ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ସର୍ବସମତା

(CONGRUENCE OF TRIANGLE)

2.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଦୁଇଟି ଏକ ପ୍ରକାର ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଅବିକଳ ନକଲ (trace-copy) କୁ ନେଇ ଅନ୍ୟ ଉପରେ ପକାଇଲେ ଯଦି ସେହି ଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣମେଳନ ସଂପର୍କ ଅଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ ଚିତ୍ରଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ (equal in all respects) ହୁଅନ୍ତି । ଏହି ସଂପର୍କକୁ '≅' ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଏହି ମିଳିଯାଉଥିବା ଅଂଶ ଦ୍ୱୟକୁ ପରସ୍ପର ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ କୁହାଯାଏ । ସର୍ବସମ ଅଙ୍ଗଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଯଦି କୌଣସି ମାପ ଥାଏ ତେବେ ସେହି ମାପ୍ ଦ୍ୱୟ 'ସମାନ' ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ଏହାକୁ ସମାନ ଚିହ୍ନ '=' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

(1) ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡର ସର୍ବସମତା (Congruence of two segments) :

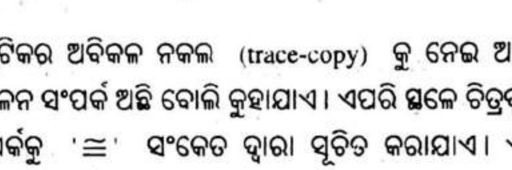
ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ସେହି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି ।

(ଚିତ୍ର 2.1)

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଯେପରିକି AB = CD । ତେବେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

(2) ଦୁଇଟି କୋଣର ସର୍ବସମତା (Congruence of two angles) :

ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ ସେହି କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 2.2)

ଅର୍ଥାତ୍ $\angle ABC$ ଓ $\angle DEF$ ଦୁଇଟି କୋଣ ଯେପରିକି $m\angle ABC = m\angle DEF$ । ତେବେ $\angle ABC$ ଓ $\angle DEF$ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି । ଏହାକୁ ସଂକେତରେ $\angle ABC \cong \angle DEF$ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

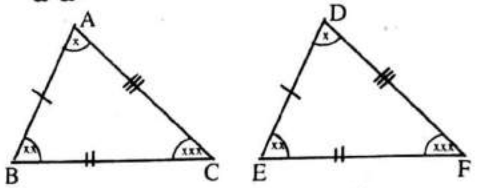
2.2 ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିଟି ବାହୁ ଓ ତିନିଟି କୋଣ ଅର୍ଥାତ୍ ଛଅଟି ମୌଳିକ ଅଂଶ ଅଛି। ତେଣୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା ଏହି ଛଅଟି ଅଂଶର ସର୍ବସମତା ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ। **ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ତିନିବାହୁ ଅନ୍ୟଟିର ତିନି ବାହୁ ସହିତ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଏବଂ ସର୍ବସମ ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ବିପରୀତ କୋଣ ମାନ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟକୁ ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜ କୁହାଯାଏ।**

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ -

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

ଏବଂ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$



(ଚିତ୍ର 2.3)

ତେଣୁ Δ ABC ଓ Δ DEF ସର୍ବସମ। ସଂକେତରେ ଏହି ସର୍ବସମତାକୁ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ। ଅନୁରୂପ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର କ୍ରମ ରକ୍ଷା କରି ସର୍ବସମକୋଣକୁ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ।

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବସମ ବାହୁ ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣକୁ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଓ ସର୍ବସମ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ଅନୁରୂପ ବାହୁ କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର 2.3ରେ A,B,C ଯଥାକ୍ରମେ D, E, F ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଅଟନ୍ତି । $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ବାହୁମାନଙ୍କର ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଏବଂ $\angle A$, $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ଯଥାକ୍ରମେ $\angle D$, $\angle E$ ଓ $\angle F$ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଅଟନ୍ତି।

ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେହି ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହେବ; କିନ୍ତୁ, ଯଦି ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ନ ହୋଇପାରନ୍ତି। କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ପଢ଼ିବା ପରେ ଏହା ବୁଝିପାରିବ ।

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା ପାଇଁ ନ୍ୟୁନତମ ସର୍ତ୍ତ :

