అధ్యాయము

3 బహుపదులు

(Polynomials)

3.1 పరిచయం

కింది సందర్భాలను పరిశీలిద్దాము.

1. ఒక పూల తోట త్రిభుజాకారంలో వుంది. అతి పెద్దభుజము, మధ్యభుజం కంటే 3 రెట్లు పెద్దదిగానూ, అతిచిన్న భుజం, మధ్యభుజం కన్నా 2 యూనిట్లు చిన్నదిగానూ వుంది. మధ్యభుజం పొడవు **P** యూనిట్లు. అయితే ఈ త్రిభుజ చుట్టుకొలత **P** ప్రమాణాలలో ఎంత వుంటుంది ?

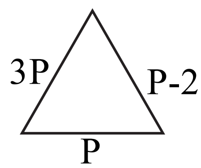
2. ఒక భోజనశాల పొడవు వెడల్పు కన్నా రెండు రెట్లు పెద్దది. ఆ గది వెడల్పు 'x' యూనిట్లు అయితే, దాని నేల వైశాల్యం x ప్రమాణాలలో ఎంత వుంటుంది?

పై రెండు సందర్భాలు పరిశీలిస్తే, ప్రతి దానిలో ఒక అవ్యక్తరాశి వుంది. మొదటి సందర్భంలో, మధ్యభుజం '**P**' యూనిట్లు అని ఇవ్వబడింది.

కావున, త్రిభుజచుట్టుకొలత = భుజాల పొడవుల మొత్తము

$= P + 3P + P - 2$

$= 5P - 2$



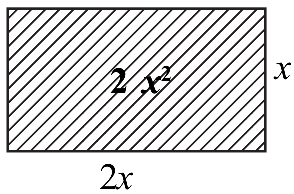
ఇదే విధంగా రెండవ సందర్భంలో పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు

కావున, వెడల్పు $= x$, అయితే పొడవు $= 2x$ అవుతుంది.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= lb$

$= (2x)\,(x)$

$= 2\,x^2$



దీని నుండి త్రిభుజ చుట్టుకొలత $5P - 2$ మరియు దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $2x^2$ అనేవి విభిన్న పరిమాణాలు గల బహుపదులు అని చెప్పవచ్చు.

3.2 బహుపదులు అంటే ఏమిటి?

చర, స్థిరరాశులతో నిర్మితమైన బీజీయ సమాసాలే బహుపదులు. చరరాశులను కొన్ని స్థిరరాశులతో గుణించగా వచ్చు గుణకాలు మరియు వీటిని రుణేతర ధనపూర్ణసంఖ్యల ఘాతాలకు హెచ్చించి వివిధ పరిమాణాలకు రాయబడతాయి. ఉదాహరణకు, $2x + 5$, $3x^2 + 5x + 6$, $- 5y$, x^3 మొ॥నవి బహుపదులు.

$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{2x}}, \frac{1}{y-1}, \sqrt{3x^3}$ మొ॥నవి బహుపదులు కావు.

$\frac{1}{y-1}$ ఎందుకు బహుపది కాదో, మీ స్నేహితులతోనూ, ఉపాధ్యాయునితో చర్చించండి.

ఇవి చేయండి

కింది సమాసాలలో ఏవి బహుపదులు? ఏవికావు? కారణాలు తెల్పండి.

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x-1}$ (iii) $4z^2 + \frac{1}{7}$ (iv) $m^2 - \sqrt{2}m + 2$ (v) $P^{-2} + 1$

3.2.1 బహుపది పరిమాణము

x చరరాశిలోగల బహుపది $p(x)$లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకము $p(x)$ బహుపది యొక్క పరిమాణము అగునని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు x చరరాశిలో గల ఒక బహుపది $3x + 5$. దీని పరిమాణము 1, కావున ఇది ఒక రేఖీయ బహుపది. ఇదేవిధంగా $5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}$P, $m + 1$ మొ॥నవి మరికొన్ని రేఖీయ బహుపదులు. రెండవ పరిమాణము గల బహుపదిని వర్గబహుపది అంటారు.

ఉదాహరణకు $x^2 + 5x + 4$ అనేది x చరరాశి గా గల ఒక వర్గ బహుపది. ఇదేవిధంగా $2x^2 + 3x - \frac{1}{2}$, $p^2 -1$, $3 - z - z^2$, $y^2 - \frac{y}{3} + \sqrt{2}$ అనేవి మరికొన్ని వర్గ బహుపదులు.

$5x^3-4x^2+x-1$ అనే సమాసము x చరరాశిగా గల మూడవ పరిమాణ బహుపది. దీనిని మనం త్రిపరిమాణ బహుపది అంటాము. ఇదేవిధంగా $2 - x^3$, p^3, $\ell^3 - \ell^2 - \ell + 5$ అనేవి మరికొన్ని త్రిపరిమాణ బహుపదులు.

ప్రయత్నించండి

ఏవైనా మూడు త్రిపరిమాణ, వర్గ బహుపదులను, రెండు రేఖీయ బహుపదులను విభిన్న పదాలతో రాయండి.

మనం బహుపదులను ఏ పరిమాణానికైనా రాయవచ్చు. $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 - 8$ అనేది 6 వ పరిమాణ బహుపది. $x^{10} - 3x^8 + 4x^5 + 2x^2 -1$ అనేది 10 పరిమాణ బహుపది.

n ఒక సహజసంఖ్యగా వుండి x చరరాశితో కూడి n వ పరిమాణ బహుపదిని మనం రాయవచ్చు.

సాధారణంగా, మనము

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots.. + a_{n-1} x + a_n$ అనేది n వ పరిమాణ బహుపది అంటాము. ఇందులో $a_0, a_1, a_2 \ldots.. a_{n-1,} a_n$ అనేవి చరరాశి వాస్తవ గుణకాలు మరియు $a_0 \neq 0$

ఉదాహరణకు ఒక చరరాశిలో గల ప్రథమ పరిమాణ బహుపది $ax+b$ అవుతుంది. ఇందులో a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

ప్రయత్నించండి

1. x చరరాశిలో గల వర్గ బహుపది, త్రిపరిమాణ బహుపదుల సాధారణ రూపాలను రాయండి.
2. n పరిమాణం కలిగిన ఒక బహుపది $q(z)$ ను రాయండి. ఇందులో చరరాశి గుణకాలుగా $b_0 \ldots b_n$ తీసుకుంటే, వాటికి ఏ నిబంధనలు వర్తిస్తాయో తెల్పండి.

3.2.2 బహుపది యొక్క విలువ

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ అనే బహుపదిని పరిశీలించండి. ఒక చరరాశి విలువకు ఈ బహుపది యొక్క విలువ ఏమౌతుంది? ఉదాహరణకు $x = 1$ అయినప్పుడు దీని విలువ ఎంత? ఈ బహుపదిలో $x = 1$ ప్రతిక్షేపించిన $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. ఇది $p(x)$లో గల ప్రతిపదంలో చరరాశి x కు బదులుగా 1 ప్రతిక్షేపించగా వచ్చినది అంటే $x = 1$ అయినపుడు $x^2 - 2x - 3$ విలువ -4 అయింది.

ఇదేవిధంగా, $x = 0$ విలువ వద్ద $p(x)$ విలువ $p(0) = -3$ అవుతుంది.

వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు చరరాశి 'x' కు బదులుగా k ను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే విలువ $p(k)$ అవుతుంది. దీనిని $p(x)$ అనే బహుపదికి k వద్ద వచ్చు విలువ అంటాము.

ఇవి చేయండి.

(i) $p(x) = x^2 - 5x - 6$ అయిన $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ విలువలు కనుగొనండి.

(ii) $p(m) = m^2 - 3m + 1$ అయిన $p(1)$ మరియు $p(-1)$ విలువలు కనుగొనండి.

3.2.3 బహుపది శూన్యాలు

$x = 3$,-1 మరియు 2లు వద్ద $p(x) = x^2 - 2x - 3$ విలువలు ఏమిటి?

$p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

ఇదేవిధంగా మనకు $p(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

మరియు $p(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

మనకు $p(3) = 0$ మరియు $p(-1) = 0$ అయినవి. అంటే $x = 3$ మరియు $x = -1$ అనేవి $p(x) = x^2 - 2x - 3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్యాలు అయినవి.

$p(2) \neq 0$ కావున 2 అనేది $p(x)$ యొక్క 'శూన్యం' కాలేదు.

అందుచే, సాధారణంగా ఒక వాస్తవసంఖ్య k అనేది బహుపది $p(x)$ కు శూన్యం కావాలంటే $p(k) = 0$ కావాలి.

ఇవి చేయండి

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 3$ అయిన $p(0),\ p(1), p(2), p(3)$ విలువలు కనుగొని $p(x)$ యొక్క శూన్యాలు ఏవో తెల్పండి.

(ii) $x^2 - 9$ అనే బహుపదికి -3 మరియు 3 శూన్యాలు అవుతాయో కాదో సరిచూడండి.

