పూర్ణాంకాలు

2.1 పరిచయం

మనం వస్తువులను లెక్కించడాన్ని ఇంతకు ముందు తరగతిలోనే నేర్చుకున్నాం. వస్తువులను లెక్కించేటపుడు 1, 2, 3, ... సంఖ్యలు అవసరమౌతాయి. ఆ సంఖ్యల సమితిని సహజ సంఖ్యలు అంటారు. సహజ సంఖ్యల సమితిని N = {1, 2, 3, 4, ...} అని సూచిస్తాం.

సహజ సంఖ్యల గురించి నేర్చుకునేటపుడు, ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్యకు '1' ని కలిపితే ఆ తర్వాతి సహజ సంఖ్య వస్తుందని తెల్సుకున్నాము. ఉదాహరణకు '16' కు '1' ని కలిపితే '17' వస్తుంది, కాని ఇది కూడా ఒక సహజసంఖ్యయే అదే విధంగా తప్ప ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య నుండి '1' ని తీసివేస్తే, సాధారణంగా సహజ సంఖ్యే వస్తుంది. ఉదాహరణకు 25 అనే సహజ సంఖ్య నుండి '1' ని తీసివేస్తే 24 వస్తుంది, ఇది కూడా ఒక సహజ సంఖ్యయే.

ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్యకు తర్వాత గల సంఖ్యను ఉత్తర సంఖ్య అనీ, అలాగే ఒక సంఖ్యకు గల ముందు సంఖ్యను పూర్వ సంఖ్య అనీ అంటారు.

ఉదాహరణకి, 9 యొక్క ఉత్తర సంఖ్య 10

9 యొక్క పూర్వ సంఖ్య 8

ఇపుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యలకు పూర్వ సంఖ్య, ఉత్తర సంఖ్యలతో క్రింది పట్టికను పూరించండి.

క్ర.సం.	సహజ సంఖ్య	దాని ముందు సంఖ్య (పూర్వ సంఖ్య)	దాని తర్వాత సంఖ్య(ఉత్తర సంఖ్య)
1.	13		
2.	237		
3.	999		
4.	26		
5	9		
6	1		

మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

1. ఏ సహజ సంఖ్యకు ఉత్తర సంఖ్య లేదు?
2. ఏ సహజ సంఖ్యకు పూర్వ సంఖ్య లేదు?

2.2 పూర్ణాంకాలు

సహజసంఖ్యలలో '1'కి పూర్వ సంఖ్య లేదు అని మీరు తెల్సుకొనే ఉంటారు. '0' ను సహజ సంఖ్యల సమితికి చేర్చగా పూర్ణాంకాల సమితిగా ఏర్పడతాయి.

పూర్ణాంకాలను క్రింది విధంగా సూచిస్తాం.

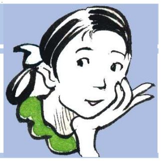
W = {0, 1, 2, 3, ...}

© SCERT not to be republished

ఇవి చేయండి

1. కనిష్ఠ పూర్ణాంకమేది?

ఆలోచించి, చర్చించి మరియు రాయండి

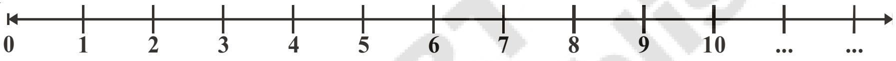


1. సహజ సంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలౌతాయా?
2. పూర్ణాంకాలన్నీ సహజ సంఖ్యలౌతాయా?

2.3 పూర్ణాంకాలను సంఖ్యా రేఖపై సూచించుట

ఒక సరళరేఖను గీయండి. దానిపై ఒక బిందువును గుర్తించి, దానిని '0' చే సూచించండి. '0' కు కుడివైపున వీలైనన్ని బిందువులను సమాన దూరాలలో గుర్తించి, వాటిని 1,2,3,4,... లుగా సూచించండి. ఏవైనా రెండు వరుస బిందువుల మధ్య దూరాన్ని ప్రమాణ దూరం అంటారు. సంఖ్యారేఖపై ఎన్ని పూర్ణాంకాలైనా కుడివైపున గుర్తిస్తూ పోవచ్చును.

పూర్ణాంకాల సంఖ్యా రేఖ :



పైన ఇవ్వబడిన సంఖ్యారేఖను గమనించండి. దానిపై గల ఏ సంఖ్యకైనా, ఉత్తర సంఖ్య దానికి ఏ వైపున ఉంటుందో చెప్పగలరా? 3 యొక్క ఉత్తర సంఖ్య 4, 3 కంటే 4 పెద్ద సంఖ్య ఇది 3కు కుడివైపున ఉంటుంది.

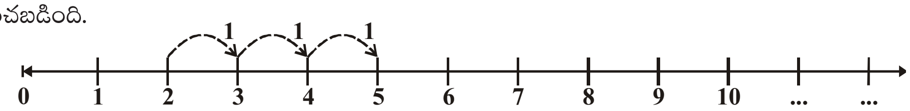
మరి, సంఖ్యారేఖ పై గల ఒక సంఖ్యకు కుడివైపున గల సంఖ్యలన్నియు ఎల్లప్పుడు ఆ సంఖ్య కంటే పెద్ద సంఖ్యలని చెప్పగలమా?