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ **ସ୍ପଷ୍ଟ** ଯେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତାର ଅର୍ଥ ଗୋଟିକର ତିନିବାହୁ ଓ ତିନିକୋଣ ସହିତ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଓ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକର ସର୍ବସମତା । କିନ୍ତୁ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ବାହୁ ଠାରୁ ତିନି କୋଣକୁ ପୃଥକ ଭାବେ ବିଚାର କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ।ଗୋଟିଏ ତ୍ରଭୁଜର ତିନିବାହୁକୁ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ତିନିବାହୁ ସହିତ ମିଳାଇ ଦେଲେ ସଂପୃକ୍ତ କୋଣ ଗୁଡ଼ିକ ଆପେ ଆପେ ମିଳିଯାନ୍ତି। ତେଣୁ କେବଳ ତିନି ବାହୁକୁ ମିଳାଇ ମଧ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ବୋଲି କହିହେବ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ଓ ସେହି ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯଥାକ୍ରମେ ସର୍ବସମ ହୋଇଥିବା ଦୁଇବାହୁ ଏବଂ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହିତ ମିଳାଇବା ବେଳେ ଦେଖିବା ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ତୃତୀୟ ବାହୁ ଦୁଇଟି ଆପେ ଆପେ ମିଳିଯାଆନ୍ତି। ଅର୍ଥାତ୍ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୋଇଯାଆନ୍ତି। ପୂର୍ବରୁ ଗୃହୀତ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ସହାୟତାରେ ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେଉ ନଥିବାରୁ ଏହାକୁ ଏକ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଛି। ତତ୍ ସହିତ ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ସର୍ବସମତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ -10 : ବା-କୋ-ବା (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ) ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ

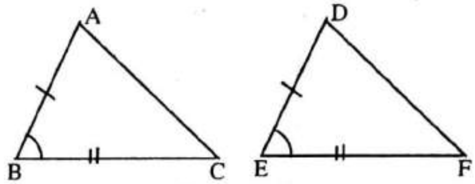
ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ଦୁଇବାହୁ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇବାହୁ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

(If two sides and the included angle of a triangle are respectively congruent with two sides and the included angle of another triangle, then the triangles are congruent.)

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

ଏବଂ $\angle B \cong \angle E$ ହେଲେ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(ଚିତ୍ର 2.4)

ଏହାକୁ ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ (ବା-କୋ-ବା) ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Side-Angle-Side or S-A-S axiom) କୁହାଯାଏ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 11

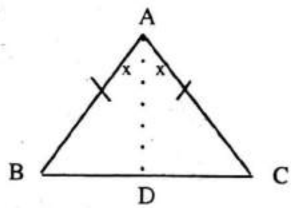
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେହି ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

(If two sides of a triangle are congruent then their opposite angles are also congruent.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $AB = AC$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle ABC = m\angle ACB$

ଅଙ୍କନ : $\angle BAC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔACD ମଧ୍ୟରେ

$\because \begin{cases} AB = AC & \text{(ଦତ୍ତ)} \\ \overline{AD} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ} \\ m\angle BAD = m\angle CAD & \text{(ଅଙ୍କନ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow \angle ABD \cong \angle ACD \Rightarrow \angle ABC \cong \angle ACB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-1 : ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ସମାନ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2: ΔABC ରେ $AB = AC$ ହେଲେ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହେବ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 12 (କୋ-ବା-କୋ ସର୍ବସମତା)

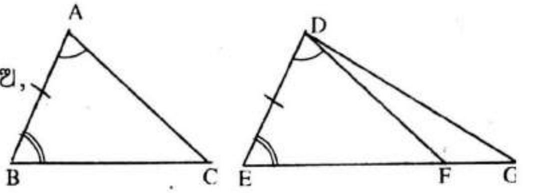
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(If two angles and the included side of a triangle are respectively congruent to two angles and the included side of another, the triangles are congruent)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ଏବଂ $AB = DE$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ଅଙ୍କନ : $\overline{EF}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ G ନିଅ, ଯେପରିକି $BC = EG$ ହେବ । $\overline{DG}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔDEG ମଧ୍ୟରେ

$$\because \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} & (\text{ଦତ୍ତ}) \\ \overline{BC} \cong \overline{EG} & (\text{ଅଙ୍କନ}) \\ \angle B \cong \angle E & (\text{ଦତ୍ତ}) \end{cases}$$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEG$.............. (1) (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow \angle BAC \cong \angle EDG$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ)

କିନ୍ତୁ $\angle BAC \cong \angle EDF$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \angle EDG \cong \angle EDF$

$\Rightarrow G = F$ ଅର୍ଥାତ୍ G ଓ F ଅଭିନ୍ନ .... (2)

