે છે. ઉપરાંત α_1, α_2 અને α_3 પણ બધા અલગ અલગ હોઈ શકે છે.

એક ઢળતાં સમતલ પર નીચેની તરફ ગબડતા એક નળાકારની રોલિંગ ગતિ એ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરિત ગતિઓનું મિશ્રણ છે. આમ, લોટણ ગતિના કિસ્સામાં 'બીજું કંઈક' જેનો આપણે અગાઉ ઉલ્લેખ કરેલ તે ચાકગતિ છે આ દૃષ્ટિકોણથી આકૃતિ 7.6 (a) અને (b) તમારા માટે ઉપયોગી બનશે. આ બંને આકૃતિઓમાં એક જ પદાર્થની ગતિને સમાન સ્થાનાંતરિત ગતિ-પથ પર દર્શાવેલ છે. એક કિસ્સામાં, [આકૃતિ 7.6(a)], ગતિ એ શુદ્ધ સ્થાનાંતરિત છે; અન્ય કિસ્સામાં [આકૃતિ 7.6(b)] તે સ્થાનાંતરિત ગતિ અને ચાકગતિનું મિશ્રણ છે. (આપ પણ ભારે પુસ્તક જેવા એક દઢ પદાર્થનો ઉપયોગ કરીને અહીં બતાવવામાં આવેલ બે પ્રકારની ગતિને ઉત્પન્ન કરવાનો પ્રયત્ન કરી શકો છો.)

આવો, હવે આપણે પ્રસ્તુત વિભાગના સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ નિરીક્ષણોને ફરીથી જોઈ લઈએ : **એક દઢ પદાર્થની ગતિ કે જે કોઈ રીતે અક્ષ સાથે જોડાયેલ નથી અથવા સ્થિર નથી તે કાં તો શુદ્ધ સ્થાનાંતરિત છે અથવા સ્થાનાંતરિત અને ચાકગતિનું સંયોજન છે. એક દઢ પદાર્થની ગતિ કે જે અમુક રીતે કિલકિત (pivoted) અથવા સ્થિર છે તે ચાકગતિ છે.** ચાકગતિ એ એક સ્થિર અક્ષને (ઉદાહરણ : એક સિલીંગ પંખો) અથવા ચલિત અક્ષને (ઉદાહરણ : એક ઓસિલેટિંગ ટેબલ ફેન) અનુલક્ષીને હોઈ શકે છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં, આપણે માત્ર એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ વિશે અધ્યયન કરીશું.

7.2 દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (CENTRE OF MASS)

આપણે સૌપ્રથમ એ જોઈશું કે, કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શું છે અને તે પછી તેના મહત્ત્વની ચર્ચા કરીશું. સરળતા માટે આપણે બે કણોના તંત્રથી શરૂઆત કરીશું. આપણે બે કણોને જોડતી રેખાને *x*-અક્ષ તરીકે લઈશું.



આકૃતિ 7.7

ધારો કે ઉદ્‌ગમ બિંદુ Oથી બે કણોના અંતરો અનુક્રમે x_1 અને x_2 છે. આ કણોનાં દ્રવ્યમાનો અનુક્રમે m_1 અને m_2 છે.

આ તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર બિંદુ C એ એવું બિંદુ હશે કે જે O થી X અંતર પર છે, જ્યાં Xને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{7.1}$$

સમીકરણ (7.1)માં X ને આપણે x_1 અને x_2 નું દળ ભારિત સરેરાશ કહી શકીએ છીએ. જો બંને કણોના દળ $m_1 = m_2 = m$ સરખા હોય, તો

$$X = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

આમ, સમાન દળના બે કણોનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તે બંનેની બરાબર મધ્યમાં હોય છે.

જો આપણી પાસે અનુક્રમે m_1, m_2, ..., m_n દળના n કણો હોય અને તે બધાંને x-અક્ષ તરીકે લીધેલ સુરેખા પર મૂકેલ હોય, તો આ વ્યાખ્યા અનુસાર આ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું સ્થાન નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \tag{7.2}$$

જ્યાં x_1, x_2, ..., x_n એ કણોના ઉદ્‌ગમ બિંદુથી અંતરો છે. X પણ તે જ ઉદ્‌ગમ બિંદુથી માપવામાં આવે છે. સંકેત $\sum$ (ગ્રીક મૂળાક્ષર સિગ્મા) એ સરવાળો દર્શાવે છે જે આ કિસ્સામાં n કણો માટે છે. આમ, સરવાળો

$$\sum m_i = M$$

એ આ તંત્રનું કુલ દળ છે.

ધારો કે આપણી પાસે ત્રણ કણો છે. જે એક સુરેખા પર નથી. તો આપણે આ કણો જે સમતલમાં છે તેમાં x અને y-અક્ષોને વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ અને આ ત્રણ કણોનાં સ્થાનને અનુક્રમે યામો (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) વડે દર્શાવી શકાય છે. આ ત્રણ કણોના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર C ને યામો (X, Y) વડે દર્શાવી શકાય છે અને તેને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3a}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{7.3b}$$

$m_1 = m_2 = m_3 = m$ સમાન દળના કણો માટે,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

આમ, સમાન દળના ત્રણ કણો માટે, તેનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર આ કણોથી બનતા ત્રિકોણના મધ્ય કેન્દ્ર પર હશે.

સમીકરણો (7.3a) અને (7.3b)ને n કણોના તંત્ર માટે સરળતાથી વ્યાપકરૂપ આપી શકાય છે. અહીં એ જરૂરી નથી કે બધા જ કણો એક જ સમતલમાં હોય. તે અવકાશમાં પણ વિતરીત હોય. આવા પ્રકારના તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (X, Y, Z) પર છે, જ્યાં,

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \tag{7.4a}$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \tag{7.4b}$$

$$\text{અને } Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \tag{7.4c}$$

અહીં $M = \sum m_i$ એ તંત્રનું કુલ દળ છે. સંકેત i એ 1થી n સુધી બદલાય છે. m_i એ iમા કણનું દળ છે અને iમા કણના સ્થાનને (x_i, y_i, z_i) વડે આપવામાં આવે છે.

સ્થાનસદિશ (Position Vector)ના સંકેતનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણો (7.4a), (7.4b) અને (7.4c)ને એક સમીકરણમાં સંયોજિત કરી શકાય છે. જો $\mathbf{r}_i$ એ iમાં કણનો સ્થાનસદિશ અને $\mathbf{R}$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો સ્થાનસદિશ હોય, તો

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\hat{\mathbf{i}} + y_i\,\hat{\mathbf{j}} + z_i\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{અને } \mathbf{R} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{તો } \mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \tag{7.4d}$$

જમણી બાજુનો સરવાળો એ સદિશ સરવાળો છે.

સદિશોના ઉપયોગ દ્વારા પ્રાપ્ત કરેલ સમીકરણોની સંક્ષિપ્તતાની નોંધ લો. જો નિર્દેશ ફ્રેમ (યામ તંત્ર)ના ઉદ્‌ગમ બિંદુને આપેલ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર લેવામાં આવે, તો કણોના આપેલા તંત્ર માટે $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$.

એક દૃઢ પદાર્થ, જેવા કે મીટર-પટ્ટી કે ફ્લાય વ્હીલ એ ખૂબ જ નજીક નજીક હોય તેવા કણોનું તંત્ર છે, આથી સમીકરણો (7.4a), (7.4b), (7.4c) અને (7.4d) એ દૃઢ પદાર્થને લાગુ પડે છે. આ પ્રકારના પદાર્થમાં કણોની (પરમાણુ અથવા અણુની) સંખ્યા એટલી મોટી હોય છે કે આ સમીકરણોમાં પ્રત્યેક કણો પર સરવાળો કરવો અસંભવ છે. કારણ કે આ કણો વચ્ચેનું અંતર ખૂબ જ નાનું છે. તેથી આપણે પદાર્થને દ્રવ્યમાનના સતત

વિતરણ તરીકે લઈ શકીએ છીએ. આપણે પદાર્થને n નાના દ્રવ્યમાન-ખંડોમાં વિભાજિત કરીએ કે જેનાં દ્રવ્યમાન Δm_1, Δm_2, ..., Δm_n હોય અને તેનો iમો ખંડ Δm_i એ બિંદુ (x_i, y_i, z_i) પર સ્થિત હોય. આમ વિચારીએ તો દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના યામોને લગભગ નીચે મુજબ આપવામાં આવે છે :

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i},\ Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i},\ Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

જેમ આપણે n મોટો અને મોટો લઈએ છીએ અને દરેક Δm_i જેમ નાનો લઈએ તેમ આ સમીકરણો વધુ સચોટ બને છે. આવા કિસ્સામાં i પરના સરવાળાઓને આપણે સંકલનો દ્વારા દર્શાવીએ છીએ. આમ,

$$\sum \Delta m_i \to \int \mathrm{d}m = M,$$

$$\sum (\Delta m_i)x_i \to \int x\,\mathrm{d}m,$$

$$\sum (\Delta m_i)y_i \to \int y\,\mathrm{d}m,$$

અને $$\sum (\Delta m_i)z_i \to \int z\,\mathrm{d}m,$$

અહીં M એ પદાર્થનું કુલ દ્રવ્યમાન છે. હવે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના યામો

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m \text{ અને } Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m \quad (7.5\text{a})$$

થશે. આ ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય સદિશ સમીકરણ

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m \quad (7.5\text{b})$$

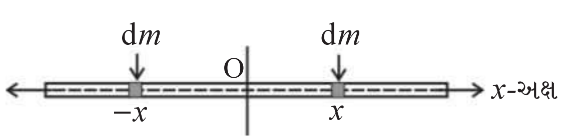
છે. જો આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને આપણા યામ તંત્રનું ઉદ્ગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરીએ, તો

$\mathbf{R}\ (x, y, z) = 0$

એટલે કે, $\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m = \mathbf{0}$

અથવા $$\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = \int z\,\mathrm{d}m = 0 \quad (7.6)$$

ઘણીબધી વખત આપણે વલય, તક્તી, ગોળાઓ, સળિયાઓ વગેરે જેવા નિયમિત આકારના સમાંગ પદાર્થોના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગણતરી કરવી પડશે. (સમાંગ પદાર્થોનો આપણો અર્થ એ છે કે, એકસરખી રીતે વિતરણ થયેલ દ્રવ્યમાનવાળો પદાર્થ) સંમિતિના ખ્યાલને ધ્યાનમાં લેતાં, આપણે સરળતાથી તે બતાવી શકીએ છીએ કે, આ પદાર્થોનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રો તેમનાં ભૌમિતિક કેન્દ્રો પર આવેલાં છે.



આકૃતિ 7.8 એક પાતળા સળિયાનું CM નક્કી કરવું

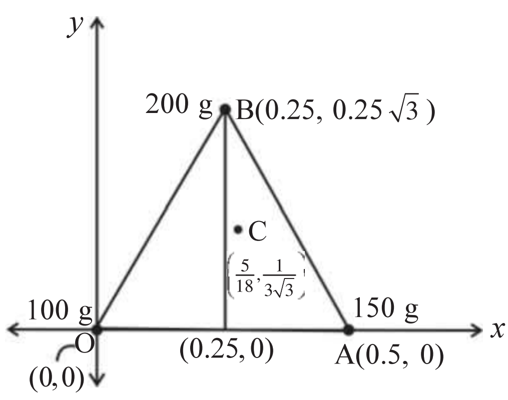
ચાલો હવે એક પાતળો સળિયો લો કે જેની પહોળાઈ અને જાડાઈ (જો સળિયાનો આડછેદ લંબચોરસ હોય) અથવા ત્રિજ્યા (જો સળિયાનો આડછેદ નળાકાર હોય) તેની લંબાઈ કરતાં ઓછી છે. સળિયાની લંબાઈ x-અક્ષની દિશાને સમાંતર દિશામાં મૂકતાં અને ઉદ્ગમબિંદુને તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર લેતાં, પરાવર્તન સમિતિને લીધે આપણે એમ કહી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક x પર સ્થિત સળિયાના દરેક dm ખંડને સમાન dmનો ખંડ એ $-x$ પર રહેલો છે. (આકૃતિ 7.8)

સંકલનમાં આવી દરેક જોડનો ચોખ્ખો ફાળો શૂન્ય છે અને તેથી સંકલન $x dm$ પોતે પણ શૂન્ય થાય છે. સમીકરણ (7.6) પરથી એમ કહી શકાય કે, જે બિંદુ માટે સંકલન પોતે શૂન્ય હોય તે બિંદુ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે. આમ, સમાંગ પાતળા સળિયાનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર સાથે એકરૂપ છે. પરાવર્તન સંમિતિના આધારે આ સમજી શકાય છે.

સંમિતિની આ દલીલ સમાંગ વલય, તક્તી, ગોળાઓ અથવા વર્તુળાકાર કે લંબચોરસ આડછેદના જાડા સળિયા પર પણ લાગુ થશે. આવા તમામ પદાર્થો માટે તમે જોઈ શકશો કે એક બિંદુ (x, y, z) પર સ્થિત દરેક ઘટક dm માટે બિંદુ $(-x, -y, -z)$ પર પણ તેટલા જ દ્રવ્યમાનનો એક ઘટક લઈ શકો છો. (અન્ય શબ્દોમાં, આ બધા પદાર્થો માટે ઉદ્ગમબિંદુ એ પરાવર્તન સંમિતિનું બિંદુ છે.) પરિણામે, સમીકરણ (7.5 a)માં બધાં સંકલન શૂન્ય છે. તેનો અર્થ એ છે કે, ઉપર્યુક્ત તમામ પદાર્થો માટે તેમના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેમના ભૌમિતિક કેન્દ્ર પર સંપાત થયેલ હશે.

> ▶ *ઉદાહરણ 7.1* એક સમભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ પર રહેલ ત્રણ કણોના બનેલા તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. આ કણોના દ્રવ્યમાન અનુક્રમે 100 g, 150 g અને 200 g છે. સમભુજ ત્રિકોણની દરેક બાજુ 0.5 m લાંબી છે.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.9

આકૃતિ 7.9માં બતાવ્યા પ્રમાણે x અને y અક્ષોની પસંદગી કરતાં સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવતાં બિંદુઓ O, A અને Bના યામો એ અનુક્રમે (0, 0), (0.5, 0) અને $(0.25, 0.25\sqrt{3})$ છે. 100 g, 150 g અને 200 gના દ્રવ્યમાન અનુક્રમે O, A અને B પર સ્થિત છે. ત્યારે,

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)] \text{ g m}}{(100 + 150 + 200) \text{ g}}$$

$$= \frac{75+50}{450}\text{ m} = \frac{125}{450}\text{ m} = \frac{5}{18}\text{ m}$$

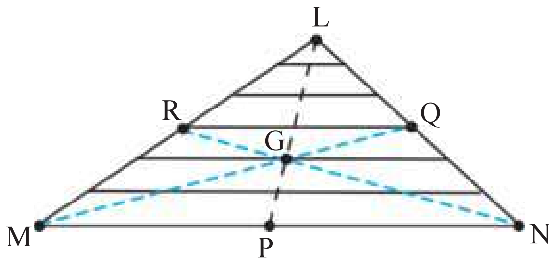
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25)\sqrt{3}] \text{ g m}}{450 \text{ g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\text{ m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\text{ m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{ m}$$

દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર C ને આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવ્યું છે. નોંધો કે તે ત્રિકોણ OABનું ભૌમિતિક કેન્દ્ર નથી. શા માટે ?

ઉદાહરણ 7.2 ત્રિકોણાકાર તક્તી (લેમિના)નું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો.

ઉકેલ આકૃતિ 7.10માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ લેમિના (ΔLMN)ને પાયા (MN)ને સમાંતર સાંકડી પટ્ટીઓ (સ્ટ્રિપ્સ)માં વિભાજિત કરી શકાય.

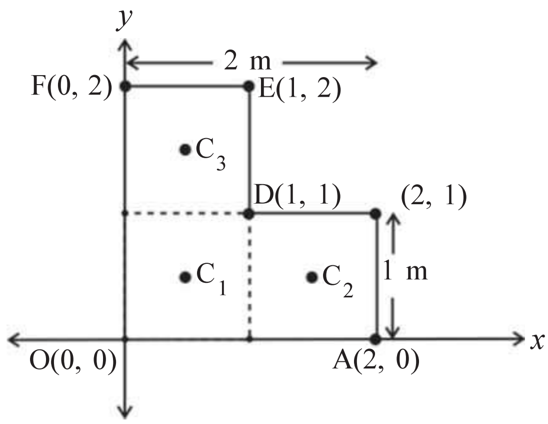


આકૃતિ 7.10

સંમિતિના આધારથી આપણે એમ કહી શકીએ કે દરેક સ્ટ્રિપનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના મધ્યબિંદુ પર છે. જો આપણે આ તમામ સ્ટ્રિપ્સનાં મધ્યબિંદુઓને જોડીએ તો આપણને મધ્યગા (median) LP મળશે. આમ, સમગ્ર ત્રિકોણનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર મધ્યગા LP પર આવેલ છે. તેવી જ રીતે, આપણે એવી દલીલ કરી શકીએ કે તે મધ્યગા MQ અને NR પર પણ સ્થિત છે. આનો અર્થ એ કે આ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ મધ્યગાઓનું છેદ બિંદુ છે. એટલે કે ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્ર (Centroid) G પર છે.

ઉદાહરણ 7.3 આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેનાં પરિમાણોવાળી એક સમાંગ L આકારની લેમિના (પાતળી સપાટ તક્તી)નું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર શોધો. આ તક્તીનું દળ 3 kg છે.

ઉકેલ આકૃતિ 7.11માં બતાવ્યા પ્રમાણે x અને y-અક્ષો પસંદ કરતાં, આપણને L આકારની તક્તીનાં શિરોબિંદુઓના યામો આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેના મળે છે. આપણે એમ વિચારી શકીએ કે, આ L આકાર એ દરેક 1 m લંબાઈના 3 ચોરસનો બનેલો છે. દરેક ચોરસનું દ્રવ્યમાન 1 kg છે, કેમ કે લેમિના સમાંગ છે. આ ચોરસોનાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રો C_1, C_2 અને C_3 તેમની સંમિતિના કારણે તેમનાં ભૌમિતિક કેન્દ્રો છે અને તેમના યામો અનુક્રમે (1/2, 1/2), (3/2, 1/2), (1/2, 3/2) છે. આપણે ચોરસનાં દ્રવ્યમાનોને આ બિંદુઓ પર કેન્દ્રિત થયેલ છે તેમ લઈએ છીએ. સમગ્ર L આકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર (X, Y)એ આ દ્રવ્યમાન બિંદુઓનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે.



આકૃતિ 7.11

તેથી,

$$X = \frac{[1(1/2) + 1(3/2) + 1(1/2)] \text{ kg m}}{(1 + 1 + 1) \text{ kg}} = \frac{5}{6}\text{ m}$$

$$Y = \frac{[1(1/2) + 1(1/2) + 1(3/2)] \text{ kg m}}{(1 + 1 + 1) \text{ kg}} = \frac{5}{6}\text{ m}$$

આ L આકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર રેખા OD પર આવેલું છે. આ અનુમાન આપણે કોઈ પણ ગણતરી વિના પણ લગાવી શકીએ છીએ. તમે કહી શકો કેવી રીતે ? ધારો કે, ત્રણેય

ચોરસો કે જે આકૃતિ 7.11ની L આકારની તક્તી બનાવે છે તેમનાં દ્રવ્યમાન જુદાં જુદાં છે. તો પછી તમે આ તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર કેવી રીતે નક્કી કરશો ? ◀

7.3 દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ (MOTION OF CENTRE OF MASS)

દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યાથી સજ્જ હવે આપણે એ સ્થિતિમાં છીએ કે, કણોના તંત્ર માટે તેના ભૌતિક મહત્ત્વની ચર્ચા કરી શકીએ. સમીકરણ (7.4d)ને ફરીથી આપણે નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + ... + m_n\mathbf{r}_n \quad (7.7)$$

આ સમીકરણની બંને બાજુઓનું સમયની સાપેક્ષમાં વિકલન લેતા આપણને

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

અથવા

$$M\mathbf{V} = m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + ... + m_n\boldsymbol{\upsilon}_n \quad (7.8)$$

મળે છે. અહીં $\boldsymbol{\upsilon}_1 (= d\mathbf{r}_1/dt_1)$ એ પ્રથમ કણનો વેગ છે. $\boldsymbol{\upsilon}_2 (= d\mathbf{r}_2/dt)$ એ દ્વિતીય કણનો વેગ છે વગેરે અને $\mathbf{V} (= d\mathbf{R}/dt)$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ છે. ધ્યાન રહે કે આપણે m_1, m_2, ... વગેરે દ્રવ્યમાનોનું મૂલ્ય સમય સાથે બદલાતું નથી તેમ ધારેલ છે. આથી આપણે તેમને સમીકરણોનું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતી વખતે અચળ લીધા છે.

સમીકરણ (7.8)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં આપણને

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_2}{dt} + ... + m_n\frac{d\boldsymbol{\upsilon}_n}{dt}$$

અથવા

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + ... + m_n\mathbf{a}_n \quad (7.9)$$

મળે છે. જ્યાં, $\mathbf{a}_1 (= d\boldsymbol{\upsilon}_1/dt)$ એ પ્રથમ કણનો પ્રવેગ છે. $\mathbf{a}_2 (= d\boldsymbol{\upsilon}_2/dt)$ એ દ્વિતીય કણનો પ્રવેગ છે વગેરે અને $\mathbf{A} (= d\mathbf{V}/dt)$ એ કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો પ્રવેગ છે.

હવે, ન્યૂટનના બીજા નિયમ અનુસાર, પ્રથમ કણ પર લાગતા બળને $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$ વડે આપવામાં આવે છે. દ્વિતીય કણ પર લાગતા બળને $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ વડે આપવામાં આવે છે વગેરે. તેથી સમીકરણ (7.9)ને નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n \quad (7.10)$$

આમ, કણોના તંત્ર (પ્રણાલી) પર લાગતાં તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો એ કણોના તંત્રના કુલ દ્રવ્યમાન અને તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના પ્રવેગના ગુણાકાર જેટલો છે.

નોંધ કરો કે, આપણે પ્રથમ કણ પરના જે બળ $\mathbf{F}_1$ની વાત કરીએ છીએ તે ફક્ત એક જ બળ નથી, પરંતુ પ્રથમ કણ પર લાગતા તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો છે. તેવી જ રીતે બીજા કણ માટે વગેરે. દરેક કણ પર લાગતાં આ બળોમાં પ્રણાલી પર બહારના પદાર્થો દ્વારા લાગતાં **બાહ્ય (External)** બળો અને કણો દ્વારા એકબીજાં પર લગાડવામાં આવતા **આંતરિક (Internal)** બળો પણ હશે. આપણે ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અનુસાર એ પણ જાણીએ છીએ કે, આ આંતરિક બળો દરેક જોડમાં સમાન અને વિરુદ્ધ હોય છે અને સમીકરણ (7.10)ના બળોના સરવાળામાં તેમનું યોગદાન શૂન્ય છે. આમ માત્ર બાહ્ય બળો જ આ સમીકરણમાં ફાળો આપે છે. આપણે તેથી સમીકરણ (7.10)ને ફરીથી નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \quad (7.11)$$

જ્યાં $\mathbf{F}_{ext}$ એ કણોના તંત્ર પર લાગતા બધાં જ બાહ્ય બળોનો સદિશ સરવાળો છે.

સમીકરણ (7.11) દર્શાવે છે કે કણોના કોઈ એક તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ રીતે ગતિ કરે છે **જાણે કે તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન, તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર સંકેન્દ્રિત હોય તથા બધા જ બાહ્ય બળો તેના પર જ લાગતાં હોય.**

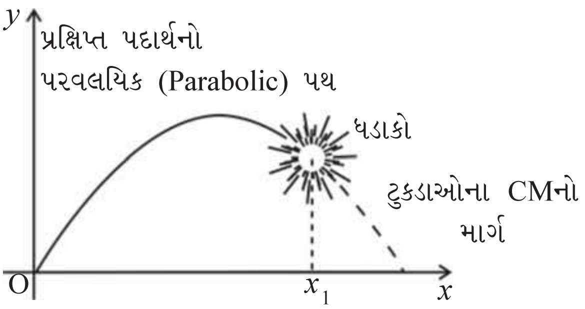
નોંધો કે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ જાણવા માટે કણોના તંત્રના આંતરિક બળોની જાણકારીની જરૂરિયાત નથી. આ માટે આપણે ફક્ત બાહ્ય બળોને જાણવા જ આવશ્યક છે.

સમીકરણ (7.11) મેળવવા માટે આપણે કણોના તંત્રના પ્રકારને સ્પષ્ટ કરવાની જરૂર નથી. આ તંત્ર એ ગતિમાન કણોનું એક સમૂહ હોઈ શકે છે, જેમાં તમામ પ્રકારની આંતરિક ગતિ હોઈ શકે છે અથવા તે એક દૃઢ પદાર્થ પણ હોઈ શકે છે કે જે શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ (ટ્રાન્સલેશન) ગતિ અથવા સ્થાનાંતરણ ગતિ અને ચાકગતિ (રોટેશનલ)નું મિશ્રણ ધરાવતું હોય. કોઈ પણ તંત્ર અને તેના પ્રત્યેક કણોની ગતિ ગમે તેવા હોય તો પણ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સમીકરણ (7.11) મુજબ ગતિ કરે છે.

જેમ આપણે અગાઉનાં પ્રકરણોમાં કર્યું છે તેમ હવે આપણે વિસ્તરીત પદાર્થોને એકાકી (single) કણો તરીકે લેવાની જગ્યાએ તેમને કણોનાં તંત્રો તરીકે લઈ શકીએ છીએ. તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયેલું અને તંત્ર પરનાં તમામ બાહ્ય બળો દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર લાગે છે. આમ ધારીને, આપણે તેમની ગતિના શુદ્ધ સ્થાનાંતરીય ઘટક એટલે કે, તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ મેળવી શકીએ છીએ.

અગાઉ આપણે આ પ્રક્રિયાને સ્પષ્ટ રીતે વ્યાખ્યાયિત અને યોગ્ય ઠેરવ્યા વિના પદાર્થો પરના બળના વિશ્લેષણમાં અને

સમસ્યાઓ ઉકેલવા માટે અનુસરતા હતા. હવે આપણે સમજીએ છીએ કે અગાઉના અભ્યાસોમાં આપણે કહ્યા વગર જ એમ ધાર્યું હતું કે કણોની ચાકગતિ અને/અથવા આંતરિક ગતિ કાં તો હતી જ નહિ અથવા અવગણ્ય હતી. હવે આપણે આમ કરવાની જરૂર નથી. હવે આપણે અગાઉ જે પ્રક્રિયાને અનુસરતા હતા તેને ફક્ત સમર્થન જ નથી મળ્યું, પરંતુ એ પણ જાણી શક્યા છીએ કે જેના દ્વારા (1) એક દઢ પદાર્થ જે પરિભ્રમણ કરતો હોય અથવા (2) એક એવું કણોનું તંત્ર કે જેમાં કણો તમામ પ્રકારની આંતરિક ગતિ ધરાવતા હોય, તો તેમની સ્થાનાંતરણ ગતિને કેવી રીતે વર્ણવી શકાય અને અલગ પાડી શકાય.



આકૃતિ 7.12 *કોઈ એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થના ટુકડાઓના દ્વ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ વિસ્ફોટ બાદ પણ એ જ પરવલય પથ પર ચાલુ રહે છે કે જે ગતિપથને તે વિસ્ફોટ ન થયો હોત તો પણ અનુસરત*

આકૃતિ 7.12 એ સમીકરણ (7.11)નું સારું ઉદાહરણ છે. સામાન્યતઃ પરવલય આકારના પથને અનુસરતો એક પ્રક્ષિપ્ત પદાર્થ હવામાં ફૂટીને ટુકડાઓમાં વિભાજિત થાય છે. આ વિસ્ફોટ તરફ દોરી રહેલાં બળો આંતરિક બળો છે. તેઓ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિમાં કોઈ જ ફાળો આપતા નથી. કુલ બાહ્ય બળ એટલે કે ગુરુત્વાકર્ષણ બળ એ પદાર્થ પર લાગે છે. તે વિસ્ફોટ પહેલાં અને પછી સમાન જ છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર વિસ્ફોટ બાદ પણ આ બાહ્ય બળના પ્રભાવ હેઠળ એ જ પરવલય પથ પર ગતિમાન રહે છે કે જેને તે વિસ્ફોટ ન થયો હોત તોપણ અનુસરત.