మీ స్నేహితులతో చర్చించి క్రింది పట్టికను పూరించండి.

క్ర.సం.	సంఖ్యలు	సంఖ్యారేఖ పై గల స్థానం	సంఖ్యల మధ్య సంబంధం
1.	12, 8	12,8 కి కుడివైపున ఉండును	12 > 8
2.	12, 16		
3.	236, 210		
4.	1182, 9521		
5.	10046, 10960		

సంఖ్యా రేఖపై సంకలనం

పూర్ణాంకాల సంకలనాన్ని సంఖ్యా రేఖపై సూచించవచ్చు. 2 మరియు 3 సంఖ్యల సంకలనం క్రింది రేఖపై సూచించబడింది.



2కు 3ను కలుపాలి, కాబట్టి పైన చూపిన విధంగా సంఖ్యారేఖ పై 2తో ఆరంభించి, దానికి కుడివైపున ఒక ప్రమాణ దూరంతో 3 సార్లు కదిలితే 5ని చేరుకుంటాం.

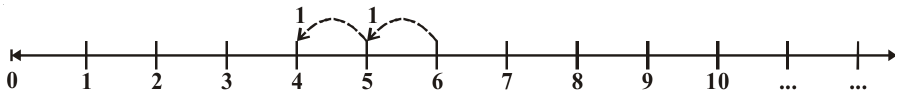
కావున $2 + 3 = 5$

అందువల్ల ఏ సంఖ్యను కలుపాలన్నా, సంఖ్యా రేఖపై మనం కుడివైపుకు కదులుతాం.

© SCERT not to be republished

సంఖ్యారేఖపై వ్యవకలనం

6 నుండి 2ను తీసివేయడం సంఖ్యా రేఖ పై ఎలా చూపాలో పరిశీలిద్దాం.



6 నుండి 2ను తీసివేయాలి, కాబట్టి పైన చూపిన విధంగా సంఖ్యారేఖపై 6తో ఆరంభించి, దానికి ఎడమ వైపున ఒక ప్రమాణదూరం రెండు సార్లు కదిలితే 4 ని చేరుకుంటాం. కావున 6–2 = 4

అనగా వ్యవకలనం చేయాలంటే సంఖ్యారేఖపై ఎడమ వైపుకు కదులుతాం.

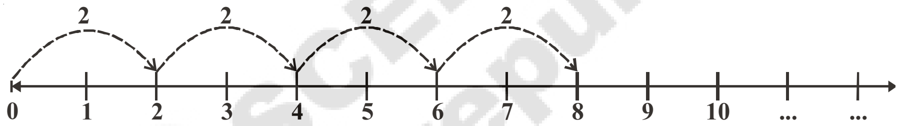
ఇవి చేయండి.

క్రింది వాటిని సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

1. 5 + 3   2. 5 - 3   3. 3 + 5   4. 10 + 1

సంఖ్యారేఖపై గుణకారం

ఇపుడు సంఖ్యారేఖపై పూర్ణాంకాల గుణకారాన్ని పరిశీలిద్దాం. 2×4 ని కనుగొందాం. 2×4 అనగా 2 ప్రమాణాలు 4మార్లు, దీనిని సంఖ్యారేఖపై చూద్దాం.



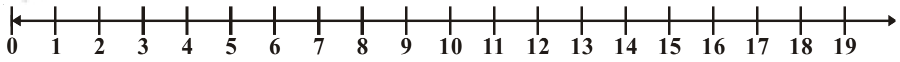
'0' వద్ద ఆరంభించి, ప్రతిసారి 2 ప్రమాణాలు, 4 సార్లు కుడివైపుకు కదలవలెను. అపుడు మీరు 8 ని చేరుకుంటారు. కావున $2 \times 4 = 8$

ప్రయత్నించండి

సంఖ్యా రేఖనుపయోగించి క్రింది వాటిని కనుగొనండి.

1. 5 రావాలంటే 8 నుండి ఏ సంఖ్యను తీసివేయాలి?
2. 1 రావాలంటే 6 నుండి ఏ సంఖ్యను తీసివేయాలి?
3. 8 రావాలంటే 6కి ఏ సంఖ్యను కలపాలి?
4. 30 రావాలంటే ఎన్ని 6లు అవసరం?

రాజు మరియు గాయత్రి కలిసి సంఖ్యారేఖను తయారుచేశారు.



రాజు మరియు గాయత్రి ఒక ఆట ఆడుతున్నారు. ముందుగా ఒక సంఖ్యా రేఖను గీచారు. గాయత్రి సంఖ్యారేఖ పై సున్న వద్ద ప్రారంభించి మూడు సార్లు ముందుకు దూకాలి. మొదటిసారి 3 అడుగులు రెండవసారి 8 అడుగులు మరియు మూడవసారి 5 అడుగులు చొప్పున దూకితే చివరకు గాయత్రి సంఖ్యారేఖపై ఎక్కడికి చేరుతుంది? గాయత్రి 16 అడుగులని సమాధానం చెప్పింది.