$\therefore$ (1) ଓ (2) $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବି.ଦ୍ର.: ଅଙ୍କନରେ E-F-G ନ ହୋଇ E-G-F ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ ପୂର୍ବ ପରି ହେବ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର ଦୁଇ କୋଣ ଓ ଯେକୌଣସି ଗୋଟି ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟଟିର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ନିମ୍ନ ତିନି ପ୍ରକାର ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିଥାଏ ।

(a) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

(b) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

(a) $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

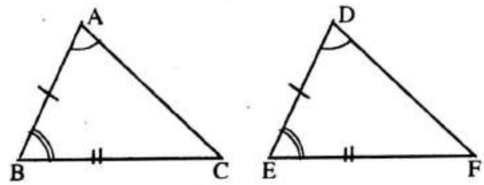
ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ପରିସ୍ଥିତି ଏହି ତିନି ପ୍ରକାର ହେବ ।

ପରିସ୍ଥିତି (a)ରେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ସର୍ବସମତାର ପ୍ରମାଣ ଉପପାଦ୍ୟ 12 ରେ ଦିଆଯାଇଛି । ପରିସ୍ଥିତି (b) ଓ (c) ଏକ ପ୍ରକାରର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ କୋଣ ଓ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(Two triangles are congruent if two angles and any side of one are respectively congruent to two angles and the corresponding side of the other.)



(ଚିତ୍ର 2.7)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ଓ Δ DEF ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ ଏବଂ BC = EF

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ପ୍ରମାଣ : $\because$ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 180^0

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0 = m\angle D + m\angle E + m\angle F$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତାନୁଯାୟୀ $m\angle A = m\angle D$ ଓ $m\angle B = m\angle E$

$\therefore m\angle C = m\angle F$

ବର୍ତ୍ତମାନ Δ ABC ଓ Δ DEF ମଧ୍ୟରେ

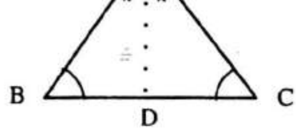
$\because$ { $m\angle B = m\angle E$ (ଦତ୍ତ)
$m\angle C = m\angle F$ (ପ୍ରମାଣିତ)
BC = EF (ଦତ୍ତ) }

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (କୋ-ବା-କୋ ସର୍ବସମତା) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 13

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ।

(If two angles of a triangle are congruent, then their opposite sides are also congruent.)



(ଚିତ୍ର 2.8)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ରେ $m\angle B = m\angle C$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = AC

ଅଙ୍କନ : $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ $\overline{BC}$ କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ ACD ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { $m\angle ABD = m\angle ACD$ (ଦତ୍ତ)
$m\angle BAD = m\angle CAD$ (ଅଙ୍କନ)
$\overline{AD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ }

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow AC = AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 14

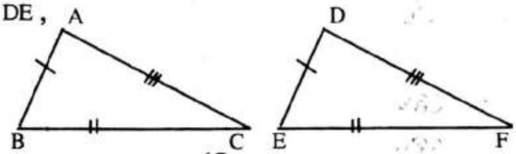
(ବା-ବା-ବା ସର୍ବସମତା)

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

If three sides of a triangle are congruent to those of another triangle the triangles are congruent.

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ଓ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$



(ଚିତ୍ର 2.9)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

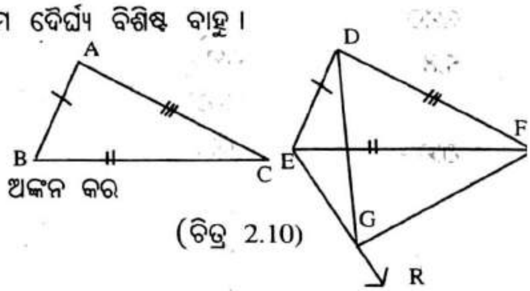
ଅଙ୍କନ : ମନେକର ΔABC ରେ $\overline{BC}$ ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ ।

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (ଦତ୍ତ)

$\overline{EF}$ ର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ D ଅଛି,

ତାହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $\angle FER$ ଅଙ୍କନ କର

ଯେପରିକି, $m\angle CBA = m\angle FER$



(ଚିତ୍ର 2.10)

ଏବଂ $\overrightarrow{ER}$ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ G ନିଅ ଯେପରିକି E-G-R ଓ $AB = EG$ ହେବ । $\overline{DG}$ ଓ $\overline{GF}$ ଅଙ୍କନ କର

ପ୍ରମାଣ : ΔABC ଓ ΔGEF ଦ୍ୱୟରେ $\overline{AB} \cong \overline{GE}$ (ଅଙ୍କନ)