7.4 કણોના તંત્રનું રેખીય વેગમાન (LINEAR MOMENTUM OF A SYSTEM OF PARTICLES)

ચાલો આપણે ફરીથી યાદ કરીએ કે, કણોના રેખીય વેગમાનને

$$\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\upsilon} \qquad (7.12)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે.

ચાલો આપણે એ પણ યાદ કરીએ કે, એક કણ માટે સાંકેતિક સ્વરૂપે ન્યૂટનના દ્વિતીય નિયમને નીચે મુજબ લખી શકાય છે.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (7.13)$$

જ્યાં, **F** એ કણ પરનું બળ છે. ચાલો આપણે n કણોનું એક તંત્ર લઈએ કે જેમનાં દ્રવ્યમાનો અનુક્રમે $m_1, m_2, \ldots, m_n$ અને વેગો અનુક્રમે $\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\upsilon}_n$ હોય. આ કણો પરસ્પર આંતરક્રિયા પણ કરતાં હોઈ શકે અને તેમના પર બાહ્ય બળ પણ લાગતું હોઈ શકે છે. પ્રથમ કણનું રેખીય વેગમાન $m_1\boldsymbol{\upsilon}_1$ છે, દ્વિતીય કણનું રેખીય વેગમાન $m_2\boldsymbol{\upsilon}_2$ છે અને વગેરે વગેરે.

n કણોના આ તંત્ર માટે તંત્રના રેખીય વેગમાનને તંત્રના તમામ વ્યક્તિગત (એકાકી) કણોના રેખીય વેગમાનના સદિશ સરવાળા તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n$$
$$= m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{\upsilon}_n \qquad (7.14)$$

આ સમીકરણને સમીકરણ (7.8) સાથે સરખાવતાં,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \qquad (7.15)$$

આ રીતે **કણોના તંત્રનું કુલ વેગમાન એ તંત્રના કુલ દ્રવ્યમાન અને તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના વેગના ગુણનફળ સમાન છે.** સમીકરણ (7.15)નું સમયની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \qquad (7.16)$$

સમીકરણ (7.16) અને સમીકરણ (7.11)ને સરખાવતાં,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (7.17)$$

આ વિધાન એ **કણના તંત્રને લાગુ પડતું ન્યૂટનના બીજા નિયમનું કથન છે.**

હવે ધારી લો કે કણોના તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય બળોનો સરવાળો શૂન્ય છે, તો સમીકરણ (7.17) પરથી,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \text{ અથવા } \mathbf{P} = \text{અચળ} \qquad (7.18a)$$

આમ, જ્યારે કણોના તંત્ર પર લાગતું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, ત્યારે તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે. આ વિધાનને કણોના તંત્રના કુલ રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણનો નિયમ કહે છે. સમીકરણ (7.15)ના કારણે આનો અર્થ એ પણ છે કે જ્યારે તંત્ર પર કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય છે ત્યારે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ અચળ રહે છે. (આપણે આ પ્રકરણમાં કણોનાં તંત્રોની ચર્ચા દરમિયાન તંત્રનું કુલ દ્રવ્યમાન અચળ રહે છે તેમ ધારીએ છીએ.)

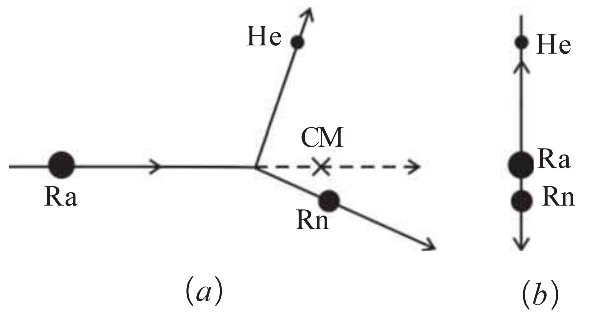
નોંધ કરો કે આંતરિક બળો એટલે કે કણો દ્વારા એકબીજા પર લાગતાં બળોના કારણે પ્રત્યેક કણોનો ગતિપથ જટિલ હોઈ શકે છે. છતાં, જો તંત્ર પર લાગતું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર અચળ વેગ સાથે ગતિ કરે છે. એટલે

કે એક મુક્ત કણની જેમ સીધી રેખામાં એકસમાન રીતે ગતિ કરે છે.

સદિશ સમીકરણ (7.18a) નીચેનાં ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે.

$P_x = c_1$, $P_y = c_2$ અને $P_z = c_3$ (7.18 b)

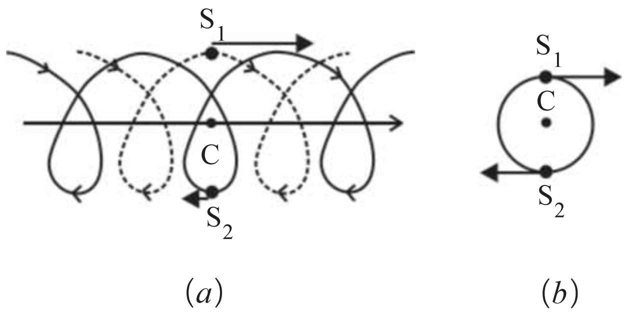
અહીં P_x, P_y અને P_z એ કુલ રેખીય વેગમાન સદિશ **P**ના અનુક્રમે x, y અને z અક્ષ પરના ઘટકો છે. c_1, c_2 અને c_3 એ અચળાંકો છે.



આકૃતિ **7.13** (*a*) *એક ભારે ન્યુક્લિયસ* (Ra)*એ એક હલકા ન્યુક્લિયસ* (R*n*) *અને આલ્ફા કણ* (He)*માં વિભાજિત થાય છે. તંત્રનું* CM *નિયમિત ગતિમાં છે.*
(*b*) *દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સ્થિર અવસ્થામાં આ જ ભારે ન્યુક્લિયસ* (R*a*)*ના વિભાજનમાં બે કણો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો ગતિમાન એવા અસ્થાયી કણના કિરણોત્સર્ગી ક્ષય (Radioactive Decay)ને ધ્યાનમાં લઈએ. જેમકે, રેડિયમનું ન્યુક્લિયસ. રેડિયમ ન્યુક્લિયસનું એક રેડોન ન્યુક્લિયસ અને એક આલ્ફા કણમાં વિઘટન થાય છે. આ ક્ષયકારક બળો તંત્રનાં આંતરિક બળો છે અને તંત્ર પરના બાહ્ય બળો અવગણ્ય છે. તેથી તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન ક્ષય પહેલાં અને પછી સમાન જ છે. ક્ષયમાં ઉત્પન્ન થયેલા બે કણો રેડોન ન્યુક્લિયસ અને આલ્ફા કણ એવી રીતે જુદી જુદી દિશામાં ગતિમાન થાય છે કે, તેમના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ જ દિશામાં ગતિ કરે છે કે ક્ષય પૂર્વે મૂળ રેડિયમ ન્યુક્લિયસ જે પથ પર ગતિ કરતો હતો. [આકૃતિ 7.13(a)]

જો આપણે એ નિર્દેશ ફ્રેમમાંથી ક્ષયનું અવલોકન કરીએ કે જેમાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સ્થિર છે, તો ક્ષયમાં સામેલ કણોની ગતિ વિશેષરૂપે સરળ લાગે છે. ઉત્પન્ન થયેલા કણો એકબીજાની પ્રતિસમીપ (Back to Back) દિશામાં એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જેથી તેમનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સ્થિર રહે, જે આકૃતિ 7.13(b)માં બતાવ્યું છે. ઉપર્યુક્ત રેડિયોઍક્ટિવ ક્ષય સમસ્યાની જેમ કણોના તંત્રની ઘણી સમસ્યાઓમાં લેબોરેટરી નિર્દેશ ફ્રેમના સ્થાને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને નિર્દેશ ફ્રેમ તરીકે લઈ કામ કરવું અનુકૂળ છે.



આકૃતિ **7.14** (*a*) *દ્વિસંગી (યુગ્મ) તંત્ર બનાવતા બે તારાઓ,* S_1 *(ત્રુટક રેખા) અને* S_2 *(સળંગ રેખા)ના ગતિપથો. તેમનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર* C *નિયમિત ગતિમાં છે.*
(*b*) *તે જ દ્વિસંગી તંત્ર કે જેનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર* C *સ્થિર છે.*

ખગોળશાસ્ત્રમાં, દ્વિસંગી (યુગ્મ) તારા એક સામાન્ય ઘટના છે. જો કોઈ બાહ્ય બળો ન હોય, તો કોઈ દ્વિસંગી (યુગ્મ) તારાનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એક મુક્ત કણની જેમ ગતિ કરશે. જે આકૃતિ 7.14(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે છે. સમાન દ્રવ્યમાનવાળા બે તારાઓના ગતિપથો પણ આકૃતિમાં દર્શાવવામાં આવ્યા છે, જે જટિલ દેખાય છે. જો આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની નિર્દેશ ફ્રેમમાં જઈએ તો આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ત્યાં બે તારાઓ એક વર્તુળમાં સ્થિર દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગતિ કરે છે. નોંધ કરો કે આ તારાઓનાં સ્થાન એકબીજાથી સંપૂર્ણ વિરુદ્ધ વ્યાસાંત બિંદુઓ પર હોય છે. (આકૃતિ 7.14(b)) આમ, આપણી નિર્દેશ ફ્રેમમાં, તારાઓના ગતિપથોએ (i) દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સીધી રેખામાં નિયમિત ગતિ અને (ii) દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તારાઓની વર્તુળાકાર ભ્રમણકક્ષાઓનું સંયોજન છે.

આ બે ઉદાહરણો પરથી જોઈ શકાય છે, તેમ તંત્રના જુદા જુદા ભાગોની ગતિને **દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને થતી ગતિમાં વિભાજન કરવું** એ ખૂબ જ ઉપયોગી પદ્ધતિ છે જે તંત્રની ગતિ સમજવામાં મદદ કરે છે.

7.5 બે સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર (VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS)

ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં આપણે સદિશ અને તેમના ઉપયોગથી પરિચિત છીએ જ. પ્રકરણ 6 (કાર્ય, ઊર્જા, પાવર)માં આપણે બે સદિશોના અદિશ ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કર્યો છે. એક મહત્ત્વપૂર્ણ ભૌતિકરાશિ, કાર્યને બે સદિશ રાશિઓ, બળ અને સ્થાનાંતરના અદિશ ગુણાકાર (Scalar Product) તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે.

હવે આપણે બે સદિશોના અન્ય ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આ ગુણાકાર એ સદિશ રાશિ છે. ચાકગતિના અભ્યાસમાં બે મહત્ત્વની રાશિઓ, બળની ચાકમાત્રા (Moment of Force) અને કોણીય વેગમાન (Angular Momentum) સદિશ ગુણાકારો તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

સદિશ ગુણાકારની વ્યાખ્યા

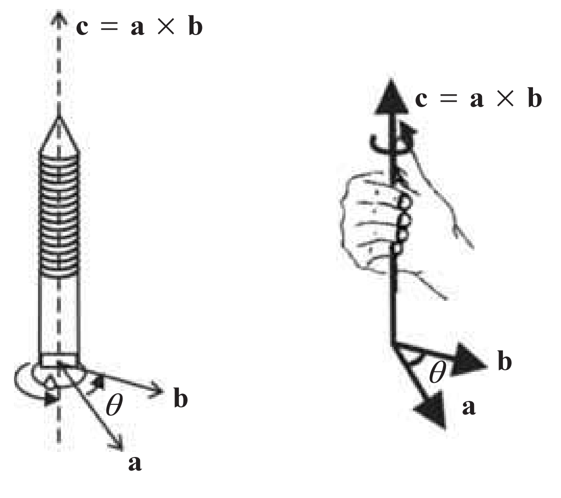
બે સદિશો **a** અને **b**નો સદિશ ગુણાકાર એ સદિશ **c** એવો છે કે,

(i) **c**નું માન = $c = ab \sin\theta$ છે, જ્યાં a અને b એ **a** અને **b**ના માન છે અને θ બે સદિશો વચ્ચેનો કોણ છે.

(ii) **c** એ **a** અને **b**ને સમાવતા સમતલને લંબ છે.

(iii) જો આપણે એક જમણા હાથના સ્ક્રૂને લઈએ કે જેનું શિર્ષ **a** અને **b**ના સમતલમાં હોય અને આ સ્ક્રૂ આ સમતલને લંબ હોય અને જો આપણે તેના શિર્ષને **a** થી **b** દિશામાં ફેરવીએ તો સ્ક્રૂની અણી (ટીપ)એ **c**ની દિશામાં ખસશે. જમણા હાથના સ્ક્રૂનો આ નિયમ આકૃતિ 7.15aમાં દર્શાવેલ છે.

આના બદલે આકૃતિ 7.15bમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જો સદિશો **a** અને **b**ના સમતલને લંબ રેખાની ફરતે જમણા હાથની આંગળીઓને **a** થી **b**ની દિશામાં વીંટાળવામાં આવે, તો વિસ્તરેલો (ઊભો) અંગૂઠો **c**ની દિશા દર્શાવે છે.



(*a*) (*b*)

આકૃતિ 7.15 (a) *બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારની દિશા નિર્ધારિત કરવા માટે જમણા હાથના સ્ક્રૂનો નિયમ*
(b) *સદિશ ગુણાકારની દિશા નિર્ધારિત કરવા માટે જમણા હાથનો નિયમ*

જમણા હાથના નિયમનું એક સરળ સ્વરૂપ નીચે મુજબ છે : તમારા જમણા હાથની હથેળી ખોલો અને આંગળીઓને **a** થી લઈને **b** તરફ વાળો. તમારો ઊભો અંગૂઠો **c** ની દિશામાં હશે.

તે યાદ રાખવું જોઈએ કે કોઈ પણ બે સદિશો **a** અને **b** વચ્ચે બે ખૂણા છે. આકૃતિ 7.15 (a) અથવા (b)માં તેઓ θ (દર્શાવ્યા પ્રમાણે) અને $(360° - \theta)$ને અનુરૂપ છે. ઉપર્યુક્ત નિયમોમાંથી કોઈ એકને લાગુ કરતી વખતે પરિભ્રમણને **a** ને **b** વચ્ચેના નાના કોણ $(<180°)$ દ્વારા લેવું જોઈએ. જે અહીં θ છે.

સદિશ ગુણાકારને દર્શાવવા માટે ઉપયોગમાં લેવાતા ક્રોસને (×) કારણે તેને ક્રોસ પ્રોડક્ટ તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

- નોંધો કે બે સદિશોનો અદિશ ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે જે અગાઉ જણાવ્યું છે. **a.b** = **b.a**

સદિશ ગુણાકાર, જોકે ક્રમના નિયમનું પાલન કરતો નથી એટલે કે **a** × **b** ≠ **b** × **a.**

a × **b** અને **b** × **a** બંનેનું માન સમાન $(ab \sin\theta)$ જ છે તથા તે બંને **a** અને **b**ના સમતલને લંબ છે. પરંતુ જમણા હાથના સ્ક્રૂનું પરિભ્રમણ **a** × **b**ના કિસ્સામાં **a** થી **b**નું હોય છે. જ્યારે **b** × **a**માં તે **b** થી **a** છે. આનો અર્થ એ છે કે બે સદિશો પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાઓમાં છે. આમ

આપણને **a** × **b** = − **b** × **a** મળે છે.

- સદિશ ગુણાકારની અન્ય એક રસપ્રદ બાબત એ તેનો પરાવર્તન હેઠળનો તેનો ગુણધર્મ છે. પરાવર્તન હેઠળ (એટલે કે અરીસામાં પ્રતિબિંબ તરીકે લેતાં) આપણને $x \to -x$, $y \to -y$ અને $z \to -z$ મળે છે. પરિણામે સદિશના બધાં ઘટકો સંજ્ઞા બદલે છે અને આમ $a \to -a$, $b \to -b$. પરાવર્તનમાં **a** × **b**નું શું થશે ?

  a × **b** → (−**a**) × (−**b**) = **a** × **b**

  આમ, **a** × **b** પરાવર્તનમાં સંજ્ઞા બદલતું નથી.

- અદિશ અને સદિશ બંને ગુણાકારો સદિશ સરવાળા પર વિભાજનના નિયમનું પાલન કરે છે.

  a. (**b** + **c**) = **a.b** + **a.c**

  a × (**b** + **c**) = **a** × **b** + **a** × **c**

- આપણે ઘટક સ્વરૂપમાં **c** = **a** × **b** લખી શકીએ છીએ. આ માટે આપણે પહેલાં કેટલાક પ્રાથમિક સદિશ ગુણાકારો (ક્રોસ પ્રોડક્ટ્સ) મેળવવાની જરૂર છે.

(i) **a** × **a** = **0** (**0** એ એક શૂન્ય સદિશ (Null Vector) છે. એટલે કે શૂન્ય માનવાળો સદિશ)

આમ થવાનું કારણ એ છે કે **a** × **a**નું માન એ $a^2 \sin 0° = 0$ છે.

આ પરથી નીચેના પરિણામ મળે છે :

$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

નોંધો કે, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$નું માન sin 90° કે 1 છે. કારણ કે $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ બંને એકમ માન ધરાવે છે અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 90° છે. આમ, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ એકમ સદિશ (Unit Vector) છે. $\hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{j}}$ના સમતલને લંબ અને જમણી બાજુના સ્ક્રૂના નિયમ દ્વારા તેમની સાથે સંકળાયેલ એવો એક એકમ સદિશ $\hat{\mathbf{k}}$ છે. તેથી ઉપર્યુક્ત પરિણામ મળે છે. તમે આ જ રીતે ચકાસી શકો છો કે,

$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$ અને $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$

સદિશ ગુણાકારના ક્રમના નિયમ પરથી આપણે કહી શકીએ કે,

$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$

નોંધ કરો કે, ઉપરના સદિશ ગુણાકારના સંબંધમાં જો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ ચક્રીય ક્રમમાં હોય તો સદિશ ગુણાકાર ધન છે. જો $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ ચક્રીય ક્રમમાં ન હોય, તો સદિશ ગુણાકાર ઋણ છે.

હવે,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_xb_y\hat{\mathbf{k}} - a_xb_z\hat{\mathbf{j}} - a_yb_x\hat{\mathbf{k}} + a_yb_z\hat{\mathbf{i}} + a_zb_x\hat{\mathbf{j}} - a_zb_y\hat{\mathbf{i}}$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

ઉપર્યુક્ત સંબંધ મેળવવા માટે આપણે પ્રાથમિક ક્રોસ પ્રોડક્ટ્સનો ઉપયોગ કર્યો છે. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ની આ અભિવ્યક્તિને નિશ્ચાયક સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય છે જે યાદ રાખવું સરળ છે.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ઉદાહરણ 7.4 બે સદિશોના અદિશ અને સદિશ ગુણાકારો શોધો.

$\mathbf{a} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ અને $\mathbf{b} = (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$

ઉકેલ

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

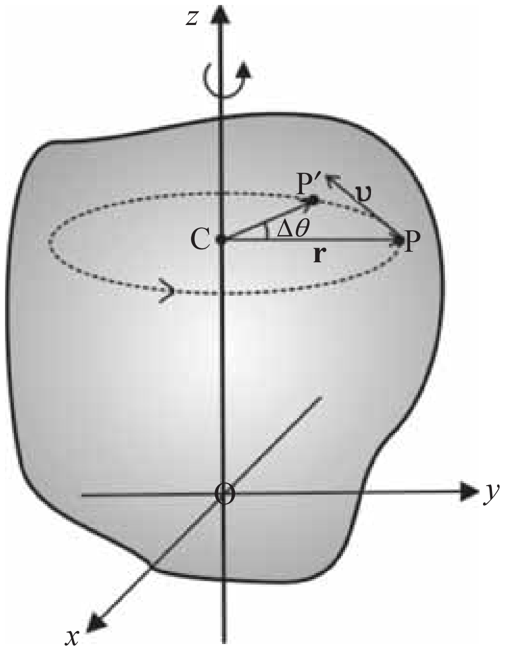
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

નોંધો કે, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ ◀

7.6 કોણીય વેગ અને તેનો રેખીય વેગ સાથેનો સંબંધ (ANGULAR VELOCITY AND ITS RELATION WITH LINEAR VELOCITY)

આ વિભાગમાં આપણે કોણીય વેગ અને ચાકગતિમાં તેની ભૂમિકા શું છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે જોયું છે કે ચાકગતિ કરતાં પદાર્થનું દરેક કણ વર્તુળ-પથ પર ગતિમાન છે. કણોનો રેખીય વેગ તેના કોણીય વેગથી સંબંધિત છે. આ બંને રાશિઓ વચ્ચેના સંબંધમાં જેના વિશે આપણે છેલ્લા વિભાગમાં શીખ્યા તે સદિશ ગુણાકારનો સમાવેશ થાય છે.

ચાલો પાછા આકૃતિ 7.4 પર જઈએ. ઉપર જણાવ્યા મુજબ, સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતા એક દૃઢ



આકૃતિ 7.16 *સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ. (સ્થિર z– અક્ષને અનુલક્ષીને ફરતા એક દૃઢ પદાર્થનો એક કણ (P) અક્ષ પરના કેન્દ્ર (C)ની આસપાસ એક વર્તુળ પર ગતિમાન છે.)*

પદાર્થનો દરેક કણ એક વર્તુળ-પથ પર ગતિ કરે છે. જે અક્ષને લંબ સમતલમાં છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે. આકૃતિ 7.16માં આપણે આકૃતિ 7.4ને ફરીથી દોરેલ છે. જે એક સ્થિર અક્ષ (z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવેલ છે)ની ફરતે ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થનો કોઈ એક લાક્ષણિક કણ (એક બિંદુ P) દર્શાવે છે. આ કણ જેનું કેન્દ્ર C હોય તેવું એક વર્તુળ બનાવે

છે. આ વર્તુળની ત્રિજ્યા r છે, જે બિંદુ 'P'નું અક્ષથી લંબઅંતર દર્શાવે છે. P આગળ કણનો રેખીય વેગ સદિશ **υ** પણ બતાવેલ છે. તે વર્તુળ પર P પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે.

Δt સમયના અંતરાલ (આકૃતિ 7.16) પછી કણની સ્થિતિ P′ છે. કોણ PCP′ એ Δt સમયમાં કણનું કોણીય સ્થાનાંતર $\Delta\theta$ દર્શાવે છે. Δt અંતરાલ પર કણનો સરેરાશ કોણીય વેગ એ $\Delta\theta / \Delta t$ છે. Δt જેમ શૂન્યની નજીક જાય છે (એટલે કે ક્રમશઃ નાનાં મૂલ્યો લે છે.) તેમ ગુણોત્તર $\Delta\theta / \Delta t$ એવા લક્ષ પર પહોંચે છે કે જે P સ્થાન પરના કણનો તાત્ક્ષણિક કોણીય વેગ $d\theta / dt$ છે. આપણે **તાત્ક્ષણિક કોણીય વેગ (Instantaneous Angular Velocity)**ને ω (ગ્રીક અક્ષર ઓમેગા) વડે દર્શાવીએ. આપણે વર્તુળાકાર ગતિના આપણા અભ્યાસ પરથી જાણીએ છીએ કે વર્તુળાકાર ગતિ કરતા કોઈ કણના રેખીય વેગનું માન એ તે કણના કોણીય વેગ સાથે સરળ સંબંધ $\upsilon = \omega r$ દ્વારા સંબંધિત છે. જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

આપણે એમ પણ અવલોકન કરી શકીએ છીએ કે કોઈ પણ ક્ષણે સંબંધ $\upsilon = \omega r$ એ બધા કણોને લાગુ પડે છે. આમ, દૃઢ પદાર્થમાં સ્થિર અક્ષથી લંબ અંતર r_i પરના કણ માટે આપેલ ક્ષણે રેખીય વેગ

$$\upsilon_i = \omega r_i \tag{7.19}$$

દ્વારા અપાય છે. ક્રમ i એ 1 થી n સુધી ચલે છે. જ્યાં n એ પદાર્થના કણોની કુલ સંખ્યા છે.

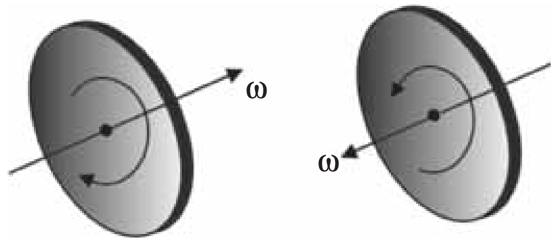
અક્ષ પરના કણો માટે $r = 0$ અને તેથી $\upsilon = \omega r = 0$, તેથી ધરી પરના કણો સ્થિર છે. આમ અક્ષ સ્થિર છે તેની ચકાસણી થાય છે.

નોંધ લો કે **આપણે તમામ કણો માટે સમાન કોણીય વેગ ω નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેથી આપણે ωને સમગ્ર પદાર્થના કોણીય વેગ તરીકે સ્વીકારીશું.**

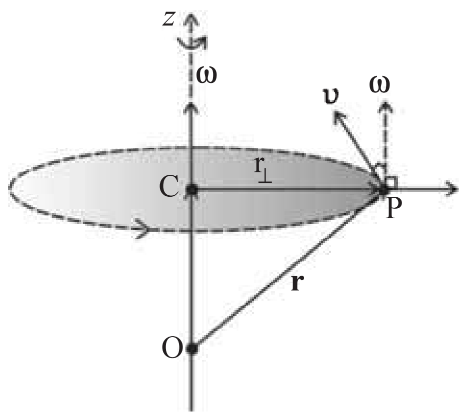
આપણે પદાર્થના શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ માટે એવી લાક્ષણિકતા જણાવી છે કે પદાર્થના તમામ ભાગો કોઈ પણ ક્ષણે સમાન વેગ ધરાવે છે. એ જ રીતે, શુદ્ધ ચાકગતિની લાક્ષણિકતા આપણે પદાર્થના તમામ ભાગો, સમયની કોઈ પણ ક્ષણે સમાન કોણીય વેગ ધરાવે છે તે દ્વારા જણાવી શકીએ છીએ. નોંધ કરો કે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થના પરિભ્રમણની આ લાક્ષણિકતા એ વિભાગ 7.1માં વર્ણવેલ કે પદાર્થના દરેક કણ એક વર્તુળમાં કે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં છે તેની પર ગતિ કરે છે અને તેનું કેન્દ્ર અક્ષ પર છે તેની જેમ જ ચાકગતિને દર્શાવવાની આ અન્ય એક રીત છે.

આપણી ચર્ચામાં અત્યાર સુધી તો કોણીય વેગ અદિશ રાશિ હોય તેવું લાગે છે. હકીકતમાં તે સદિશ છે. આપણે આ હકીકતને સાબિત નહિ કરીએ. પરંતુ આપણે તેને સ્વીકારી લઈશું. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગ સદિશએ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોય છે અને તે જ્યારે જમણા હાથના સ્ક્રૂનું શીર્ષ પદાર્થ સાથે ફેરવવામાં આવે છે ત્યારે જમણા હાથનો સ્ક્રૂ જે દિશામાં આગળ વધે છે એ દિશાનો નિર્દેશ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.17a.)

ઉપર ઉલ્લેખ કર્યા મુજબ આ સદિશનું માન $\omega = d\theta/dt$ છે.