గాయత్రి సమాధానం సరియైనదని నీవు భావిస్తున్నావా? గాయత్రి మార్గమును సంఖ్యా రేఖపై సూచించుము.

సంకలన, వ్యవకలనాల ఆధారంగా ఈ ఆటను నీ మిత్రునితో కలిసి ఆడుము.

© SCERT not to be republished

అభ్యాసం - 2.1

1. కింది వాక్యాలలో ఏవి సత్యం (T) ఏవి అసత్యం (F) అసత్య వాక్యాలను సరిగా రాయండి.

i) పూర్వ సంఖ్య లేని ఒక సహజ సంఖ్య కలదు.

ii) '0' కనిష్ఠ పూర్ణాంకము.

iii) పూర్ణాంకాలన్నీ సహజ సంఖ్యలు.

iv) సంఖ్యారేఖపై కుడివైపున గల పూర్ణాంకము దానికి ఎడమవైపున గల పూర్ణాంకం కంటే పెద్దది.

v) సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపున గల పూర్ణాంకము దానికి కుడివైపున గల సంఖ్య కంటే పెద్దది.

vi) సంఖ్యారేఖపై కనిష్ఠ పూర్ణాంకాన్ని సూచించలేము.

vii) సంఖ్యారేఖపై గరిష్ఠ పూర్ణాంకాన్ని చూపగలము.

2. 27 మరియు 46ల మధ్య ఎన్ని పూర్ణాంకాలుంటాయి?

3. సంఖ్యారేఖ నుపయోగించి కింది వాటిని కనుగొనండి.

i) 6 + 7 + 7 ii) 18 - 9 iii) 5 × 3

4. కింది జతలలో ఏ పూర్ణాంకం మరొక సంఖ్యకు సంఖ్యారేఖ పై కుడివైపున ఉంటుంది?

i) 895; 239 ii) 1001; 10001 iii) 10015678; 284013

5. కనిష్ఠ పూర్ణాంకాన్ని సంఖ్యారేఖపై చూపండి.

6. <, > లలో సరియైన గుర్తును ఖాళీలలో రాయండి.

i. 8 .... 7 ii. 5 2

iii. 0 .... 1 iv. 10 5

7. సంఖ్యారేఖపై 11 యొక్క ఉత్తర సంఖ్యను మరియు 5 యొక్క పూర్వ సంఖ్యను సూచించండి.

2.4 పూర్ణాంకాల ధర్మాలు

పూర్ణాంకాల ధర్మాలు మనకు సంఖ్యలను ఇంకా బాగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. పూర్ణాంకాల ధర్మాలను కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం.

ఏవైనా రెండు పూర్ణాంకాలను తీసుకొని వాటిని కలుపుదాం. మరి వాటి మొత్తం పూర్ణాంకమవుతుందా? మరి కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని సరిచూడండి.

మీరు చేసే కూడికలు ఇలా ఉండాలి :

2 + 3 = 5, ఒక పూర్ణాంకం

0 + 7 = 7, ఒక పూర్ణాంకం

20 + 51 = 71, ఒక పూర్ణాంకం

0 + 1 = 1, ఒక పూర్ణాంకం

0 + 0 = 0, ఒక పూర్ణాంకం

ఇక్కడ, ఏ రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తమైనా ఎల్లప్పుడు ఒక పూర్ణాంకమని గమనిస్తాం.

© SCERT not to be republished

ఏదైనా ఒక జత పూర్ణాంకాల మొత్తం ఒక పూర్ణాంకం కాని జత ఉంటుందా? అటువంటి పూర్ణాంకాల జతలు అసలు ఉండవు అని మనము గమనిస్తాం. కాబట్టి పూర్ణాంకాల సమితి సంకలనంతో సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుంది. దీనినే పూర్ణాంకాల సంకలనంలో సంవృత ధర్మం అంటారు.

మరి పూర్ణాంకాల సమితి గుణకారంలో కూడా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందేమో సరిచూద్దామా? పూర్ణాంకాల గుణకారాలకు ఐదు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

మీరు చేసిన గుణకారాలు ఇలా ఉంటాయి.

5	×	6	=	30, ఒక పూర్ణ సంఖ్య
11	×	0	=	0, ఒక పూర్ణ సంఖ్య
16	×	5	=	80, ఒక పూర్ణ సంఖ్య
10	×	100	=	1000, ఒక పూర్ణ సంఖ్య
7	×	16	=	112, ఒక పూర్ణ సంఖ్య

ఏ రెండు పూర్ణాంకాల లబ్ధమైనా ఒక పూర్ణాంకమేనని తెలుస్తుంది. కాబట్టి, పూర్ణాంకాల సమితి గుణకారంలో సంవృత ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

కాబట్టి పూర్ణాంకాల సమితి సంకలనం మరియు గుణాకారాలలో సంవృతం ధర్మాన్ని పాటిస్తుందని చెప్పవచ్చు.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.