$m\angle CBA = m\angle FEG$ (ଅଙ୍କନ) ଏବଂ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta GEF$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\therefore m\angle EGF = \angle BAC$ ଏବଂ $GF = AC$

$\Rightarrow GF = DF$ ($\because AC = DF$).......... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $AB = GE \Rightarrow GE = DE$ ($\because AB = DE$) .... (ii)

(i) ରୁ ପାଇବା $m\angle FDG = m\angle FGD$ ...... (iii)

ଏବଂ (ii) ରୁ ପାଇବା $m\angle EDG = m\angle EGD$ .... (iv)

(iii) ଓ (iv) $\Rightarrow m\angle FDG + m\angle EDG = m\angle FGD + m\angle EGD$

$\Rightarrow m\angle EDF = m\angle EGF \Rightarrow m\angle EGF = m\angle EDF$........ (v)

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔGEF ଏବଂ ΔDEF ଦ୍ୱୟରେ

$GF = DF$ ...... (i) ରୁ

$GE = DE$ .... (ii) ରୁ

ଏବଂ $m\angle EGF = m\angle EDF$.....(v) ରୁ

$\therefore \Delta GEF \cong \Delta DEF$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

କିନ୍ତୁ ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ $\Delta ABC \cong \Delta GEF \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ପ୍ରମାଣିତ)

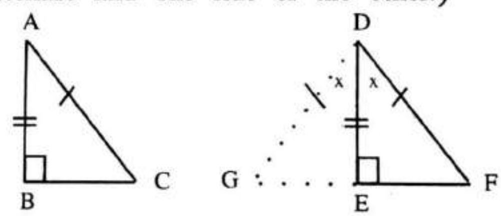
(ଉକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ ଦୀର୍ଘ ଏବଂ କ୍ଲିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପରୀକ୍ଷା ବହିର୍ଭୂତ ଅଟେ; କେବଳ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରାଯିବ।)

ଉପପାଦ୍ୟ - 15

(ସ-କ-ବା ସର୍ବସମତା)

ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏକ ବାହୁ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ।

(Two right-angled triangles are congruent if the hypotenuse and one side of one triangle are respectively congruent to the hypotenuse and one side of the other.)



(ଚିତ୍ର 2.11)

ଦତ୍ତ : ΔABC ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ

$m\angle B = m\angle E = 90^0$

$\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ $\cong \overline{DF}$ କର୍ଣ୍ଣ ଏବଂ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{FE}$ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ G ନିଅ ଯେପରିକି G-E-F ଏବଂ $BC = EG$ ହେବ।

$\overline{DG}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : $m\angle DEF + m\angle DEG = 180^0$ [$\because$ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ]

$\because m\angle DEF = 90^0 \quad \therefore m\angle DEG = 90^0$

ΔABC ଓ ΔDEG ମଧ୍ୟରେ

$\because$ $AB = DE$ (ଦତ୍ତ)

$BC = EG$ (ଅଙ୍କନ)

$m\angle ABC = 90^0 = m\angle DEG$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEG$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow AC = DG$ ଓ $m\angle ACB = m\angle DGE$ .... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $\because AC = DG \Rightarrow DG = DF$

$\Rightarrow m\angle DGE = m\angle DFE$ .... (ii)

(i) ଓ (ii) $\Rightarrow m\angle ACB = m\angle DFE$

$\therefore \Delta ABC$ ଓ ΔDEF ମଧ୍ୟରେ

$\because$ { $m\angle ACB = m\angle DFE$ (ପ୍ରମାଣିତ)
$m\angle ABC = m\angle DEF$ (ଦତ୍ତ)
$AC = DF$ (ଦତ୍ତ) }

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (କୋ-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) ΔABC ଓ ΔPQR ସର୍ବସମ ହେବେ ଯଦି -

(a) $AB = PQ,\ AC = QR,\ m\angle B = m\angle Q$ (b) $AB = PQ,\ AC = QR,\ m\angle A = m\angle R$

(c) $AB = PQ,\ AC = PR,\ m\angle A = m\angle P$ (d) $AB = PQ,\ AC = QR,\ m\angle A = m\angle Q$

(ii) ΔABC ଓ ΔDEF ସର୍ବସମ ହେବେ ଯଦି -

(a) $m\angle A = m\angle D,\ m\angle B = m\angle F,\ AB = DF$, (b) $m\angle A = m\angle D,\ m\angle B = m\angle F,\ AB = DE$

(c) $m\angle A = m\angle D,\ m\angle B = m\angle F,\ BC=DE$, (d) $m\angle A = m\angle D,\ m\angle B = m\angle F,\ AC = DF$

(iii) ΔABC ଓ ΔDEF ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle A = m\angle D$ ଓ $AB = DE$ ହେଲେ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ?

