# महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य
# (HCF and LCM)

## 1. *महत्तम समापवर्तक* (HCF *या* HCD *या* GCM)

***गुणनखंड* (Factor):** एक संख्या को दूसरे का गुणनखंड कहा जाता है यदि यह दूसरे को पूरी तरह विभाजित कर दे। इस प्रकार 6 एवं 7, 42 के गुणनखंड हैं।

***समापवर्तक* (Common Factor)*:*** वह संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं को पूर्णतया विभाजित कर दे, उन संख्याओं का समापवर्तक कहलाती है। इस प्रकार, संख्याओं 9, 18, 21 एवं 33 का एक समापवर्तक 3 है।

***महत्तम समापवर्तक* (Highest Common Factor)*:*** दो या उससे अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह महत्तम (सबसे बड़ी) संख्या है, जो सभी प्रदत्त संख्याओं को पूरी तरह विभाजित कर दे। इस प्रकार 18 एवं 24 का म.स. (HCF) है 6, क्योंकि 6 से बड़ी ऐसी कोई संख्या नहीं है, जिससे 18 एवं 24 दोनों एक साथ विभाजित हो जाएँ।

***नोट:*** महत्तम समापवर्तक (HCF) के लिए प्राय: महत्तम सम-भाजक (Highest Common Divisior) एवं उच्चतम सम-माप (Greatest Common Measure) पदों का भी इस्तेमाल किया जाता है।

### *दो या दो अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक*

***प्रथम विधि: रूढ़ गुणनखंडों की सहायता से***

***नियम:*** दी हुई संख्याओं के रुढ़ गुणनखंड (Prime Factor) निकाल लेते हैं। फिर उन गुणनखंडों का गुणनफल ज्ञात करते हैं जो संख्याओं में सम्मिलित हैं। यह उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल ही संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।

***उदा. 1:*** 42 एवं 70 का महत्तम समापवर्तक निकालें।

***हल:*** $42 = \underline{2} \times 3 \times \underline{7}$

$70 = \underline{2} \times 5 \times \underline{7}$

$\therefore$ म.स. $= 2 \times 7 = 14$

***उदा. 2:*** 1365, 1560 एवं 1755 का महत्तम समापवर्तक निकालें।

***हल:*** $1365 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7 \times \underline{13}$

$1560 = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{13}$

$1755 = 3 \times 3 \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{13}$

$\therefore$ म.स. $= 3 \times 5 \times 13 = 195$

***नोट: 1.*** महत्तम समापवर्तक निकालने के लिए यह जरूरी नहीं है कि प्रदत्त सभी संख्याओं को उनके रूढ़ गुणनखंडों में तोड़ा जाए। किसी एक संख्या के रूढ़ गुणनखंडों को निकाल लीजिए। फिर इनमें से उन रूढ़ गुणनखडों का गुणनफल, जो कि शेष संख्याओं को पूरी तरह विभाजित करता है, ही अभीष्ट महत्तम समापवर्तक होता है।

उदा.-1 में 42 के 3 रूढ़ गुणनखंड हैं: $2 \times 3 \times 7$। इनमें से 2 एवं 7, 70 को पूरी तरह विभाजित कर देते हैं। इसलिए अभीष्ट महत्तम समापवर्तक है: $2 \times 7 = 14$

उदा.-2 में 1365 के रूढ़ गुणनखंड हैं $3 \times 5 \times 7 \times 13$, इनमें से केवल तीन गुणनखंड 3, 5 एवं 13 ही शेष दोनों संख्याओं 1560 एवं 1755 को पूरी तरह विभाजित करते हैं। इसलिए अभीष्ट म.स. (HCF) $= 3 \times 5 \times 13 = 195$

***2:*** स्मरणीय है कि यदि संख्याओं को उनके म. स. से भाग दिया जाए तो परस्पर अभाज्य (prime) संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

उदा.-1 में $42 \div 14 = 3$ एवं $70 \div 14 = 5$

3 एवं 5 आपस में रूढ़ हैं, क्योंकि 3 से 5 पूरी तरह विभाज्य नहीं है।

इसी तरह, उदा.-2 में $1365 \div 195 = 7$, $1560 \div 195 = 8$ एवं $1755 \div 195 = 9$। 7, 8, 9 आपस में रूढ़ हैं क्योंकि वे एक दूसरे को विभाजित नहीं कर पाते।