అభ్యాసం - 3.1

1. (a) $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ అయిన కింది వానిని కనుగొనండి.

   (i) x^5 యొక్క గుణకం (ii) $p(x)$ యొక్క పరిమాణం (iii) స్థిరపదము

   (b) మూడు వేర్వేరు బహుపదులను వ్రాసి, ప్రతి దానికి మూడు ప్రశ్నల చొప్పున రూపొందించండి.

2. కింది ప్రవచనాలలో ఏవి సత్యం ? ఏవి అసత్యం ? కారణాలను తెల్పండి.

   (i) $\sqrt{2}\, x^2 - 3x + 1$ అనే బహుపది పరిమాణం $\sqrt{2}$.

   (ii) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ అనే బహుపదిలో x^2 యొక్క గుణకం 2.

   (iii) స్థిర పదం యొక్క పరిమాణం సున్న.

   (iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ అనేది ఒక వర్గ బహుపది.

   (v) ఒక బహుపది పరిమాణము దానిలో పదాల సంఖ్య కన్నా ఒకటి ఎక్కువ.

3. $p(t) = t^3 - 1$ అయిన $p(1), p(-1), p(0), p(2)$ మరియు $p(-2)$ విలువలు కనుగొనండి.

4. -2 మరియు 2 అనేవి $x^4 - 16$ అనే బహుపదికి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరి చూడండి.

5. $p(x) = x^2 - x - 6$ అనే బహుపదికి 3 మరియు -2 అనేవి శూన్యాలు అగునో, కాదో సరిచూడండి.

3.3 బహుపదులతో ప్రక్రియలు

ఒక రేఖీయ బహుపదికి 'శూన్యములు' ఏవిధంగా కనుగొనవలెనో ఇదివరకే నేర్చుకున్నాము.

ఉదాహరణకు ఒక బహుపది $p(x) = 2x + 5$ నకు 'k' అనేది ఒక శూన్యము. అనగా $p(k) = 0$ అప్పుడు $2k + 5 = 0$ i.e., $k = \dfrac{-5}{2}$ అగును.

అందుచే సాధారణముగా $p(x) = ax+b$ అనే బహుపదికి 'k' ఒక శూన్యం అయితే

$p(k) = ak + b = 0$, i.e., $k = \dfrac{-b}{a}$ అగును. లేదా $ax + b$ అనే రేఖీయ బహుపది శూన్య విలువ $\dfrac{-b}{a}$ అగును.

దీని నుండి మనకు రేఖీయ బహుపది శూన్యవిలువ అనేది దాని చరరాశి గుణకాలకు, స్థిరపదానికి సంబంధం కల్గి వున్నదని తెలుస్తున్నది.

ఇదే విధముగా ఎక్కువ పరిమాణము కలిగిన బహుపదుల శూన్యవిలువలకు వాటి చరరాశి గుణకాలతో ఏమైనా సంబంధం కలిగి వుండునా? దీని గూర్చి మీ స్నేహితులలో చర్చించండి. మనం దీని గురించి మరలా చర్చిద్దాము.

3.4 బహుపది శూన్యాలకు జ్యామితీయ అర్థాలు

$p(x)$ బహుపది, k ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన $p(k) = 0$ అయితే 'k' ను బహుపది శూన్యం అంటారని మీరు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు రేఖీయ మరియు వర్గబహుపదులను రేఖా చిత్రాలలో ప్రాతినిధ్య పరుచుట ద్వారా, ఆయా బహుపదుల శూన్యాలకు జ్యామితీయ అర్థాలను తెలుసుకుందాము.

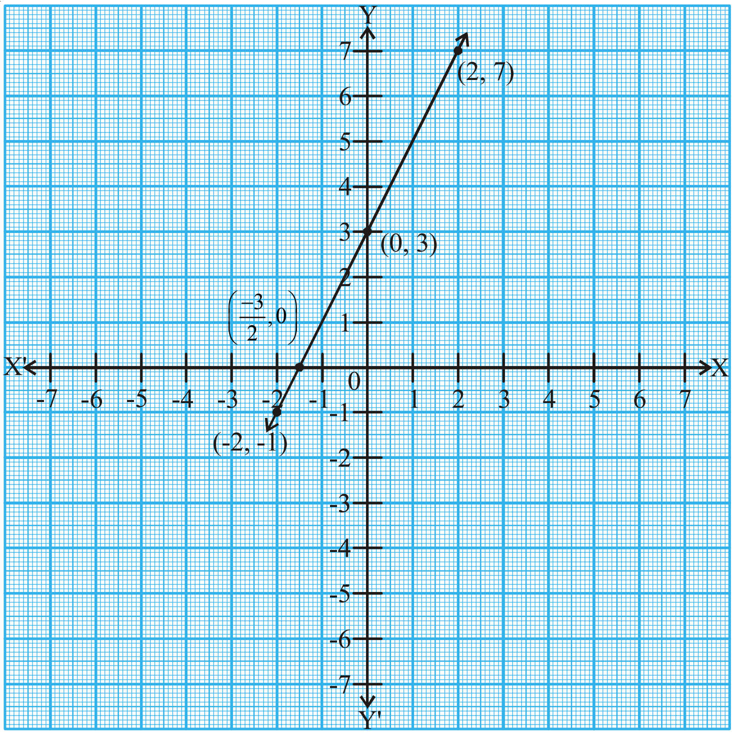
3.4.1. రేఖీయ బహుపది యొక్క రేఖా చిత్రము

$ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదిని పరిశీలించండి. $y = ax + b$ అనే బహుపది రేఖా చిత్రము ఒక సరళరేఖ అని మీరు 9 వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. ఉదాహరణకు $y = 2x + 3$ అనే బహుపది రేఖాచిత్రం ఒక సరళరేఖ మరియు ఇది y-అక్షంను $(0, 3)$ వద్ద ఖండిస్తూ $(-2, -1)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువులగుండా పోతున్నది.

పట్టిక 3.1

x	-2	0	2
$y = 2x + 3$	-1	3	7
(x, y)	$(-2, -1)$	$(0, 3)$	$(2, 7)$

రేఖాచిత్రాన్ని మనం పరిశీలిస్తే $y = 2x + 3$ అనే బహుపది యొక్క రేఖా x-అక్షాన్ని $x = -1$ మరియు $x = -2$ ల మధ్య నుండి ఖండిస్తూ $(\frac{-3}{2}, 0)$ గుండా పోతున్నది. అయితే $x = \frac{-3}{2}$ అనేది $2x + 3$ అనే బహుపది యొక్క శూన్య విలువ అని మీరు గ్రహించవచ్చు. అంటే బహుపది $2x + 3$ యొక్క శూన్యవిలువ దీని రేఖాచిత్రము x-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులో x-నిరూపకము అయి నది.



ఇవి చేయండి

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ అను బహుపదులకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి. ఈ రేఖలు x-అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులు కనుగొనండి. వీటి x- నిరూపకాలు బహుపదుల శూన్యవిలువలేనా?

మనము $ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదిని తీసుకుంటే $y = ax + b$ అనే రేఖాచిత్రము x-అక్షంను ఖచ్చితంగా ఒకే బిందువు $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ వద్ద ఖండిస్తుందని సాధారణంగా చెబుతాము.

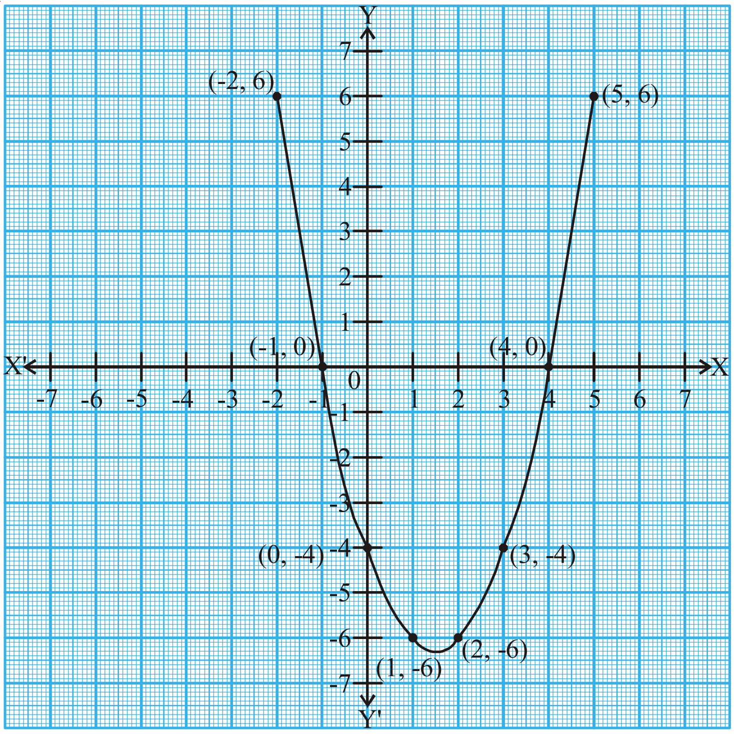
కావున $ax + b$, $a \neq 0$ అనే రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యవిలువ అంటే దాని రేఖాచిత్రము $y = ax + b$, x - అక్షంను ఖండించే బిందువు యొక్క x - నిరూపకము అని చెప్పవచ్చును.