આકૃતિ 7.17(a) *જો જમણા હાથના સ્ક્રૂનું શીર્ષ પદાર્થ સાથે ભ્રમણ કરે તો સ્ક્રૂ કોણીય વેગ ωની દિશામાં આગળ વધે છે. જો પદાર્થના પરિભ્રમણની [સમઘડી અથવા વિષમઘડી] દિશામાં ફેરફાર થાય છે તો તે ωની દિશામાં પણ ફેરફાર કરે છે.*



આકૃતિ 7.17(b) *કોણીય વેગ સદિશ ω એ સ્થિર અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. P પરના કણનો રેખીય વેગ* $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ *છે. જે ω અને* **r** *બંનેને લંબ છે અને કણ દ્વારા બનાવાયેલ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે.*

હવે આપણે સદિશ ગુણાકાર $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ શું છે તે જોઈશું. આકૃતિ 7.17 (b)નો સંદર્ભ લો, જે આકૃતિ 7.16નો એક ભાગ છે અને તેને કણ P નો માર્ગ બતાવવા પુનઃ પ્રસ્તુત કરેલ છે. આ આકૃતિ એ સ્થિર ($z-$અક્ષની) દિશામાંનો સદિશ ω દર્શાવે છે જે સાથે સાથે ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં આ દૃઢ પદાર્થના P પરના કણનું સ્થાનસદિશ $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ પણ છે. નોંધ કરો કે ઉદ્‌ગમબિંદુને પરિભ્રમણના અક્ષ પર પસંદ કરવામાં આવેલ છે.

હવે $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$

પણ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC} = \mathbf{0}$ કેમ કે $\boldsymbol{\omega}$ એ $\mathbf{OC}$ તરફ છે.

જેથી $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$

સદિશ $\boldsymbol{\omega} \times$ CP એ $\boldsymbol{\omega}$ને એટલે કે z-અક્ષને અને P પરના કણ દ્વારા બનાવેલ વર્તુળની ત્રિજ્યા **CP**ને પણ લંબ છે. તેથી તે P આગળ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે. પણ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$નું માન ω (CP) છે કારણ કે $\boldsymbol{\omega}$ અને CP એકબીજાને લંબ છે. આપણે CPને $\mathbf{r}_\perp$ દ્વારા દર્શાવીશું, અગાઉ કર્યું તેમ $\mathbf{r}$ દ્વારા નહિ.

આ રીતે $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ એ $\omega r_\perp$ના માનનો સદિશ છે અને તે P પરના કણ દ્વારા બનાવેલ વર્તુળના સ્પર્શકની દિશામાં છે. P પર રેખીય વેગ સદિશ $\boldsymbol{\upsilon}$નું માન અને દિશા પણ એટલા જ છે.

આમ,

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{7.20}$$

હકીકતમાં, આ સંબંધ સમીકરણ (7.20), એક સ્થિર બિંદુને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં દૃઢ પદાર્થ જેમકે ભમરડા માટે પણ સત્ય છે [આકૃતિ 7.6(a)]. આ કિસ્સામાં $\mathbf{r}$ એ ઉદ્‌ગમ બિંદુ તરીકે લેવાયેલા સ્થિર બિંદુની સાપેક્ષે કણનો સ્થાન સદિશ રજૂ કરે છે.

આપણે નોંધીએ કે **સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ માટે, સદિશ $\boldsymbol{\omega}$ની દિશા સમય સાથે બદલાતી નથી. આમ છતાં, તેમનું માન ક્ષણે ક્ષણે બદલાઈ શકે છે. વધુ વ્યાપક પરિભ્રમણ માટે $\boldsymbol{\omega}$નું માન અને દિશા બંનેમાં ક્ષણે ક્ષણે ફેરફાર થઈ શકે છે.**

7.6.1 કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration)

તમે કદાચ નોંધ્યું હશે કે, જેની સાથે આપણે પહેલેથી જ પરિચિત છીએ તે સ્થાનાંતરણ ગતિના અભ્યાસની દિશામાં જ આપણે ચાકગતિનો અભ્યાસ આગળ ધપાવી રહ્યા છીએ. રેખીય સ્થાનાંતર અને વેગ ($\boldsymbol{\upsilon}$)ના શુદ્ધ ગતિકી ચલોને અનુરૂપ ચાકગતિમાં, કોણીય સ્થાનાંતર અને કોણીય વેગ ($\boldsymbol{\omega}$) છે. એ હવે સ્વાભાવિક છે કે સ્થાનાંતરણ ગતિમાં રેખીય પ્રવેગને વેગના ફેરફારના સમય-દર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કર્યું હતું તેવી જ રીતે ચાકગતિમાં કોણીય પ્રવેગને વ્યાખ્યાયિત કરીએ. આપણે કોણીય વેગના ફેરફારના સમય-દર તરીકે કોણીય પ્રવેગ $\boldsymbol{\alpha}$ને વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આમ,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{7.21}$$

જો પરિભ્રમણની અક્ષ સ્થિર હોય, તો $\boldsymbol{\omega}$ની દિશા અને તેથી, $\boldsymbol{\alpha}$ની દિશા પણ સ્થિર હોય. આ કિસ્સામાં સદિશ સમીકરણ એ એક અદિશ સમીકરણમાં પરિણમે છે.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{7.22}$$

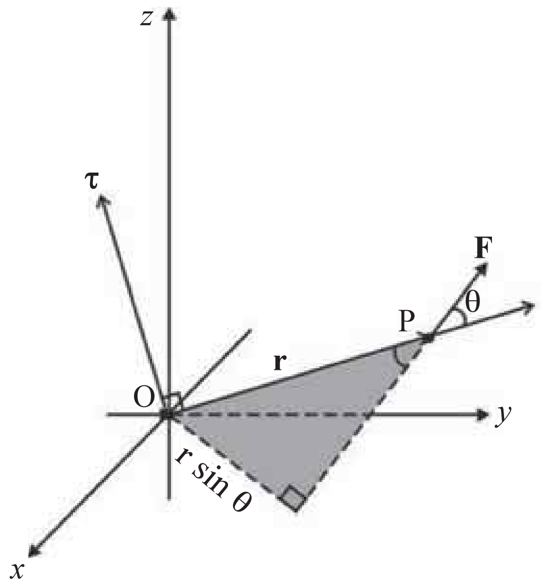
7.7 ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન (TORQUE AND ANGULAR MOMENTUM)

આ વિભાગમાં, આપણે એવી બે ભૌતિકરાશિઓથી અવગત થઈશું કે જેને બે સદિશોના સદિશ ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે. આપણે જોઈશું કે આ રાશિઓ કણોનાં તંત્રોની, ખાસ કરીને દૃઢ પદાર્થોની, ગતિની ચર્ચામાં મહત્ત્વની છે.

7.7.1 બળની ચાકમાત્રા (ટૉર્ક) [Moment of force (Torque)]

આપણે શીખ્યાં છીએ કે સામાન્ય રીતે દૃઢ પદાર્થની ગતિ એ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરણનું સંયોજન છે. જો પદાર્થ કોઈ એક બિંદુ અથવા રેખા સાથે જડિત હોય, તો તેને માત્ર ચાકગતિ હોય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈ પદાર્થની સ્થાનાંતરણ અવસ્થાને બદલવા માટે એટલે કે રેખીય પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરવા માટે બળ જરૂરી છે. આપણે પછી સવાલ કરી શકીએ કે ચાકગતિના કિસ્સામાં બળને સમતુલ્ય શું છે ? વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ પ્રશ્નની ચકાસણી કરવા માટે આપણે બારણું ખોલવાનું કે બંધ કરવાનું ઉદાહરણ લઈએ. બારણું એક દૃઢ પદાર્થ છે, જે મિજાગરામાંથી પસાર થતી સ્થિર ઊભી અક્ષને અનુલક્ષીને ફરી શકે છે. બારણાને કોણ પરિભ્રમણ કરાવે છે ? એ તો સ્પષ્ટ છે કે જ્યાં સુધી કોઈ બળ લગાડવામાં ન આવે ત્યાં સુધી બારણું ભ્રમણ કરતું નથી. પરંતુ ગમે તે બળ આ કાર્ય નથી કરી શકતું. મિજાગરામાંથી પસાર થતી સ્થિર ઊભી અક્ષ પર લગાડવામાં આવતું બળ એ કોઈ પણ ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરી શકતું નથી, આથી વિશેષ આપેલ માનનું એક બળ બારણાની બાહ્ય ધાર પર લંબવત લગાડવામાં આવે, તો તે પરિભ્રમણ ઉત્પન્ન કરવા માટે સૌથી વધુ અસરકારક છે. ચાકગતિમાં એકલું બળ નહિ, પરંતુ તે કેવી રીતે અને ક્યાં લગાડવામાં આવે છે તે પણ મહત્ત્વનું છે.

ચાકગતિમાં બળને સમતુલ્ય ભૌતિકરાશિ **બળની ચાકમાત્રા (Moment of Force)** છે. તેને **ટૉર્ક (Torque)** અથવા **બળયુગ્મ (Couple)** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. (આપણે બળની ચાકમાત્રા અને ટૉર્ક શબ્દોનો ઉપયોગ એકબીજાના પર્યાય તરીકે કરીશું.) પ્રથમ આપણે એક કણના ખાસ કિસ્સા માટે બળની ચાકમાત્રા વ્યાખ્યાયિત કરીશું. ત્યારબાદ આ ખ્યાલ વિસ્તારીને આપણે તેને દૃઢ પદાર્થ સહિત કણોનાં તંત્રોને લાગુ કરીશું. આપણે ચાકગતિની અવસ્થામાં થતાં ફેરફાર એટલે કે દૃઢ પદાર્થના કોણીય પ્રવેગ સાથે પણ તેને સાંકળીશું.



આકૃતિ 7.18 **τ = r × F, τ** *એ* **r** *અને* **F** *ધરાવતાં સમતલને લંબરૂપ છે અને તેની દિશા જમણા હાથના સ્ક્રૂના નિયમ દ્વારા આપવામાં આવે છે.*

જો કોઈ એક બિંદુ P કે જેનું ઉદ્‌ગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે સ્થાન એ સ્થાનસદિશ **r** (આકૃતિ 7.18) વડે આપવામાં આવે છે તે બિંદુએ એક કણ પર બળ **F** લાગે તો ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે કણ પર લાગતા બળની ચાકમાત્રા નીચેના સદિશ ગુણાકાર તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{7.23}$$

બળની ચાકમાત્રા (અથવા ટૉર્ક) એક સદિશ રાશિ છે. તેની સંજ્ઞા τ ગ્રીક અક્ષર ટૌ છે. τનું માન

$$\tau = r\,F\,\sin\theta \tag{7.24a}$$

છે. જ્યાં r એ સ્થાનસદિશ ***r***નું માન એટલે કે લંબાઈ OP છે. F એ બળ **F**નું માન છે અને આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ θ એ ***r*** અને **F** વચ્ચેનો ખૂણો છે.

બળની ચાકમાત્રાનાં પરિમાણો ML^2T^{-2} છે. તેનાં પરિમાણો કાર્ય અથવા ઊર્જાના જેવા જ છે. તેમ છતાં તે કાર્યથી ખૂબ જ અલગ ભૌતિકરાશિ છે.

બળની ચાકમાત્રા એ સદિશ છે. જ્યારે કાર્ય એક અદિશ છે. બળની ચાકમાત્રાનો SI એકમ ન્યૂટન મીટર (N m) છે. બળની ચાકમાત્રાનું માન નીચે મુજબ લખી શકાય છે :

$$\tau = (r\,\sin\theta)\,F = r_{\perp}F \tag{7.24b}$$

$$\text{અથવા } \tau = r\,F\,\sin\theta = rF_{\perp} \tag{7.24c}$$

જ્યાં, $r_{\perp} = r\,\sin\theta$ એ ઉદ્‌ગમબિંદુથી **F**ની કાર્યરેખાનું લંબઅંતર છે અને $F_{\perp}$ (= $F\,\sin\theta$) એ **F**નો **r**ની લંબ દિશામાંનો ઘટક છે. નોંધ કરો કે જો $r = 0$, $F = 0$ અથવા $\theta = 0°$ અથવા 180° હોય તો $\tau = 0$. આમ, જો બળનું માન શૂન્ય હોય અથવા જો બળની કાર્યરેખા ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય, તો બળની ચાકમાત્રા શૂન્ય થાય છે.

આપણે નોંધવું જોઈએ કે **r × F** એ સદિશ ગુણાકાર છે. તેથી બે સદિશોના સદિશ ગુણાકારના બધા જ ગુણધર્મો તેને લાગુ પડે છે. જો બળની દિશા ઉલટાવવામાં આવે તો બળની ચાકમાત્રાની દિશા પણ ઊલટાય છે. જો **r** અને **F** બંનેની દિશા ઉલટાવવામાં આવે, તો બળની ચાકમાત્રાની દિશા તે જ રહે છે (ઊલટાતી નથી).

7.7.2 કણનું કોણીય વેગમાન (Angular Momentum of a particle)

જેમ બળની ચાકમાત્રા એ બળનું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. તે જ પ્રમાણે કોણીય વેગમાન નામની રાશિ રેખીય વેગમાનનું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. પ્રથમ આપણે એક કણના વિશિષ્ટ કિસ્સા માટે કોણીય વેગમાનને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને એક કણની ગતિના સંદર્ભમાં તેની ઉપયોગિતા જોઈશું. ત્યાર બાદ આપણે દૃઢ પદાર્થ સહિતના કણોનાં તંત્રો માટે કોણીય વેગમાનની આ વ્યાખ્યાને લાગુ પાડીશું.

બળની ચાકમાત્રાની જેમ કોણીય વેગમાન પણ એક સદિશ ગુણાકાર છે. તે (રેખીય) વેગમાનની ચાકમાત્રા તરીકે પણ ઓળખાય છે. આ પદ પરથી કોણીય વેગમાન કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે તેનું અનુમાન કોઈ કરી શકે છે.

ઉદ્‌ગમબિંદુ O થી **r** સ્થાને, m દળનો અને **p** રેખીય વેગમાન ધરાવતો એક કણ લો. ઉદ્‌ગમબિંદુ Oની સાપેક્ષે કોણીય વેગમાન ***l***ને

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{7.25a}$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

આ કોણીય વેગમાન સદિશનું માન

$$l = r\,p\,\sin\theta \tag{7.26a}$$

છે, જ્યાં p એ **p**નું માન છે અને θ એ **r** અને **p** વચ્ચેનો ખૂણો છે. આમ આપણે લખી શકીએ કે,

$$l = r\,p_{\perp} \text{ અથવા } r_{\perp}p \tag{7.26b}$$

જ્યાં $r_{\perp}$ (= $r\,\sin\theta$) એ ઉદ્‌ગમબિંદુથી **p**ની દિશારેખાનું લંબઅંતર છે અને $p_{\perp}$ (= $p\,\sin\theta$) એ **p**નો **r**ને લંબ દિશામાંનો ઘટક છે. જ્યારે રેખીય વેગમાન લુપ્ત પામે ($p = 0$) અથવા જો કણ ઉદ્‌ગમબિંદુ પર હોય ($r = 0$) અથવા જો **p**ની દિશારેખા ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય $\theta = 0°$ અથવા 180° ત્યારે આપણે અપેક્ષા મુજબ કોણીય વેગમાન શૂન્ય ($l = 0$) થાય.

ભૌતિકરાશિઓ, બળની ચાકમાત્રા અને કોણીય વેગમાન તેમની વચ્ચે મહત્ત્વપૂર્ણ સંબંધ ધરાવે છે. તે બળ અને રેખીય વેગમાન વચ્ચેના સંબંધનો પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે. એક કણના સંદર્ભમાં સંબંધ તારવવા માટે આપણે સમયના સાપેક્ષે $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$નું વિકલન કરીએ.

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

જમણી બાજુએ વિકલન માટે ગુણાકારનો નિયમ લાગુ પાડતાં,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

હવે, કણનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon} = d\mathbf{r}/dt$ છે અને $\mathbf{p} = m\boldsymbol{\upsilon}$. આના કારણે

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \boldsymbol{\upsilon} \times m\,\boldsymbol{\upsilon} = 0.$$

કારણ કે, બે સમાંતર સદિશોનો સદિશ ગુણાકાર શૂન્ય થાય છે. વધુમાં $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ છે.

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

આથી $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$

અથવા $$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad (7.27)$$

આમ, કણના કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર તેના પર લાગતાં ટૉર્ક જેટલો છે. આ સમીકરણ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$નું પરિભ્રમણીય સમતુલ્ય છે, જે એક કણની સ્થાનાંતરિત ગતિ માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમને વ્યક્ત કરે છે.

કણોના કોઈ તંત્ર માટે ટૉર્ક અને કોણીય વેગમાન (Torque and angular momentum for a system of particles)

આપેલ બિંદુને અનુલક્ષીને કણોના તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન મેળવવા માટે આપણે પ્રત્યેક કણના કોણીય વેગમાનોનો સદિશ સરવાળો કરવો પડે છે. આમ, n કણોના તંત્ર માટે

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + ... + \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i$$

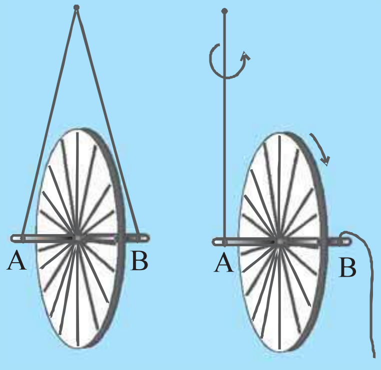
iમા કણના કોણીય વેગમાનને

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

વડે દર્શાવાય છે.

જ્યાં, $\mathbf{r}_i$ એ આપેલ ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં iમાં કણનો સ્થાનસદિશ છે અને $\mathbf{p}_i = (m_i\boldsymbol{\upsilon}_i)$ એ કણનું રેખીય વેગમાન છે. (આ કણનું દળ m_i અને વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_i$ છે.) આપણે કણોના

સાઈકલની રિંગ સાથે પ્રયોગ



પ્રારંભમાં પછીથી

એક સાઈકલની રિંગ લો અને બંને બાજુએ તેની ધરી (એક્સલને) લંબાવો. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે દોરી, બંને છેડા A અને B પર બાંધો. આ બંને દોરીને એક હાથમાં એ રીતે પકડી રાખો કે રિંગ શિરોલંબ રહે. જો તમે એક દોરીને છોડો છો તો રિંગ નમી જશે. હવે બંને દોરીને એક હાથમાં રાખીને રિંગને ઊભી સ્થિતિમાં રાખીને વ્હીલને બીજા હાથથી ધરીની ફરતે ઝડપી ફેરવો. પછી તમારા હાથમાંથી એક દોરી, દા.ત., Bને છોડો અને શું થાય છે તેનું અવલોકન કરો.

રિંગ ઊર્ધ્વ સમતલમાં ફરતી રહે છે અને તેના પરિભ્રમણનું સમતલ દોરી Aની આસપાસ ફરે છે. આપણે કહીએ છીએ કે રિંગની પરિભ્રમણ-અક્ષ અથવા સમતુલ્ય રીતે તેનું કોણીય વેગમાન દોરી Aને અનુલક્ષીને ઘૂર્ણન (precession) કરે છે.

આ ફરતી રિંગ કોણીય વેગમાન ઉત્પન્ન કરે છે. આ કોણીય વેગમાનની દિશા નિર્ધારિત કરો. જ્યારે તમે ફરતી રિંગને દોરી A વડે પકડી રાખો છો ત્યારે ટૉર્ક પેદા થાય છે. (અમે ટૉર્ક કેવી રીતે પેદા થાય છે અને તેની દિશા શું છે તે શોધવાનું તમારે માટે છોડી દઈએ છીએ.) આ કોણીય વેગમાન પર ટૉર્કની અસર તે કોણીય વેગમાન અને ટૉર્ક એમ બંનેને લંબ અક્ષની આસપાસ તેનું ઘૂર્ણન કરવાની છે. આ તમામ નિવેદનો ચકાસો.

કોઈ એક તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ છીએ :

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25b)$$

આ એક એકાકી કણના કોણીય વેગમાનની વ્યાખ્યા (સમીકરણ 7.25a)નું કણોના તંત્ર માટેનું વ્યાપકીકરણ છે.

સમીકરણો (7.23) અને (7.25b)નો ઉપયોગ કરીને આપણે

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\mathbf{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (7.28a)$$

મેળવી શકીએ, જ્યાં $\boldsymbol{\tau}_i$ એ iમા કણ પર લાગતું ટૉર્ક છે.

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

iમા કણ પર લાગતું બળ $\mathbf{F}_i$ એ કણ પર લાગતાં બાહ્ય બળો $\mathbf{F}_i^{ext}$ અને તંત્રના બીજા કણો દ્વારા તેના પર લાગતાં આંતરિક બળો $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$નો સદિશ સરવાળો છે. આથી, આપણે કુલ ટૉર્કમાં બાહ્ય અને આંતરિક બળોના ફાળાને જુદા પાડી શકીએ છીએ.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{\text{int}}$$

જ્યાં, $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$

અને $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}}$

આપણે ન્યૂટનનો માત્ર ત્રીજો નિયમ-કે તંત્રના કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો એ સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં હોય છે-તે જ નહિ પરંતુ આ બળો તે બંને કણોને જોડતી રેખાની દિશામાં હોય છે તેમ પણ ધારેલ છે. આ કિસ્સામાં તંત્ર પરના કુલ ટૉર્કમાં આંતરિક બળોનો ફાળો શૂન્ય હોય છે. કારણ કે, પ્રત્યેક ક્રિયા-પ્રતિક્રિયા યુગ્મ બળોની જોડથી પરિણમતું ટૉર્ક શૂન્ય છે. આમ, આપણને $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = 0$ અને તેથી $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$.

પણ $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ હોવાથી સમીકરણ (7.28a) પરથી

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \tag{7.28b}$$

આમ, **કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે** (આપણી નિર્દેશ-ફ્રેમમાં તેને ઉદ્ગમબિંદુ તરીકે લીધેલ છે.) **કણોના કોઈ એક તંત્ર પરના કુલ કોણીય વેગમાનના સમય સાથે ફેરફારનો દર એ આ જ બિંદુની સાપેક્ષે તંત્ર પર લાગતાં બાહ્ય ટૉર્ક** (એટલે કે બાહ્ય બળોથી ઉદ્ભવતા ટૉર્ક)**ના સરવાળા બરાબર છે.** સમીકરણ (7.28b) એ સમીકરણ (7.23)ના એકાકી કણના કિસ્સાનું કણોના તંત્ર માટેનું વ્યાપકીકરણ છે. નોંધો કે જ્યારે આપણી પાસે ફક્ત એક જ કણ હોય ત્યારે કોઈ પણ આંતરિક બળો કે ટૉર્ક હોતાં નથી. સમીકરણ (7.28b) એ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

નું ચાકગતિમાંનું સમતુલ્ય છે.

ધ્યાન રહે કે સમીકરણ (7.17)ની જેમ સમીકરણ (7.28b) એ કણોના કોઈ પણ તંત્રને લાગુ પડે છે. પછી ભલે તે દઢ પદાર્થ હોય કે વિભિન્ન પ્રકારની આંતરિક ગતિ ધરાવતા સ્વતંત્ર કણોનું તંત્ર.

કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ (Conservation of angular momentum)

જો $\boldsymbol{\tau}_{ext} = 0$ હોય તો સમીકરણ (7.28b) પરથી,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

અથવા $\mathbf{L}$ = અચળ (7.29a)

થશે. આમ, જો કણોના તંત્ર પરનું કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો આ તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ થશે, એટલે કે અચળ રહેશે. સમીકરણ (7.29a) એ ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે.

$L_x = K_1$, $L_y = K_2$ અને $L_z = K_3$ (7.29b)

અહીં, K_1, K_2 અને K_3 એ અચળાંકો છે. L_x, L_y અને L_z એ કુલ કોણીય વેગમાન $\mathbf{L}$ના અનુક્રમે x, y અને z-અક્ષો પરનાં ઘટકો છે. કુલ કોણીય વેગમાન સંરક્ષિત છે આ વિધાનનો અર્થ એ છે કે આ ત્રણેય ઘટકો પણ સંરક્ષિત છે.

સમીકરણ (7.29a) એ સમીકરણ (7.18a) એટલે કે કણોના કોઈ પણ તંત્ર માટે કુલ રેખીય વેગમાનના સંરક્ષણના નિયમનું ચાકગતિમાંનું સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (7.18a)ની જેમ તેની પણ વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓમાં ઘણી ઉપયોગિતાઓ છે. આ પ્રકરણમાં હવે પછી આપણે તેની કેટલીક રસપ્રદ ઉપયોગિતાઓ જોઈશું.

▶ *ઉદાહરણ 7.5* ઉદ્ગમબિંદુને અનુલક્ષીને બળ $7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$નો ટૉર્ક શોધો. જે કણ પર બળ લાગે છે તેનો સ્થાનસદિશ $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ છે.

ઉકેલ અહીં, $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

અને $\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

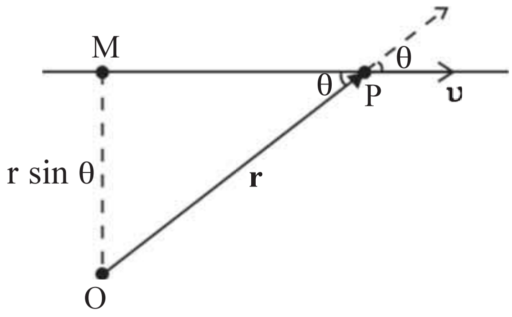
આપણે ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ શોધવા નિશ્ચાયકના નિયમનો ઉપયોગ કરીશું.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3+7)\hat{\mathbf{k}}$$

અથવા $\boldsymbol{\tau} = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ ◀

▶ *ઉદાહરણ 7.6* દર્શાવો કે કોઈ એક બિંદુની સાપેક્ષે અચળ વેગથી ગતિ કરતાં કોઈ એક કણનું કોણીય વેગમાન સમગ્ર ગતિ દરમિયાન અચળ રહે છે.

ઉકેલ ધારો કે, $\boldsymbol{\upsilon}$ વેગ ધરાવતો આ કણ કોઈક ક્ષણે P બિંદુ પર છે. આપણે એક યાદચ્છિક બિંદુ Oની સાપેક્ષે કણના કોણીય વેગમાનની ગણતરી કરવા માંગીએ છીએ.



આકૃતિ 7.19

કોણીય વેગમાન $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{\upsilon}$ છે. તેનું માન $m\upsilon r \sin\theta$ છે, જ્યાં θ એ આકૃતિ 7.19માં બતાવ્યા પ્રમાણે $\mathbf{r}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ વચ્ચેનો કોણ છે. જોકે, કણ સમય સાથે સ્થાન બદલે છે, તેમ છતાં $\boldsymbol{\upsilon}$ની દિશા-રેખા સમાન જ રહે છે અને તેથી OM = $r \sin\theta$ એ અચળ છે.

વધુમાં $\boldsymbol{l}$ ની દિશા $\mathbf{r}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ના સમતલને લંબ છે જે આકૃતિના પૃષ્ઠની અંદરની તરફની છે. આ દિશા સમય સાથે બદલાતી નથી. આ રીતે, $\boldsymbol{l}$નું માન અને દિશા પણ બદલાતી નથી અને તેથી તે સંરક્ષિત છે. આ કણ પર કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક છે ? ◀

7.8 દૃઢ પદાર્થનું સંતુલન (EQUILIBRIUM OF A RIGID BODY)

હવે આપણે કણોનાં વ્યાપક તંત્રોની ગતિના બદલે દૃઢ પદાર્થોની ગતિ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરવા જઈ રહ્યા છીએ.

બાહ્ય બળો દૃઢ પદાર્થ પર શું અસર કરે છે તે આપણે સ્મરણ કરીએ. (હવેથી આપણે વિશેષણ 'બાહ્ય'નો ઉપયોગ નહિ કરીએ, કારણ કે જ્યાં સુધી અન્યથા જણાવ્યું ના હોય ત્યાં સુધી આપણે ફક્ત બાહ્ય બળો અને ટૉર્ક સાથે વ્યવહાર કરીશું.) આ બળો દૃઢ પદાર્થની ગતિની સ્થાનાંતર અવસ્થાને ફેરફાર કરી શકે છે. એટલે કે તે સમીકરણ (7.17) મુજબ તેનું કુલ રેખીય વેગમાન બદલે છે. પરંતુ બળોની આ એક માત્ર જ અસર નથી. પદાર્થ પરનું કુલ ટૉર્ક જો શૂન્ય ન થાય તો આવા ટૉર્ક દૃઢ પદાર્થની ચાકગતિની અવસ્થામાં પરિવર્તન લાવે છે. એટલે તે સમીકરણ (7.28b)ના અનુસાર પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન બદલે છે.