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि उदा.-1 के संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$42 = 14 \times 3$ एवं $70 = 14 \times 5$

इस प्रकार यदि संख्याएँ x, y हों और उनका म. स. m हो तो उन संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$x = ma, y = mb$; जहाँ कि a, b परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं।

**3.** यदि संख्याओं का म. स. 1 हो तो वे संख्याएँ परस्पर अभाज्य होंगी।

**4.** वह संख्या जो दी हुई दो संख्याओं का समापवर्तक है उन संख्याओं के योग तथा अंतर अथवा उनके किसी अपवर्त्य (multiple) के योग तथा अंतर का भी अपवर्तक (factor) होती है।

***व्याख्या:*** यदि m, x तथा y का समापवर्तक है तो $x = ma$ तथा $y = mb$, अत: $x - y = m(a - b)$ तथा $x + y = m(a + b)$ अथवा $px + qy = m(pa + qb)$ तथा $px - py = m(pa - qb)$। स्पष्ट है कि m, $x - y$, $x + y$, $px + qy$ तथा $px - qy$ का अपवर्तक है।

उदाहरण के लिए, 9 एवं 15 का समापवर्तक 3 है। अत: 3, $(9 + 15)$ तथा $(15 - 9)$का अथवा $(9 \times 3 + 15 \times 4)$ तथा $(15 \times 4 - 9 \times 3)$ का अपवर्तक है।

**5.** उपर्युक्त से हम अनुमान लगा सकते हैं कि संख्याओं का म. स. वही होगा जो उनके अंतर का म. स. होगा।

***व्याख्या:***

यदि x, y, z का म. स. m है तो $x = ma, y = mb, z = mc$ जहाँ कि a, b, c उपयुक्त संख्याएँ हैं। अत: $x - y = m(a - b), y - z = m(b - c), z - x = m(c - a)$, अब यदि $(a - b), (b - c)$ एवं $(c - a)$ परस्पर अभाज्य हों तो $(x - y), (y - z), (z - x)$ का म. स. भी m होगा।

परन्तु यदि $(a - b), (b - c), (c - a)$ परस्पर अभाज्य नहीं हैं तो $(x - y), (y - z), (z - x)$ का म. स. $m'$, x, y, z के म. स. m का अपवर्त्य (multiple) होगा। अर्थात् $m' = pm$। इस दशा में p का मान ज्ञात करके m का मान प्राप्त किया जा सकता है। हलाँकि ऐसी स्थिति, अधिकांश प्रश्नों में नहीं आएगी।

उदाहरण कि लिए,

96, 120 एवं 180 का म. स. 12 है। संख्याओं का अंतर 24, 60 एवं 84 है। इनका म. स. भी 12 है, क्योंकि $24 = 12 \times 2, 60 = 12 \times 5, 84 = 12 \times 7$ में 2, 5, 7 परस्पर अभाज्य हैं।

किन्तु यदि हम 15, 25 एवं 35 का म. स. लें तो वह 5 होगा। संख्याओं का अंतर 10, 10 एवं 20 हैं। इनका म. स. 10 होगा जो दी हुई संख्याओं के म. स. 5 के बराबर नहीं है, अपितु उसका दूना है ($10 = 2 \times 5$), क्योंकि $10 = 5 \times 2$, $10 = 5 \times 2$, $20 = 5 \times 4$ में 2, 2, 4 परस्पर अभाज्य नहीं हैं। इस दशा में, यदि 10 के गुणनखण्ड 2 एवं 5 का देखें तो 2 संख्याओं को विभाजित नहीं करता, किन्तु 5 पूर्णतया विभाजित करता है। अत: संख्याओं का म. स. 5 है।

***दूसरी विधि: भाग विधि***

***नियम:*** बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग दीजिए; फिर भाजक में शेष से भाग दीजिए; पुन: शेष से पिछले शेष में भाग दीजिए और ऐसा तब तक जारी रखिए, जब तक कि कोई भी शेष न बचे। अंतिम भाजक ही अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (म. स. या HCF) होगा।