3.4.2. వర్గబహుపది యొక్క రేఖాచిత్రము

వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలకు తగిన జ్యామితీయ అర్థాన్ని మనం ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం. $x^2 - 3x - 4$ అనే వర్గబహుపదిని పరిశీద్దాము. దీని యొక్క రేఖాచిత్రం ఏ విధంగా ఉంటుందో చూద్దాము. దీనికొరకు $y = x^2 - 3x - 4$ అనే బహుపదిలో x యొక్క విలువలకు తగిన y విలువలు కనుగొందాము. పట్టిక 3.2 ను పరిశీలించండి.

పట్టిక 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	$(-2, 6)$	$(-1, 0)$	$(0, 4)$	$(1, -6)$	$(2, -6)$	$(3, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 6)$



గ్రాఫ్ కాగితంపై పట్టికలో గల బిందువులను ప్రతిక్షేపించి, క్రమంలో కలిపి చూద్దాము. ఈవర్గ బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రం సరళరేఖ అయినదా? ఇది ఒక $\bigcup$ ఆకారంలో గల వక్రముగా వచ్చింది. ఇది x-అక్షంను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించింది.

అయితే $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ రూపంలో గల ఏవర్గ బహుపది యొక్క సమీకరణ రూపం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్రము అయినా '$\bigcup$' ఆకారంలో పైవైపునకు గాని, '$\bigcap$' ఆకారంలో క్రింది వైపునకు గాని వచ్చు వక్రముగా వుంటుంది. ఈ ఆకారం $a > 0$ లేదా $a < 0$ విలువలపై ఆధారపడి వుంటుంది. (ఈ వక్రాలను మనం **పరావలయాలు** అంటాము)

ఈ బహుపది యొక్క శూన్యాలు -1 మరియు -4 అని మనం గమనిస్తాం. అదేవిధంగా వక్రము x-అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువుల x- నిరూపకాలు -1 మరియు 4 గా మనం గమనించవచ్చును. అంటే $x^2 - 3x - 4$ వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలు, ఈ వర్గ బహుపది యొక్క రేఖాచిత్రము x-అక్షాన్ని ఖండించిన బిందువులు x-నిరూపకాలు అయినవి.

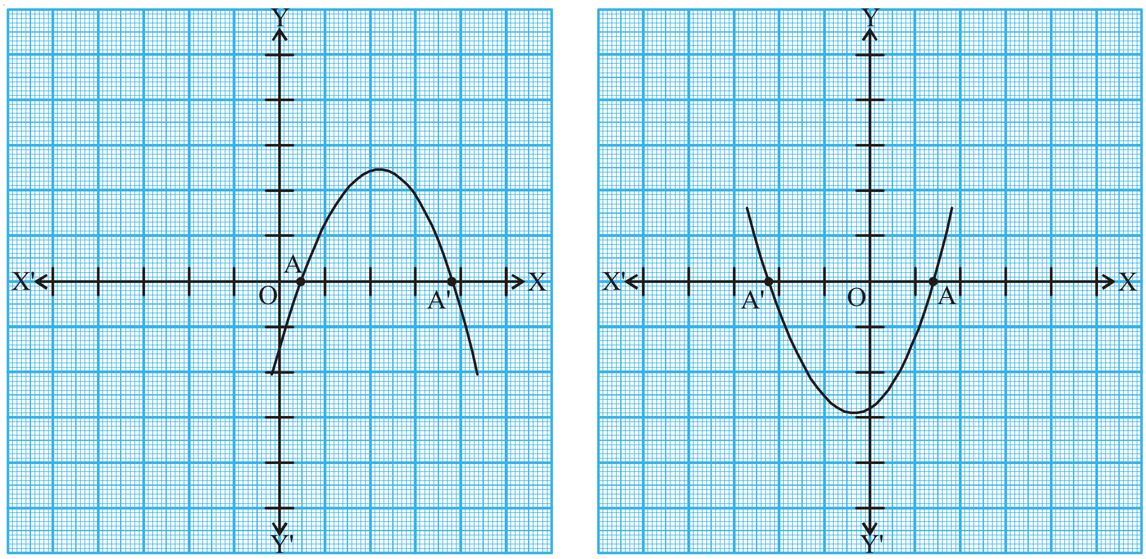
అందుచే, మనము సాధారణంగా $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు,ఈ వర్గ బహుపది సమీకరణం $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్రము x-అక్షాన్ని ఖండించునప్పుడు ఏర్పడు బిందువుల x-నిరూపకాలు అవుతాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయత్నించండి.

(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ లకు రేఖాచిత్రాలు గీయండి. ప్రతి సందర్భంలోనూ బహుపది శూన్యాలను కనుగొనండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

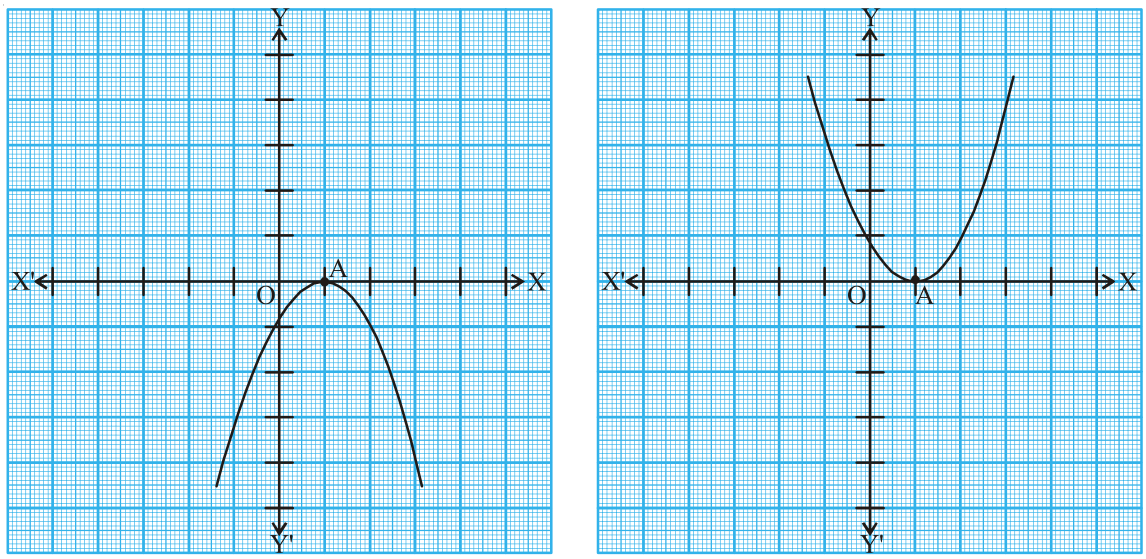
మనం ముందుగా పరిశీలించిన దానిని బట్టి $y = ax^2 + bx + c$ యొక్క రేఖాచిత్ర స్థితి తెలిపే మూడు సందర్భాలుగా వర్గీకరించవచ్చును.

సందర్భం (i) : ఈ సందర్భంలో రేఖాచిత్రము x-అక్షంను A మరియు A′ అను రెండు వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించింది. అందుచే ఈ సందర్భంలో A మరియు A′ బిందువుల x నిరూపకాలను వర్గబహుపది ax^2+bx+c నకు **రెండు శూన్యాలు** అగును. ఈ పరావలయము పైవైపునకు గాని, క్రింది వైపునకు గాని విస్తరించబడి వుండవచ్చును.



(i) (ii)

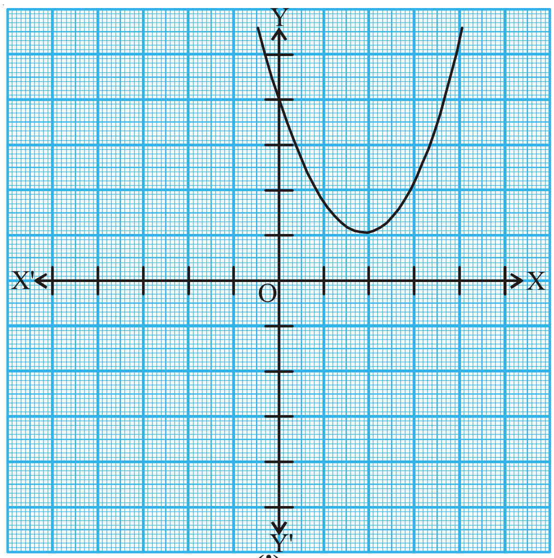
సందర్భం (ii) : ఈ సందర్భములో రేఖాచిత్రము x-అక్షంను ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకుతుంది. అనగా రెండు బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి. అందుచే సందర్భం (i)లో చూపిననట్లు A మరియు A′ బిందువులు రెండునూ ఏకీభవించి ఒకే బిందువు 'A'గా మారతాయి.