દૃઢ પદાર્થ જો તેના બંને, રેખીય વેગમાન અને કોણીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતા ન હોય એટલે કે, પદાર્થ રેખીય પ્રવેગ કે કોણીય પ્રવેગ ન ધરાવે, તો યાંત્રિક સંતુલનમાં કહેવાય છે. આનો અર્થ એ થાય કે,

(1) દૃઢ પદાર્થ પરનું કુલ બળ એટલે કે બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય છે.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30a)$$

જો પદાર્થ પરનું કુલ બળ શૂન્ય છે, તો પદાર્થનું કુલ રેખીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતું નથી. સમીકરણ (7.30a) પદાર્થની સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટેની શરત આપે છે.

(2) કુલ ટૉર્ક એટલે કે દૃઢ પદાર્થ પરના બધા ટૉર્કનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય છે.

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + ... + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \qquad (7.30b)$$

જો દૃઢ પદાર્થ પર કુલ ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન સમય સાથે બદલાતું નથી. સમીકરણ (7.30 b) પદાર્થની ચાકગતિના સંતુલન માટેની શરત આપે છે.

કોઈ એ પ્રશ્ન પણ ઉપસ્થિત કરી શકે છે કે જે ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે ટૉર્ક લેવામાં આવેલ છે તે બિંદુ સ્થાનાંતરિત થાય તો શું ચાકગતિના સંતુલનની શરત [સમીકરણ 7.30(b)] માન્ય રહે ? કોઈ એમ પણ બતાવી શકે છે કે જો સ્થાનાંતરણ સંતુલનની શરત [સમીકરણ 7.30(a)] દૃઢ પદાર્થ માટે લાગુ પડતી હોય તો ઉદ્‌ગમબિંદુના આવા કોઈ પણ સ્થાનાંતરણની અસર થશે નહિ. એટલે કે ચાકગતિના સંતુલનની શરત જેને અનુલક્ષીને ટૉર્ક લેવામાં આવેલ હોય તે ઉદ્‌ગમબિંદુના સ્થાન પર આધાર રાખતી નથી (સ્વતંત્ર છે). ઉદાહરણ 7.7 એ બળ-યુગ્મના એટલે કે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બે બળોના વિશિષ્ટ કિસ્સામાં આ પરિણામની સાબિતી આપે છે. આ પરિણામનું n બળો માટેનું વ્યાપક સ્વરૂપ તમારા માટે એક સ્વાધ્યાય તરીકે છોડી દેવામાં આવેલ છે.

સમીકરણ (7.30a) અને સમીકરણ (7.30b) બંને સદિશ સમીકરણો છે. તેઓ દરેક ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે. સમીકરણ (7.30a) એ

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ અને } \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (7.31a)$$

ને અનુરૂપ છે, જ્યાં F_{ix}, F_{iy} અને F_{iz} એ બળ $\mathbf{F}_i$ના અનુક્રમે x, y અને z ઘટકો છે. એ જ રીતે, સમીકરણ (7.30b) એ નીચેનાં ત્રણ અદિશ સમીકરણોને સમતુલ્ય છે :

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0 \ \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \text{ અને } \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (7.31b)$$

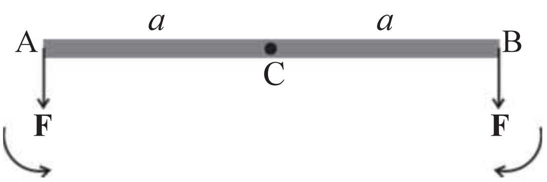
જ્યાં, τ_{ix}, τ_{iy} અને τ_{iz} એ τ_iના અનુક્રમે x, y અને z ઘટકો છે.

સમીકરણ (7.31a) અને (7.31b) એ કોઈ એક દૃઢ પદાર્થના યાંત્રિક સંતુલન માટેની જરૂરી એવી છ સ્વતંત્ર (એકબીજા પર નિર્ભર ન હોય તેવી) શરતો આપે છે. ઘણી સમસ્યાઓમાં, પદાર્થ પર લાગતાં તમામ બળો એક જ સમતલમાં હોય છે. ત્યારે યાંત્રિક સંતુલન માટે માત્ર ત્રણ જ શરતો સંતુષ્ટ થવાની જરૂર પડે છે. આમાંની બે શરતો સ્થાનાંતરણ સંતુલનને અનુરૂપ છે; સમતલમાં કોઈ પણ બે લંબ અક્ષોને અનુલક્ષીને બળોનાં ઘટકોનો સરવાળો શૂન્ય જ હોવો જોઈએ. ત્રીજી શરત ચાકગતિય સંતુલનને અનુલક્ષીને છે. બળોના સમતલને લંબ કોઈ પણ અક્ષની સાપેક્ષે ટૉર્કનાં ઘટકોનો સરવાળો શૂન્ય જ હોવો જોઈએ.

દૃઢ પદાર્થના સંતુલનની શરતોની સરખામણી એક કણ માટેની શરતો સાથે થઈ શકે છે, જેને આપણે પહેલાનાં પ્રકરણોમાં લીધી હતી. ચાકગતિની કોઈ વિચારણા એક કણને લાગુ પડતી નથી, તેથી માત્ર સ્થાનાંતરણ સંતુલન (સમીકરણ 7.30a) માટેની જ શરતો કણને લાગુ પડે છે. આમ, એક કણના સંતુલન માટે તેના પરનાં તમામ બળોનો સદિશ સરવાળો શૂન્ય હોવો જોઈએ. આ તમામ બળો એ એક જ કણ પર કાર્યરત હોવાથી તેઓ એક બિંદુગામી હોવાં જોઈએ. અગાઉનાં પ્રકરણોમાં એક બિંદુગામી બળોની અસરમાં સંતુલનની ચર્ચા કરવામાં આવી છે.

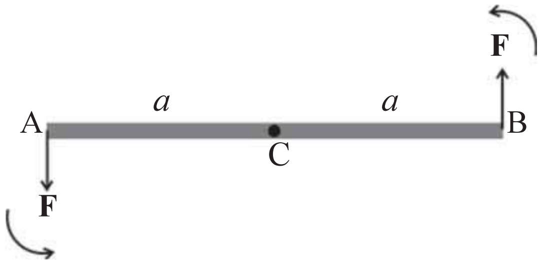
કોઈ પદાર્થ આંશિક સંતુલનમાં હોઈ શકે છે, એટલે કે, તે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં હોય અને ચાકગતિય સંતુલનમાં ન હોય, અથવા તે ચાકગતિય સંતુલનમાં હોય અને સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં ન હોય.

એક હલકા (એટલે કે અવગણ્ય દળના) સળિયા (AB)ને ધ્યાનમાં લો. જેના બે છેડા (A અને B) પર સમાન માનના બે સમાંતર બળ આકૃતિ 7.20(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયાને લંબરૂપે લગાડવામાં આવે છે.



આકૃતિ 7.20(*a*)

AB નું મધ્યબિંદુ C લો. CA = CB = a. A અને B પર બંને બળોની ચાકમાત્રાનું માન (aF) સમાન પરંતુ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વિરુદ્ધ દિશામાં છે. આ સળિયા પરની બળની કુલ ચાકમાત્રા શૂન્ય હશે. આ તંત્ર ચાકગતિય સંતુલનમાં છે. પરંતુ તે સ્થાનાંતરણ સંતુલનમાં નથી. $\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$.

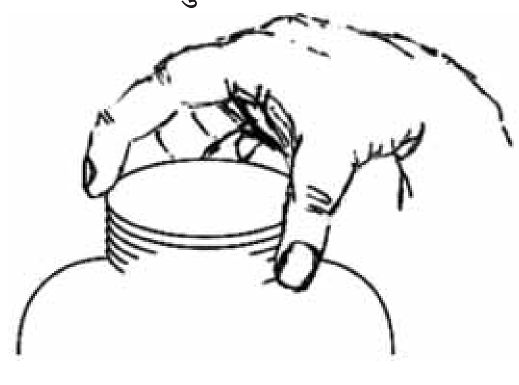


આકૃતિ 7.20(*b*)

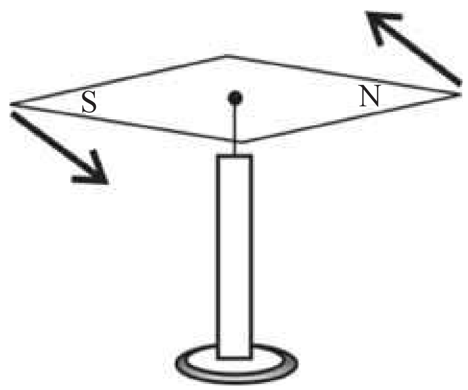
આકૃતિ 7.20(a)માં B છેડા પરના બળને આકૃતિ 7.20(b)માં ઉલટાવેલ છે. આમ, આપણી પાસે સળિયાને લંબરૂપે એક છેડા A પર અને બીજા છેડા B પર લાગતાં બે સમાન અને વિરુદ્ધ બળો સાથેનો તે જ સળિયો છે. બંને બળોની ચાકમાત્રા સમાન છે. પરંતુ તેઓ વિરુદ્ધ દિશામાં નથી. તેઓ સમાન દિશામાં કાર્ય કરે છે અને સળિયામાં વિષમઘડીના દિશામાં ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે. પદાર્થ પર કુલ બળ શૂન્ય છે. તેથી પદાર્થ સ્થાનાંતરીય સંતુલનમાં છે. પરંતુ તે ચાકગતિય સંતુલનમાં નથી. જોકે, સળિયો કોઈ પણ રીતે સ્થિર નથી. તે શુદ્ધ ચાકગતિ (એટલે કે સ્થાનાંતરીય વગરની ચાકગતિ) કરે છે.

જુદી જુદી કાર્યરેખા ધરાવતા બે સમાન મૂલ્યના અને વિરુદ્ધ દિશામાંનાં બળોની જોડને **બળયુગ્મ (Couple)** અથવા **ટૉર્ક** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. બળયુગ્મ સ્થાનાંતરીય ગતિ વિના ચાકગતિ પેદા કરે છે.

જ્યારે આપણે બોટલના ઢાંકણને ઘુમાવીને ખોલીએ છીએ, ત્યારે આપણી આંગળીઓ ઢાંકણાં પર એક બળયુગ્મ લગાડે છે. (આકૃતિ 7.21(a)). આકૃતિ 7.21(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે પૃથ્વીના ચુંબકીયક્ષેત્રમાં હોકાયંત્રની સોય એ એક અન્ય જાણીતું ઉદાહરણ છે. પૃથ્વીનું ચુંબકીયક્ષેત્ર ઉત્તર અને દક્ષિણ ધ્રુવો પર સમાન બળો લગાડે છે. ઉત્તર ધ્રુવ પર લાગતું બળ ઉત્તર તરફ અને દક્ષિણ ધ્રુવ પર લાગતું બળ દક્ષિણ તરફ છે. સોય જ્યારે ઉત્તર-દક્ષિણ દિશાનો નિર્દેશ કરે તે સિવાય, બે બળોની ક્રિયા-રેખા એક જ નથી હોતી. આમ, પૃથ્વીના ચુંબકીયક્ષેત્રને કારણે સોય પર એક **બળયુગ્મ** લાગે છે.



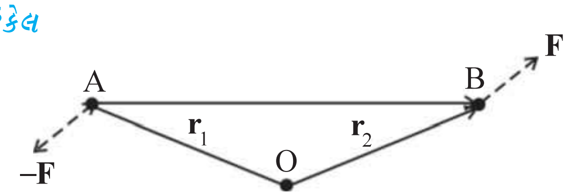
આકૃતિ 7.21(*a*) *ઢાંકણ ખોલવા આપણી આંગળીઓ એક બળયુગ્મ લગાડે છે.*



આકૃતિ 7.21(b) પૃથ્વીનું ચુંબકીયક્ષેત્ર હોકાયંત્રની સોય પર સમાન મૂલ્યનાં બે બળો વિરુદ્ધ દિશામાં લગાડે છે. આ બે બળો બળયુગ્મ બનાવે છે.

> ▶ *ઉદાહરણ 7.7* દર્શાવો કે કોઈ બળયુગ્મની ચાકમાત્રા એ બિંદુ પર આધારિત નથી કે જે બિંદુને અનુલક્ષીને તમે ચાકમાત્રાઓ લીધી હોય.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.22

આકૃતિ 7.22માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક દૃઢ પદાર્થ પર લાગતું એક બળયુગ્મ ધ્યાનમાં લો. બિંદુ B અને A પર અનુક્રમે બળો **F** અને **−F** લાગે છે. ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે આ બિંદુઓના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\mathbf{r}_1$ અને $\mathbf{r}_2$ છે. આવો, ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે બળોની ચાકમાત્રાઓ લઈએ.

બળયુગ્મની ચાકમાત્રા = આ યુગ્મ બનાવતાં બે બળોની ચાકમાત્રાનો સરવાળો

$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$

$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$

$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$

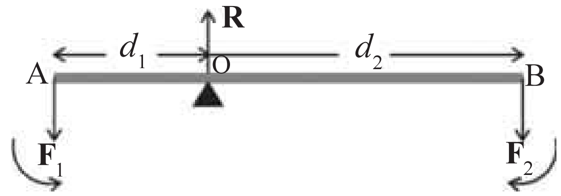
પણ, $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$, અને તેથી $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

આથી, બળયુગ્મની ચાકમાત્રા $\mathbf{AB} \times \mathbf{F}$ છે.

સ્પષ્ટપણે આ ઉદ્‌ગમબિંદુથી એટલે કે તે બિંદુ કે જેને અનુલક્ષીને આપણે બળોની ચાકમાત્રા લીધી હતી તેનાથી સ્વતંત્ર છે. ◀

7.8.1 ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત (Principle of moments)

એક આદર્શ ઉચ્ચાલન (લિવર) મૂળભૂત રીતે, એક હલકો (એટલે કે અવગણ્ય દ્રવ્યમાનનો) સળિયો છે કે જે તેની લંબાઈ પરના કોઈ એક બિંદુ પર કિલકિત કરેલ (pivoted) છે. આ બિંદુને આધારબિંદુ (fulcrum) કહેવામાં આવે છે. બાળકોના રમતનાં મેદાનમાં જોવા મળતો ચીચવો (see-saw) એ એક ઉચ્ચાલનનું વિશિષ્ટ ઉદાહરણ છે. બે બળો F_1 અને F_2 એકબીજાને સમાંતર અને સામાન્ય રીતે લિવરને લંબ આકૃતિ 7.23માં બતાવ્યા પ્રમાણે આધારબિંદુથી અનુક્રમે d_1 અને d_2 અંતરે લાગે છે.



આકૃતિ 7.23

ઉચ્ચાલન (લિવર) એ યાંત્રિક સંતુલનમાંનું એક તંત્ર છે. ધારો કે **R** એ આધારબિંદુ પર આધાર દ્વારા પ્રતિક્રિયાબળ છે. **R** એ બળો F_1 અને F_2ની વિરુદ્ધ દિશામાં છે. સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે,

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

ચાકગતિય સંતુલન માટે જો આપણે આધારબિંદુને અનુલક્ષીને ચાકમાત્રા લઈએ, તો ચાકમાત્રાનો સરવાળો શૂન્ય હોવો જોઈએ.

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

સામાન્ય રીતે વિષમઘડી દિશા (સમઘડી દિશા)માં ચાકમાત્રા ધન (ઋણ) લેવામાં આવે છે. નોંધો કે R એ આધારબિંદુ પર જ લાગે છે અને આધારબિંદુને અનુલક્ષીને તે શૂન્ય ચાકમાત્રા ધરાવે છે.

લિવરના કિસ્સામાં F_1 એ સામાન્યતઃ થોડુંક વજન હોય છે. જેને ઉંચકવાનું હોય છે તેને ભાર (load) કહેવામાં આવે છે અને આધારબિંદુથી તેના અંતર d_1ને ભારભુજા (load arm) કહેવાય છે. બળ F_2 એ ભારને ઉપાડવા માટે લાગુ પાડવામાં આવતો પ્રયાસ (effort) છે. આધારબિંદુથી તેના અંતર d_2ને પ્રયાસભુજા (effort arm) કહેવાય છે.

સમીકરણ (ii)ને

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad \text{(7.32a)}$$

અથવા ભારભુજા × ભાર = પ્રયાસભુજા × પ્રયાસ તરીકે લખી શકાય છે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણ ઉચ્ચાલન માટે ચાકમાત્રાના સિદ્ધાંતને વ્યક્ત કરે છે. ગુણોત્તર F_1/F_2ને યાંત્રિક-લાભ (Mechanical Advantage - M.A.) કહેવાય છે.

$$\text{M.A.} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad \text{(7.32b)}$$

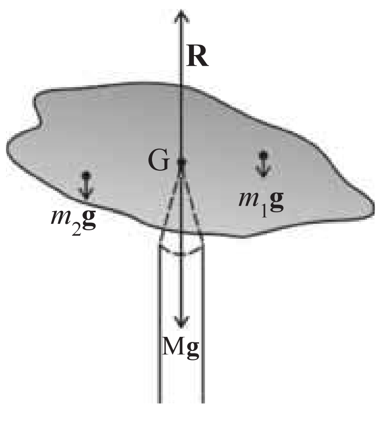
જો પ્રયાસભુજા d_2 એ ભારભુજા કરતાં મોટી હોય, તો યાંત્રિક-લાભ એક કરતાં મોટો હોય છે. એક કરતા મોટો યાંત્રિક-લાભનો અર્થ એ થાય છે કે, ઓછા પ્રયાસથી વધુ ભાર

ઉંચકી શકાય છે. ચીચવા સિવાય પણ તમારી આસપાસ ઉચ્ચાલનના (લિવરનાં) કેટલાંય ઉદાહરણો મળી આવશે. તુલાનો દંડ એ પણ એક ઉચ્ચાલન છે. આ પ્રકારનાં વધુ ઉદાહરણો શોધવાનો પ્રયાસ કરો અને દરેક કિસ્સામાં ઉચ્ચાલન માટે આધારબિંદુ, પ્રયાસ અને પ્રયાસભુજા તથા ભાર અને ભારભુજાને ઓળખો.

તમે એ સહેલાઈથી બતાવી શકો છો કે જો આ સમાંતર બળો F_1 અને F_2 એ ઉચ્ચાલનને લંબ ન હોય, પરંતુ કોઈ અન્ય કોણે લાગુ પડે ત્યારે પણ ચાકમાત્રાનો સિદ્ધાંત લાગુ પાડી શકાય છે.

7.8.2 ગુરુત્વ કેન્દ્ર (Centre of gravity)

તમારામાંથી ઘણા બધાને આંગળીની ટોચ પર તમારી નોટબુકને સંતુલિત કરવાનો અનુભવ હશે. આકૃતિ 7.24 એ આવા જ એક પ્રયોગને દર્શાવે છે જે તમે સરળતાથી કરી શકો છો. એક અનિયમિત આકારનું પૂંઠું (કાર્ડબૉર્ડ) લો અને પેન્સિલ જેવી પાતળી અણીવાળી એક વસ્તુ લો. તમે કેટલાક પ્રયત્નો દ્વારા કાર્ડબૉર્ડ પર એક બિંદુ Gને શોધી શકો છો કે જ્યાં તે પેન્સિલની અણી પર સંતુલિત થઈ શકે છે. (કાર્ડબૉર્ડ આ સ્થિતિમાં સમક્ષિતિજ રહે છે.) આ સંતુલનનું બિંદુ એ કાર્ડબૉર્ડનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર (CG) છે. પેન્સિલની અણી ઊર્ધ્વદિશામાં ઉપર તરફનું બળ આપે છે જેના કારણે કાર્ડબૉર્ડ યાંત્રિક સંતુલનમાં રહે છે. આકૃતિ 7.24માં બતાવ્યા પ્રમાણે, અણીનું પ્રતિક્રિયા બળ કાર્ડબૉર્ડનું કુલ વજન (એટલે કે, તેના પરનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ) $M\mathbf{g}$ને સમાન અને વિરુદ્ધ દિશામાં છે. અને તેથી કાર્ડબૉર્ડ સ્થાનાંતરીય સંતુલનમાં છે. તે ચાકગતિય સંતુલનમાં પણ છે. જો તે આમ ન હોય તો અસંતુલિત ટૉર્કને કારણે તે એક તરફ નમી અને પડી જશે. એકાકી કણો પર ગુરુત્વાકર્ષણને લીધે લાગતાં બળો જેવાં કે, $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$, ... વગેરેના કારણે કાર્ડબૉર્ડ પર ટૉર્ક લાગે છે જેના થકી તે સંતુલનમાં રહે છે.



આકૃતિ 7.24 *પૂંઠાને પેન્સિલની અણી પર સંતુલિત કરવું. આધારબિંદુ G એ ગુરુત્વ કેન્દ્ર છે.*

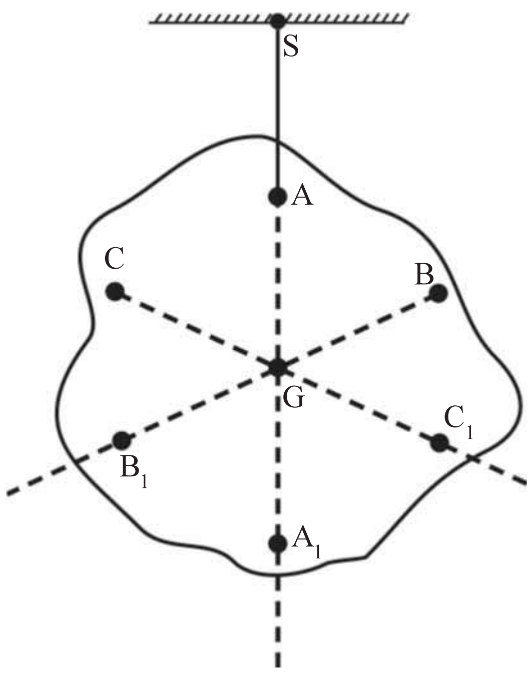
કાર્ડબૉર્ડનું CG એવી રીતે નિર્ધારિત કરવામાં આવે છે કે બળો $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ .... વગેરેના કારણે તેના પરનું કુલ ટૉર્ક શૂન્ય થાય.

જો $\mathbf{r}_i$ એ વિસ્તરીત પદાર્થના iમા કણનો તેના CGની સાપેક્ષે સ્થાનસદિશ હોય, તો પછી CGની સાપેક્ષે કણો પર ગુરુત્વાકર્ષણ બળને કારણે, ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}$ લાગે છે. CGને અનુલક્ષીને કુલ ગુરુત્વાકર્ષણ ટૉર્ક શૂન્ય છે. એટલે કે,

$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (7.33)$$

તેથી આપણે પદાર્થના CGને એ બિંદુ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ કે જ્યાં પદાર્થ પરનું કુલ ગુરુત્વાકર્ષણ ટૉર્ક શૂન્ય છે.

આપણે નોંધ્યું છે કે સમીકરણ (7.33)માં $\mathbf{g}$ બધા જ કણો માટે સમાન છે અને તેથી તે સરવાળામાં બહાર આવે છે. કેમ કે $\mathbf{g}$ એ શૂન્ય નથી. આથી $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$. યાદ રાખો કે સ્થાનસદિશ ($\mathbf{r}_i$) એ CGના સંદર્ભમાં લેવામાં આવેલ છે. હવે પરિચ્છેદ 7.2માં સમીકરણ (7.4a)ની નીચે આપવામાં આવેલ તર્ક અનુસાર, જો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો ઉદ્‌ગમબિંદુ એ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર હોવું જોઈએ. આમ, નિયમિત ગુરુત્વમાં કે ગુરુત્વમુક્ત અવકાશમાં, પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સાથે સંપાત થાય છે. આપણે એ નોંધીએ કે પદાર્થ નાનો છે કે જેથી પદાર્થના એક બિંદુ કે બીજા બિંદુ પર $\mathbf{g}$ બદલાતો નથી, આથી આ સાચું છે.



આકૃતિ 7.25 *અનિયમિત આકારના પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G નક્કી કરવું. પદાર્થના આધારબિંદુ Aમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વ રેખા AA_1 પર આ ગુરુત્વ કેન્દ્ર આવેલું છે.*

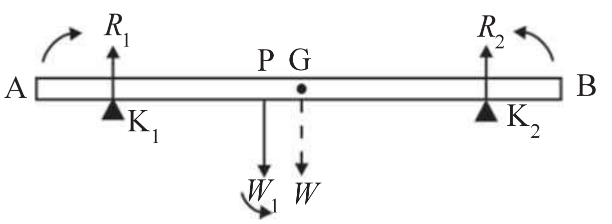
જો પદાર્થ એટલો વિસ્તરીત હોય કે જેથી પદાર્થના એક ભાગથી બીજા ભાગ પર **g** બદલાતો હોય, તો પછી ગુરુત્વ કેન્દ્ર અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સંપાતી (એક) નથી. મૂળભૂત રીતે આ બંને અલગ અલગ ખ્યાલો છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને ગુરુત્વાકર્ષણ સાથે કોઈ સંબંધ નથી. તે ફક્ત પદાર્થના દળ-વિતરણ પર જ આધાર રાખે છે.

પરિચ્છેદ 7.2માં આપણે કેટલાક નિયમિત, સમાંગી પદાર્થોના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના સ્થાન શોધ્યા છે. સ્પષ્ટતઃ જો પદાર્થ પૂરતો નાનો હોય, તો આ માટે ત્યાં ઉપયોગમાં લીધેલ રીતો પણ આવા પદાર્થોના ગુરુત્વ કેન્દ્ર આપે છે.

આકૃતિ 7.25, કાર્ડબૉર્ડ જેવા અનિયમિત આકારના પદાર્થનું CG શોધવા માટેની એક બીજી રીત દર્શાવે છે. જો તમે A જેવા કોઈ બિંદુએથી પદાર્થને લટકાવો તો Aમાંથી પસાર થતી ઊર્ધ્વરેખા CG માંથી પસાર થાય છે. આપણે આ રેખા AA_1 નોંધીએ. પછી બીજા B અને C જેવા બિંદુએથી પદાર્થને લટકાવીએ. આ બધી ઊર્ધ્વરેખાઓનું છેદનબિંદુ CG આપે છે. આ રીત કેમ ચાલી શકે તે સમજાવો. પદાર્થ પૂરતો નાનો હોવાથી, આ રીતે આપણે દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પણ શોધી શકીએ.

▶ *ઉદાહરણ 7.8* 70 cm લાંબા અને 4.00 kg દળના એક ધાતુના સળિયાને બંને છેડેથી 10 cm દૂર મૂકેલ બે છરીધાર (Knife-edges) પર ગોઠવેલ છે. એક છેડાથી 30 cm દૂર એક 6.00 kg બોજને લટકાવવામાં આવેલ છે. છરીધાર પર પ્રતિક્રિયા બળો શોધો. (આ સળિયો નિયમિત આડછેદનો અને સમાંગ છે તેમ ધારો.)

ઉકેલ



આકૃતિ 7.26

આકૃતિ 7.26માં એક સળિયો AB, છરી-ધારની સ્થિતિ K_1 અને K_2, આ સળિયાનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર G અને P પર લટકાવેલ બોજ દર્શાવે છે.

નોંધો કે સળિયાનું વજન W તેના ગુરુત્વ કેન્દ્ર પર લાગે છે. સળિયો એ સમાંગ અને એક સમાન આડછેદનો છે. તેથી G એ સળિયાની મધ્યમાં છે. AB = 70 cm, AG = 35 cm, AP = 30 cm, PG = 5 cm, $AK_1 = BK_2 = 10$ cm અને $K_1G = K_2G = 25$ cm. ઉપરાંત W = સળિયાનું વજન = 4.00 kg અને W_1 = લટકાવેલ વજન (બોજ) = 6.00 kg, R_1 અને R_2 એ છરી ધાર આગળ ટેકા દ્વારા લાગતાં લંબ પ્રતિક્રિયાબળો છે.