***उदा. 1:***

```
42)70(1
   42
   28)42(1
      28
      14)28(2
         28
          0
```

***नोट:*** म.स. निकालने का उपर्युक्त नियम निम्नलिखित दो सिद्धांतों पर आधारित है।

i) किसी संख्या को विभाजित करने वाली संख्या उस संख्या के अपवर्त्य को भी विभाजित करती है। उदाहरण के लिए 6, 18 को विभाजित करता है, इसलिए 6, 18 के किसी भी अपवर्त्य को विभाजित करेगा।

ii) कोई संख्या यदि दी हुई दो संख्याओं को विभाजित करती है तो वह उन संख्याओं के योगफल एवं अंतर के साथ-साथ उनके योगफल एवं अंतर के अपवर्त्यों (multiple) को भी विभाजित करेगी।

इस प्रकार 25 एवं 15 का समापवर्तक 5, $(25 + 15)$ एवं $(25 - 15)$ का भी समापवर्तक है।

इसी तरह 5, $(25 \times a + 15 \times b)$ एवं $(25 \times a - 15 \times b)$ का भी समापवर्तक है। (यहाँ a एवं b पूर्णांक हैं।)

इन सिद्धांतों के आधार पर,

42 एवं 70 का म.स. = 28 एवं 42 का म.स. [$\because$ $28 = 70 - 42$]

= 14 एवं 28 का म.स. [$14 = 42 - 28$]

= 14 एवं 14 का म.स. [$14 = 28 - 14$]

$\therefore$ 42 एवं 28 का म.स. = 14

13281 एवं 15844 का म.स. = 2563 एवं 13281 का म.स. [$2563 = 15844 - 13281$]

= 466 एवं 2563 का म.स. [$466 = 13281 - 5 \times 2563$]

= 233 एवं 466 का म.स. [$233 = 2563 - 5 \times 466$]

= 233 एवं 233 का म.स.

$\therefore$ 13281 एवं 15844 का म.स. = 233

उपर्युक्त विधि बड़ा दिलचस्प है। लेकिन इसका इस्तेमाल करने से पूर्व इसे अच्छी तरह समझ लेना आवश्यक है।

## *दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक* (HCF) *निकालना*

***नियम:*** प्रदत्त संख्याओं में से किन्हीं दो का महत्तम समापवर्तक निकालें। फिर इस म.स. के साथ अगली संख्या का महत्तम समापवर्तक निकालें और यह प्रक्रिया तब तक जारी रखें जब तक कि सभी संख्याएँ निबट न जाएँ। आखिरी महत्तम समापवर्तक ही अभीष्ट म.स. होगा।

***उदा. 1:*** 1365, 1560 एवं 1755 का महत्तम समापवर्तक निकालें।

***हल:***

```
1365)1560(1
     1365
     ----
      195)1365(7
          1365
          ----
             0
```

∴ 1365 एवं 1560 का म.स. = 195

```
पुन: 195)1755(9
         1755
         ----
            0
```

∴ अभीष्ट म.स. = 195

***तीसरी विधि:***

महत्तम समापवर्तक निकालने की प्रक्रिया को निम्नलिखित विधि से सरल किया जा सकता है:

i) नियम का प्रयोग करने से पूर्व दोनों संख्याओं से उभयनिष्ठ गुणनखंडों को हटाया जा सकता है। पर इस तरह से प्राप्त म.स. में उभयनिष्ठ गुणनखंड (जिसे हटाया गया था) से गुणा करना न भूलें।

ii) यदि प्रदत्त संख्याओं में से किसी में भी ऐसा रूढ़ गुणनखंड है, जो दूसरे में मौजूद नहीं है तो उसे नजरंदाज किया जा सकता है।

iii) हल करने के दौरान, किसी चरण में भी यदि आप पाते हैं कि भाजक में कोई ऐसा गुणनखंड है, जो भाज्य में नहीं है, तो इसे नजरंदाज कर सकते हैं। क्योंकि कोई भी ऐसा गुणनखंड, जो केवल एक (भाजक/भाज्य) में मौजूद हो, किसी भी तरह म.स. को प्रभावित नहीं करता।

***उदा.*** 42237 एवं 75582 का म.स. निकालें।

***हल:*** $42237 = 9 \times 4693$

$75582 = 2 \times 9 \times 4199$

नियम (ii) के आधार पर 2 को नजरंदाज किया जा सकता है क्योंकि यह उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। पर '9' एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है इसलिए इसे सुरक्षित रखकर (नियम (i) से) 4199 एवं 4693 का म.स. निकालते हैं।

```
4199)4693(1
     4199
     ----
      494
```