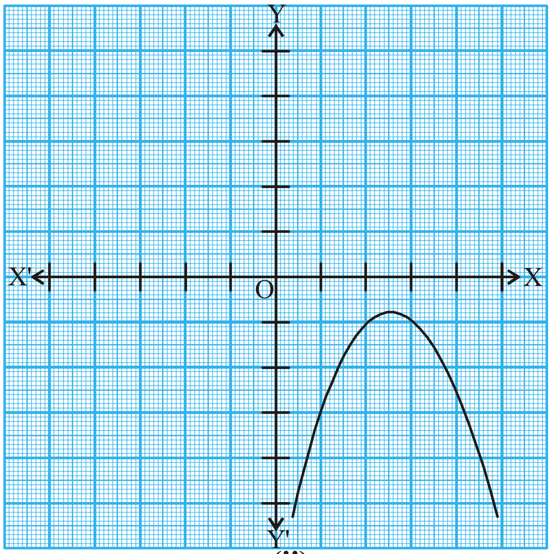
(i) (ii)

అందుచే ఈ సందర్భంలో బిందువు 'A' యొక్క x-నిరూపకము వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ యొక్క ఒకేఒక శూన్యము అగును.

సందర్భము (iii) : ఇచ్చట, రేఖాచిత్రము పూర్తిగా x-అక్షంనకు పూర్తిగా పైన గాని లేదా క్రిందకు గాని వుండి x-అక్షంను ఏ బిందువు వద్దనూ ఖండించలేదు.



(i)



(ii)

అందుచే వర్గబహుపది $ax^2 + bx + c$ నకు ఈ సందర్భములో 'శూన్యము' నిర్వచింపబడదు.

పైన తెల్పిన మూడు సందర్భములను బట్టి వర్గబహుపదిని మనం జ్యామితీయంగా పరిశీలించిన దీనికి రెండు శూన్యాలు గాని, (అంటే ఒకే ఒకశూన్యం) లేదా శూన్యాలు లేకపోవచ్చునని తెలుస్తుంది. అందుచే రెండవ పరిమాణ బహుపదికి అత్యధికంగా రెండు శూన్యాలు మాత్రమే వుంటాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయత్నించండి

1. రెండు శూన్యాలు కలిగిన ఏవేని మూడు బహుపదులను వ్రాయండి.
2. ఒకే ఒక శూన్యం కలిగిన ఒక బహుపదిని వ్రాయండి.
3. ఒక బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యము వుంటే దానిని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు?
4. వాస్తవసంఖ్య 'x' కలిగి వుండి శూన్యం లేని బహుపదులను ఏవైనా మూడింటిని రాయండి.

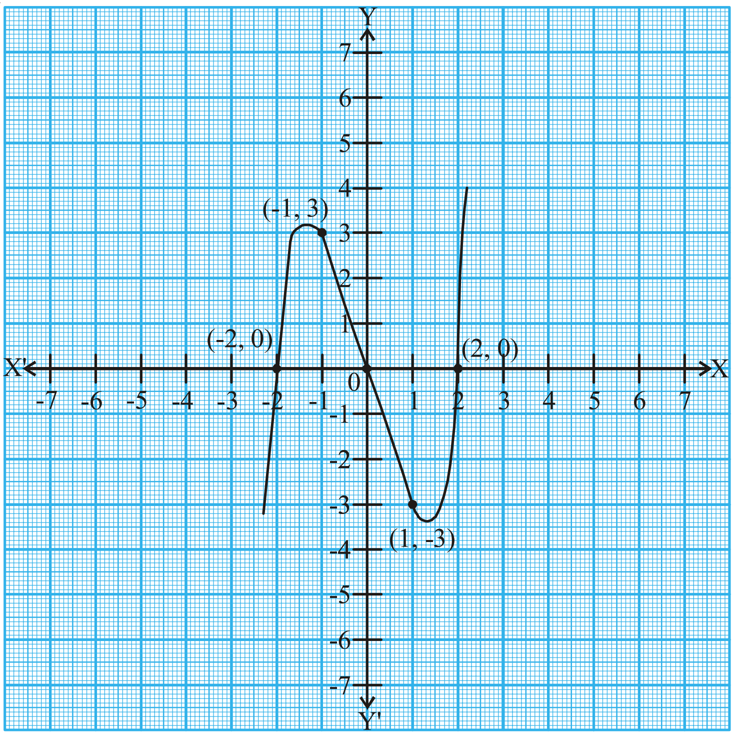
3.4.3 ఘనబహుపదుల శూన్యాలకు జ్యామితీయ భావము

ఘనబహుపదుల శూన్యాలను జ్యామితీయంగా అర్థం చేసుకొనుటలో నీవు ఏమి ఆశిస్తావు? ఇది ఏవిధంగా సాధ్యమో పరిశీలిద్దాము. ఒక ఘనబహుపది $x^3 - 4x$ ను తీసుకుందాము. $y = x^3 - 4x$ యొక్క రేఖాచిత్రము పరిశీలిస్తే దీని అర్థాన్ని గమనించవచ్చు. పట్టిక 3.3 లో ఇచ్చిన విధంగా చరరాశి 'x' కు కొన్ని విలువలను ఇచ్చిదానికి తగిన 'y' విలువలు కనుగొందాము.

పట్టిక 3.3

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0
(x, y)	(–2, 0)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, 0)

మనం పట్టికను పరిశీలిస్తే ఘన బహుపది $x^3 - 4x$ యొక్క శూన్యాలు –2, 0 మరియు 2 అని తెలుస్తున్నది. దీని రేఖాచిత్రం $y = x^3 - 4x$ ను గీస్తే, రేఖాచిత్రంలో గీయబడిన వక్రము x–అక్షంను ఖండించే బిందువుల x-నిరూపకాలు –2, 0 మరియు 2 గా కలవు. అందుచే ఈ బహుపదికి మూడు శూన్యాలని చెప్పవచ్చు.



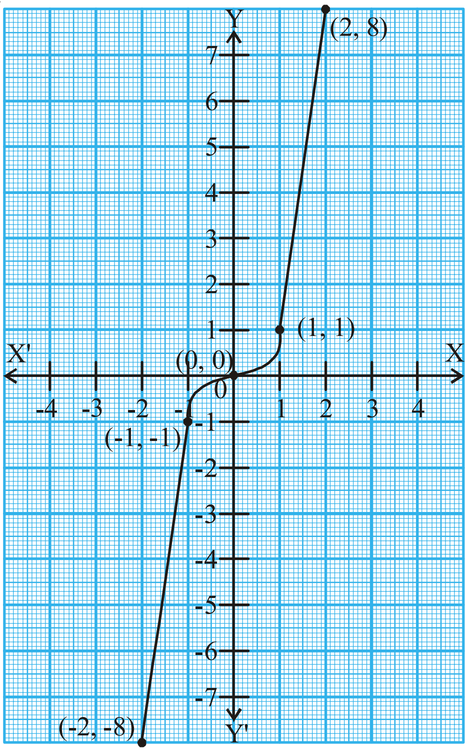
మరిన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని పరిశీలిద్దాము. x^3 మరియు $x^3 - x^2$ అనే ఘన బహుపదులను తీసుకొండి. పట్టిక 3.4 మరియు 3.5 లను పరిశీలించండి.

పట్టిక 3.4

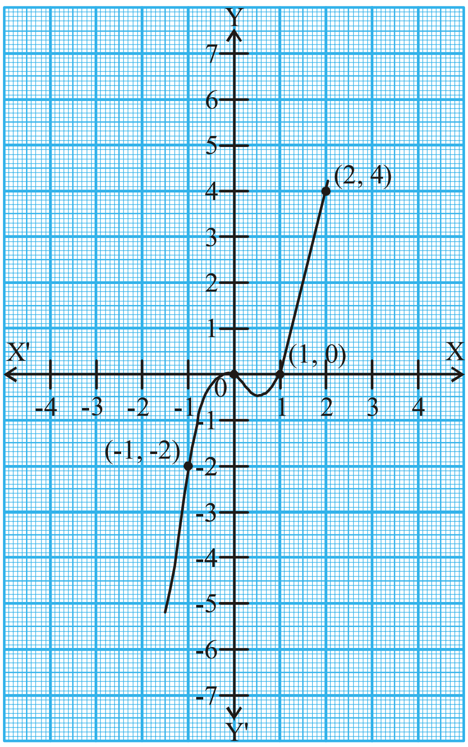
x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3$	–8	–1	0	1	8
(x, y)	(–2, –8)	(–1, –1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 8)

పట్టిక 3.5

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$



$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ రేఖాచిత్రము పరిశీలిస్తే, ఇది x-అక్షాన్ని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించింది. మరియు దీని x-నిరూపకము 'సున్న' అందుచే ఈ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్యము వచ్చినది. ఇదే విధంగా $y = x^3 - x$ రేఖా చిత్రాన్ని పరిశీలిస్తే, ఈ వక్రం x- అక్షాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే వాటి x-నిరూపకాలు 0 మరియు 1 అయినవి. అందుచే ఈ సందర్భంలో ఘనబహుపదికి రెండు శూన్యాలు రావడం జరిగింది.