આ સળિયાના સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે,

$$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

નોંધો કે, W_1 અને W એ શિરોલંબ દિશામાં નીચે તરફ લાગે છે અને R_1 અને R_2 એ શિરોલંબ દિશામાં ઉપર તરફ લાગે છે.

ચાકગતિય સંતુલનને ધ્યાનમાં લેવા માટે આપણે બળોની ચાકમાત્રા લઈએ છીએ. ચાકમાત્રા શોધવાનું સૌથી સુલભ બિંદુ એ G છે. R_2 અને W_1ની ચાકમાત્રા વિષમઘડી દિશામાં (+ve) છે, જ્યારે R_1ની ચાકમાત્રા સમઘડી દિશામાં (–ve) છે.

ચાકગતિય સંતુલન માટે,

$$-R_1(K_1G) + W_1(PG) + R_2(K_2G) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

W = 4.00g N અને W_1 = 6.00g N આપવામાં આવ્યું છે. જ્યાં g = ગુરુત્વ પ્રવેગ છે. આપણે $g = 9.8$ m/s^2 લઈએ છીએ.

સમીકરણ (i)માં સંખ્યાત્મક મૂલ્યો મૂકતાં,

$$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$$

અથવા $R_1 + R_2 = 10.00$ g N (iii)

= 98.00 N

(ii) પરથી, $-0.25\ R_1 + 0.05\ W_1 + 0.25\ R_2 = 0$

અથવા $R_1 - R_2 = 1.2$ g N = 11.76 N (iv)

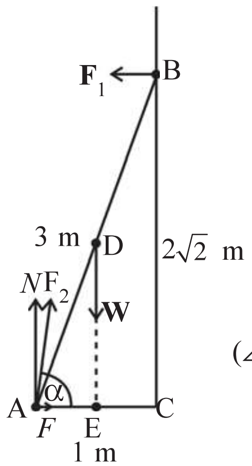
(iii) અને (iv) પરથી $R_1 = 54.88$ N,

$R_2 = 43.12$ N

આમ, આધારો પરનાં પ્રતિક્રિયા બળો K_1 પર આશરે 55 N અને K_2 પર આશરે 43 N છે. ◀

▶ *ઉદાહરણ 7.9* એક 3 m લાંબી નિસરણી, જે 20 kg વજન ધરાવે છે તે ઘર્ષણરહિત દીવાલ પર ઝુકાવેલ છે. આકૃતિ 7.27માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 1 m દૂર છે. દીવાલ અને ભોંયતળિયાનાં પ્રતિક્રિયા બળો શોધો.

ઉકેલ



($\angle F_2AC = \alpha$)

આકૃતિ 7.27

આ નિસરણી AB એ 3 m લાંબી છે, તેનો નીચેનો છેડો એ દીવાલથી AC = 1 mના અંતરે છે. પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી, BC = $2\sqrt{2}$ m. આ નિસરણી પરનાં બળોએ તેના ગુરુત્વકેન્દ્ર D પર લાગતું તેનું વજન W, દીવાલ અને ભોંયતળિયાના પ્રતિક્રિયા બળો અનુક્રમે F_1 અને F_2 છે. બળ F_1 એ દીવાલને લંબ છે, કારણ કે દીવાલ એ ઘર્ષણરહિત છે. બળ F_2 બે ઘટકોમાં વિભાજિત થાય છે, લંબ પ્રતિક્રિયા બળ N અને ઘર્ષણ બળ F. નોંધ કરો કે F એ સીડીને દીવાલથી દૂર સરકતાં અટકાવે છે અને તેથી દીવાલ તરફની દિશામાં છે.

સ્થાનાંતરીય સંતુલન માટે, ઊર્ધ્વદિશામાંનાં બળો લેતાં

$$N - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

સમક્ષિતિજ દિશામાંનાં બળો લેતાં

$$F - F_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

ચાકગતિય સંતુલન માટે A ને અનુલક્ષીને બળોની ચાકમાત્રા લેતાં

$$2\sqrt{2}\ F_1 - (1/2)\ W = 0 \qquad \text{(iii)}$$

હવે, W = 20 × g = 20 × 9.8 N = 196.0 N

(i) પરથી N = 196.0

(ii) પરથી $F = F_1 = 34.6$ N

(iii) પરથી $F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6$ N

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0 \text{ N}$$

બળ F_2 એ સમક્ષિતિજ સાથે બનાવેલ ખૂણો α, હોય તો

$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}$, $\alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80°$ ◀

7.9 જડત્વની ચાકમાત્રા (MOMENT OF INERTIA)

આપણે અગાઉ પણ ઉલ્લેખ કર્યો છે કે, આપણે ચાકગતિના અભ્યાસનો વિકાસ સ્થાનાંતરણ ગતિ કે જેની સાથે આપણે પરિચિત છીએ તેને સમાંતર જ કરી રહ્યા છીએ. આપણે આ સંબંધમાં હજુ સુધી એક મુખ્ય પ્રશ્નનો જવાબ આપ્યો નથી. **ચાકગતિમાં દ્રવ્યમાનને સમતુલ્ય શું છે ?** આપણે આ વિભાગમાં આ પ્રશ્નનો જવાબ આપવાનો પ્રયાસ કરીશું. ચર્ચા સરળ રાખવા માટે, આપણે માત્ર એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ (પરિભ્રમણ) પર વિચારણા કરીશું. ચાલો **ચાકગતિ કરતા પદાર્થની ગતિઊર્જા (Kinetic Energy)** માટેનું સમીકરણ મેળવવાનો પ્રયાસ કરીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે પદાર્થ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરે છે, ત્યારે પદાર્થના દરેક કણ એક વર્તુળમાં સમીકરણ (7.19) દ્વારા દર્શાવ્યા મુજબ રેખીય વેગ સાથે ગતિ કરે છે. (આકૃતિ 7.16નો સંદર્ભ લો.) અક્ષથી કોઈક અંતર પરના કણ માટે, રેખીય વેગ $\upsilon_i = r_i\omega$ છે. આ કણની ગતિઊર્જા

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2 \text{ છે.}$$

જ્યાં m_i એ કણનું દળ છે. આ પદાર્થની કુલ ગતિઊર્જા K એ દરેક કણોની ગતિઊર્જાઓનો સરવાળો છે.

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2\omega^2)$$

અહીં n એ પદાર્થમાં રહેલ કુલ કણોની સંખ્યા છે. એ ધ્યાનમાં રહે કે ω એ બધા જ કણો માટે સમાન છે. આથી ω ને સરવાળાની બહાર લેતાં,

$$K = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)$$

આપણે દૃઢ પદાર્થની લાક્ષણિકતાને રજૂ કરતા એક નવા પ્રાચલ જેને જડત્વની ચાકમાત્રા I કહેવામાં આવે છે તેને

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7.34)$$

તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીએ છીએ.

આ વ્યાખ્યા થકી,

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (7.35)$$

નોંધ કરો કે પ્રાચલ I એ કોણીય વેગના માનથી સ્વતંત્ર (આધારિત નથી) છે. તે દૃઢ પદાર્થની અને જે અક્ષને અનુલક્ષીને તે ચાકગતિ કરે છે તેની એક લાક્ષણિકતા છે.

ચાકગતિ કરતા પદાર્થની ગતિઊર્જા માટેના સમીકરણ (7.35)ની રેખીય ગતિમાંના પદાર્થની ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ સાથે સરખામણી કરો.

અહીં m એ પદાર્થનું દળ છે અને υ એ તેનો વેગ છે. આપણે કોણીય વેગ ω (સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના સંદર્ભમાં) અને રેખીય વેગ υ (રેખીય ગતિના સંદર્ભમાં) વચ્ચેની સામ્યતાને પહેલાથી જ નોંધેલ છે. તે પછી સ્પષ્ટ છે કે પ્રાચલ, જડત્વની ચાકમાત્રા I એ દ્રવ્યમાનનું ચાકગતિમાંનું જરૂરી સમતુલ્ય છે. (એક સ્થિત અક્ષને અનુલક્ષીને) ચાકગતિમાં, જડત્વની ચાકમાત્રા એ રેખીય ગતિમાં દ્રવ્યમાન જેવી જ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે.

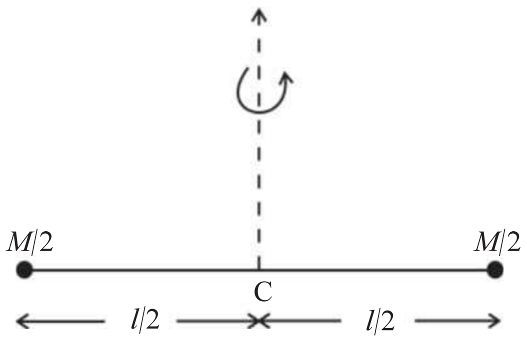
હવે આપણે સમીકરણ (7.34)ની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ બે સરળ કિસ્સાઓમાં જડત્વની ચાકમાત્રાની ગણતરી કરવા માટે કરીશું :

(a) R ત્રિજ્યા અને M દળની એક પાતળી રિંગ (વલય)નો વિચાર કરો કે જે તેના સમતલમાં કેન્દ્રની ફરતે કોણીય વેગ ω સાથે પરિભ્રમણ કરે છે. આ રિંગનો દરેક દળ ખંડ અક્ષથી R અંતરે છે અને $R\omega$ જેટલી ઝડપ

સાથે ગતિ કરે છે. તેથી આ ગતિઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

છે. સમીકરણ (7.35) સાથે સરખાવતાં આ રિંગ માટે આપણને $I = MR^2$ મળશે.



આકૃતિ 7.28 દ્રવ્યમાનની એક જોડ ધરાવતો, l લંબાઈનો એક વજનમાં હલકો સળિયો આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ઘૂમે છે. આ તંત્રનું કુલ દળ M છે.

(b) હવે, નાના દ્રવ્યમાનની એક જોડ ધરાવતો, l લંબાઈનો એક દ્રવ્યમાનરહિત સળિયો લો, જે આ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે (આકૃતિ 7.28). દરેક દળ $M/2$ એ ધરીથી $l/2$ અંતરે છે. તેથી આ દ્રવ્યમાનોની જડત્વની ચાકમાત્રા

$$(M/2)\ (l/2)^2 + (M/2)\ (l/2)^2$$

દ્વારા મળે છે.

આ રીતે, દળોની જોડી, જે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અને સળિયાને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરે છે તેના માટે $I = Ml^2/4$

કોષ્ટક 7.1માં કેટલાક સુપરિચિત નિયમિત આકારોવાળા નક્કર પદાર્થોની વિશિષ્ટ અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા આપેલ છે.

પદાર્થનું દળ એ તેની રેખીય ગતિની સ્થિતિમાં ફેરફારને અવરોધે છે, તેથી તે તેની રેખીય ગતિમાં જડત્વનું માપ છે. તેવી જ રીતે, ચાકગતિ (પરિભ્રમણ)માં આપેલ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા તેની ચાકગતિમાં ફેરફારનો પ્રતિકાર કરે છે, તેથી તેને પદાર્થની ચાકગતિય જડત્વના માપ તરીકે ગણવામાં આવે છે; પદાર્થના જુદા જુદા ભાગો અક્ષથી વિવિધ અંતરો પર કેવી રીતે વહેંચાયેલા છે તેનું એ માપ છે. પદાર્થના દ્રવ્યમાનથી વિપરીત, જડત્વની ચાકમાત્રાએ ચોક્કસ જથ્થો નથી, પરંતુ સમગ્ર પદાર્થના સંદર્ભમાં પરિભ્રમણ અક્ષના નમન અને સ્થાન પર આધારિત છે. કોઈ એક ભ્રમણાક્ષના સંદર્ભમાં ચાકગતિ કરતાં દૃઢ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેવી રીતે વિતરણ થયેલ છે તેના એક માપ તરીકે, આપણે એક નવો પ્રાચલ **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા (radius of gyration)** વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ છીએ. તે જડત્વની ચાકમાત્રા અને પદાર્થના કુલ દ્રવ્યમાન સાથે સંબંધિત છે.

કોષ્ટક 7.1માંથી નોંધો કે બધા કિસ્સાઓમાં, આપણે $I = Mk^2$ લખી શકીએ છીએ, જ્યાં k એ લંબાઈનું પરિમાણ છે. એક સળિયા માટે, તેના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને, $k^2 = L^2/12$, એટલે કે, $k = L/\sqrt{12}$. એ જ રીતે, વર્તુળાકાર ડિસ્ક માટે તેના વ્યાસને અનુલક્ષીને $k = R/2$. લંબાઈ k એ પદાર્થનો અને ભ્રમણાક્ષનો એક ભૌમિતિક ગુણધર્મ છે. તેને **ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા** કહેવામાં આવે છે. **અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યાને** કોઈ અક્ષથી એક એવા દળબિંદુના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે, કે જેનું દ્રવ્યમાન એ સમગ્ર પદાર્થના દ્રવ્યમાન જેટલું જ હોય છે અને જેની જડત્વની ચાકમાત્રાએ પદાર્થની અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા જેટલી હોય છે.

આમ, એક દૃઢ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા પદાર્થના દળ, તેના આકાર અને કદ, ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને દ્રવ્યમાન વિતરણ, અને પરિભ્રમણ અક્ષની સ્થિતિ અને નમન પર આધાર રાખે છે.

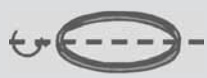
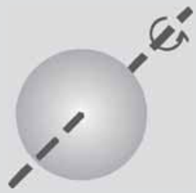
આ વ્યાખ્યા, સમીકરણ (7.34), પરથી આપણે એ અનુમાન કરી શકીએ છીએ કે જડત્વની ચાકમાત્રાનાં પરિમાણ ML^2 અને તેના SI એકમ kg m^2 છે.

કોઈ પદાર્થની ચાકગતિમાં જડત્વના માપ તરીકે અત્યંત મહત્ત્વની રાશિ Iના ઘણા પ્રાયોગિક ઉપયોગ છે. સ્ટીમ ઍન્જિન અને ઑટોમોબાઈલ ઍન્જિન જેવાં મશીનો વગેરે, જે ચાકગતિ ઉત્પન્ન કરે છે તેમાં ખૂબ જ મોટા જડત્વની ચાકમાત્રાવાળી એક ડિસ્ક હોય છે, જેને **ફ્લાયવીલ (flywheel)** કહેવાય છે. તેની મોટી જડત્વની ચાકમાત્રાને કારણે, ફ્લાયવીલ વાહનની ઝડપના અચાનક વધારા અથવા ઘટાડાને અવરોધે છે. તે ઝડપમાં ધીમે ધીમે પરિવર્તન થવા દે છે અને આંચકાવાળી ગતિ અટકાવે છે, જેનાથી વાહનમાં મુસાફરો માટે સવારી સરળ બને છે.

7.10 લંબ અને સમાંતર અક્ષોના પ્રમેયો (THEOREMS OF PERPENDICULAR AND PARALLEL AXES)

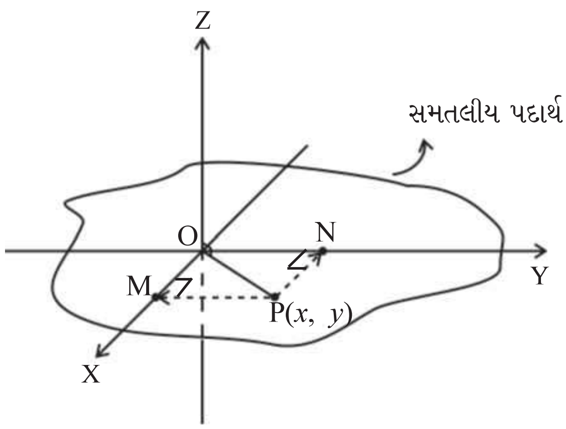
જડત્વની ચાકમાત્રાને લગતાં આ બે ઉપયોગી પ્રમેયો છે. આપણે પ્રથમ લંબ અક્ષોનો પ્રમેય અને નિયમિત આકારના પદાર્થોની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધવાના તેના કેટલાક સરળ અને લાભદાયી ઉપયોગોની ચર્ચા કરીશું.

કોષ્ટક 7.1 કેટલાક નિયમિત આકારોવાળા પદાર્થોની વિશિષ્ટ અક્ષોને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

Z	પદાર્થ (Body)	અક્ષ (Axis)	આકૃતિ (Figure)	I
(1)	પાતળી વર્તુળાકાર રિંગ, ત્રિજ્યા R (Thin circular ring, radius R)	સમતલને લંબ, કેન્દ્ર પર (Perpendicular to plane, at centre)		MR^2
(2)	પાતળી વર્તુળાકાર રિંગ, ત્રિજ્યા R (Thin circular ring, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$MR^2/2$
(3)	પાતળો સળિયો, લંબાઈ L (Thin rod, length L)	સળિયાને લંબ, મધ્ય બિંદુ પર (Perpendicular to rod, at mid point)		$ML^2/12$
(4)	વર્તુળાકાર ડિસ્ક (તકતી), ત્રિજ્યા R (Circular disc, radius R)	ડિસ્કને લંબ, કેન્દ્ર પર (Perpendicular to disc at centre)		$MR^2/2$
(5)	વર્તુળાકાર ડિસ્ક, ત્રિજ્યા R (Circular disc, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$MR^2/4$
(6)	પોલો નળાકાર, ત્રિજ્યા R (Hollow cylinder, radius R)	નળાકારની અક્ષ (Axis of cylinder)		MR^2
(7)	નક્કર નળાકાર, ત્રિજ્યા R (Solid cylinder, radius R)	નળાકારની અક્ષ (Axis of cylinder)		$MR^2/2$
(8)	નક્કર ગોળો, ત્રિજ્યા R (Solid sphere, radius R)	વ્યાસ (Diameter)		$2\ MR^2/5$

લંબ અક્ષોનો પ્રમેય

આ પ્રમેય એવા પદાર્થ પર લાગુ થાય છે કે જે સમતલીય હોય. વ્યવહારમાં તેનો મતલબ એવો થાય છે કે આ પ્રમેય સપાટ પદાર્થો પર લાગુ પડે છે, જેમની જાડાઈ તેમનાં અન્ય પરિમાણો (દા.ત., લંબાઈ, પહોળાઈ અથવા ત્રિજ્યા)ની સરખામણીમાં ખૂબ ઓછી હોય. આકૃતિ 7.29 એ આ પ્રમેયને સમજાવે છે. તેનું વિધાન આ પ્રમાણે છે : **કોઈ એક સમતલીય પદાર્થ (લેમિના)ની તેના સમતલને લંબ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાએ તેની સાથે સંગામી અને લેમિનાના સમતલમાં સ્થિત બે લંબ અક્ષોને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્રાઓના સરવાળા જેટલી જ હોય છે.**



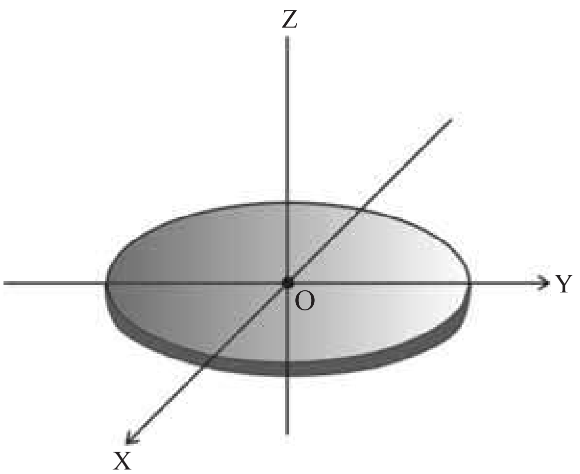
આકૃતિ 7.29 સમતલીય પદાર્થને લાગુ પડતો લંબ અક્ષનો પ્રમેય; X અને Y-અક્ષો એ સમતલમાં બે લંબ અક્ષો છે અને Z-અક્ષ એ સમતલને લંબ છે.

આ આકૃતિ એ એક સમતલીય પદાર્થ દર્શાવે છે. બિંદુ O પર આ પદાર્થને લંબ એક અક્ષને Z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે. આ પદાર્થના સમતલ અને Z-અક્ષ સાથે સંગામી (સહવર્તી) એટલે કે, Oમાંથી પસાર થતા, બે પરસ્પર લંબ અક્ષોને, X અને Y-અક્ષો તરીકે લેવામાં આવે છે. આ પ્રમેય જણાવે છે કે,

$$I_z = I_x + I_y \quad (7.35)$$

ચાલો એક ઉદાહરણ દ્વારા આ પ્રમેયની ઉપયોગિતા જોઈએ.

ઉદાહરણ 7.10 એક તક્તીની તેના કોઈ એક વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી છે ?



આકૃતિ 7.30 વ્યાસને અનુલક્ષીને એક તક્તીની M.I. તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમતલને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને M.I. આપેલ છે.

ઉકેલ આપેલ તક્તીની તેના સમતલને લંબ અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા જ્ઞાત છે તેમ ધારેલ છે; તે $MR^2/2$ છે, જ્યાં M એ તક્તીનું દળ છે R તેની ત્રિજ્યા છે (કોષ્ટક 7.1)

તક્તીને સમતલીય પદાર્થ ગણવામાં આવે છે. તેથી લંબ અક્ષનો પ્રમેય તેને લાગુ પડે છે. આકૃતિ 7.30માં બતાવ્યા પ્રમાણે, તક્તીના કેન્દ્ર Oથી આપણે ત્રણ સહવર્તી અક્ષોને X, Y, Z તરીકે લઈએ છીએ; X અને Y અક્ષો તક્તીના સમતલમાં આવેલા છે અને z તેને લંબ છે. લંબ અક્ષોના પ્રમેય દ્વારા,

$$I_z = I_x + I_y$$

હવે, x અને y-અક્ષો એ આ તક્તીના બે વ્યાસની દિશામાં છે અને સંમિતિ દ્વારા તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા કોઈ પણ વ્યાસને સાપેક્ષે સમાન છે. તેથી

$$I_x = I_y$$

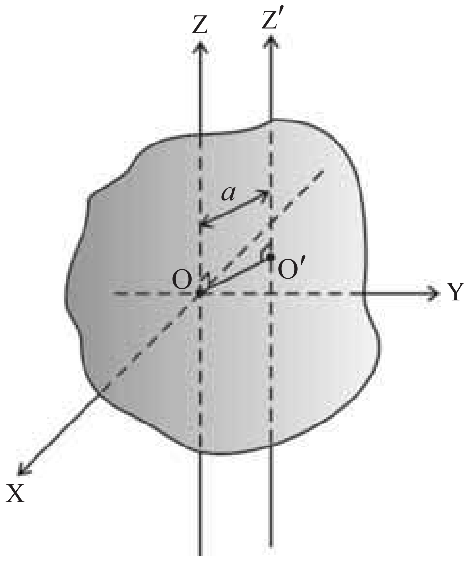
અને $$I_z = 2\,I_x$$

પરંતુ $$I_z = MR^2/2$$

તેથી અંતતઃ $$I_x = I_z/2 = MR^2/4$$

આમ તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા $MR^2/4$ છે. ◀

આ જ રીતે, કોઈ રિંગની તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો. શું આ પ્રમેય નક્કર નળાકારને પણ લાગુ પડશે ?



આકૃતિ 7.31 સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય. Z અને Z′ બે સમાંતર અક્ષો છે જેમની વચ્ચેનું અંતર a છે; O એ પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર છે, OO′ = a.

7.10.1 સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય (Theorem of parallel axes)

આ પ્રમેય કોઈ પણ આકારના પદાર્થને લાગુ પડે છે. જો પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા આપેલ હોય, તો આ અક્ષને સમાંતર કોઈ પણ અક્ષને અનુલક્ષીને આપણે જડત્વની ચાકમાત્રા શોધી શકીએ છીએ. આપણે ફક્ત આ પ્રમેયનું વિધાન જ લઈશું અને તેને સાબિત નહિ કરીએ. તેમ છતાં, આપણે તેને થોડીક સરળ પરિસ્થિતિઓમાં લાગુ કરીશું. જે આપણને આ પ્રમેયની ઉપયોગિતા વિશે સમજાવવા માટે પૂરતી હશે. આ પ્રમેયનું કથન નીચે પ્રમાણે છે :

કોઈ પણ અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી સમાંતર અક્ષને અનુલક્ષીને લીધેલ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા અને તેના દ્રવ્યમાન અને બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેના લંબ અંતરના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળા જેટલી છે. આકૃતિ 7.31માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, Z અને Z′ એ બે સમાંતર અક્ષો છે કે જે બે વચ્ચેનું અંતર a છે. Z-અક્ષ એ પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર O માંથી પસાર થાય છે. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેય અનુસાર,

$$I_{z'} = I_z + Ma^2 \tag{7.37}$$

જ્યાં I_z અને $I_{z'}$ એ પદાર્થની અનુક્રમે Z અને Z′ અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રાઓ છે. M એ પદાર્થનું કુલ દળ અને a એ બે અક્ષો વચ્ચેનું લંબઅંતર છે.

► **ઉદાહરણ 7.11** M દ્રવ્યમાન અને l લંબાઈના એક સળિયાની તેને લંબ હોય અને તેના કોઈ એક છેડામાંથી પસાર થતી હોય તેવી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી હશે ?

ઉકેલ M દ્રવ્યમાન અને l લંબાઈના એક સળિયા માટે, $I = Ml^2/12$. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં $I' = I + Ma^2$. હવે $a = l/2$ લેતા આપણને,

$$I' = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

મળે.

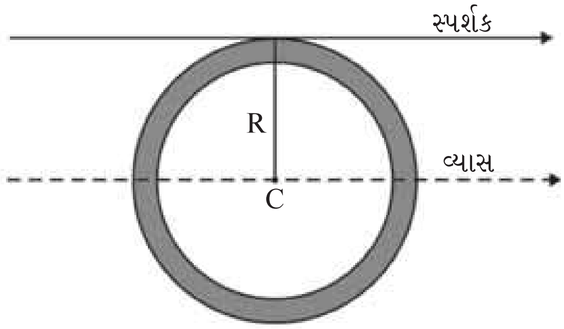
આ આપણે સ્વતંત્ર રીતે પણ ચકાસી શકીએ છીએ, કારણ કે I એ $2M$ દળ અને $2l$ લંબાઈના સળિયાની તેના મધ્યબિંદુને અનુલક્ષીને મળતી જડત્વની ચાકમાત્રા કરતાં અડધા મૂલ્યની છે.

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◄

► **ઉદાહરણ 7.12** કોઈ એક પાતળી રિંગની તેના વલયના સ્પર્શકને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા કેટલી હશે ?

ઉકેલ

આ રિંગના સમતલમાં, રિંગનો સ્પર્શક એ રિંગના કોઈ એક વ્યાસને સમાંતર છે. આ બે સમાંતર અક્ષો વચ્ચેનું અંતર R એ રિંગની ત્રિજ્યા બને છે. સમાંતર અક્ષના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને,



આકૃતિ 7.32

$$I_{tangent} = I_{dia} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$ ◄

7.11 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિની શુદ્ધ ગતિકી (KINEMATICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

આપણે અગાઉ પણ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરીય ગતિ વચ્ચે સામ્યતાનો ઉલ્લેખ કર્યો છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોણીય વેગ **ω** એ ચાકગતિમાં એવી જ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે જે સ્થાનાંતરણમાં રેખીય વેગ **υ** ભજવે છે. અમે આ સામ્યતાને વધુ આગળ લઈ જવા માંગીએ છીએ. આમ કરતાં આપણે માત્ર સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને થતી ચાકગતિ માટે ચર્ચાને સીમિત કરીશું. આવી ગતિના આ કિસ્સામાં માત્ર એક મુક્તતાના અંશનો (degree of freedom) સમાવેશ થાય છે, એટલે કે ગતિનું વર્ણન કરવા માટે માત્ર એક જ સ્વતંત્ર ચલની જરૂર પડે છે. સ્થનાંતરીયમાં આ રેખીય ગતિને અનુરૂપ છે. આ પરિચ્છેદ માત્ર શુદ્ધ ગતિકી પૂરતો મર્યાદિત છે. આપણે પછીના પરિચ્છેદમાં ગતિશાસ્ત્ર (ડાયનામિક્સ) તરફ જઈશું.