(a) $BC = EF$ (b) $m\angle ACB = m\angle DFE$

(c) $AC = DF$ (d) $m\angle ABC = m\angle DFE$

(iv) ΔABC ଓ ΔPQR ସର୍ବସମ ହେଲେ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ହେବ ?

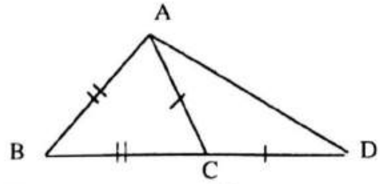
(a) $AB = PQ,\ BC = QR,\ m\angle C = m\angle R$ (b) $BC = PQ,\ CA = QR,\ m\angle A = m\angle P$

(c) $AB = PQ,\ m\angle A = m\angle Q,\ m\angle C = m\angle P$ (d) $AB = PQ,\ m\angle A = m\angle P,\ m\angle B = m\angle Q$

(v) ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର ଅନୁସାରେ m∠BAD : m∠ADB ହେଉଛି -

(a) 2:1 (b) 3:1

(c) 1:2 (d) 1:3



(ଚିତ୍ର 2.12)

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ Δ ABC ଓ Δ PQR ସର୍ବସମ ହେବେ ?

(i) AB = PQ, BC = QR, m∠C = m∠R

(ii) AB = PQ, m∠A = m∠P, m∠B = m∠Q

(iii) BC = PQ, CA= QR, m∠A = m∠P

(iv) m∠P = m∠B = 90^0, PQ = AB, PR = BC

(v) PQ = AB, PR = AC, A ଓ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(vi) AB = PQ, m∠A = m∠Q, m∠C = m∠R

(ଖ) ବିଭାଗ

3. (i) ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ 100^0 ହେଲେ ଏହା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(ii) ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲେ ଏହାର ଶୀର୍ଷକୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

4. Δ ABCରେ $\overline{AC}$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overline{AB}$କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = BD+DC

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0।

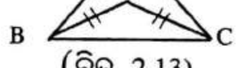
6. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

(ii) Δ ABCରେ AB = AC ହେଲେ, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

7. Δ ABCରେ m∠A = 72^0 ଏବଂ m∠B = 2m∠C ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ।

8. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ AB = AC ଏବଂ BO = CO

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ∠ABO ≅ ∠ACO ।

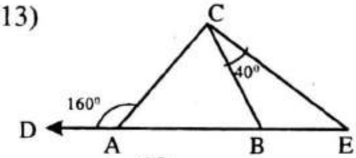


(ଚିତ୍ର 2.13)

9. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.14ରେ AB = AC

m∠CAD = 160^0, m∠BCE = 40^0

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ BE = BC ।



(ଚିତ୍ର 2.14)

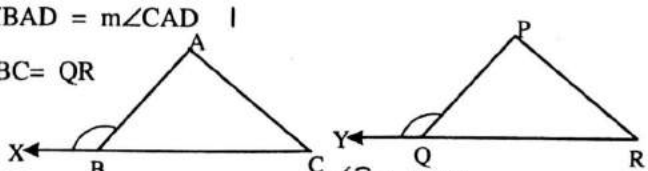
10. Δ ABC ରେ AB = AC ଓ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ।

ପ୍ରମାଣ କରଯେ BD = DC ଓ m∠BAD = m∠CAD ।

11. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.15ରେ AB = PQ, BC= QR

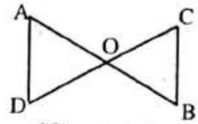
ଏବଂ m∠ABX = m∠PQY

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, Δ ABC ≅ Δ PQR ।



(ଚିତ୍ର 2.15)

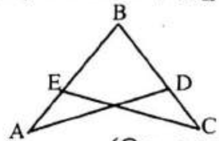
12. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ ।



(ଚିତ୍ର 2.16)

13. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ $\angle A$ କୁ $\angle C$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AB = AD$ ଏବଂ $CB = CD$ ।

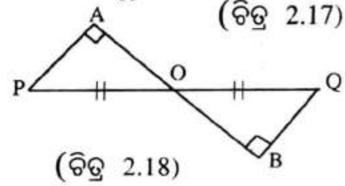
14. Δ ABC ରେ A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{BC}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।



(ଚିତ୍ର 2.17)

15. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.17ରେ ଦତ୍ତ ଅଛି, $m\angle BAD = m\angle BCE$ ଏବଂ $AB = BC$ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AD = CE$ ।

16. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.18ରେ O, $\overline{PQ}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । $\overline{PA}$ ଏବଂ $\overline{QB}$, $\overline{AB}$ ଉପରେ ଲମ୍ବ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ $AP = BQ$ ।



(ଚିତ୍ର 2.18)

(ଗ) ବିଭାଗ

17. Δ ABC ରେ $AB = AC$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, B ଓ C ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

18. Δ ABC ରେ $AB = AC$ । $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $BO = CO$ ଏବଂ $\overrightarrow{AO}$, $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ।

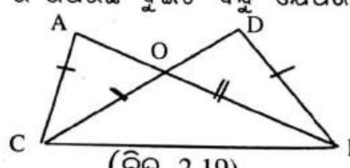
19. Δ ABC ରେ $\angle B$ ସମକୋଣ । $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $BD = \frac{1}{2}AC$ ।

20. କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତାତ୍ରୟ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମବାହୁ ।

21. ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

22. Δ ABC ଓ Δ DEF ରେ X ଓ Y ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$ ଓ $\overline{EF}$ ର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ । $AB = DF$, $BC = EF$ ଓ $AX = DY$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

23. Δ ABC ରେ $AB = AC$ । X ଓ Y ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି $AX = AY$ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $CX = BY$ ।



(ଚିତ୍ର 2.19)

24. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 2.19 ରେ $AB = CD$ ଓ $AC = BD$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AO = DO$ ଓ $BO = CO$ ।

25. Δ ABC ରେ $AB= AC$ । $\angle ABC$ ଓ $\angle ACB$ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ΔOBC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

26. Δ ABC ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ E ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି $AD =AE$ ଏବଂ $DB = EC$ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ।

2.3 ତ୍ରିଭୁଜରେ କିଛି ଅସମାନତା ସମ୍ବନ୍ଧ (Some Inequality Relations in a triangle):

ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 'ସର୍ବସମତା ସମ୍ବନ୍ଧ' ସଂକ୍ରାନ୍ତୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ ଯଥା : ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଏହାର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ଏହାର ବିପରୀତ କଥନ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆଲୋଚନା କରିସାରିଛେ । ଏହି ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ତ୍ରିଭୁଜର କିଛି କୋଣ ଓ ବାହୁ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅସମାନତା ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 16

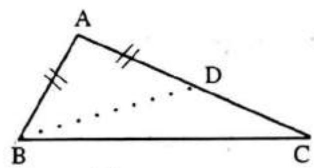
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏହାର ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ ବୃହତ୍ତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

(If two sides of a triangle have unequal lengths, then the angle opposite the side with greater length has greater measure than that of the angle opposite the side with smaller length.)

ଦତ୍ତ : ΔABC ରେ $AC > AB$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle ABC > m\angle ACB$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AC}$ ଉପରେ D ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରିକି A-D-C ଏବଂ $AD = AB$ । $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.20)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ରେ $AB = AD$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore \angle ABD \cong \angle ADB$ .... (1)

କିନ୍ତୁ ΔBDCରେ $\angle ADB$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଓ $\angle ACB$ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ।

$\therefore m\angle ADB > m\angle ACB$ .... (2)

$\therefore$ (1) ଓ (2) ଅନୁସାରେ $m\angle ABD > m\angle ACB$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle DBC = m\angle ABC$ [$\because$ D, $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ]

[$\because$ A ଓ D, $\overleftrightarrow{BC}$ ର ଏକପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ D ଓ C, $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$\therefore m\angle ABC > m\angle ACB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

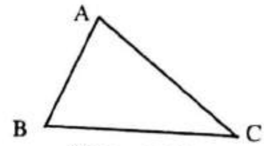
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ବୃହତ୍ତମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 17

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଅନ୍ୟ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲେ ବୃହତ୍ତର ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, କ୍ଷୁଦ୍ରତର ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

(If one angle of a triangle has greater measure than another, the side opposite to the greateer measure has greater length than the other.)