పైన చూపిన ఉదాహరణలను మనము పరిశీలిస్తే ఒక ఘనబహుపదికి గరిష్ఠముగా మూడు శూన్యాలు వచ్చినవి. దీని నుండి మనము ఏదైన మూడవ పరిమాణ బహుపదికి గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలు ఉంటాయని చెప్పవచ్చును.

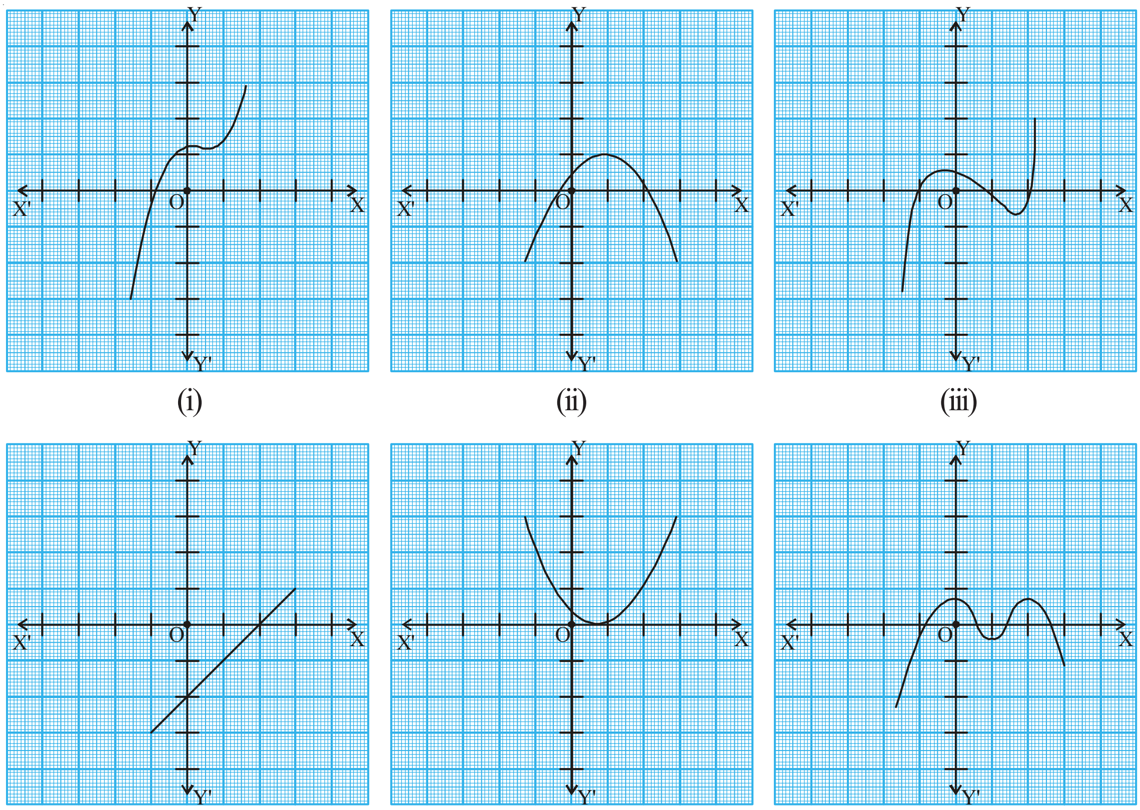
ప్రయత్నించండి.

రేఖాచిత్రాలు గీయకుండానే దిగువ ఘనబహుపదులకు శూన్యాలను కనుగొనండి

(i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$.

గమనిక : n వ పరిమాణము కలిగిన ఒక బహుపది $p(x)$ యొక్క రేఖాచిత్రము అనగా $y = p(x)$ అనేది x-అక్షం ను గరిష్ఠంగా n బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుందని చెప్పవచ్చు. అందుచే n వ పరిమాణం గల ఒక బహుపది $p(x)$ నకు గరిష్ఠంగా 'n' శూన్యాలుంటాయి.

ఉదాహరణ-1. క్రింది పటములలో ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రాలను గమనించండి. ప్రతి రేఖాచిత్రం $y = p(x)$ నందు $p(x)$ అనేది ఒక బహుపది. ప్రతిసందర్భములోనూ x వ్యాప్తితో కూడిన బహుపది $p(x)$ నకు శూన్యాలు సంఖ్యను కనుగొనండి.



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

సాధన : పైన చూపిన పటాలలో x వ్యాప్తితో కూడిన రేఖాచిత్రాలు

(i) రేఖాచిత్రం x-అక్షంను ఒక బిందువును ఖండించింది. కావున శూన్యాల సంఖ్య 1

(ii) రేఖాచిత్రం x-అక్షంను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించింది. కావున శూన్యాల సంఖ్య 2

(iii) శూన్యాల సంఖ్య 3. (ఏవిధంగా ?)

(iv) శూన్యాల సంఖ్య 1. (ఏవిధంగా ?)

(v) శూన్యాల సంఖ్య 1. (ఏవిధంగా ?)

(vi) శూన్యాల సంఖ్య 4. (ఏవిధంగా ?)

ఉదాహరణ-2. క్రింది బహుపదులకు శూన్యాల సంఖ్యను కనుగొనండి మరియు వాటి విలువలను తెలపండి.

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

సాధన : బహుపదుల రేఖాచిత్రాలు గీయకుండానే మనం శూన్యాలను కనుగొందాము.

(i) $p(x) = 2x + 1$ అనేది ఒక రేఖీయ బహుపది కావున దీనికి ఒకే ఒక శూన్యం వుంటుంది.

$p(x) = 0$ తీసుకొండి.

అంటే, $2x + 1 = 0$

కావున $x = \frac{-1}{2}$ అగును.

అందుచే ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యం $\frac{-1}{2}$.

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ అనేది ఒక వర్గబహుపది.

కావున దీనికి గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యాలు ఉంటాయి.

$q(y) = 0$ అనుకోండి

$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1$ లేదా $y = 1$

అందుచే ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు -1 మరియు 1 అయినవి.

(iii) $r(z) = z^3$ అనేది ఒక ఘన బహుపది కావున దీనికి గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలుంటాయి.

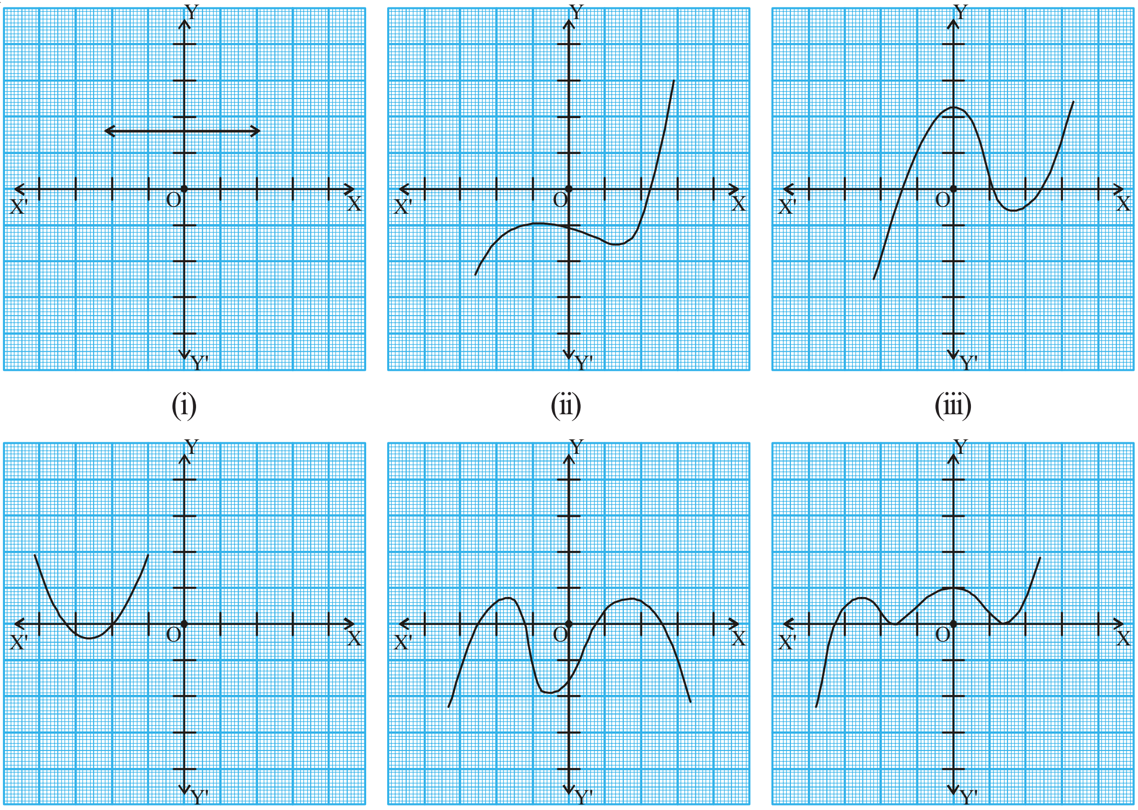
$r(z) = 0$ అనుకొనండి

$\Rightarrow z^3 = 0$

అందుచే, ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యము 'సున్న' అయినది.