આપણે યાદ કરીએ કે ચાકગતિ કરતાં પદાર્થના કોણીય સ્થાનાંતરને સ્પષ્ટ કરવા માટે આપણે પદાર્થનો P જેવો કોઈ પણ કણ લઈએ છીએ (આકૃતિ 7.33). તે જે સમતલમાં ગતિ કરે છે તેમાં તેનું કોણીય સ્થાનાંતર θ આ સમગ્ર પદાર્થનું કોણીય સ્થાનાંતર છે; θ એ Pની ગતિના સમતલમાં એક નિશ્ચિત દિશાથી માપવામાં આવે છે, જેને આપણે X′-અક્ષ તરીકે લઈએ છીએ, જે X-અક્ષને સમાંતર પસંદ કરેલ છે. નોંધો કે દર્શાવ્યા પ્રમાણે, પરિભ્રમણ અક્ષ એ z-અક્ષ છે અને કણની ગતિનું સમતલ એ x–y સમતલ છે. આકૃતિ 7.33 એ θ_0 પણ બતાવે છે જે $t = 0$ સમયે કોણીય સ્થાનાંતર છે.

આપણે એ પણ યાદ કરીએ કે કોણીય વેગ એ કોણીય સ્થાનાંતરના ફેરફારનો સમય-દર છે, $\omega = d\theta/dt$. નોંધ કરો કે ભ્રમણાક્ષ સ્થિર છે, તેથી કોણીય વેગને સદિશ

તરીકે લેવાની જરૂર નથી. વધુમાં, કોણીય પ્રવેગ, $\alpha = d\omega/dt$.

શુદ્ધ ચાકગતિમાં વપરાતી રાશિઓ, કોણીય સ્થાનાંતર (θ), કોણીય વેગ (ω) અને કોણીય પ્રવેગ (α) એ રેખીય ગતિમાં વપરાતી રાશિઓ અનુક્રમે સ્થાનાંતર (x), વેગ (υ) અને પ્રવેગ (a)ને અનુરૂપ છે. આપણે નિયમિત (એટલે કે અચળ) પ્રવેગ સાથે શુદ્ધ રેખીય ગતિનાં સમીકરણો જાણીએ છીએ :

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad (a)$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (b)$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (c)$$

જ્યાં x_0 = પ્રારંભિક સ્થાનાંતર અને υ_0 = પ્રારંભિક વેગ છે. 'પ્રારંભિક' શબ્દનો અર્થ $t = 0$ સમયે છે.

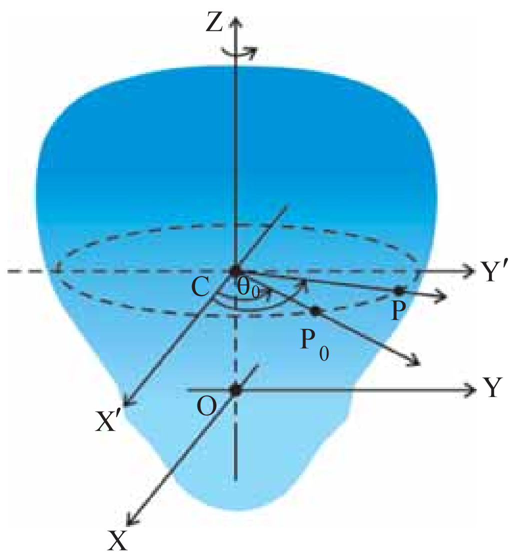
શુદ્ધ રેખીય ગતિના સમીકરણોને અનુરૂપ નિયમિત કોણીય પ્રવેગ સાથેના ચાકગતિના સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (7.39)$$

$$\text{અને } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (7.40)$$

જ્યાં θ_0 ચાકગતિ કરતાં પદાર્થનું પ્રારંભિક કોણીય સ્થાનાંતર, અને ω_0 = પદાર્થનો પ્રારંભિક કોણીય વેગ છે.



આકૃતિ 7.33 એક દૃઢ પદાર્થનું કોણીય સ્થાન દર્શાવવું

ઉદાહરણ 7.13 પ્રાથમિક સિદ્ધાંતોના આધારે સમીકરણ (7.38) મેળવો.

ઉકેલ કોણીય પ્રવેગ નિયમિત છે, તેથી

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{અચળ} \qquad \therefore\ d\omega = \alpha\, dt$$

આ સમીકરણનું સંકલન કરતાં,

$\omega = \alpha t + c$ (α અચળ હોવાથી)

$t = 0$ પર $\omega = \omega_0$ (આપેલ છે.)

પરથી $t = 0$ પર $\omega = c = \omega_0$ મળે છે.

આમ, $\omega = \alpha t + \omega_0$ જે માંગેલ સમીકરણ છે. $\omega = d\theta/dt$ વ્યાખ્યા સાથે આપણે સમીકરણ (7.38)નું સંકલન કરીને સમીકરણ (7.39) મેળવી શકીએ. આ તારવણી અને સમીકરણ (7.40)ની તારવણી સ્વાધ્યાય તરીકે છોડેલ છે. ◀

ઉદાહરણ 7.14 એક મોટરના પૈડાંની કોણીય ઝડપ 16 સેકન્ડમાં 1200 rpm થી 3120 rpm સુધી વધે છે. (i) કોણીય પ્રવેગ નિયમિત છે તેમ ધારતાં તેનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? (ii) આ સમય દરમિયાન ઍન્જિન કેટલા પરિભ્રમણ (ચાકગતિ) કરે છે ?

ઉકેલ

(i) આપણે $\omega = \omega_0 + \alpha t$નો ઉપયોગ કરીશું.

ω_0 = rad/sમાં પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ

= $2\pi \times$ rev/sમાં કોણીય ઝડપ

$$= \frac{2\pi \times \text{rev/min માં કોણીય ઝડપ}}{60\ \text{s/min}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60}\ \text{rad/s}$$

$= 40\pi$ rad/s

તે જ રીતે ω = rad/sમાં અંતિમ કોણીય ઝડપ

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60}\ \text{rad/s}$$

$= 2\pi \times 52$ rad/s

$= 104\pi$ rad/s

$\therefore$ કોણીય પ્રવેગ

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 4\ \pi\ \text{rad/s}^2$$

ઍન્જિનનો કોણીય પ્રવેગ = $4\ \pi$ rad/s^2

(ii) t સમયમાં કોણીય સ્થાનાંતર

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \text{ પરથી મળે.}$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

પરિભ્રમણોની સંખ્યા $= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

7.12 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનું ગતિશાસ્ત્ર (DYNAMICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

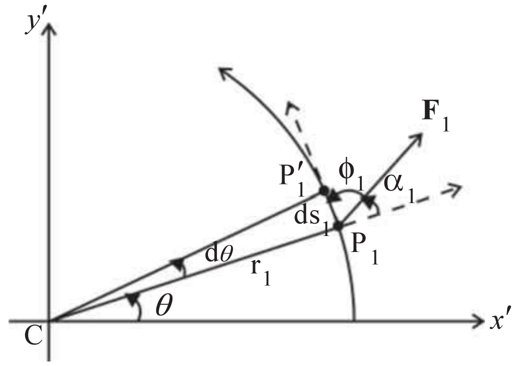
કોષ્ટક 7.2માં રેખીય ગતિ સાથે સંકળાયેલ રાશિઓ અને ચાકગતિમાં તેમની સાથે સામ્યતા ધરાવતી રાશિઓની યાદી આપેલ છે. આપણે આ પહેલાં પણ બે ગતિઓની શુદ્ધ ગતિકીની સરખામણી કરી છે. ઉપરાંત, આપણે જાણીએ છીએ કે ચાકગતિમાં જડત્વની ચાકમાત્રા અને ટૉર્ક એ રેખીય ગતિમાં તેને સમતુલ્ય એવા અનુક્રમે દ્રવ્યમાન અને બળની જેમ સમાન ભૂમિકા ભજવે છે. આને જોતાં આપણે ધારી શકીએ કે કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ અન્ય સમતુલ્યો શું છે. દાખલા તરીકે, આપણે જાણીએ છીએ કે રેખીય ગતિમાં, થયેલ કાર્યને $F\,dx$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. એક ચોક્કસ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિમાં, તે $\tau\, d\theta$ હોવું જોઈએ, કારણ કે $dx \to d\theta$ અને $F \to \tau$ને સમતુલ્ય છે જે આપણે પહેલાથી જ જાણીએ છીએ. તેમ છતાં, જરૂરી છે કે આ સંગતતા નક્કર ગતિશીલ વિચારણાઓ પર સ્થાપિત થયેલ હોય. આપણે હવે આમ જ કરવા જઈ રહ્યા છીએ.

પ્રારંભ કરીએ તે પહેલાં, આપણે **એક સરળીકરણ નોંધીએ કે જે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં ઉદ્ભવે છે.** અક્ષ સ્થિર હોવાથી આપણી ચર્ચામાં ટૉર્કના માત્ર જે ઘટકો, સ્થિર અક્ષની દિશામાં છે, તેને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે. ફક્ત આ ઘટકો જ પદાર્થને અક્ષની સાપેક્ષે ભ્રમણ કરાવવા માટે જવાબદાર છે. પરિભ્રમણના અક્ષને લંબ રહેલો ટૉર્કનો ઘટક અક્ષને તેના સ્થાનેથી ફેરવશે. આપણે વિશેષ રૂપે ધારીએ છીએ કે (બાહ્ય) ટૉર્કના આ લંબરૂપ ઘટકોની અસર નાબૂદ (સમતુલિત) કરવા માટે જરૂરી બળોની ચાકમાત્રા સર્જાશે, જેથી અક્ષની સ્થિર સ્થિતિ જળવાઈ રહેશે. ટૉર્કનાં લંબ ઘટકોને, તેથી ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી. આનો અર્થ એ થાય કે દૃઢ પદાર્થ પર ટૉર્કની આપણી ગણતરી માટે :

(1) આપણે માત્ર તે બળોને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં આવેલા છે. જે બળો અક્ષને સમાંતર હોય છે તે અક્ષને લંબ ટૉર્ક આપશે અને તેમને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

(2) આપણે સ્થાનસદિશોનાં માત્ર તે ઘટકોને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષને લંબ છે. સ્થાનસદિશોનાં અક્ષની દિશામાનાં ઘટકો અક્ષને લંબરૂપે ટૉર્ક આપે છે અને તેને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર નથી.

ટૉર્ક દ્વારા કરવામાં આવેલું કાર્ય



આકૃતિ 7.34 એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરતા એક દૃઢ પદાર્થ પર લાગતાં બળ $\mathbf{F}_1$ *વડે થતું કાર્ય. આ કણ એ વર્તુળાકાર પથ બનાવે છે કે જેનું કેન્દ્ર C એ અક્ષ પર છે. ચાપ* $P_1P'_1$ (ds_1) *એ આ કણનું સ્થાનાંતર આપે છે.*

આકૃતિ 7.34 એ એક સ્થિર અક્ષ, જેને Z-અક્ષ તરીકે લેવામાં આવે છે (પૃષ્ઠના સમતલને લંબ, જુઓ આકૃતિ 7.33), તેને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં એક દૃઢ પદાર્થનો આડછેદ બતાવે છે. ઉપર જણાવ્યા મુજબ આપણે માત્ર તે જ બળોને ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે જે અક્ષના લંબ સમતલમાં હોય. ધારો કે $\mathbf{F}_1$ એ આવું કોઈ એક બળ છે, જે દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ પદાર્થના બિંદુ P_1 પરના કણ પર લાગે છે જેની કાર્યરેખાએ અક્ષના લંબ સમતલમાં છે. સરળતા ખાતર આપણે તેને $X'-Y'$ સમતલ કહીશું. (તે પૃષ્ઠના સમતલ સાથે સંપાતી છે.) P_1 પરનો કણ એ r_1 ત્રિજ્યાનો વર્તુળાકાર પથ બનાવે છે કે જેનું કેન્દ્ર C એ અક્ષ પર છે; $CP_1 = r_1$

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે Δt સમયમાં આ બિંદુ, P'_1 પર પહોંચે છે. આમ આ કણનું સ્થાનાંતર ds_1નું માન $ds_1 = r_1 d\theta$ અને વર્તુળાકાર પથને P_1 પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે. અહીં $d\theta$ એ આ કણનું કોણીય સ્થાનાંતર $d\theta = \angle P_1CP_1'$ છે. કણ ઉપર આ બળ વડે થતું કાર્ય.

$dW_1 = \mathbf{F}_1 .\ \mathbf{ds}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1(r_1 d\theta) \sin\alpha_1$ છે, જ્યાં ϕ_1 એ $\mathbf{F}_1$ અને P_1 આગળના સ્પર્શક વચ્ચેનો ખૂણો,

કોષ્ટક 7.2 સ્થાનાંતરીય ગતિ અને ચાકગતિની સરખામણી

	રેખીય ગતિ (Linear Motion)	સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ (Rotational Motion about a Fixed Axis)
1.	સ્થાનાંતર (Displacement) x	કોણીય સ્થાનાંતર (Angular displacement) θ
2.	વેગ (Velocity) $\upsilon = dx/dt$	કોણીય વેગ (Angular velocity) $\omega = d\theta/dt$
3.	પ્રવેગ (Acceleration) $a = d\upsilon/dt$	કોણીય પ્રવેગ (Angular acceleration) $\alpha = d\omega/dt$
4.	દ્રવ્યમાન (Mass) M	જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of inertia) I
5.	બળ (Force) $F = Ma$	ટૉર્ક (બળની ચાકમાત્રા) (Torque) $\tau = I\alpha$
6.	કાર્ય (Work) $dW = F\ ds$	કાર્ય (Work) $W = \tau d\theta$
7.	ગતિઊર્જા (Kinetic energy) $K = M\upsilon^2/2$	ગતિઊર્જા (Kinetic energy) $K = I\omega^2/2$
8.	પાવર (Power) $P = F\ \upsilon$	પાવર (Power) $P = \tau\omega$
9.	રેખીય વેગમાન (Linear momentum) $p = M\upsilon$	કોણીય વેગમાન (Angular momentum) $L = I\omega$

α_1 એ $\mathbf{F}_1$ અને ત્રિજ્યા સદિશ $\mathbf{OP}_1$ વચ્ચેનો ખૂણો છે; $\phi_1 + \alpha_1 = 90°$.

ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે $\mathbf{F}_1$ને કારણે ટૉર્ક $\mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1$ છે. હવે $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}_1$ (આકૃતિ 7.17 (b)નો સંદર્ભ લો.) કારણ કે $\mathbf{OC}$ એ અક્ષની દિશામાં છે, તેનાથી પરિણમતા ટૉર્કને આપણી ચર્ચામાંથી બાકાત રાખવામાં આવે છે. $\mathbf{F}_1$ના કારણે અસરકારક ટૉર્ક $\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{CP}_1 \times \mathbf{F}_1$ છે; તે પરિભ્રમણ અક્ષની દિશામાં છે અને તેનું માન $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\alpha_1$ છે. તેથી,

$$dW_1 = \tau_1 d\theta$$

જો પદાર્થ પર એક કરતાં વધુ બળો કાર્યરત હોય, તો તે બધાં દ્વારા કરવામાં આવેલ કાર્યને ઉમેરતાં પદાર્થ પર થતું કુલ કાર્ય મળે છે. વિવિધ બળોને કારણે લાગતાં ટૉર્કના માનને $\tau_1, \tau_2, ...$ વગેરે દ્વારા દર્શાવતાં,

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + ...)d\theta$$

યાદ રાખો કે, ટૉર્કને ઉત્પન્ન કરતાં બળો અલગ અલગ કણો પર લાગે છે, પરંતુ કોણીય સ્થાનાંતરણ $d\theta$ એ બધા જ કણો માટે સમાન છે. સ્થિર અક્ષને સમાંતર બધા ટૉર્ક ગણેલા હોવાથી કુલ ટૉર્ક τનું માન એ દરેક ટૉર્કના માનનો બૈજિક સરવાળો છે, એટલે કે, $\tau = \tau_1 + \tau_2 + ...$

તેથી, આપણને

$$dW = \tau d\theta \qquad (7.41)$$

મળે છે.

આ સૂત્ર સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં પદાર્થ પર લાગતાં કુલ (બાહ્ય) ટૉર્ક τ વડે થતું કાર્ય આપે છે. જે રેખીય ગતિના સમીકરણ $dW = F\ ds$ સાથે સામ્યતા ધરાવે છે તે સ્વાભાવિક છે.

સમીકરણ (7.41)ને બંને બાજુએ dt દ્વારા ભાગતાં,

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

અથવા $P = \tau\omega$ (7.42)

આ તાત્ક્ષણિક પાવર છે. રેખીય ગતિના કિસ્સામાં પાવર માટેના સૂત્ર $P = Fv$ સાથે સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં પાવર માટેના આ સૂત્રની તુલના કરો.

એક સંપૂર્ણ દૃઢ પદાર્થમાં કોઈ આંતરિક ગતિ નથી. આથી બાહ્ય ટૉર્ક દ્વારા કરવામાં આવતું કાર્ય વ્યય પામતું નથી અને તેથી પદાર્થની ગતિઊર્જા વધારવામાં વપરાય છે. પદાર્થ પર જે દરથી કાર્ય થાય છે તેને સમીકરણ (7.42) દ્વારા આપવામાં આવે છે. આને જે દરથી ગતિઊર્જા વધે છે તેની સાથે સરખાવી શકાય છે. ગતિઊર્જાનો વૃદ્ધિનો દર

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

આપણે ધાર્યું છે કે જડત્વની ચાકમાત્રા સમય સાથે બદલાતી નથી. આનો અર્થ એ છે કે પદાર્થનું દળ બદલાતું નથી. પદાર્થ દૃઢ જ રહે છે અને અક્ષ પણ પદાર્થના સંદર્ભમાં તેનું સ્થાન બદલતી નથી.

$\alpha = d\omega/dt$ હોવાથી,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\ \omega\ \alpha \text{ મળે છે.}$$

કાર્ય થવાનો દર અને ગતિઊર્જામાં વધારાના દરને સરખાવતાં.

$$\tau\omega = I\ \omega\ \alpha$$

$$\tau = I\alpha \quad (7.43)$$

સમીકરણ (7.43) એ રેખીય ગતિ માટેના ન્યૂટનના બીજા નિયમ જેવું હોવાથી તેને સંજ્ઞા સ્વરૂપે

$F = ma$ તરીકે લખાય છે,

જેમ બળ પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે, તેમ ટૉર્ક પદાર્થમાં કોણીય પ્રવેગ ઉત્પન્ન કરે છે. કોણીય પ્રવેગ એ લાગુ પડતા ટૉર્કના સમપ્રમાણમાં અને તે પદાર્થના જડત્વની ચાકમાત્રાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. સમીકરણ (7.43)ને સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ કહી શકાય છે.

▶ ***ઉદાહરણ 7.15*** અવગણ્ય દ્રવ્યમાનની એક દોરીને 20 kg દળ અને 20 cm ત્રિજ્યાના ફ્લાયવ્હીલની કોર (rim) પર વિંટાળેલ છે. આકૃતિ 7.35માં બતાવ્યા પ્રમાણે દોરી પર 25 N જેટલું અચળ ખેંચાણબળ (pull) લગાડેલ છે. આ ફ્લાયવ્હીલ ઘર્ષણરહિત બેરિંગ્સ સાથે એક સમક્ષિતિજ અક્ષ પર જડેલ છે.

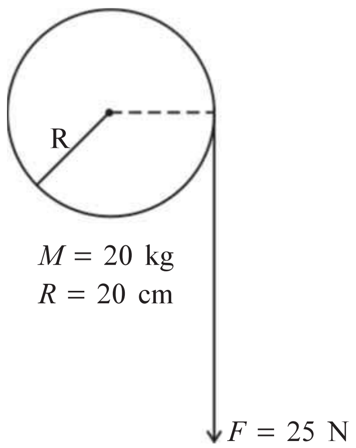
(a) વ્હીલના કોણીય પ્રવેગની ગણતરી કરો.

(b) જ્યારે દોરી 2m ખૂલશે ત્યાં સુધી ખેંચાણબળ (pull) દ્વારા કરવામાં આવેલ કાર્ય શોધો.

(c) આ બિંદુ એ વ્હીલની ગતિઊર્જા પણ શોધો. વ્હીલ તેની સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરે છે, તેમ ધારો.

(d) વિભાગો (b) અને (c)ના જવાબોની સરખામણી કરો.

ઉકેલ



આકૃતિ 7.35

(a) આપણે $I\alpha = \tau$નો ઉપયોગ કરીશું.

ટૉર્ક $\tau = F R$

$= 25 \times 0.20$ Nm (કારણ કે $R = 0.20$ m)

$= 5.0$ Nm

I = ફ્લાયવ્હીલની તેની અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા

$$(\text{M.I.}) = \frac{MR^2}{2}$$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

α = કોણીય પ્રવેગ

$= 5.0 \text{ N m}/0.4 \text{ kg m}^2 = 12.5 \text{ s}^{-2}$

(b) દોરી 2m ઉકેલાતાં, ખેંચાણબળ (pull) વડે થતું કાર્ય

$= 25 \text{ N} \times 2\text{m} = 50 \text{ J}$

(c) ધારો કે, ω અંતિમ કોણીય વેગ છે.

ગતિઊર્જાનો વધારો $= \frac{1}{2}I\omega^2$

કારણ કે વ્હીલ સ્થિર સ્થિતિમાંથી ગતિ શરૂ કરે છે. હવે,

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$

કોણીય સ્થાનાંતર θ = ઉકેલાયેલ દોરીની લંબાઈ / વ્હીલની ત્રિજ્યા

$= 2\text{m}/0.2\text{m} = 10$ rad

$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250(\text{rad/s})^2$

ગતિઊર્જામાં વધારો (પ્રાપ્ત કરેલી ગતિઊર્જા)

$= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50$ J

(d) આ બધાં જવાબો એક સમાન જ છે. એટલે કે વ્હીલે પ્રાપ્ત કરેલી ગતિઊર્જા = બળે કરેલું કાર્ય. ઘર્ષણને લીધે કોઈ ઊર્જાનો વ્યય થતો નથી. ◀

7.13 સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના કિસ્સામાં કોણીય વેગમાન (ANGULAR MOMENTUM IN CASE OF ROTATION ABOUT A FIXED AXIS)

કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનનો આપણે પરિચ્છેદ 7.7માં અભ્યાસ કર્યો છે. તે પરથી આપણે એ જાણીએ છીએ કે, એક બિંદુને અનુલક્ષીને કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનનો સમય દર એ તે જ બિંદુને અનુલક્ષીને લેવામાં આવેલ તંત્ર પરના કુલ બાહ્ય ટૉર્ક જેટલો છે. જ્યારે કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય ત્યારે તે તંત્રનું કુલ કોણીય વેગમાન સંરક્ષિત (અચળ) છે.

હવે આપણે એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના વિશેષ કિસ્સામાં કોણીય વેગમાનનો અભ્યાસ કરવા માગીએ છીએ. તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાન માટેનું વ્યાપક સમીકરણ

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \text{ છે.} \quad (7.25b)$$

આપણે સૌપ્રથમ ભ્રમણ કરતા દૃઢ પદાર્થના કોઈ એક લાક્ષણિક કણના કોણીય વેગમાનને ધ્યાનમાં લઈશું. ત્યાર બાદ આપણે સમગ્ર પદાર્થનું **L** મેળવવા માટે પ્રત્યેક કણોના યોગદાનનો સરવાળો કરીશું.

કોઈ એક લાક્ષણિક કણ માટે $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. છેલ્લા પરિચ્છેદમાં જે જોયું તે $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ (આકૃતિ 7.17(b)) $\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\upsilon}$ સાથે

$\mathbf{l} = (\mathbf{OC} \times m\,\boldsymbol{\upsilon}) + (\mathbf{CP} \times m\,\boldsymbol{\upsilon})$

P પરના કણના રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}$નું માન $\upsilon = \omega\, r_\perp$ છે, જ્યાં $r_\perp$ એ CPની લંબાઈ કે કણનું પરિભ્રમણ અક્ષથી લંબઅંતર છે. વધુમાં, $\boldsymbol{\upsilon}$ એ આ કણ જે વર્તુળ બનાવે છે તેને P પરના સ્પર્શકની દિશામાં છે. જમણા હાથના નિયમનો ઉપયોગ કરીને એ ચકાસી શકાય છે કે, $\mathbf{CP} \times \boldsymbol{\upsilon}$ એ સ્થિર અક્ષને સમાંતર છે. $\hat{\mathbf{k}}$ એ સ્થિર અક્ષને (Z-અક્ષને પસંદ કરેલ છે.) અનુલક્ષીને એકમ સદિશ છે. આમ,

$$\mathbf{CP} \times m\boldsymbol{\upsilon} = r_\perp (m\upsilon)\hat{\mathbf{k}}$$
$$= mr_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{કારણ કે } v = \omega\, r_\perp)$$

આ જ રીતે આપણે ચકાસી શકીએ છીએ કે $\mathbf{OC} \times \boldsymbol{\upsilon}$ એ સ્થિર અક્ષને લંબ છે. સ્થિર અક્ષ (એટલે કે z-અક્ષ)ને અનુલક્ષીને $\mathbf{l}$ના ઘટકને $\mathbf{l}_z$ વડે દર્શાવતાં,

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\boldsymbol{\upsilon} = mr_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}}$$

અને $\mathbf{l} = \mathbf{l}_z + \mathrm{OC} \times m\,\boldsymbol{\upsilon}$

આપણે એ નોંધવું રહ્યું કે $\mathbf{l}_z$ એ સ્થિર અક્ષને સમાંતર છે પણ $\mathbf{l}$ તેને સમાંતર નથી. વ્યાપક રૂપે કોઈ પણ કણ માટે કોણીય વેગમાન એ પરિભ્રમણ અક્ષની દિશામાં નથી હોતું, એટલે કે કોઈ કણ માટે $\mathbf{l}$ અને $\boldsymbol{\omega}$ એ સમાંતર જ હોય તે જરૂરી નથી. રેખીય ગતિમાં આને સમતુલ્ય તથ્યની સાથે સરખામણી કરો. કોઈ પણ કણ માટે $\mathbf{p}$ અને $\boldsymbol{\upsilon}$ એ હંમેશાં એકબીજાને સમાંતર જ હોય છે.

સમગ્ર દૃઢ પદાર્થનું કુલ કોણીય વેગમાન ગણવા માટે, આપણે આ પદાર્થના દરેક કણના ફાળાનો સરવાળો કરીશું.

આમ, $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i$

આપણે, $\mathbf{L}$ના z-અક્ષને લંબ અને z-અક્ષની દિશામાંનાં ઘટકોને અનુક્રમે $\mathbf{L}_\perp$ અને $\mathbf{L}_z$ વડે દર્શાવીશું.

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \qquad (7.44a)$$

જ્યાં, m_i અને $\boldsymbol{\upsilon}_i$એ i માં કણનું અનુક્રમે દળ અને વેગ છે તથા C_i એ કણ દ્વારા રચાતાં વર્તુળનું કેન્દ્ર છે.

$$\text{અને } \mathbf{L}_z = \sum \mathbf{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{અથવા } \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44b)$$

છેલ્લું પદ આવું મળે છે કારણ કે iમા કણનું અક્ષથી લંબઅંતર એ r_i છે અને વ્યાખ્યા મુજબ પરિભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા $I = \sum m_i r_i^2$ છે.

$$\text{નોંધો, } \mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp \qquad (7.44c)$$

આ પ્રકરણમાં આપણે મુખ્યત્વે જે દૃઢ પદાર્થોનો વિચાર કર્યો છે તેઓ પરિભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત છે. એટલે કે, ભ્રમણ અક્ષ તેમની કોઈ એક સંમિતિ અક્ષ છે. આવા પદાર્થો માટે કોઈ એક આપેલ OC_i માટે $\boldsymbol{\upsilon}_i$ વેગ ધરાવતા દરેક કણ માટેના, એક બીજો $-\boldsymbol{\upsilon}_i$ વેગ ધરાવતો કણ હોય છે જે C_i કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર વ્યાસના સામેના છેડે આવેલો હોય છે. $\mathbf{L}_\perp$માં આવી જોડીઓનો કુલ ફાળો શૂન્ય હશે અને પરિણામે સંમિત પદાર્થો માટે $\mathbf{L}_\perp$ શૂન્ય છે અને તેથી

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44d)$$

જે પદાર્થો ભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત નથી હોતા તેમને માટે $\mathbf{L}$ એ $\mathbf{L}_z$ જેટલા મૂલ્યના સમાન હોતા નથી અને તેથી $\mathbf{L}$ ભ્રમણ અક્ષને સમાંતર હોતા નથી.