ଦତ୍ତ : ΔABCରେ $m\angle ABC > m\angle ACB$


(ଚିତ୍ର 2.21)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AC > AB$

ପ୍ରମାଣ : AC ଓ AB ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ -

$AC = AB$, $AC < AB$ ଏବଂ $AC > AB$ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭବ ।

ଯଦି $AC = AB$ ହୁଏ, ତେବେ $m\angle ABC = m\angle ACB$ ହେବ । (ଉପପାଦ୍ୟ-11)

ଯଦି $AC < AB$ ହୁଏ, ତେବେ $m\angle ABC < m\angle ACB$ ହେବ ।

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ABC > m\angle ACB$

$\therefore$ ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି ଅସମ୍ଭବ ।

$\therefore AC > AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଦୁଇଟି ଉପପାଦ୍ୟ (ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସର୍ତ୍ତ ଅପରର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ସହ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ଉପପାଦ୍ୟ (ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ) କୁହାଯାଏ ।

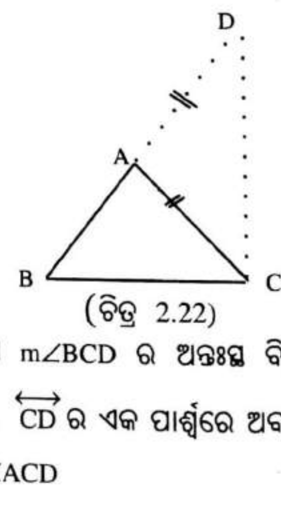
ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିପରୀତ କଥନମୂଳକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ 'ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି' ଏହି ଖଣ୍ଡ ବାକ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 18

ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

(The sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the length of the third side)

ଦତ୍ତ : ABC ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ।



(ଚିତ୍ର 2.22)

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $AB + AC > BC$, (ii) $AB + BC > AC$

ଏବଂ (iii) $AC + BC > AB$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{BA}$ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରିକି

B-A-D ଏବଂ $AD = AC$ ହେବ । $\overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : $\because$ B ଓ D ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବିନ୍ଦୁ A ହୋଇଥିବାରୁ ଏହା $m\angle BCD$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

[$\because$ A ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{BC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{CD}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ]

$\therefore m\angle BCD = m\angle ACB + m\angle ACD \Rightarrow m\angle BCD > m\angle ACD$

ଅଙ୍କାନୁଯାୟୀ $AC = AD \Rightarrow m\angle ADC = m\angle ACD$

$\Rightarrow m\angle BCD > m\angle ADC$ ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle BCD > m\angle BDC$

$\Rightarrow BD > BC$

$\Rightarrow AB + AD > BC \Rightarrow AB + AC > BC$ .... (i) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ

(ii) $AB + BC > AC$ ଓ (iii) $AC + BC > AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 19

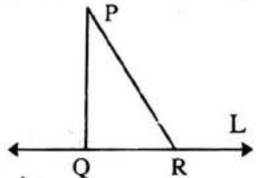
ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସରଳରେଖାଟିର ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ସହିତ ଯୋଗ କରି ଯେତେ ଗୁଡ଼ିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

(Of all segments drawn by joining the points of a line to an external point, the segment perpendicular to the line has the shortest length)

ଦତ୍ତ : L ସରଳରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : P କୁ L ର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସହ ଯୋଗ କରି ଅଙ୍କିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ L ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

ଅଙ୍କନ : P ଠାରୁ L ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ Q ହେଉ ଓ L ଉପରେ R ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।



(ଚିତ୍ର 2.23)

ପ୍ରମାଣ : ΔPQR ରେ $m\angle PQR = 90^0$ [$\because \overline{PQ} \perp L$].

$\therefore m\angle PRQ < 90^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle PRQ$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ

$\Rightarrow m\angle PRQ < m\angle PQR \Rightarrow PQ < \angle PR$ (ଉପପାଦ୍ୟ-17 ଦ୍ୱାରା)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପ୍ରତି ଏହାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକରଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(a) ΔABC ରେ $m\angle A = 40^0$, $m\angle B = 75^0$ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(b) ΔABC ରେ $m\angle A = 110^0$, $m\angle B = 20^0$ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କେଉଁ ବାହୁଟି କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ?

(c) ΔABC ରେ $m\angle B = 90^0$ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କେଉଁ ବାହୁଟି ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ?

(d) ΔABC ରେ $m\angle A = m\angle B + m\angle C$ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ କେଉଁଟି?