అభ్యాసం – 3.2

1. కొన్ని బహుపదులు $p(x)$ యొక్క రేఖా చిత్రాలు $y = p(x)$ యొక్క పటాలు దిగువ ఇవ్వబడినవి. $p(x)$ యొక్క శూన్యాల సంఖ్యను పటాలు పరిశీలించి తెలపండి.



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

2. కింది బహుపదుల శూన్యాలను కనుగొనండి.

   (i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

   (iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3. కింది బహుపదులకు తగిన రేఖాచిత్రాలను గీచి, శూన్యాలను కనుగొనండి. ఫలితాలను సమర్థించండి.

   (i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

   (iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

   (v) $p(x) = x^2 - 1$

4. $p(x) = 4x^2 + 3x - 1$ అనే బహుపదికి $\frac{1}{4}$ మరియు -1 అనేవి శూన్యాలు ఏవిధంగా అగునో తెలపండి.

3.5 ఒక బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్యసంబంధము

$ax + b$ అనే రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యము $-\frac{b}{a}$ అని మీరు ఇది వరకు తెలుసుకున్నారు. ఇప్పుడు మనము వర్గబహుపది యొక్క గుణకాలకు, శూన్యాలకు గల సంబంధాన్ని రాబట్టడానికి ప్రయత్నిద్దాము. దీని కొరకు ఒక వర్గబహుపది $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ను తీసుకొందాము.

వర్గ బహుపదుల మధ్య పదాన్ని విడదీయుట ద్వారా కారణాంక విభజన చేయడము మనం 9 వ తరగతిలో నేర్చుకున్నాము. అందుచే ఇవ్వబడిన వర్గబహుపదిలో మధ్యపదము '$-8x$' ను రెండు పదాలుగా విభజిద్దాము. వీటి లబ్దం $6 \times 2x^2 = 12x^2$ కావాలి.

అందుచే మనము $2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$

$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ శూన్యము కావాలంటే $x - 1 = 0$ లేదా $x - 3 = 0$ కావాలి. అంటే $x = 1$ లేదా $x = 3$ అగును. అందుచే $2x^2 - 8x + 6$ యొక్క శూన్యాలు 1 మరియు 3 అయినవి. ఇప్పుడు మనము ఈ శూన్యాలకు, వర్గబహుపది యొక్క గుణకాలకు ఎటువంటి సంబంధము కలిగి వున్నదో పరిశీలిద్దాము. ఇచ్చట x^2 యొక్క గుణకము 2, x గుణకము -8 మరియు స్థిరపదము 6 అంటే x^0 యొక్క గుణకము అన్నమాట (అనగా $6x^0 = 6$)

ఇచ్చట బహుపది శూన్యాల మొత్తము $= 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

బహుపది శూన్యాల లబ్దము $= 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

మనం ఇప్పుడు మరొక వర్గబహుపదిని తీసుకొని పరిశీలిద్దాము.

$p(x) = 3x^2 + 5x - 2.$

మధ్యపదమును విడదీసి రాయగా, మనకు

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2)$$

$$= (3x - 1)(x + 2)$$

$3x^2 + 5x - 2$ శూన్యము కావాలంటే $3x - 1 = 0$ లేదా $x + 2 = 0$ కావాలి

అంటే $x = \frac{1}{3}$ లేదా $x = -2$ అగును.

అందుచే $3x^2 + 5x - 2$ యొక్క శూన్యాలు $\frac{1}{3}$ మరియు -2

వీటి నుండి మనము దిగువ సంబంధము చూడవచ్చు.

శూన్యాల మొత్తము $= \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల మొత్తము $= \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఇవి చేయండి

దిగువ ఇవ్వబడిన వర్గ బహుపదుల యొక్క శూన్యాలను కనుగొనండి. ఇదేవిధంగా శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్దమును కనుగొని, బహుపది పదాల గుణకాలకు మధ్యన గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

మనం సాధారణముగా, వర్గసమీకరణము $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ నకు శూన్యాలు α మరియు β లు అయినచో

$(x - \alpha)$ మరియు $(x - \beta)$ లను $p(x)$ యొక్క కారణాంకాలు అగును.

కావున $ax^2 + bx + c = k\,(x - \alpha)\,(x - \beta)$, k ఒక స్థిరాంకము

$$= k[x^2 - (x + \beta)\,x + \alpha\beta]$$

$$= kx^2 - k\,(\alpha + \beta)\,x + k\alpha\beta$$

దీనిని వర్గబహుపదిలో x^2, x గుణకాలు మరియు స్థిరపదముతో పోల్చగా, మనకు

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ మరియు $c = k\alpha\beta$ వచ్చును.

దీనినుండి $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$,

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ అయినవి.

గమనిక : α మరియు β అనేవి గ్రీకు అక్షరాలు. వీటిని 'ఆల్ఫా' మరియు 'బీటా' అని చదువుతాము. ఇదేవిధంగా మరొక అక్షరము 'γ' ను కూడా మనము వినియోగిస్తాము. దీనిని 'గామా' అని చదువుతాము.

కావున, వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము $= \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాల లబ్దము $= \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

కింది కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము

ఉదాహరణ-3. $x^2 + 7x + 10$ అనే వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు, బహుపది గుణకాలకు సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : మనకు $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)\,(x + 5)$ అగును.

కావున, $x^2+7x+10$ యొక్క విలువ శూన్యం కావాలంటే

$x+2=0$ లేదా $x+5=0$ కావాలి

అంటే $x=-2$ లేదా $x=-5$ అగును.

కావున $x^2+7x+10$ యొక్క శూన్యాలు -2 మరియు -5 అగును.

ఇప్పుడు, శూన్యాల మొత్తము $=-2+(-5)=-(7)=\dfrac{-(7)}{1}=\dfrac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల లబ్ధము$=-2\times(-5)=10=\dfrac{10}{1}=\dfrac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఉదాహరణ-4. x^2-3 అనే బహుపది యొక్క శూన్యాలు కనుగొని, శూన్యాలకు బహుపది గుణకాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ అనే సర్వసమీకరణం గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

దీని నుపయోగించి

$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ అని వ్రాయవచ్చు.

కావున x^2-3 యొక్క శూన్యాలు $x=\sqrt{3}$ లేదా $x=-\sqrt{3}$.

ఈ విధంగా, x^2-3 యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{3}$ మరియు $-\sqrt{3}$ అవుతాయి..

ఇప్పుడు, శూన్యాల మొత్తము$=\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0=\dfrac{-(x \text{ యొక్క గుణకము})}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

శూన్యాల లబ్ధము $=(\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})=-3=\dfrac{-3}{1}=\dfrac{\text{స్థిరపదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ఉదాహరణ-5. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు మొత్తము మరియు లబ్ధము వరుసగా -3 మరియు 2 అయిన ఆ వర్గ బహుపదిని కనుగొనండి.

సాధన : α మరియు βలు శూన్యాలు కలిగిన వర్గబహుపది ax^2+bx+c అనుకోండి.

$\alpha+\beta=-3=\dfrac{-b}{a}$ మరియు

$\alpha\beta=2=\dfrac{c}{a}$.

మనము $a=1$ తీసుకుంటే $b=3$ మరియు $c=2$ అగును.

కావున ఇచ్చిన నియమానికి లోబడి ఏర్పడే వర్గ బహుపది x^2+3x+2 అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా, 'a' ను ఏ వాస్తవ సంఖ్యతోనైనా సూచించవచ్చు. దీనిని k అనే వాస్తవ సంఖ్యగా తీసుకుంటే $\frac{-b}{k} = -3$ లేదా $b = 3k$ మరియు $\frac{c}{k} = 2$ లేదా $c = 2k$ అగును. ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే మనకు $kx^2 + 3kx + 2k$ అనే బహుపది వస్తుంది.

ఉదాహరణ-6. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు వరుసగా 2 మరియు $\frac{-1}{3}$ అయినచో ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

సాధన : α , β లు శూన్యాలుగా కలిగిన వర్గబహుపది

$ax^2 + bx + c, a \neq 0$ అనుకోండి.

ఇచ్చుట $\alpha = 2, \beta = \frac{-1}{3}$

శూన్యాలమొత్తం $= (\alpha + \beta) = 2 + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

శూన్యాలలబ్ధం $= (\alpha\beta) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$

కావున, వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c$ ని

$k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\,\beta]$, k ఒకస్థిరపదము గా వ్రాస్తే

$= k[x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}]$ అగును.

వాస్తవ సంఖ్య 'k' కు వివిధ విలువలను ఇవ్వవచ్చును.