કોષ્ટક 7.1નો સંદર્ભ લઈ તમે કહી શકશો કે કયા કિસ્સાઓમાં $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z$ લાગુ પડશે નહિ ?

ચાલો સમીકરણ (7.44b)નું વિકલન કરીએ. $\hat{\mathbf{k}}$ એ નિશ્ચિત (અચળ) સદિશ હોવાથી, આપણને

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(I\omega)\right)\hat{\mathbf{k}} \text{ મળે.}$$

હવે, સમીકરણ (7.28b) જણાવે છે કે,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

છેલ્લા પરિચ્છેદમાં આપણે જોયું છે કે, જ્યારે આપણે નિશ્ચિત અક્ષની આસપાસ ચાકગતિની ચર્ચા કરીએ ત્યારે બાહ્ય ટૉર્કના માત્ર જે ઘટકો ભ્રમણ અક્ષને સમાંતર હોય તેમને જ ધ્યાનમાં લેવાની જરૂર છે. એટલે કે આપણે $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$ લઈ શકીએ.

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ હોવાથી અને $\mathbf{L}_z$ (સદિશ $\hat{\mathbf{k}}$)ની દિશા નિશ્ચિત હોવાથી, સ્થિર ભ્રમણ અક્ષની આસપાસ ચાકગતિ માટે

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \tau\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.45a)$$

$$\text{અને } \frac{d\mathbf{L}_\perp}{dt} = 0 \qquad (7.45b)$$

આમ, સ્થિર ભ્રમણ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે કોણીય વેગમાનનો સ્થિર અક્ષને લંબ ઘટક અચળ રહે છે.

$\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$ હોવાથી, સમીકરણ (7.45a) પરથી

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \qquad (7.45c)$$

જો જડત્વની ચાકમાત્રા સમય સાથે બદલાતી ન હોય તો,

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

અને આપણને સમીકરણ (7.45c) પરથી

$\tau = I\alpha$ મળે છે. (7.43)

આપણે આ સમીકરણ કાર્ય-ગતિઊર્જાના માર્ગે અગાઉ મેળવેલું જ છે.

7.13.1 કોણીય વેગમાનનું સંરક્ષણ (Conservation of angular momentum)

આપણે હવે એ સ્થિતિમાં છીએ કે કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિના સંદર્ભમાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના સિદ્ધાંતનું પુનરાવર્તન કરી શકીએ. સમીકરણ (7.45c) પરથી, જો બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય તો,

$L_z = I\omega =$ અચળ (7.46)

સંમિત પદાર્થ માટે સમીકરણ (7.44d) પરથી L_zને સ્થાને L મૂકી શકાય છે. (L અને L_z અનુક્રમે **L** અને $\mathbf{L}_z$ના માન છે.)

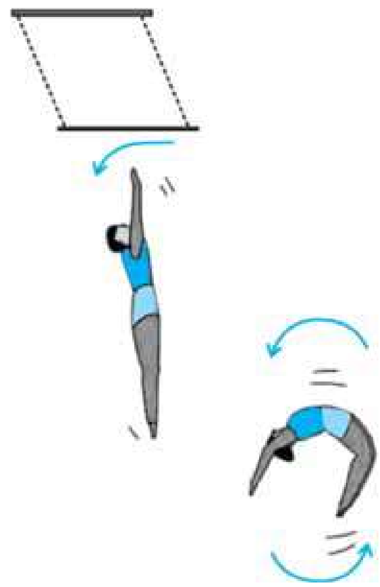
સમીકરણ (7.29a), જે કણોના તંત્રના કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના વ્યાપક નિયમને વ્યક્ત કરે છે. તેનું આ સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ માટે વ્યાપક સ્વરૂપ છે. સમીકરણ (7.46) એ આપણા દૈનિક જીવનમાં આવતી ઘણી પરિસ્થિતિઓને લાગુ પડે છે. તમે તમારા મિત્ર સાથે આ પ્રયોગ કરી શકો છો. તમારા હાથ વાળીને અને પગ નીચે ટેકવેલ ન હોય એટલે કે, જમીનથી દૂર હોય તે રીતે, ભ્રમણ કરી શકતી ખુરશી (Swivel Chair) પર બેસી જાઓ. તમારા મિત્રને આ ખુરશી ઝડપથી ફેરવવા માટે કહો. જ્યારે ખુરશી પર્યાપ્ત કોણીય ઝડપે ફરતી હોય ત્યારે તમારા હાથોને સમક્ષિતિજ ફેલાવો. શું થયું ? તમારી કોણીય ઝડપમાં ઘટાડો થાય છે. જો તમે તમારા હાથોને તમારા શરીરની નજીક લાવો, તો કોણીય ઝડપ ફરીથી વધે છે. આ એવી પરિસ્થિતિ છે કે જ્યાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનો સિદ્ધાંત લાગુ પડે છે. જો ચાકગતિની પ્રક્રિયામાં ઘર્ષણ અવગણવામાં આવે, તો ખુરશીના પરિભ્રમણની અક્ષને અનુલક્ષીને કોઈ બાહ્ય ટૉર્ક નથી અને તેથી $I\omega$ એ અચળ રહે છે. ફેલાયેલા હાથોએ પરિભ્રમણના અક્ષને અનુલક્ષીને Iમાં વધારો કરે છે. પરિણામે કોણીય ઝડપ ω ઘટે છે. હાથને શરીરની નજીક લાવવાથી વિરુદ્ધ અસર જોવા મળે છે.

કોઈ સર્કસમાં નટ કલાકાર (ઍક્રોબેટ) અને મરજીવા આ સિદ્ધાંતનો લાભ લે છે. ઉપરાંત, સ્કેટર અને શાસ્ત્રીય, ભારતીય અથવા એક પગના અંગૂઠા પર ચક્રીય પશ્ચિમી નૃત્ય કરતા નૃત્યકારોના પ્રદર્શનમાં આ સિદ્ધાંત પરની તેમની 'નિપુણતા' જોવા મળે છે. શું તમે આ સમજાવી શકો ?

7.14 ગબડતી ગતિ (ROLLING MOTION)

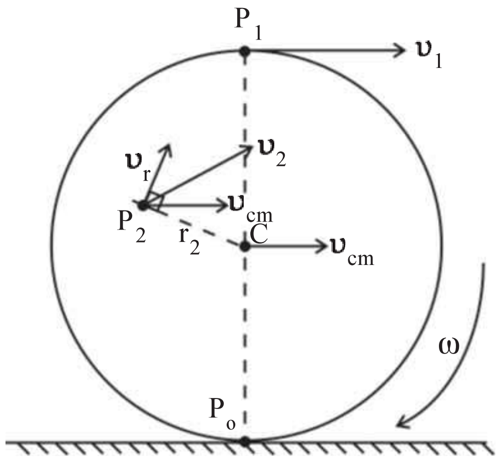
રોજિંદા જીવનમાં જોવા મળતી બહુ સામાન્ય ગતિઓમાંની એક એ ગબડતા પદાર્થની ગતિ છે. પરિવહનમાં વપરાતાં બધાં પૈડાં (Wheels)ની ગતિ એ ગબડતા પદાર્થની ગતિ છે. ખાસ કરીને આપણે એક તક્તીથી આરંભ કરીશું, પરંતુ પરિણામ એક સમતલ સપાટી પર ગબડતા કોઈ પણ પદાર્થને લાગુ પડશે. આપણે એવું ધારી લઈશું કે તક્તી સરક્યા (લપસ્યા-Slipping) વિના ગબડે છે. આનો અર્થ એ છે કે કોઈ પણ ક્ષણે, સપાટી સાથે સંપર્કમાં રહેલું તક્તીનું તળિયું સ્થિર રહે છે.

આકૃતિ. 7.36 (a) કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણનું નિદર્શન. એક છોકરી રીવોલ્વિંગ ખુરશી પર બેસે છે અને તેના હાથોને સમક્ષિતિજ લંબાવે છે/તેના હાથોને શરીરની નજીક લાવે છે.



આકૃતિ 7.36 (b) એક નટ કલાકાર (Acrobat) તેના કાર્યમાં કોણીય વેગમાનના સંરક્ષણના સિદ્ધાંતને કામે લગાડે છે.

અગાઉ આપણે નોંધ્યું છે કે, ગબડવાની ગતિ એ ચાકગતિ અને સ્થાનાંતરણ ગતિનું સંયોજન છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે કણોના તંત્રની સ્થાનાંતરણ ગતિ તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ છે.



આકૃતિ 7.37 સમતલ સપાટી પર તક્તીની (સરક્યા વિના) ગબડવાની ગતિ. નોંધો કે કોઈ પણ ક્ષણે તક્તીનું સપાટી સાથેનું સંપર્ક બિંદુ P_o સ્થિર રહે છે. તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર υ_{cm} વેગથી ગતિ કરે છે. તક્તી Cમાંથી પસાર થતી તેની અક્ષને અનુલક્ષીને કોણીય વેગ ωથી ભ્રમણ કરે છે. $\upsilon_{cm} = R\omega$, જ્યાં R એ તક્તીની ત્રિજ્યા છે.

ધારો કે, $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ અને તેથી તક્તીની સ્થાનાંતરણ ગતિનો વેગ છે. ગબડતી તક્તીનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તેના ભૌમિતિક કેન્દ્ર C પર હોવાથી (આકૃતિ 7.37)માં $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ એ Cનો વેગ છે. તે સમતલ સપાટીને સમાંતર છે. તક્તીની ચાકગતિ Cમાંથી પસાર થતી સંમિતિ અક્ષની આસપાસ છે. તક્તીના P_o, P_1 અને P_2 જેવા કોઈ પણ બિંદુનો વેગ બે ભાગનો બનેલો છે. એક સ્થાનાંતરણ વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ અને બીજો ચાકગતિને લીધે રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_r$. $\boldsymbol{\upsilon}_r$નું માન $\upsilon_r = r\omega$, જ્યાં ω એ તક્તીની અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિનો કોણીય વેગ છે અને r તે બિંદુનું અક્ષથી (એટલે કે Cથી) અંતર છે. વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_r$ આપેલ બિંદુના Cને અનુલક્ષીને સ્થાનસદિશને લંબ છે. આકૃતિ 7.37માં P_2 બિંદુનો વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_2$ અને તેનાં ઘટકો $\boldsymbol{\upsilon}_r$ અને $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ દર્શાવ્યા છે. અહીં $\boldsymbol{\upsilon}_r$ એ CP_2ને લંબ છે. એવું સહેલાઈથી દર્શાવી શકાય કે $\boldsymbol{\upsilon}_2$ એ P_oP_2 રેખાને લંબ છે. આથી P_oમાંથી પસાર થતી અને $\boldsymbol{\omega}$ને સમાંતર રેખાને તાત્ક્ષણિક ભ્રમણાક્ષ કહે છે.

P_o પર ચાકગતિને લીધે રેખીય વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_r$ સ્થાનાંતર વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_{cm}$ની બરાબર વિરુદ્ધ દિશામાં છે. વળી, અત્રે $\boldsymbol{\upsilon}_r$નું માન $R\omega$ છે. જ્યાં R એ તક્તીની ત્રિજ્યા છે. P_o ક્ષણિક રીતે સ્થિર રહે તે માટે જરૂરી છે કે $\boldsymbol{\upsilon}_{cm} = R\omega$ આમ તક્તી માટે સરક્યા વિના ગબડવાની શરત

$$\upsilon_{cm} = R\omega \text{ છે.} \tag{7.47}$$

સાહજિક રીતે જ આનો અર્થ એ થાય કે તક્તીની ટોચ પરના બિંદુ P_1ના વેગ $\boldsymbol{\upsilon}_1$નું માન $\upsilon_{cm} + R\omega$ અથવા $2\,\upsilon_{cm}$ છે અને સમતલ સપાટીને સમાંતર છે. સમીકરણ (7.47) વડે મળતી શરત દરેક ગબડતા પદાર્થને લાગુ પડે છે.

7.14.1 ગબડતી ગતિની ગતિઊર્જા (Kinetic Energy of Rolling Motion)

આપણું આગામી કાર્ય ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જા માટેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત કરવાનું છે. ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જાને સ્થાનાંતર ગતિઊર્જા અને ભ્રમણની ગતિઊર્જામાં અલગ કરી શકાય છે. આ કણોના એવા તંત્ર માટે વ્યાપક પરિણામનો વિશિષ્ટ કિસ્સો છે, જે મુજબ કણોના તંત્રની ગતિઊર્જા (K)ને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા (સ્થાનાંતરણ) ($MV^2/2$) અને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ચાકગતિની ઊર્જા (K')માં અલગ કરી શકાય છે. આમ,

$$K = K' + MV^2/2 \tag{7.48}$$

આપણે આ વ્યાપક પરિણામ ધારી લઈએ છીએ (સ્વાધ્યાય 7.31 જુઓ) અને ગબડતી ગતિના કિસ્સામાં તેને લાગુ કરીએ છીએ. આપણા સંકેતમાં, ગબડતા પદાર્થ માટે, દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા એટલે કે સ્થાનાંતરની ગતિઊર્જાએ $m\upsilon_{cm}^2/2$ છે. જ્યાં m એ પદાર્થનું દળ છે અને υ_{cm} એ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ છે. દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગબડતા પદાર્થની ગતિ એ ચાકગતિ હોવાથી K' એ પદાર્થની ચાકગતિની ગતિઊર્જા રજૂ કરે છે. $K' = I\omega^2/2$ જ્યાં I એ સુયોગ્ય અક્ષ જે ગબડતા પદાર્થની સંમિત અક્ષ છે. તેને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. આમ, ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જાને નીચેના સમીકરણ દ્વારા આપવામાં આવે છે :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 \tag{7.49a}$$

$I = mk^2$ જ્યાં k = પદાર્થની ચક્રાવર્તનની ત્રિજ્યા અને $v_{cm} = R\omega$ મૂકતાં,

$$K = \frac{1}{2}\frac{mk^2\upsilon_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$$

$$\text{અથવા } K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) \tag{7.49b}$$

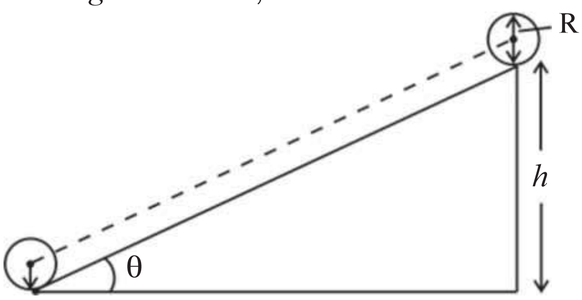
સમીકરણ (7.49b) એ કોઈ પણ ગબડતા પદાર્થ (રોલિંગ બોડી) પર લાગુ પાડી શકાય છે. જેમકે તક્તી, નળાકાર, વલય અથવા ગોળો.

▶ *ઉદાહરણ 7.16* ત્રણ પદાર્થો, એક રિંગ, એક ઘન નળાકાર અને એક ઘન ગોળો એક જ ઢળતાં પાટિયા (Inclined Plane) પર સરક્યા વગર નીચે તરફ ગબડે છે. તેઓ સ્થિર અવસ્થામાંથી ગતિ શરૂ કરે છે. બધા જ પદાર્થોની ત્રિજ્યાઓ એક સમાન છે. કયો પદાર્થ મહત્તમ વેગ સાથે જમીન પર પહોંચશે ?

ઉકેલ આપણે ગબડતા પદાર્થ માટે ઊર્જા-સંરક્ષણ માની લઈએ છીએ, એટલે કે ઘર્ષણ વગેરેને લીધે ઊર્જામાં કોઈ વ્યય થતો નથી. આથી ઢળતા પાટિયા પરથી નીચે ગબડતા પદાર્થ દ્વારા ગુમાવાતી સ્થિતિઊર્જા (= mgh) તેની ગતિઊર્જામાં થતાં વધારા બરાબર થવી જ જોઈએ. (આકૃતિ 7.38 જુઓ.) પદાર્થ સ્થિર સ્થિતિથી ગતિ શરૂ કરે છે તેથી ગતિઊર્જામાં થતો વધારો એ પદાર્થની અંતિમ ગતિઊર્જા બરાબર છે. તેથી સમીકરણ (7.49b) પરથી,

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

જ્યાં, υ એ પદાર્થનો (દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો) અંતિમ વેગ છે. K અને mghને સરખાવતાં,



આકૃતિ 7.38

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

$$\text{અથવા } \upsilon^2 = \left(\frac{2gh}{1+k^2/R^2}\right)$$

નોંધો કે υનું મૂલ્ય એ ગબડતા પદાર્થના દ્રવ્યમાન પર આધાર રાખતો નથી.

રિંગ માટે, $k^2 = R^2$

$$\upsilon_{ring} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{gh}$$

નક્કર નળાકાર માટે $k^2 = R^2/2$

$$\upsilon_{disc} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1/2}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

નક્કર ગોળા માટે $k^2 = 2R^2/5$

$$\upsilon_{sphere} = \sqrt{\frac{2gh}{1+2/5}} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

પ્રાપ્ત પરિણામો પરથી એ સ્પષ્ટ છે કે ઢળતા પાટિયાના તળિયે ત્રણેય પદાર્થોમાં ગોળામાં દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ સૌથી મહત્તમ અને રિંગનો સૌથી ઓછો હોય છે.

ધારો કે, આ પદાર્થોના દ્રવ્યમાન સમાન છે. ઢળતા સમતલના તળિયે આ પદાર્થો પહોંચે છે ત્યારે કયા પદાર્થની ચાકગતિય ગતિઊર્જા મહત્તમ હશે ? ◀

સારાંશ

1. આદર્શ રીતે એક દૃઢ પદાર્થ એ છે કે જેનાં પર બળો લાગવા છતાં પદાર્થના જુદા જુદા કણો વચ્ચેનું અંતર બદલાતું નથી.
2. એક બિંદુ અથવા એક રેખા સાથે જડેલ એક દૃઢ પદાર્થ માત્ર ચાકગતિ કરી શકે છે. દૃઢ પદાર્થ કે જે કોઈ રીતે જડેલ ન હોય, તો તેની ગતિ કાં તો શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ અથવા સ્થાનાંતરણ અને ચાકગતિનું સંયોજન હોઈ શકે છે.
3. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિમાં, દૃઢ પદાર્થના દરેક કણ એ અક્ષને લંબ સમતલમાંના એક વર્તુળાકાર ગતિ કરે છે અને તેનું કેન્દ્ર આ અક્ષ પર છે. ચાકગતિ કરતા દૃઢ પદાર્થના દરેક બિંદુ કોઈ પણ સમયે સમાન કોણીય વેગ ધરાવે છે.
4. શુદ્ધ સ્થાનાંતરણ ગતિમાં પદાર્થનો દરેક કણ કોઈ પણ સમયે એક જ વેગ સાથે ગતિ કરે છે.
5. કોણીય વેગ એક સદિશ છે. તેનું માન $\omega = d\theta/dt$ છે અને તે ભ્રમણાક્ષની દિશામાં છે. સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને પરિભ્રમણ માટે આ સદિશ $\boldsymbol{\omega}$ ને એક નિશ્ચિત દિશા ધરાવે છે.

6. બે સદિશો **a** અને **b**નો સદિશ ગુણાકાર અથવા ક્રોસ પ્રોડક્ટ એ સદિશ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ વડે લખાય છે. આ સદિશનું માન $ab\sin\theta$ છે અને તેની દિશા ને જમણા હાથના સ્ક્રૂ અથવા જમણા હાથના નિયમ વડે આપવામાં આવે છે.
7. કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં એક દૃઢ પદાર્થના એક કણના રેખીય વેગને $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ વડે આપવામાં આવે છે. જ્યાં **r** એ ઉદ્‌ગમબિંદુના સંદર્ભમાં અક્ષની સાપેક્ષે કણનો સ્થાનસદિશ છે. દૃઢ પદાર્થ માટે ચાકગતિના વધુ વ્યાપક કિસ્સાઓ કે જ્યાં એક જ બિંદુ સ્થિર હોય ત્યાં પણ આ સંબંધ લાગુ પડે છે. આવા કિસ્સામાં ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે લીધેલ સ્થિર બિંદુની સાપેક્ષે **r** એ કણનો સ્થાનસદિશ છે.
8. જે બિંદુનો સ્થાનસદિશ $\mathbf{R} = \dfrac{\sum m_i r_i}{M}$ હોય તેને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.
9. કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો વેગ $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ દ્વારા આપવામાં આવે છે. જ્યાં **P** એ તંત્રનું રેખીય વેગમાન છે. તંત્રનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર એ રીતે ગતિ કરે છે કે જાણે તંત્રનું સમગ્ર દ્રવ્યમાન તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત હોય તથા બધાં બાહ્ય બળો તેના પર જ લગતાં હોય. જો તંત્ર પરનું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય, તો આ તંત્રનું કુલ રેખીય વેગમાન અચળ રહે છે.
10. ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે n કણોના તંત્રનું કોણીય વેગમાન,

    $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ છે.

    ઉદ્‌ગમબિંદુની સાપેક્ષે n કણોના તંત્ર પર લાગતું ટૉર્ક અથવા બળની ચાકમાત્રા

    $\boldsymbol{\tau} = \sum_{i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ છે.

    iમાં કણ પર લાગતા બળ $\mathbf{F}_i$માં બાહ્ય અને આંતરિક બળો પણ સામેલ છે. ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ અને કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો તેમને જોડતી રેખા પર લાગે છે તેમ લેતાં, આપણે એમ દર્શાવી શકીએ છીએ કે, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{int}} = \mathbf{0}$ અને

    $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$
11. એક દૃઢ પદાર્થ યાંત્રિક સંતુલનમાં હોય જો,
    (1) તે સ્થાનાંતરિય સંતુલનમાં હોય એટલે કે તેના પરનું કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તેથી $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, અને
    (2) તે ચાકગતિય સંતુલનમાં હોય એટલે કે તેના પરનું કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય.

    $$\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$
12. કોઈ વિસ્તરિત પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર તે એવું બિંદુ છે કે જ્યાં પદાર્થ પર લાગતું કુલ ગુરુત્વીય ટૉર્ક શૂન્ય હોય.
13. કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને દૃઢ પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રાને સૂત્ર $I = \sum m_i r_i^2$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે, જ્યાં r_i એ પદાર્થના iમાં કણનું આ અક્ષથી લંબઅંતર છે. આ ચાક ગતિઊર્જા $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ છે.
14. સમાંતર અક્ષોના પ્રમેય : $I_z' = I_z + Ma^2$ લાગુ કરીને આપણે દૃઢ પદાર્થની કોઈ એક અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા, આ અક્ષને સમાંતર ગુરુત્વકેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા અને પદાર્થનું દ્રવ્યમાન તથા આ બંને અક્ષો વચ્ચેનાં લંબઅંતરના વર્ગના ગુણાકારના સરવાળાથી શોધી શકીએ છીએ.

15. કાયનેમેટિક્સ અને ડાયનેમિક્સના સંદર્ભમાં કોઈ એક ચોક્કસ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ એ સુરેખીય ગતિ સાથે સીધી સામ્યતા ધરાવે છે.
16. કોઈ એક સ્થિર ભ્રમણાક્ષને (ધારો કે z-અક્ષ) અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં કોઈ એક પદાર્થ માટે $L_z = I\omega$ જ્યાં I એ z-અક્ષને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા છે. સામાન્યતઃ આવા પદાર્થ માટે **L** એ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોતું નથી. જ્યારે પદાર્થ એ ભ્રમણાક્ષને અનુલક્ષીને સંમિત હોય ફક્ત ત્યારે જ **L** એ ભ્રમણાક્ષની દિશામાં હોય છે. આ કિસ્સામાં $|\mathbf{L}| = L_z = I\omega$ કોઈ એક સ્થિર અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં પદાર્થના કોણીય પ્રવેગને $I\alpha = \tau$ વડે આપવામાં આવે છે. જો પદાર્થ પર લાગતું બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોય, તો સ્થિર ભ્રમણાક્ષને (ધારો કે z-અક્ષ) અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરતાં આવા પદાર્થના કોણીય વેગમાનનો ઘટક L_z $(=I\omega)$ અચળ હોય છે.
17. સરક્યા વિના ગબડતી ગતિ કરતાં પદાર્થ માટે $\upsilon_{cm} = R\omega$ જ્યાં υ_{cm} એ સ્થાનાંતરીય વેગ (એટલે કે પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનો) છે, R એ આ પદાર્થની ત્રિજ્યા અને m દળ છે. આવા ગબડતા પદાર્થની ગતિઊર્જા એ સ્થાનાંતરણ અને પરિભ્રમણની ગતિઊર્જાઓનો સરવાળો છે :

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

રાશિ (Quantity)	સંજ્ઞા (Symbols)	પરિમાણ (Dimensions)	એકમો (Units)	નોંધ (Remark)
કોણીય વેગ (Angular Velocity)	ω	$[T^{-1}]$	rad s	$\upsilon = \omega \times r$
કોણીય વેગમાન (Angular Momentum)	L	$[ML^2T^{-1}]$	J s	$L = r \times p$
ટૉર્ક (Torque)	τ	$[ML^2T^{-2}]$	N m	$\tau = r \times F$
જડત્વની ચાકમાત્રા (Moment of Intertia)	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_i^2$

ગહન વિચારણાના મુદ્દાઓ

1. કોઈ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ જાણવા માટે, તંત્રનાં આંતરિક બળોની જાણકારી જરૂરી નથી. આ હેતુ માટે આપણે ફક્ત પદાર્થ પરનાં બાહ્ય બળો જ જાણવાની જરૂર છે.
2. કણોના તંત્રના ગતિશાસ્ત્રમાં, કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ (એટલે તંત્રની રેખીય ગતિ) અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને (એટલે કે તેની સાપેક્ષે) થતી ગતિને અલગ કરવી એ એક ઉપયોગી તકનિક છે. આ તકનિકના એક ઉદાહરણ તરીકે કણોના તંત્રની ગતિઊર્જા Kને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તેની ગતિઊર્જા K' અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિઊર્જા $MV^2/2$ને અલગ કરવી તે છે.
   $K = K' + MV^2/2$.
3. પરિમિત પરિમાણના પદાર્થો (કે કણોના તંત્રો) માટે ન્યૂટનનો બીજો નિયમ; ન્યૂટનના બીજા નિયમ ઉપરાંત કણો માટેના ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમ પર પણ આધારિત છે.
4. કણોના તંત્રના કુલ કોણીય વેગમાનના ફેરફારનો સમય-દર, તંત્ર પરના કુલ બાહ્ય ટૉર્ક જેટલો હોય છે. તેમ સ્થાપિત કરવામાં આપણે કણો માટે ન્યૂટનના બીજા નિયમ ઉપરાંત ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમની પણ જરૂર પડે છે. જેમાં બે કણો વચ્ચે લાગતાં બળો તેમને જોડતી રેખા પર હોવાં જરૂરી છે.
5. કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોવું અને કુલ બાહ્ય ટૉર્ક શૂન્ય હોવું એ બે સ્વતંત્ર શરતો છે. એક વિના બીજું હોઈ શકે છે. બળયુગ્મમાં કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય છે પણ કુલ ટૉર્ક અશૂન્ય છે.
6. જો કુલ બાહ્ય બળ શૂન્ય હોય તો તંત્ર પરનું કુલ ટૉર્ક ઉગમબિંદુ પર આધારિત નથી.
7. જો પદાર્થના એક ખંડથી બીજા ખંડ પરનું ગુરુત્વક્ષેત્ર બદલાતું ન હોય તો જ, પદાર્થનું ગુરુત્વકેન્દ્ર તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર સાથે સંપાત થાય છે.
8. કોણીય વેગમાન **L** અને કોણીય વેગ $\boldsymbol{\omega}$, સમાંતર સદિશો હોવા જરૂરી નથી. જોકે આ પ્રકરણમાં ચર્ચેલ સરળ પરિસ્થિતિઓમાં, જ્યારે, કોઈ સ્થિર અક્ષ કે જે દૃઢ વસ્તુની સંમિતિ અક્ષ છે તેની આસપાસ ચાકગતિ થતી હોય, તો $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ સંબંધ યથાર્થ છે, જ્યાં I ભ્રમણ અક્ષની દિશામાં પદાર્થની જડત્વની ચાકમાત્રા છે.