(e) ΔABC ରେ $m\angle A = 40^0$ $m\angle B = 50^0$ । ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖ ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି, ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ....।

(b) ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର, ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ .... ।

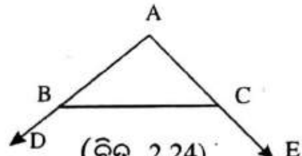
(c) ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି, ଏହାର ପରିସୀମାଠାରୁ......... ।

(d) ତ୍ରିଭୁଜର ପରିସୀମା, ଏହାର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ .... ।

(e) ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଏହାର ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ...... ।

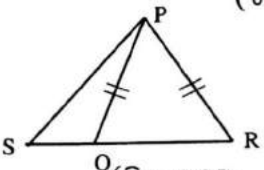
(ଖ) ବିଭାଗ

3. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $m\angle CBD > m\angle BCE$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AB > AC$



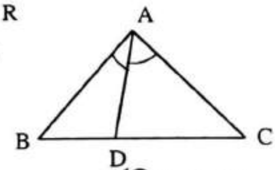
(ଚିତ୍ର 2.24)

4. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $PQ = PR$ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $PS > PQ$



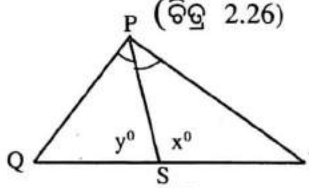
(ଚିତ୍ର 2.25)

5. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AD}$, $\angle A$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,
(i) $AB > BD$ (ii) $AC > CD$



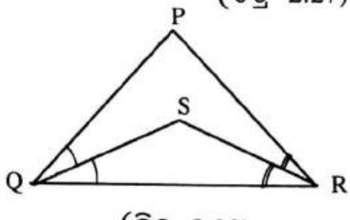
(ଚିତ୍ର 2.26)

6. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $PR > PQ$ ଏବଂ PS, $\angle P$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x > y$



(ଚିତ୍ର 2.27)

7. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $PQ > PR$, $\overrightarrow{QS}$ ଏବଂ $\overrightarrow{RS}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle Q$ ଓ $\angle R$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $SQ > SR$



(ଚିତ୍ର 2.28)

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ ।

ଗ - ବିଭାଗ

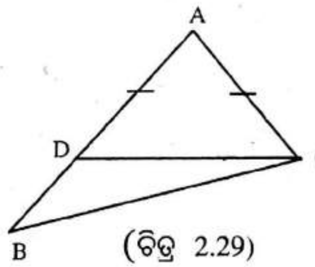
9. PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{PS}$ ଓ $\overline{QR}$ ଯଥାକ୍ରମେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବାହୁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $m\angle PQR > m\angle PSR$ (ii) $m\angle QRS > m\angle SPQ$ ଏବଂ (iii) $m\angle P + m\angle S < m\angle Q + m\angle R$

10. Δ ABCର AD, BE ଏବଂ CF ଉଚ୍ଚତା ତ୍ରୟ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) $AB + AC > 2AD$ (ii) $AB + BC + AC > AD + BE + CF$

11. Δ ABCର $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ ଏବଂ $\overline{CF}$ ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) $AB + AC > 2AD$ (ii) $AB + AC + BC > AD + BE + CF$

12. Δ ABCର O ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) $BO + CO < AB + AC$ (ii) $AO + BO + CO < AB + AC + BC$ ଏବଂ
(iii) $AO + BO + CO > \frac{1}{2}(AB+AC+BC)$

13. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ Δ ABCର $AB > AC$ ଏବଂ $AD = AC$
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $m\angle ACD = \frac{1}{2}(m\angle B + m\angle C)$
(ii) $m\angle BCD = \frac{1}{2}(m\angle C - m\angle B)$

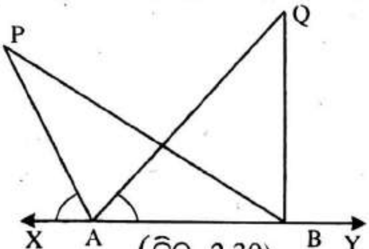


(ଚିତ୍ର 2.29)

14. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) $AB + BC + CD > AD$ (ii) $AB + BC + CD + AD > AC + BD$
(iii) $AB + BC + CD + AD > 2AC$

15. Δ ABCରେ $AC > AB$ ଏବଂ $\overline{AD}$ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
$m\angle BAD > m\angle CAD$

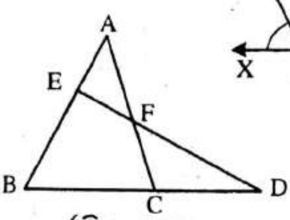
16. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର O ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ (କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ) ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) $2(OA+ OB + OC + OD) > AB + BC + CD + AD$
(ii) $OA + OB + OC + OD > AC + BD$



(ଚିତ୍ର 2.30)

17. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $m\angle PAX = m\angle QAY$ ହେଲେ
ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $PA+AQ < PB + BQ$

18. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ $AB = AC$ ହେଲେ
ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $AF > AE$



(ଚିତ୍ର 2.31)