$k = 3$ అయినచో వర్గ బహుపది $3x^2 - 5x - 2$ అవుతుంది.

ప్రయత్నించండి

(i) -2 మరియు $\frac{1}{3}$ శూన్యాలు కలిగిన వర్గబహుపదిని కనుగొనండి.

(ii) శూన్యాల మొత్తం $\frac{-3}{2}$ మరియు లబ్ధం -1 కలిగిన వర్గబహుపదిని తెలపండి.

3.6 ఘన బహుపదులు

మనము ఇప్పుడు ఘన బహుపదులను పరిశీద్దాము. ఘనబహుపదుల శూన్యాలకు, పదాల గుణకాలకు ఏమైనా సంబంధం కలిగి వున్నదేమో చూద్దాం.

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ అనే బహుపదిని తీసుకొండి.

$x = 4, -2, \frac{1}{2}$, విలువల వద్ద $p(x) = 0$ అయినదని చూడవచ్చు.

$p(x)$ ఒక ఘన బహుపది అయినందున, దీని యొక్క శూన్యాలు గరిష్ఠంగా మూడు ఉంటాయని మనకు తెలుసు. అందుచే $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ యొక్క శూన్యాలు $4, -2$ మరియు $\frac{1}{2}$ అగును.

$$\text{శూన్యాల మొత్తము} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ యొక్క గుణకము})}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

$$\text{శూన్యాల లబ్ధము} \quad = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{స్థిరపదము})}{x^3 \text{ గుణకము}}$$

వీటితో బాటు, ఇచ్చట మరొక ప్రత్యేక సంబంధము కలిగి వున్నది. బహుపది యొక్క శూన్యాలను రెండేసి చొప్పున తీసుకొని వాటి లబ్ధాల మొత్తంను పరిశీలిస్తే మనకు ఈ సంబంధము తెలుస్తుంది.

అంటే $$\{4\times(-2)\} + \left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^3 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

దీనిని బట్టి $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యాలు α, β, γ అయినప్పుడు

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}.$$

> α, β, γ లు ఘనబహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యాలు. ఇవి బహుపది పదాల గుణకాలైన a, b, c లతో ఎటువంటి సంబంధం కలిగి వున్నవో పరిశీలిద్దాము. α, β, γ లు శూన్యాలైనందున, బహుపదిని $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
>
> $$= x^3 - x^2(\gamma+\beta+\alpha) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$
>
> దీనిని బహుపదితో పోల్చాలంటే, దీనిని 'a' తో గుణించాలి.
>
> అప్పుడు
>
> $ax^3 - x^2a(\gamma+\beta+\alpha) + xa(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma$ లేదా
>
> $b = -a(\gamma+\beta+\alpha), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$ అగును.

ఇవి చేయండి

α, β మరియు γ అనేవి ఒక ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాలైతే తగిన విలువలు కనుగొని పట్టికలో పూరించండి.

వ.సంఖ్య	ఘనబహుపది	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\alpha+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

కింది ఉదాహరణను మనము పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-7. ఘనబహుపది $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1$ మరియు $-\frac{1}{3}$ అగునని చూపండి. బహుపది గుణకాలకు శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : ఇచ్చిన ఘనబహుపది $3x^3-5x^2-11x-3$ ని ax^3+bx^2+cx+d తో సరిపోల్చిన $a=3,\ b=-5,\ c=-11,\ d=-3$ అగును. దీని నుండి

$$p(3)=3\times 3^3-(5\times 3^2)-(11\times 3)-3=81-45-33-3=0,$$

$$p(-1)=3\times(-1)^3-5\times(-1)^2-11\times(-1)-3=-3-5+11-3=0,$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3,$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}-3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0 \text{ అగును.}$$

కావున $3x^3-5x^2-11x-3$ యొక్క శూన్యాలు $3, -1$ మరియు $-\frac{1}{3}$ అని చూపడమైనది.

ఇప్పుడు $\alpha=3, \beta=-1$ మరియు $\gamma=-\frac{1}{3}$ తీసుకొంటే

$$\alpha+\beta+\gamma=3+(-1)+\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=\frac{-(-5)}{3}=\frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\times(-1)+(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3=-3+\frac{1}{3}-1=\frac{-11}{3}=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=3\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=+1=\frac{-(-3)}{3}=\frac{-d}{a}.$$

అభ్యాసం – 3.3

1. కింది వర్గబహుపదులకు శూన్యాలను కనుగొని బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము మరియు లబ్ధాలు వరుసగా ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఆయా వర్గబహుపదులను కనుగొనండి.

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3. ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు α, β లు దిగువ ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఆయా బహుపదులను కనుగొనండి.

   (i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4. ఒక ఘనబహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ యొక్క శూన్యాలు $1, -1$ మరియు 3 అగునని సరిచూడండి. ఇదేవిధంగా బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

3.7 బహుపదుల భాగహార నియమము

ఘన బహుపదులకు గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలుంటాయని మీరు తెలుసుకున్నారు. మరి, ఏదైనా సందర్భంలో ఒక శూన్యం ఇస్తే మిగిలిన శూన్యాలను ఏవిధంగా కనుగొంటారు? దీనికొరకు మనం ఒక ఘన బహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ ని పరిశీలిద్దాము.

ఈ బహుపది యొక్క శూన్యము 1 అయిన, దీనిని $(x - 1)$ నిశ్శేషంగా భాగిస్తుందని మీకు తెలుసు. ఇచ్చిన బహుపదిని $(x - 1)$ చే భాగిస్తే వచ్చు భాగఫలము $x^2 - 2x - 3$. దీని మధ్యపదమును విభజించుట ద్వారా దీని యొక్క కారణాంకాలు కనుగొనవచ్చును. తద్వారా $(x + 1)$ మరియు $(x - 3)$ కారణాంకాలు అవుతాయి. అందుచే

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

ఈ విధంగా ఘనబహుపది యొక్క మూడు శూన్యాలు $1, -1$ మరియు 3 అగును.

ఒక బహుపదిని మరొక బహుపదిచే భాగించే విధానము ఒకసారి తెలుసుకుందాము. దీని సోపానాలు వ్రాసే క్రమం తెలుసుకొనేందుకు ఒక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-8. $2x^2 + 3x + 1$ ను $x + 2$ చే భాగించండి.

సాధన : భాగహారంలో శేషము సున్న వచ్చిననూ లేదా శేషము యొక్క పరిమాణము, విభాజకము యొక్క పరిమాణము కన్నా తక్కువ అయినప్పుడు భాగహారము పూర్తయినట్లుగా భావిస్తామని గుర్తించండి.

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 1 \\ \hline x+2 & 2x^2 + 3x + 1 \\ & 2x^2 + 4x \\ & - \quad - \\ \hline & -x + 1 \\ & -x - 2 \\ & + \quad + \\ \hline & 3 \end{array}$$

ఇచ్చట, భాగహారములో భాగఫలము $2x - 1$ మరియు శేషము 3 అయినది. ఇదే విధంగా భాగహారనియమాన్ని సరిచూస్తే

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

అంటే $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

కావున, విభాజ్యము = విభాజ్యము × భాగఫలము + శేషము అయినది.

ఇదేవిధానాన్ని మనము కొనసాగించి ఒక బహుపదిని వర్గబహుపదిచే భాగించుటను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-9. $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ను $1 + 2x + x^2$ చే భాగించండి.

సాధన : మొదటగా మనం విభాజ్యం మరియు విభాజకాలను పదాల పరిమాణాల కనుగుణంగా అవరోహణా క్రమంలో అమర్చుకొని బహుపదులను ప్రామాణిక రూపంలో రాసుకోవాలి. ఇచ్చిన ఉదాహరణలో విభాజ్యము ప్రామాణిక రూపంలోనే వుంది. విభాజకాన్ని కూడా ప్రామాణిక రూపం $x^2 + 2x + 1$ గా రాయవచ్చును.

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 5 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\ & - \quad - \quad - \\ \hline & -5x^2 - x + 5 \\ & -5x^2 - 10x - 5 \\ & + \quad + \quad + \\ \hline & 9x + 10 \end{array}$$

సోపానం 1 : భాగఫలంలో మొదటి పదాన్ని పొందడానికి, విభాజ్యంలో గరిష్ఠ పరిమాణ పదాన్ని, (అనగా $3x^3$) విభాజకంలో గరిష్ఠ పరిమాణ పదము (అనగా x^2)తో భాగించాలి. ఇది $3x$ అవుతుంది. ఈ క్రమంలో భాగహారం కొనసాగిస్తే శేషం $-5x^2 - x + 5$ వస్తుంది.

సోపానం 2 : ఇప్పుడు, భాగఫలములో రెండవ పదాన్ని పొందడానికి, కొత్త విభాజ్యంలో గరిష్ఠ పరిమాణ పదము (అనగా $5x^2$) ను విభాజకంలో గరిష్ఠ పరిమాణపదము (అనగా x^2) చే భాగిస్తే -5 వస్తుంది. ఈ క్రమంలో తిరిగి భాగహారము $-5x^2 - x + 5$ తో కొనసాగించాలి.