494, 2 से विभाज्य है पर 4199, 2 से विभाज्य नहीं है इसलिए हम 494 को 2 से विभाजित

करते हैं एवं 247 तथा 4199 लेकर आगे बढ़ते हैं। नियम (iii) से।

```
247)4199(17
     247
    1729
    1729
       0
```

$\therefore$ 4199 एवं 247 का म.स. = 247

प्रदत्त संख्याओं का म.स. = $247 \times 9 = 2223$

***नोट:*** यदि दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 1 हो तो वे दोनों संख्याएँ आपस में रूढ़ (अविभाज्य) होंगी।

## *छोटी संख्याओं का म.स.* (HCF of smaller numbers)

यदि संख्याएँ बहुत बड़ी नहीं हों, तो अति शीघ्रता पूर्वक म.स. (HCF) निकालने के लिए हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए,

**(i)** 8, 20, 28 एवं 44 का म.स. ज्ञात करें।

***हल : चरण* I:** जैसा कि हम जानते हैं कि म.स. सभी संख्याओं का सबसे बड़ा गुणनखंड (highest factor) होता है, यह सबसे छोटी संख्या से बड़ा नहीं हो सकता है। अत:, सबसे छोटी संख्या 8 लेते हैं।

***चरण* II:** अन्य संख्याओं में 8 के द्वारा भाग दिया जाता है। चूँकि यह 20 को पूर्णतया विभाजित नहीं करता है, अत: 8 हमारा म.स. नहीं हो सकता है।

***चरण* III:** 8 का दूसरा सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् $(8 \div 2 =)$ 4 लेते हैं। अन्य संख्याओं की 4 द्वारा विभाज्यता की जाँच करते हैं। चूँकि यह अन्य सभी संख्याओं को विभाजित करता है, हमारा म.स. 4 है।

**(ii)** 21, 15 एवं 36 का म.स. ज्ञात करें।

***हल : चरण* I:** सबसे छोटी संख्या 15 लेते हैं। चूँकि यह अन्य संख्याओं को विभाजित नहीं करता है, अत: यह हमारा म.स. नहीं हो सकता है।

***चरण* II:** 15 का दूसरा सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् $(15 \div 3 =)$ 5 लेते हैं। चूँकि यह अन्य संख्याओं को विभाजित नहीं करता है, अत: यह भी हमारा म.स. नहीं हो सकता है।

***चरण* III:** अगला सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् $(15 \div 5 =)$ 3 लेते हैं। चूँकि यह अन्य संख्याओं को भी विभाजित करता है, अत: हमारा म.स. 3 है।

**(iii)** 72, 126 एवं 198 का म.स. ज्ञात करें।

***हल : चरण* I:** सबसे छोटी संख्या अर्थात् 72 लेते हैं। चूँकि यह अन्य किसी संख्या को विभाजित नहीं करता है, यह हमारा म.स. नहीं है।

**चरण II:** 72 का दूसरा सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (72 ÷ 2 =) 36 लेते हैं। इसे अस्वीकृत किया जाता है, क्योंकि यह अन्य संख्याओं को विभाजित नहीं करता है।

**चरण III:** अगला गुणनखंड अर्थात् (72 ÷ 3 = ) 24 लेते हैं। इसे भी अस्वीकृत कर दिया जाता है, क्योंकि यह 126 को विभाजित नहीं करता है।

**चरण IV:** अगला गुणनखंड अर्थात् (72 ÷ 4 = ) 18 लेते हैं। चूँकि यह अन्य सभी संख्याओं को विभाजित करता है, हमारा म.स. 18 है।

**(iv) 24, 60, 84 एवं 108 का म.स. ज्ञात करें।**

***हल:*** सबसे छोटी संख्या 24 को HCF के रूप में अस्वीकृत किया जाता है। 24 का अगला सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (24 ÷ 2 =) 12 अभीष्ट म.स. है क्योंकि यह अन्य सभी संख्याओं को विभाजित करता है।