1. పూర్ణాంకాల సమితి వ్యవకలనంలో సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందా? ఉదాహరణలను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

7	-	5	=	2 ఒక పూర్ణాంకం
5	-	7	=	– 2 ఒక పూర్ణాంకం కాదు
.....	-	.....	=	.....
.....	-	.....	=	.....

వీలైనన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని సరి చూడండి.

2. పూర్ణాంకాల సమితి భాగాహారంలో సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుందా? ఈ పట్టికను పరిశీలించండి.

6	÷	3	=	2, ఒక పూర్ణాంకం
5	÷	2	=	$\frac{5}{2}$ ఒక పూర్ణాంకం కాదు
.....	÷	.....	=	.....
.....	÷	.....	=	.....

మరి కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకొని నిర్ధారించండి.

సున్న తో భాగహారం

6÷2 ను కనుగొందాం.

6 ను 2 తో భాగించడం అనగా 6 నుండి 2 ను మళ్లీ, మళ్లీ తీసివేయడం.

©SCERT not to be republished

6 - 2 = 4   1వ సారి

4 - 2 = 2   2వ సారి

2- 2 = 0   3వ సారి

కావున, 6÷2 =3

3÷0 పరిశీలిద్దాం.

ఇక్కడ మనం 0ను మళ్ళీ, మళ్ళీ 3లో నుంచి తీసివేయాలి.

3 - 0 = 3

3 - 0 = 3

3 - 0 = 3

ఈ విధంగా చేస్తూపోతే ఎప్పటికీ అంతం ఉండదు. కావున 3÷0కి సరైన ఖచ్చితమైన ఫలితాన్ని మనం పొందలేము. సున్నచే భాగహారం నిర్వచింపబడదు.

ఇవి చేయండి.

1. 12÷3 మరియు 42÷7లను కనుగొనండి.
2. 6÷0 మరియు 9÷0 సమానాలు అవుతాయా?

పూర్ణాంకాల్లో స్థిత్యంతర (వినిమయ) ధర్మం

క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

2 + 3 = 5 ; 3 + 2 = 5

పై సందర్భాలలో 2+3 మరియు 3+2 సమానం.

రెండింటిలో ఒకే విలువ 5 వచ్చింది. అలాగే ఇది చూడండి.

7 + 8 = 15 ; 8 + 7 = 15

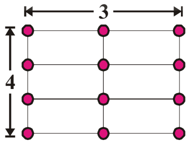
7+8 మరియు 8+7 సమానం. ఇక్కడ కూడా ఫలితం 15 వచ్చింది.

ఇక్కడ, ఒక జత పూర్ణాంకాలను కూడే క్రమం మార్చినప్పటికీ, వాటి మొత్తం ఒకే విధంగా ఉన్నది.

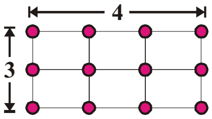
దీనిని మరికొన్ని ఉదాహరణలతో సరిచూడండి. 10+11, 25+10.

అనగా, రెండు పూర్ణాంకాలను ఏ క్రమంలోనైనా కూడ వచ్చును. కాబట్టి, పూర్ణా:కాల సమితి సంకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని కల్గి ఉంటుంది. దీనినే పూర్ణాంకాల సంకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మం అంటారు.

క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



4×3=12



3×4=12

ఒక జత పూర్ణాంకాలను క్రమం మార్చి గుణించినా ఒకే లబ్ధం వస్తుందని గమనించాం కదా.

దీనినే 6×5, 7×9 మొ॥న ఉదాహరణలతో చేసి చూడండి.

కాబట్టి, పూర్ణాంకాల సమితి సంకలన, గుణకారాలలో స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని కల్గి ఉంటుంది.

©SCERT not to be republished

ప్రయత్నించండి.

1. పూర్ణాంకాలలో వ్యవకలనం స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తుందా? కొన్ని ఉదాహరణలతో సరి చూడండి.
2. పూర్ణాంకాలలో భాగహారం స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తుందా? కొన్ని ఉదాహరణలతో సరి చూడండి.

సంకలన, గుణకారాలలో సహచర ధర్మం

క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

i. $(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12$

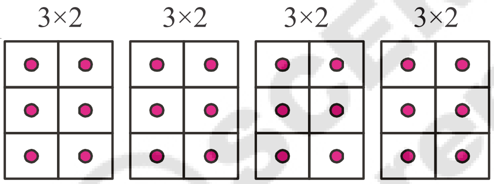
ii. $3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$

కావున $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$

మనం (i) లో మొదట 3, 4లను కూడి, మొత్తానికి 5ని కలిపాం. (ii) లో మొదట 4,5లను కూడి, మొత్తానికి 3ని కలిపాం. కాని, రెండింటి మొత్తం ఒకే విధంగా సమానంగా వచ్చింది.

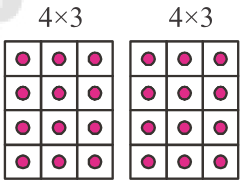
దీనినే పూర్ణాంకాల సంకలనంలో సహచర ధర్మం అని అంటాం. ఇలాంటివి 10 ఉదాహరణలను రాసుకొని పై ధర్మాన్ని సరిచూపండి. ఫలితాలు సమానంగా ఉన్నట్లు గమనించారా?