సోపానం 3 : మిగిలిన శేషము $9x + 10$. దీని యొక్క పరిమాణము తిరిగి విభాజకము $x^2 + 2x + 1$ యొక్క పరిమాణము కన్నా తక్కువ. అందుచే నియమము ప్రకారం భాగహారాన్ని కొనసాగించలేము.

అందుచే భాగఫలము $3x - 5$ మరియు శేషము $9x + 10$ అయినది.

ఇలాగే $(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = (3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10)$

$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

అంటే విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం అయినది.

దీని నుండి మనం భాగహార నియమాన్ని కింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

$p(x)$ మరియు $g(x)$ అనేవి రెండు బహుపదులు, $g(x) \neq 0$ అయినపుడు మనం మరి రెండు బహుపదులు $q(x)$ మరియు $r(x)$ లను పొందాలంటే

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం $<$ $g(x)$ యొక్క పరిమాణం ఈ ఫలితాన్ని బహుపదుల భాగహార నియమంగా పేర్కొంటాము.

ఇప్పుడు, పైన పేర్కొన్న చర్చద్వారా కింది ఫలితాలను రాబట్టవచ్చును.

(i) $q(x)$ అనేది ఒక రేఖీయ బహుపది అయిన $r(x) = r$ ఒక స్థిరాంకం.

(ii) $q(x)$ యొక్క పరిమాణం 1 అయిన $p(x)$ యొక్క పరిమాణం $= 1 + g(x)$ యొక్క పరిమాణం అగును.

(iii) $p(x)$ ను $(x - a)$ చే భాగిస్తే వచ్చే శేషం $p(a)$ అగును.

(iv) $r = 0$ అయితే $p(x)$ ను $q(x)$ ఖచ్చితంగా భాగిస్తుందని లేదా $q(x)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అగునని చెప్పవచ్చు.

ఈ భాగహారనియమాన్ని మనం క్రింది ఉదాహరణలలో పరిశీలించవచ్చును.

ఉదాహరణ-10. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ను $x - 1 - x^2$ చే భాగించి, భాగహార నియమాన్ని సరిచూడండి.

సాధన : ఇచ్చిన బహుపదులు ప్రామాణిక రూపంలో లేవని గుర్తించండి. భాగహారం ప్రారంభించడానికి ముందుగా విభాజ్యం మరియు విభాజకాలను పరిమాణాల ప్రకారం అవరోహణా క్రమంలో రాయాలి.

కావున, విభాజ్యం $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ మరియు

విభాజకం $= -x^2 + x - 1$ అగును.

భాగహార ప్రక్రియ కుడివైపున చూపబడినది.

$$\begin{array}{r|l} & \quad x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & + \quad - \quad + \\ \hline & \quad 2x^2 - 2x + 5 \\ & \quad 2x^2 - 2x + 2 \\ & \quad - \quad + \quad - \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

ఈ క్రమంలో శేషం యొక్క పరిమాణం విభాజకం $(-x^2 + x - 1)$ యొక్క పరిమాణం కన్నా తక్కువ అయినందున భాగహారం ఆపివేస్తాం.

అందుచే, భాగఫలం $= x - 2$, శేషం $= 3$.

ఇప్పుడు,

విభాజ్యం = విభాజకం $\times$ భాగఫలం + శేషం

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

ఈ విధంగా, భాగహారనియమం సరిచూడడమైనది.

ఉదాహరణ-11. $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ అనుబహుపదికి $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ రెండు శూన్యాలైన మిగిలిన అన్ని శూన్యాలను కనుగొనండి.

సాధన: $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ అనేది ఇవ్వబడిన బహుపదికి రెండు శూన్యాలు కావున, ఈ బహుపదిని

$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ చే భాగించవచ్చు.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & - \qquad\qquad + \\
\hline
 & \quad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \quad -3x^3 \qquad + 6x \\
 & \quad + \qquad\quad - \\
\hline
 & \qquad\qquad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad - \quad + \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

భాగఫలంలో మొదటి పదము $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

భాగఫలంలో రెండవ పదము $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

భాగఫలంలో మూడవ పదము $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

కావున, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

ఇప్పుడు $2x^2 - 3x + 1$ $-3x$ లో మధ్యపదము $-3x$ ను విభజించి కారణాంకాలుగా రాస్తే $(2x - 1)$ $(x - 1)$ వచ్చును. కావున మిగిలిన రెండు శూన్యాలు $x = \dfrac{1}{2}$ మరియు $x = 1$ అగును. ఈ విధంగా ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$, 1 మరియు $\dfrac{1}{2}$ అవుతాయి.

అభ్యాసం – 3.4

1. కింది ఇవ్వబడిన బహుపదులలో $p(x)$ బహుపదిని $g(x)$ బహుపదిచే భాగించి భాగఫలాన్ని, శేషాన్ని కనుగొనండి.

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

2. కింది బహుపదులలో రెండవ బహుపదిని, మొదటి బహుపదిచే భాగించి ప్రతి సందర్భంలో మొదటి బహుపది కారణాంకం అగునో, కాదో సరిచూడండి.

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ అను బహుపదికి రెండు శూన్యాలు $\sqrt{\frac{5}{3}}$ మరియు $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ అయిన మిగిలిన రెండు శూన్యాలను కనుగొనండి.

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ అను బహుపదిని $g(x)$ అనే బహుపదిచే భాగిస్తే భాగఫలము $x - 2$ మరియు శేషము $-2x + 4$ అయిన $g(x)$ ను కనుగొనండి.

5. భాగహార నియమము మరియు దిగువ ఇవ్వబడిన నియమాలను తృప్తిపరిచే విధంగా $p(x), g(x), q(x)$ మరియు $r(x)$ బహుపదులకు తగిన ఉదాహరణలను ఇవ్వండి

(i) $p(x)$ పరిమాణము $= q(x)$పరిమాణము

(ii) $q(x)$ పరిమాణము $=$ $r(x)$ పరిమాణము

(iii) $r(x)$ పరిమాణము $= 0$

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[ఈ అభ్యాసము పరీక్షలకు నిర్దేశించబడినది కాదు]

1. కింది ఘన బహుపదులకు ప్రక్కన ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు ఆయా బహుపదులకు శూన్యాలు అగునో, లేదో సరిచూడండి. ఇదే విధంగా బహుపదుల పదాల గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని రాబట్టండి.

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ $(\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 + 4x^2 + 5x - 2$ $(1, 1, 1)$

2. ఒక ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాల మొత్తము, రెండేసి శూన్యాల లబ్ధాల మొత్తము మరియు శూన్యాలలబ్ధము వరుసగా $2, -7$ మరియు -14 అయిన ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

3. $x^3 - 3x^2 + x + 1$ అను బహుపది శూన్యాలు $a - b, a, a + b$ లు అయిన a, b విలువలను కనుగొనండి.

4. $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ యొక్క రెండు శూన్యాలు $2 \pm \sqrt{3}$ అయిన మిగిలిన రెండు శూన్యాలను కనుగొనండి.

5. $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ అనే బహుపదిని $x^2 - 2x + k$ అనే మరొక బహుపదిచే భాగించగా వచ్చు శేషం $x + a$ అయిన 'k' మరియు 'a' విలువలు కనుగొనండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయములో మీరు క్రింది అంశాలను గూర్చి అధ్యయనం చేసారు.

1. బహుపది పరిమాణాలు వరుసగా 1, 2 మరియు 3 కలిగిన వానిని రేఖీయ, వర్గ, ఘన బహుపదులు అంటారు.

2. x చరరాశి మరియు వాస్తవ గుణకాలు కలిగిన వర్గ బహుపదిని $ax^2 + bx + c$ అని రాస్తాం. ఇందులో a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

3. $p(x)$ అను బహుపది శూన్యాలు దాని రేఖాచిత్రం $y = p(x)$, x-అక్షంను ఖండించే బిందువుల యొక్క x−నిరూపకాలు అగును

4. వర్గ బహుపదికి గరిష్ఠంగా రెండు శూన్యాలు, అనగా ఘనబహుపదికి గరిష్ఠంగా మూడు శూన్యాలు వుంటాయి.

5. α మరియు β లు వర్గ బహుపది $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ యొక్క శూన్యాలు అయినచో

   $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ అగును.

6. α, β మరియు γ లు ఘనబహుపది $ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ యొక్క శూన్యాలు అయినచో

   $\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$,

   మరియు $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$ అగును.

7. $p(x)$ అనే బహుపదిని మరొక శూన్యేతర బహుపది $g(x)$ చే భాగిస్తే, $q(x)$ మరియు $r(x)$ అనే బహుపదులుగా వచ్చే భాగహార నియమాన్ని మనం క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

   $p(x) = g(x). q(x) + r(x)$,

   ఇందులో $r(x) = 0$ లేదా $r(x)$ పరిమాణం $<$ $g(x)$ యొక్క పరిమాణం అగును.