સ્વાધ્યાય

7.1 એક સમાન દળ ઘનતા ધરાવતાં (i) ગોળા (ii) નળાકાર (iii) રિંગ અને (iv) સમઘનના આ દરેક પદાર્થના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું સ્થાન જણાવો. શું પદાર્થનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પદાર્થની અંદરના ભાગમાં જ હોય તે જરૂરી છે ?

7.2 HCl અણુમાં, બે પરમાણુઓના ન્યુક્લિયસો વચ્ચેનું અંતર લગભગ 1.27 Å (1 Å = 10^{-10}m) છે. ક્લોરિન અણુ એ હાઇડ્રોજન પરમાણુથી લગભગ 35.5 ગણો દળદાર છે અને આ અણુનું લગભગ તમામ દળ તેના ન્યુક્લિયસમાં કેન્દ્રિત છે તેમ આપેલ છે, તો અણુના CMનું આશરે સ્થાન શોધો.

7.3 એક બાળક એક લાંબી ટ્રૉલીના એક છેડે સ્થિર બેઠો છે, જે એક લીસી સમક્ષિતિજ સપાટી પર એક નિયમિત V ઝડપથી આગળ વધી રહી છે. જો આ બાળક ટ્રૉલી પર ઊભો થઈને કોઈ પણ રીતે દોડે, તો (ટ્રૉલી + બાળક) તંત્રના CMની ઝડપ કેટલી હશે ?

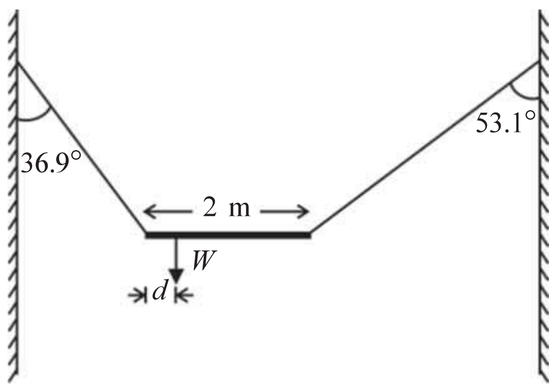
7.4 દર્શાવો કે સદિશો **a** અને **b**થી બનેલ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ **a** × **b**ના મૂલ્યથી અડધું હોય છે.

7.5 દર્શાવો કે **a** · (**b** × **c**) એ ત્રણ સદિશો **a**, **b** અને **c**થી બનતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્ફલકના કદના મૂલ્ય બરાબર હોય છે.

7.6 x, y, z ઘટકો સાથે જેનો સ્થાનસદિશ **r** અને p_x, p_y, p_z ઘટકો સાથે વેગમાન **p** હોય તે કણના કોણીય વેગમાન **l** ના X, Y, Z અક્ષો પરનાં ઘટકો શોધો કે જો કણ ફક્ત x-y સમતલમાં જ ગતિ કરે તો કોણીય વેગમાનને માત્ર z-ઘટક જ હોય છે.

7.7 દરેકનું દળ m અને ઝડપ υ હોય તેવા બે કણો એકબીજાથી d અંતરે રહેલ બે સમાંતર રેખાઓ પર વિરુદ્ધ દિશામાં ગતિ કરે છે. દર્શાવો કે કોઈ પણ બિંદુની સાપેક્ષે કોણીય વેગમાન લેવામાં આવે તોપણ આ બે કણોના તંત્રનું સદિશ કોણીય વેગમાન સમાન જ રહે છે.

7.8 આકૃતિ 7.39માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે W વજનના એક અનિયમિત સળિયાને અવગણ્ય વજનની બે દોરીઓ દ્વારા લટકાવીને સ્થિર રાખવામાં આવેલ છે. ઊર્ધ્વદિશા (શિરોલંબ) સાથે દોરીઓ દ્વારા બનાવવામાં આવેલા ખૂણા અનુક્રમે 36.9° અને 53.1° છે. આ સળિયાની લંબાઈ 2 m છે. આ સળિયાની ડાબી બાજુના છેડાથી તેના ગુરુત્વકેન્દ્રના અંતર d ની ગણતરી કરો.



આકૃતિ 7.39

7.9 એક કારનું વજન 1800 kg છે. તેની આગળ અને પાછળની એક્સેલ્સ (ધરીઓ) વચ્ચેનું અંતર 1.8 m છે. તેનું ગુરુત્વકેન્દ્ર આગળની એક્સલથી 1.05 m પાછળ છે. સમતલ જમીન દ્વારા આગળના દરેક પૈડા (વ્હીલ) અને પાછળના દરેક પૈડાં (વ્હીલ) પર લાગતું બળ શોધો.

7.10 (a) ગોળાના સ્પર્શકને અનુલક્ષીને ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્ર શોધો. ગોળાના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને ગોળાની જડત્વની ચાકમાત્રા 2 $MR^2/5$ છે તેમ આપેલ છે, જ્યાં M એ ગોળાનું દળ અને R એ ગોળાની ત્રિજ્યા છે.

(b) M દળ અને R ત્રિજ્યાની એક તક્તીની તેના કોઈ પણ વ્યાસને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા $MR^2/4$ છે. તક્તીને લંબ અને તેની ધાર પરના બિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને તક્તીની જડત્વની ચાકમાત્રા શોધો.

7.11 સમાન દળ અને સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતા એક પોલા નળાકાર અને ઘન ગોળા પર સમાન મૂલ્યનું ટૉર્ક લાગુ પાડેલ છે. નળાકાર તેના પ્રમાણભૂત સંમિતિ અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરવા માટે મુક્ત છે અને ગોળો એ તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને ચાકગતિ કરવા માટે મુક્ત છે. આપેલ સમય પછી બંનેમાંથી કોણ વધુ કોણીય ઝડપ પ્રાપ્ત કરશે ?

7.12 20 kg દળનો એક નક્કર નળાકાર તેની અક્ષને અનુલક્ષીને 100 rad s^{-1} કોણીય ઝડપથી પરિભ્રમણ કરે છે. આ નળાકારની ત્રિજ્યા 0.25 m છે. આ નળાકારની ચાકગતિ સાથે સંકળાયેલ ગતિઊર્જા કેટલી હશે ? તેની અક્ષને અનુલક્ષીને આ નળાકારના કોણીય વેગમાનનું માન કેટલું હશે ?

7.13 (a) એક બાળક તેના બે હાથ પહોળા કરીને ટર્નટેબલના કેન્દ્ર પર ઊભો છે. ટર્નટેબલ એ 40 rev/minની કોણીય ઝડપથી ભ્રમણ કરે છે. જો આ બાળક તેના હાથોને પાછા વાળે અને તેનાથી તે તેની જડત્વની ચાકમાત્રાનું મૂલ્ય ઘટાડીને તે તેની પ્રારંભિક જડત્વની ચાકમાત્રાના મૂલ્યના 2/5 ગણું કરે તો તેની કોણીય ઝડપ કેટલી થશે ? ટર્નટેબલ ઘર્ષણરહિત ફરે છે એમ ધારો.

(b) દર્શાવો કે બાળકના પરિભ્રમણની નવી ગતિઊર્જા તેના પ્રારંભિક પરિભ્રમણની ગતિઊર્જા કરતાં વધુ છે. ગતિઊર્જામાં થતો આ વધારો તમે કેવી રીતે સમજાવશો ?

7.14 3 kg દળ અને 40 cm ત્રિજ્યાના એક પોલા નળાકાર ફરતે અવગણ્ય દળનું એક દોરડું વીંટાળેલ છે. જો આ દોરડાને 30 N બળથી ખેંચવામાં આવે, તો આ નળાકારનો કોણીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? દોરડાનો રેખીય પ્રવેગ કેટલો હશે ? એમ ધારો કે અહીં દોરડું સરકતું નથી.

7.15 એક રોટરને 200 rad s^{-1} એક સમાન કોણીય ઝડપ જાળવવા, માટે એન્જિન 180 N m ટૉર્ક પ્રસ્થાપિત કરવું આવશ્યક છે. આ માટે ઍન્જિનને કેટલો પાવર આવશ્યક છે ? (નોંધ : ઘર્ષણની ગેરહાજરીમાં એક સમાન કોણીય વેગ એટલે શૂન્ય ટૉર્ક, વ્યવહારમાં, ઘર્ષણવાળા ટૉર્કનો સામનો કરવા માટે લગાડવા પડતાં ટૉર્કની જરૂરિયાત છે.) એમ ધારો કે ઍન્જિન 100 % કાર્યક્ષમ છે.

7.16 R ત્રિજ્યાની એક સમાન તક્તીમાંથી, $R/2$ ત્રિજ્યાના ગોળાકાર છિદ્રને કાપવામાં આવે છે. આ છિદ્રનું કેન્દ્ર મૂળ ડિસ્કના કેન્દ્રથી $R/2$ અંતરે છે. પરિણામી સપાટ પદાર્થનું ગુરુત્વ કેન્દ્ર શોધો.

7.17 એક મીટર-પટ્ટી તેના મધ્યે છરીની ધાર પર સંતુલિત છે. જ્યારે એવા બે સિક્કા કે જે દરેકનું દળ 5 gm છે તેમને 12 cmના નિશાન પર એકબીજાની ઉપર મૂકવામાં આવે છે, ત્યારે આ પટ્ટી 45.0 cm પર સંતુલિત થાય છે. આ મીટર-પટ્ટીનું દળ શું હશે ?

7.18 એક ઘન ગોળો એક જ ઊંચાઈના અલગ અલગ નમન કોણ ધરાવતા બે ઢળતા સમતલ પરથી ગબડે છે. (a) શું તે દરેક કિસ્સામાં સમાન ઝડપ સાથે નીચે પહોંચશે ? (b) શું એક સમતલ કરતાં બીજા સમતલ પર વધુ સમય લેશે ? (c) જો એમ હોય તો કયા સમતલ પર અને શા માટે ?

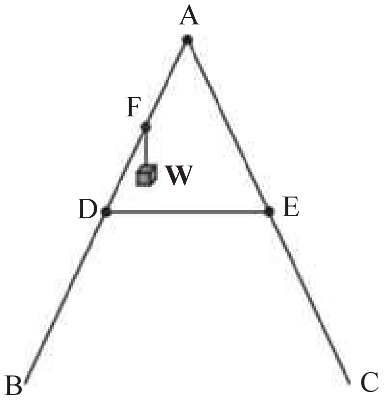
7.19 2 m ત્રિજ્યાના એક વલયનું દળ 100 kg છે. તે એક સમક્ષિતિજ સપાટી પર એવી રીતે ગબડે છે કે જેથી તેના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ઝડપ 20 cm/s હોય, તેને રોકવા માટે કેટલું કાર્ય કરવું પડે ?

7.20 ઑક્સિજન અણુનું દ્રવ્યમાન 5.30×10^{-26} kg અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી તેના બે અણુઓને જોડતી રેખાને લંબ એવી અક્ષને અનુલક્ષીને તેની જડત્વની ચાકમાત્ર 1.94×10^{-46} kg m^2 છે. ધારો કે કોઈ ગૅસમાં આવા અણુની સરેરાશ ઝડપ 500 m/s છે અને તેના પરિભ્રમણની ગતિઊર્જા એ તેના સ્થાનાંતરણની ગતિઊર્જાથી બે તૃતીયાંશ છે તો અણુનો સરેરાશ કોણીય વેગ શોધો.

7.21 30^oના ખૂણે નમેલા એક ઢળતા પાટિયા ઉપર એક નક્કર નળાકાર ગબડીને ઉપર તરફ જાય છે. આ ઢળતા પાટિયાના તળિયે નળાકારનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર 5 m/sની ગતિ ધરાવે છે. (a) નળાકાર આ ઢળતા પાટિયા પર કેટલો ઉપર જશે ? (b) તળિયે પાછા આવવા માટે તેને કેટલો સમય લાગશે ?

વધારાનું સ્વાધ્યાય

7.22 આકૃતિ 7.40માં બતાવ્યા પ્રમાણે BA અને CA બે બાજુઓ કે જેની લંબાઈ 1.6 મીટર છે તેવી એક નિસરણીને A પર લટકાવેલ છે. 0.5 mના એક દોરડા DEને નિસરણીની અધવચ્ચે બાંધેલ છે. BA બાજુ સાથે Bથી 1.2 m પર 40 kg વજન એક બિંદુ Fથી લટકાવવામાં આવેલ છે. ભોંયતળિયાને ઘર્ષણરહિત ધારીને અને નિસરણીના વજનની અવગણના કરીને, દોરડામાંનો તણાવ અને નિસરણી પર ભોંયતળિયા દ્વારા લગાડવામાં આવેલાં બળ શોધો. (g = 9.8 m/s^2 લો.)
(**સૂચના :** નિસરણીની દરેક બાજુનું સંતુલન અલગ અલગ ધ્યાનમાં લો.)



આકૃતિ 7.40

7.23 એક વ્યક્તિ ઘૂમતા પ્લૅટફૉર્મ પર ઊભો છે. તેના સમક્ષિતિજ ટટ્ટાર રાખેલ દરેક હાથમાં 5 kg વજન ધરાવે છે. પ્લૅટફૉર્મની કોણીય ઝડપ 30 પરિભ્રમણ પ્રતિ મિનિટ છે. આ વ્યક્તિ તેના બંને હાથ તેના શરીરની નજીક લાવે છે. જેમાં દરેક વજનનું અક્ષથી અંતર 90 cmથી બદલાઈને 20 cm થાય છે. આ વ્યક્તિની પ્લૅટફૉર્મ સાથેની જડત્વની ચાકમાત્રા 7.6 kg m^2 જેટલી અને અચળ લેવામાં આવે છે.

(a) તેમની નવી કોણીય ઝડપ કેટલી હશે ? (ઘર્ષણ અવગણો.)

(b) શું ગતિઊર્જા આ પ્રક્રિયામાં સંરક્ષિત છે ? જો ના, તો આ પરિવર્તન ક્યાંથી આવે છે ?

7.24 10 g દળ અને 500 m/s ઝડપની એક બંદૂકની ગોળી (બુલિટ)ને બારણા પર છોડવામાં આવે છે અને તે બારણાંની બરાબર મધ્યમાં જડાઈ જાય છે. બારણું 1.0 m પહોળું છે અને તેનું વજન 12 kg છે. તે એક છેડેથી લટકાવેલ છે અને તે લગભગ ઘર્ષણ વિના એક શિરોલંબ અક્ષ ફરતે ભ્રમણ કરે છે. તેમાં બુલિટ જડિત થયા પછી બારણાંની તત્કાલીન કોણીય ઝડપ શોધો.

(**સૂચના :** એક છેડાની ઊર્ધ્વ અક્ષને અનુલક્ષીને બારણાંની જડત્વતાની ચાકમાત્રા $ML^2/3$ છે.)

7.25 બે તક્તી કે જેમની તેમની સંબંધિત અક્ષો (તક્તીને લંબ અને કેન્દ્રમાંથી પસાર થતાં હોય છે)ને અનુલક્ષીને જડત્વની ચાકમાત્રા I_1 અને I_2 છે અને તે ω_1 અને ω_2 કોણીય ઝડપે ભ્રમણ કરે છે. તેમને તેમના પરિભ્રમણ અક્ષો સંપાત થાય તેમ એકબીજાના સંપર્કમાં લાવવામાં આવે છે. (a) આ બે-તક્તી તંત્રની કોણીય ઝડપ શું છે ? (b) દર્શાવો કે સંયુક્ત તંત્રની ગતિઊર્જા એ બે તક્તીની પ્રારંભિક ગતિઊર્જાના સરવાળા કરતાં ઓછી છે. ઊર્જામાં થતાં આ ઘટાડાને તમે કેવી રીતે સમજાવશો ? $\omega_1 \neq \omega_2$ લો.

7.26 (a) લંબ અક્ષોનો પ્રમેય સાબિત કરો.

(**સૂચના :** x-y સમતલને લંબરૂપે અને ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અક્ષથી કોઈ એક બિંદુ (x, y)ના અંતરનો વર્ગ એ $x^2 + y^2$ છે.)

(b) સમાંતર અક્ષોનો પ્રમેય સાબિત કરો.

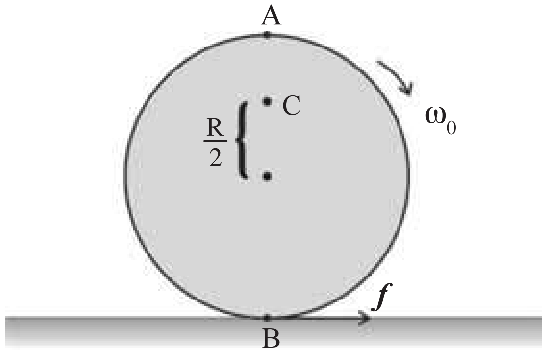
(**સૂચના :** જો દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને ઉદ્‌ગમબિંદુ તરીકે પસંદ કરવામાં આવે તો $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$)

7.27 ગતિશાસ્ત્રની વિચારધારાનો ઉપયોગ કરીને (એટલે કે બળો અને ટૉર્કના વિચાર દ્વારા) સાબિત કરો કે h ઊંચાઈના ઢળતા પાટિયાના તળિયે તેના પરથી ગબડતા પદાર્થ (જેમકે રિંગ, તક્તી, નળાકાર અથવા ગોળા જેવા)નો સ્થાનાંતરણ વેગ υનું મૂલ્ય

$$\upsilon^2 = \frac{2gh}{(1+k^2/R^2)}$$ દ્વારા આપવામાં આવે છે.

નોંધો k એ પદાર્થની સંમિત અક્ષને અનુલક્ષીને ચક્રાવર્તન ત્રિજ્યા છે અને R પદાર્થની ત્રિજ્યા છે. પદાર્થ તેની ગતિ પાટિયાની ટોચ પરથી સ્થિર અવસ્થામાંથી શરૂ કરે છે.

7.28 ω_0 કોણીય ઝડપ સાથે તેની અક્ષને અનુલક્ષીને ભ્રમણ કરતી એક તક્તીને સંપૂર્ણ ઘર્ષણરહિત ટેબલ પર હળવેથી (કોઈ પણ સ્થાનાતરિત બળ વગર) મૂકવામાં આવે છે. તક્તીની ત્રિજ્યા R છે. તક્તી પર દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B અને Cના રેખીય વેગો કેટલા હશે ?



આકૃતિ **7.41**

7.29 સમજાવો કે આકૃતિ 7.41માંની તક્તીને દર્શાવેલ દિશામાં ગબડવા માટે ઘર્ષણ શા માટે જરૂરી છે.

(a) સંપૂર્ણ રોલિંગ શરૂ થાય તે પહેલાં B આગળ ઘર્ષણ બળની દિશા અને ઘર્ષણથી ઉદ્ભવતા ટૉર્કની દિશા આપો.

(b) સંપૂર્ણ રોલિંગ શરૂ થયા પછી ઘર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

7.30 એક નક્કર તકતી અને રિંગ જે બંનેની ત્રિજ્યા 10 cm છે તે બંનેને જેની પ્રારંભિક કોણીય ઝડપ 10π rad s^{-1} જેટલી છે. તેવા એક સમક્ષિતિજ કોષ્ટક પર એક સાથે મૂકવામાં આવે છે. આ બંનેમાંથી કોણ વહેલું રોલિંગ શરૂ કરશે ? સ્થિત ઘર્ષણાંક $\mu_s = 0.2$ છે.

7.31 10 kg દળ અને 15 cm ત્રિજ્યાનો એક નળાકાર $30°$થી ઢળતા પાટિયા પર સંપૂર્ણપણે ગબડે છે. સ્થિર ઘર્ષણાંક $\mu_s = 0.25$.

(a) નળાકાર પર લાગતું ઘર્ષણ બળ કેટલું હશે ?

(b) રોલિંગ દરમિયાન ઘર્ષણ સામે કેટલું કાર્ય કરવામાં આવ્યું હશે ?

(c) જો આ પાટિયાનો ઢોળાવ θ વધારવામાં આવે, તો θ ના કયા મૂલ્ય માટે આ નળાકાર સંપૂર્ણતઃ ગબડવાને બદલે સરકવાનું શરૂ કરશે ?

7.32 નીચેનું દરેક વિધાન કાળજીપૂર્વક વાંચો અને તે સાચું છે કે ખોટું તે કારણ સાથે જણાવો :

(a) રોલિંગ દરમિયાન ઘર્ષણ બળ એ તે દિશામાં લાગે છે કે જે દિશામાં પદાર્થના CMની ગતિ હોય.

(b) રોલિંગ દરમિયાન સંપર્ક બિંદુની તાત્ક્ષણિક ઝડપ શૂન્ય છે.

(c) રોલિંગ દરમિયાન સંપર્ક બિંદુનો તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ શૂન્ય છે.

(d) શુદ્ધ (સંપૂર્ણ) રોલિંગ ગતિ માટે, ઘર્ષણ વિરુદ્ધ થતું કાર્ય શૂન્ય છે.

(e) એક સંપૂર્ણ ઘર્ષણરહિત ઢળતા પાટિયા પરથી નીચે તરફ ગતિ કરતાં એક વ્હીલ સરકતી (રોલિંગ નહિ) ગતિ કરશે.

7.33 કણોના તંત્રની ગતિનું દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને ગતિમાં વિભાજન :

(a) બતાવો કે $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_i + m_i\mathbf{V}$

જ્યાં $\mathbf{p}_i$ એ iમા કણ (m_i દળના)નું વેગમાન અને $\mathbf{p}'_i = m_i\boldsymbol{\upsilon}'_i$. નોંધ $\boldsymbol{\upsilon}'_i$ દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે iમા કણનો વેગ છે.

આ ઉપરાંત દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે $\Sigma\mathbf{p}'_i = 0$

(b) બતાવો કે $K = K' + \frac{1}{2}MV^2$

જ્યાં K એ કણોના તંત્રની કુલ ગતિઊર્જા છે. K' એ જ્યારે કણોના વેગોને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રના સંદર્ભમાં લેવામાં આવે છે ત્યારની અને $MV^2/2$ એ સમગ્ર તંત્રની સ્થાનાંતરણની ગતિ ઊર્જા છે. (એટલે કે તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની ગતિ). આ પરિણામ પરિચ્છેદ 7.14માં ઉપયોગમાં લીધેલ છે.

(c) દર્શાવો કે $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ છે. જ્યાં $\mathbf{L}' = \Sigma\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$ એ તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે તંત્રનું કોણીય વેગમાન છે. જ્યાં વેગોને દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની સાપેક્ષે લીધેલ છે. યાદ રાખો $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$;

બાકીની બધી સંજ્ઞાઓ એ પ્રકરણમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ પ્રમાણભૂત સંજ્ઞાઓ છે. નોંધો $\mathbf{L}'$ અને $M\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ એ અનુક્રમે દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને તંત્રનું કોણીય વેગમાન અને કણોના તંત્રના દ્રવ્યમાન કેન્દ્રનું કોણીય વેગમાન કહેવામાં આવે છે.

(d) બતાવો કે $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \Sigma \mathbf{r}_i' \times \dfrac{d\mathbf{p}'}{dt}$

વધુમાં, દર્શાવો કે $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \tau'_{ext}$

જ્યાં τ'_{ext} એ આ તંત્ર પર દ્રવ્યમાન કેન્દ્રને અનુલક્ષીને લાગતા તમામ બાહ્ય ટૉર્કનો સરવાળો છે.

(**સૂચના :** દ્રવ્યમાન કેન્દ્રની વ્યાખ્યા અને ન્યૂટનના ત્રીજા નિયમનો ઉપયોગ કરો. એમ ધારો કે કોઈ પણ બે કણો વચ્ચે લાગતું આંતરિક બળ આ બે કણોને જોડતી રેખાની દિશામાં લાગે છે.)

પ્લુટો – એક અવિકસિત ગ્રહ (Pluto - A Dwarf Planet)

ઝેક પ્રજાસત્તાકમાંના પ્રેગ (Prague)માં ઑગસ્ટ 24, 2006માં મળેલી The International Astronomical Union (IAU) એ IAU-2006ની સામાન્યસભામાં આપણા સૂર્યમંડળમાંના ગ્રહો માટે એક નવી વ્યાખ્યા અપનાવી. નવી વ્યાખ્યા મુજબ પ્લુટો એ હવે ગ્રહ નથી. આનો અર્થ એ કે સૂર્યમંડળ આઠ ગ્રહોનું બનેલું છે : બુધ, શુક્ર, પૃથ્વી, મંગળ, ગુરુ, શનિ, યુરેનસ અને નેપ્ચૂન. IAU પ્રણાલિકા મુજબ આપણા સૂર્યમંડળમાં ઉપગ્રહો સિવાય 'ગ્રહો' અને 'અન્ય પદાર્થો'ને અવકાશીય પદાર્થોના ત્રણ સ્પષ્ટ વર્ગોમાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

1. 'ગ્રહ' એવો અવકાશીય પદાર્થ છે કે જે (a) સૂર્યની ફરતે કક્ષામાં છે (b) દઢ પદાર્થનાં બળોને પહોંચી વળવા (હરાવવા) માટેના પોતાના ગુરુત્વાકર્ષણ માટે પૂરતું દળ ધરાવે છે, જેથી તે દ્રવસ્થિત (Hydrostatic) સંતુલન (લગભગ ગોળ) આકાર પ્રાપ્ત કરે છે અને (c) કક્ષાની નજીકના વિસ્તારની સાફસૂફી કરેલી છે.

2. અવિકસિત ગ્રહ એ એવો અવકાશીય પદાર્થ છે કે જે (a) જે સૂર્યની ફરતે કક્ષામાં છે. (b) જે દઢ પદાર્થનાં બળોને પહોંચી વળવા (હરાવવા) માટેના પોતાના ગુરુત્વાકર્ષણ માટે પૂરતું દળ ધરાવે છે. જેથી તે દ્રવસ્થિત (Hydrostatic) સંતુલન (લગભગ ગોળ) આકાર પ્રાપ્ત કરે છે (c) તેવી કક્ષાની નજીકના વિસ્તારની સાફસૂફી કરેલી હોતી નથી અને જે પોતે ઉપગ્રહ નથી.

3. ઉપગ્રહો સિવાયના સૂર્યની આસપાસ ફરતા બધા 'અન્ય પદાર્થો' સામૂહિક રીતે 'સૂર્યમંડળના નાના પદાર્થો' તરીકે ઓળખાશે.

સૂર્યમંડળમાં બીજા આઠ ગ્રહોથી વિપરીત, પ્લુટોનો કક્ષીય માર્ગ 'અન્ય પદાર્થો'ના અને નૅપ્ચૂન ગ્રહના માર્ગ સાથે સંપાત થાય છે. હાલમાં 'અન્ય પદાર્થો'માં ઉલ્કાઓ, મોટા ભાગના ટ્રાન્સ-નૅપ્ચૂનિયન પદાર્થો (TNOs), ધૂમકેતુઓ અને અન્ય નાના પદાર્થોનો સમાવેશ થાય છે.

ઉપરની વ્યાખ્યા અનુસાર પ્લુટો 'અવિકસિત ગ્રહ' છે અને તેને ટ્રાન્સ-નૅપ્ચૂનિયન પદાર્થોની નવી શ્રેણીના મૂળ સ્વરૂપ (Prototype) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.