క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.



$(3\times2) \times 4 = (3\times2)$ నాలుగు రెట్లు

పటం (a)



$2 \times (4\times3) = (4\times3)$ కు రెట్టింపు

పటం (b)

© SCERT not to be republished

పటం (a) మరియు పటం (b)లలోని చుక్కల గడులను లెక్కించండి. ఎంత వచ్చింది. రెండు పటాలలో గడుల సంఖ్య సమానం. పటం (a) లో ప్రతి గదిలో 3×2 గడులున్నాయి. కాబట్టి మొత్తం గడుల సంఖ్య $(3\times2)\times4 = 24$.

పటం (b) లో ప్రతి గదిలో 3×4 గడులున్నాయి. కావున మొత్తం గడుల సంఖ్య $2\times(4\times3) = 24$.

కావున, $(3\times2)\times4 = 2\times(4\times3)$

గుణకారంలో కూడా ఫలితం ఒకటే అనే తెలుసుకొన్నాం.

దీనినే పూర్ణాంకాల గుణకారంలో సహచరధర్మం అని అంటాం.

కావున పూర్ణాంకాలు, సంకలనం, గుణకారం సహచరధర్మాన్ని పాటిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

సరి చూడండి.

i. $(5 \times 6) \times 2 = 5 \times (6 \times 2)$

ii. $(3 \times 7) \times 5 = 3 \times (7 \times 5)$

ఉదాహరణ-1 196 + 57 + 4 కనుగొనండి.

సాధన : 196 + (57 + 4)

= 196 + (4 + 57) [స్థిత్యంతర ధర్మం]

= (196 + 4) + 57 [సహచర ధర్మం]

= 200 + 57 = 257

ఇక్కడ, స్థిత్యంతర, సహచర ధర్మాలను కలిపి సంకలనంలో ఉపయోగించాము.

మరి, ఇలా స్థిత్యంతర, సహచర ధర్మాలను ఉపయోగించడం వల్ల సమస్యల సాధన సులభమవుతుందని మీరు భావిస్తున్నారా?

ఉదాహరణ-2 $5 \times 9 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ని కనుగొనండి.

సాధన : $5 \times 9 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$= 5 \times 2 \times 9 \times 2 \times 5 \times 3$ [స్థిత్యంతర ధర్మం]

$= (5 \times 2) \times 9 \times (2 \times 5) \times 3$ [సహచర ధర్మం]

$= 10 \times 9 \times 10 \times 3$

$= 90 \times 30 = 2700$

ఇక్కడ స్థిత్యంతర సహచర ధర్మాలను కలిపి గుణకారంలో ఉపయోగించాం. మరి, ఇలా స్థిత్యంతర, సహచర ధర్మాలను ఉపయోగించడం వల్ల సమస్య సాధన సులభమవుతుందని మీరు భావిస్తున్నారా?

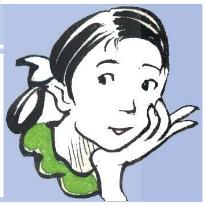
ఇవి చేయండి

స్థిత్యంతర, సహచరధర్మాలనుపయోగించి క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించండి.

i) 319+69+81 ii) 431+37+69+63

iii) 2×(71×5) iv) 50×17×2

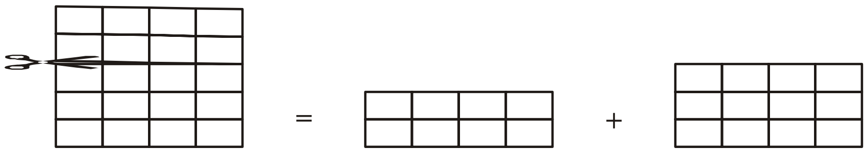
ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి.



(8÷2)÷4 = 8÷(2÷4) అవుతుందా?

భాగహారానికి సహచర న్యాయం వర్తిసుందా? వ్యవకలనానికి సహచరధర్మం వర్తిస్తుందేమో సరిచూడండి.

క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.



5 × 4 **2 × 4** **3 × 4**

గళ్ళ కాగితాన్ని కత్తిరించండి. ఇక్కడ, 5×4 గళ్లకాగితాన్ని 2×4 మరియు 3×4 అనే రెండు ముక్కలుగా విభజించడం జరిగింది.

© SCERT not to be republished

కావున 5 × 4 = (2 × 4) + (3 × 4)

= 8 + 12 = 20 మరియు 5 = 2+3 కావున

∴ 5 × 4 = (2+3) × 4 అని చెప్పగలం.

అదే విధంగా, (5 + 6) × 7 = (5 × 7) + (6 × 7)

11 × 7 = 35 + 42 = 77

రెండు సమానమని మనం చూడవచ్చు. దీనినే విభాగ న్యాయము అంటారు.

విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి కనుగొనండి. 2 × (5+6) ; 5 × (7+8), 19×7 + 19×3

ఉదాహరణ 3 :

12×75 విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి కనుగొనండి.

సాధన : 12 × 75 = 12 × (70 + 5) = 12 × (80 - 5)

= (12 × 70) + (12 × 5) (లేదా) = (12 × 80) - (12 × 5)

= 840 + 60 = 900 = 960 - 60 = 900

ఇవి చేయండి.

25 × 78; 17 × 26; 49 × 68 + 32 × 49 విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి కనుగొనండి.

తత్సమాంశం (సంకలనం, గుణకారం)

సహజ సంఖ్యల సమితిలో '0' లేదు, కాని పూర్ణాంకాల సమితిలో '0' ఒక ప్రత్యేకమైన సంఖ్య. సంకలనంలో '0'కు ఒక ప్రత్యేకత ఉంది. 7,5లను కూడితే మనకు 12 అనే సంఖ్య వస్తుంది. రెండు పూర్ణాంకాలతో కూడిన ఫలితం కూడా పూర్ణాంకం అవుతుంది. అన్ని సందర్భాలలో ఇది సమ్మతమా? చూద్దాం.

2	+	0	=	2
9	+	0	=	9
0	+	11	=	11
.....	+	25	=	25

ఒక పూర్ణాంకాన్ని సున్నాను కలిపితే, అదే పూర్ణాంకం వస్తుంది.

సున్నాను పూర్ణాంకాల సంకలనానికి తత్సమాంశం లేదా సంకలన తత్సమాంశం అంటారు.

గుణకారంలో 1 యొక్క ప్రత్యేకతను క్రింది అమరికలో పరిశీలించండి.

కింది పట్టికను పరిశీలించండి.

1	×	9	=	9
6	×	5	=	30
6	×	4	=	24
5	×	1	=	5
11	×	1	=	11
2	×	3	=	6

పై పట్టికలో ఒక పూర్ణాంకాన్ని 1 చే గుణిస్తే వచ్చే ఫలితం అదే పూర్ణాంకం అవుతుందని గమనించవచ్చు. 1ని పూర్ణాంకాల గుణకారానికి తత్సమాంశం అంటారు. దీనినే గుణకార తత్సమాంశం అని కూడా అంటారు.

©SCERT not to be republished

అభ్యాసం - 2.2

1. ఇచ్చిన సమాచార ఆధారంగా ఫలితాలను గణించకుండా చెప్పండి.

i. 28 × 19 = 532 అయితే 19 × 28 =

ii. 1 × 47 = 47 అయితే 47 × 1 =

iii. a × b = c అయితే b × a =

iv. 58 + 42 = 100 అయితే 42 + 58 =

v. 85 + 0 = 85 అయితే 0 + 85 =

vi. a + b = d అయితే b + a =

2. తగిన విధంగా తిరిగి మార్చుకొని మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

i. 238 + 695 + 162 ii. 154 + 197 + 46 + 203

3. తగిన విధంగా తిరిగి మార్చుకొని లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

i. 25 × 1963 × 4 ii. 20 × 255 × 50 × 6

4. కింది వాటి విలువను కనుగొనండి.

i. 368 × 12 + 18 × 368 ii. 79 × 4319 + 4319 × 11

5. తగిన ధర్మాలనుపయోగించి కింది వాటి లబ్ధాలను కనుగొనండి.

i. 205 × 1989 ii. 1991 × 1005

6. ఒక పాల వ్యాపారి ఉదయం 56 లీటర్ల పాలను, సాయంత్రం 44 లీటర్ల పాలను ఒక వసతి గృహానికి సరఫరా చేస్తాడు. ఒక లీటరు పాల ధర ₹. 30 అయితే, అతనికి ఒక రోజుకు ఎంత డబ్బు వస్తుంది?

7. చందన 12 నోటు పుస్తకాలను, వేణు 10 నోటు పుస్తకాలను కొన్నారు. ఒక నోటు పుస్తకం ధర ₹. 15 అయితే, దుకాణదారునికి వారు ఎంత డబ్బు ఇవ్వాలి?

8. జత పర్చుము.

i. 3+1991+7 = 3+7+1991 [ ] a. సంకలన తత్సమాంశము

ii. 2×68×50 = 2×50×68 [ ] b. గుణకార తత్సమాంశము

iii. 1 [ ] c. సంకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మం

iv. 0 [ ] d. సంకలనంపై గుణకారం విభాగ న్యాయము

v. 879×(100+30) = 879×100+879×30 [ ] e. గుణకారంలో స్థిత్యంతర ధర్మం

2.4 పూర్ణాంకాలలో అమరికలు

చుక్కలతో సంఖ్యలను ప్రాథమిక జ్యామితీయ ఆకారాలుగా అమర్చడానికి ప్రయత్నిద్దాం. చుక్కలను గళ్ళ కాగితం పై రెండు అక్షాలపై సమానదూరంలో ఉంచాలి. (i) రేఖ (ii) దీర్ఘ చతురస్రం (iii) చతురస్రం (iv) త్రిభుజం అనే ఆకారాలను తీసుకొందాం. ప్రతి సంఖ్యను ఈ ఆకారాలలో ఏదో ఒక ఆకారంగా అమర్చుదాం. (ఇవి కాకుండా, వేరే ఆకారాన్ని తీసుకోరాదు.)

© SCERT not to be republished

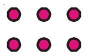
పూర్ణాంకాలను ప్రాథమిక జ్యామితీయ ఆకారాలుగా చుక్కలతో అమర్చవచ్చు. క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

- ప్రతి సంఖ్యను చుక్కల రేఖగా చూపవచ్చు.

  2 ను ఇలా చూపవచ్చు

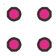
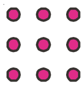
  3 ను ఇలా చూపవచ్చు మొ॥నవి.

- కొన్ని సంఖ్యలను దీర్ఘచతురస్రాలుగా చూపవచ్చు.

  6 సంఖ్యను ఇలా చూపవచ్చు. 

  ఈ దీర్ఘ చతురస్రంలో రెండు అడ్డ వరుసలు, మూడు నిలువు వరుసలు ఉన్నాయని గమనించండి.

- 4 లేదా 9 వంటి కొన్ని చతురస్రాలుగా అమర్చవచ్చు.

4  9 

ఈ విధంగా, ఇంకా ఏ సంఖ్యలను చతురస్రాలుగా అమర్చవచ్చు? ఇక్కడ ఒక అమరికను గమనించవచ్చు.

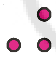
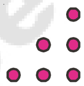
$4 = 2 \times 2$ ఇది ఒక వర్గ సంఖ్య.

$9 = 3 \times 3$ ఇది కూడా ఒక వర్గ సంఖ్య.

దీని తర్వాత చతురస్రంగా అమర్చ గలిగే సంఖ్య ఏది?

మనం 16 అని సులభంగా చెప్పవచ్చు. 16 = 4×4. ఇది కూడా ఒక వర్గ సంఖ్య. తర్వాతి 3 సంఖ్యలు చతురస్రంగా అమర్చగలిగే వాటికి సూచించండి. చతురస్రాలుగా కానటువంటి దీర్ఘ చతురస్రాలుగా అమర్చగలిగే 5 సంఖ్యలను సూచించండి.

- కొన్ని సంఖ్యలను త్రిభుజాలుగా అమర్చవచ్చు.

3  6 

త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు సమానంగా ఉండాలని గమనించండి. క్రింది నుండి ప్రతి వరుసలో చుక్కల సంఖ్య 4,3,2,1గా ఉండాలి. ఎల్లప్పుడూ, పై వరుసలో మాత్రం ఒకటి ఉంటుంది. (ఒకే శీర్షం ఉంది కాబట్టి)

తర్వాత అమర్చగలిగే త్రిభుజం ఏది? ఆ తర్వాత ఏది? చెప్పండి.

ఇక్కడ ఏదైనా అమరికను గమనించారా? ప్రతి వరుసలోని చుక్కల సంఖ్యను పరిశీలించండి, అమరిక గురించి ఆలోచించండి.

ఇపుడు, క్రింది పట్టిను పూరించండి.

సంఖ్య	రేఖ	దీర్ఘ చతురస్రం	చతురస్రం	త్రిభుజం
2	అవును	కాదు	కాదు	కాదు
3	అవును	కాదు	కాదు	అవును
4	అవును	అవును	అవును	కాదు
5				
.....				
25				

©SCERT not to be republished

ప్రయత్నించండి.

1. ఏ సంఖ్యలను రేఖగా మాత్రమే చూపవచ్చు?
2. ఏఏ సంఖ్యలను దీర్ఘ చతురస్రాలుగా చూపవచ్చు?
3. ఏఏ సంఖ్యలను చతురస్రాలుగా చూపవచ్చు?
4. ఏఏ సంఖ్యలను త్రిభుజాలుగా చూపవచ్చు? ఉదా : 3, 6, ...

సంఖ్యల అమరిక

అమరికలు, సమస్యల పరిష్కారానికి సులభతర మార్గాలను సూచిస్తాయి. క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

1. $296 + 9 = 296 + 10 - 1 = 306 - 1 = 305$
2. $296 - 9 = 296 - 10 + 1 = 286 + 1 = 287$
3. $296 + 99 = 296 + 100 - 1 = 396 - 1 = 395$
4. $296 - 99 = 296 - 100 + 1 = 196 + 1 = 197$

మరొక అమరికను చూద్దాం.

1. $65 \times 99 = 65\ (100 - 1) = 6500 - 65 = 6435$
2. $65 \times 999 = 65\ (1000 - 1) = 65000 - 65 = 64935$
3. $65 \times 9999 = 65\ (10000 - 1) = 650000 - 65 = 649935$
4. $65 \times 99999 = 65\ (100000 - 1) = 6500000 - 65 = 6499935$ మొ।। నవి.

ఇక్కడ, ఒక సంఖ్యను 9, 99, 999, ... రూపంలో నున్న సంఖ్యతో సులభ విధానంలో గుణించడాన్ని గమనించవచ్చు. ఇలాంటి సులభ మార్గాలను మనోగణిత సమస్యలను సాధించే సామర్థ్యాన్ని పెంచుతాయి.

కింది అమరికను పరిశీలించండి. ఇది ఒక సంఖ్యను 5, 15, 25 ... లతో గుణించే మార్గాన్ని సూచిస్తుంది. (దీనిని ఇంకా ముందుకు విస్తరించడానికి ఆలోచించండి).

a. $46 \times 5 = 46 \times \frac{10}{2} = \frac{460}{2} = 230 = 230 \times 1$

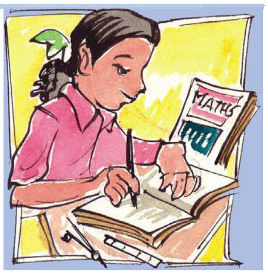
b. $46 \times 15 = 46 \times (10 + 5)$

$= 46 \times 10 + 46 \times 5 = 460 + 230 = 690 = 230 \times 3$

c. $46 \times 25 = 46 \times (20 + 5)$

$= 46 \times 20 + 46 \times 5 = 920 + 230 = 1150 = 230 \times 5$ .....

అభ్యాసము - 2.3



1. కింది అమరికను పరిశీలించండి.

$1 \times 8 + 1 = 9$

$12 \times 8 + 2 = 98$

$123 \times 8 + 3 = 987$

$1234 \times 8 + 4 = 9876$

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

తర్వాత వచ్చే నాలుగు సోపానాలు రాయండి. ఈ అమరిక తర్వాత సంఖ్యలకు ఎలా వస్తుందో చెప్పగలరా?

©SCERT not to be republished

2. క్రింది అమరికను పరిశీలించండి.

$91 \times 11 \times 1 = 1001$

$91 \times 11 \times 2 = 2002$

$91 \times 11 \times 3 = 3003$

తర్వాత వచ్చే ఏడు సోపానాలు రాయండి. ఫలితం సరియైనదేనేమో సరి చూడండి.

$143 \times 7 \times 1$, $143 \times 7 \times 2$ ... వంటి అమరికల ఫలితాలకు ప్రయత్నించండి.

3. 13680347, 35702369, 25692359 సంఖ్యలను 9 తో గుణించి, ఎటువంటి అమరిక వస్తుందో పరిశీలించండి.

మనం నేర్చుకున్నది.

1. లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలైన 1, 2, 3 ... సంఖ్యలను సహజ సంఖ్యలు అంటారు.
2. ప్రతి సహజ సంఖ్యకు ఉత్తర సంఖ్య కలదు. 1 తప్ప, సహజ సంఖ్యలన్నిటికీ పూర్వ సంఖ్య కలదు.
3. సహజ సంఖ్యల సమితికి సున్నాను చేర్చితే, పూర్ణాంకాల సమితి $W = \{0, 1, 2, ...\}$
4. ప్రతి పూర్ణాంకానికి ఉత్తర సంఖ్య కలదు. సున్నా తప్ప, పూర్ణాంకాలన్నిటికీ పూర్వ సంఖ్య కలదు.
5. సహజ సంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలవుతాయి కాని పూర్ణాంకాలలో సున్న తప్ప మిగిలినవన్నీ సహజ సంఖ్యలే.
6. సంఖ్యారేఖపై పూర్ణాంకాలను సూచించవచ్చు. సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకార ప్రక్రియలను సంఖ్యారేఖపై సులభంగా చేయవచ్చు.
7. సంఖ్యారేఖపై సంకలనం చేయడానికి కుడి వైపుకు కదిలితే, వ్యవకలనం చేయడానికి ఎడమవైపుకు కదులుతాం. గుణకారం చేయడానికి సున్నా నుండి సమాన దూరాలలో కుడివైపుకు కదులుతాం.
8. పూర్ణాంకాలు సంకలన, గుణకారాలలో సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. కాని వ్యవలకన, భాగహారాలలో సంవృత ధర్మాన్ని పాటించవు.
9. సున్నాతో భాగహారం నిర్వచింపబడదు.
10. పూర్ణాంకాలలో సంకలన తత్సమాంశం సున్న మరియు గుణకార తత్సమాంశం ఒకటి.
11. పూర్ణాంకాలు సంకలన, గుణకారాలలో స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
12. పూర్ణాంకాలు సంకలన, గుణకారాలలో సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
13. పూర్ణాంకాలలో సంకలనం మీద గుణకారం విభాగ న్యాయాన్ని కల్గి ఉంటుంది.
14. పూర్ణాంకాల స్థిత్యంతర, సహచర, విభాగ న్యాయాలు సంఖ్యలను సులభంగా గణించడానికి ఉపయోగపడతాయి. మనకు తెలియకుండానే గణనలో వాటిని ఉపయోగిస్తాం.
15. సంఖ్యల అమరికలు ఆసక్తికరంగా ఉండడమే కాకుండా, రాత సమస్యలకు ఉపయోగపడ్తాయి. అలాగే సంఖ్యా ధర్మాలను ఇంకా బాగా అర్థం చేసుకోవడానికి దోహదపడ్తాయి.

© SCERT not to be republished