## *दो या अधिक परिमाणों का म.स. निकालना*

सर्वप्रथम उन्हें एक इकाई में बदल लें।

***उदा.*** वह अधिकतम वजन बताएँ जो 1 कि.ग्रा. 235 ग्राम एवं 3 कि.ग्रा. 430 ग्राम में उभयनिष्ठ हो।

***हल:*** 1 कि.ग्रा. 235 ग्रा. = 1235 ग्राम

3 कि.ग्रा. 430 ग्रा. = 3030 ग्राम

अधिकतम उभयनिष्ठ वजन = 1235 एवं 3430 का महत्तम समापवर्तक = 5 ग्राम

## *दशमलव युक्त संख्याओं का म.स.*

***नियम:*** सर्वप्रथम (यदि जरूरी हो तो) प्रदत्त संख्याओं में दशमलव के बाद अंकों की संख्या बराबर बना लें। फिर दशमलव को नजरंदाज करके इन संख्याओं को ऐसे इस्तेमाल करें, जैसे कि ये पूर्णांक हों। फिर इनका म.स. निकालें। प्राप्त म.स. में यथास्थान (जैसा कि प्रदत्त संख्या में था) दशमलव लगा दें।

***उदा. 1:*** 16.5, 0.45 एवं 15 का म.स. निकालें।

***हल:*** प्रदत्त संख्याएँ 16.50, 0.45 एवं 15.00 के समतुल्य हैं।

***पहला चरण:*** 1650, 45 एवं 1500 का म.स. निकालें।

इनका म.स. = 15

***दूसरा चरण:*** अभीष्ट म.स. = 0.15

***उदा. 2:*** 1.7, 0.51 एवं 0.153 का म.स. निकालें।

***हल:*** प्रदत्त संख्याएँ 1.700, 0.510 एवं 0.153 के समतुल्य हैं।

***पहला चरण:*** 1700, 510 एवं 153 का म० स० निकालें।

इनका म.स. = 17

$\therefore$ ***दूसरा चरण:*** अभीष्ट म.स. = 0.017

## *दो भिन्नों का म.स.* (HCF)

***परिभाषा:*** दो या उससे अधिक भिन्नों का महत्तम समापवर्तक वह उच्चतम भिन्न है, जो दिए गए समस्त भिन्नों से पूर्णतया विभाज्य हो।

***नियम:*** सर्वप्रथम दिए गए भिन्नों को उनके न्यूनतम रूप में व्यक्त करें।

$$\text{फिर म.स.} = \frac{\text{अंशों का महत्तम समापवर्तक}}{\text{हरों का लघुत्तम समापवर्त्य}}$$

***नोट:*** भिन्नों (Fraction) का म.स. हमेशा एक भिन्न ही होता है, पर लघुत्तम समापवर्त्य के संदर्भ में यह पूर्णतया लागू नहीं होता।

***उदा. 1:*** $\frac{54}{9}, 3\frac{9}{17}$ एवं $\frac{36}{51}$ का महत्तम समापवर्तक निकालें।

***हल:*** यहाँ $\frac{54}{9} = \frac{6}{1}, 3\frac{9}{17} = \frac{60}{17}$ एवं $\frac{36}{51} = \frac{12}{17}$

$\therefore$ प्रदत्त भिन्न अपने न्यूनतम रूप में $\frac{6}{1}, \frac{60}{17}$ एवं $\frac{12}{17}$ हैं।

$$\therefore \text{म.स.} = \frac{\text{6, 60 एवं 12 का म.स.}}{\text{1, 17 एवं 17 का ल.स.}} = \frac{6}{17}$$

***नोट:*** दृष्टव्य है कि प्रदत्त सभी संख्याएँ $\frac{6}{17}$ से पूर्णतया विभाज्य हैं।

***उदा. 2:*** वह महत्तम लंबाई क्या है जो $3\frac{1}{2}$ मी. एवं $8\frac{3}{4}$ मी. में समान बार मौजूद हो।

***हल:*** $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ एवं $8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$

$\therefore$ अभीष्ट अधिकतम लंबाई $= \frac{7}{2}$ एवं $\frac{35}{4}$ का म.स.

$$= \frac{\text{7 एवं 35 का म.स.}}{\text{2 एवं 4 का ल.स.}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ मीटर}$$

## ***महत्तम समापवर्तक से संबद्ध विविध उदाहरण***

***उदा. 1:*** वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जिससे 2400 एवं 1810 में भाग देने पर शेष क्रमशः 6 एवं 4 बचते हों?

***हल:*** चूँकि भाग देने पर 6 एवं 4 शेष बचते हैं, इसलिए (2400 - 6) एवं (1810 - 4) उस संख्या से पूरी तरह विभाज्य होने चाहिए।

$\therefore$ अभीष्ट महत्तम संख्या = 2394 एवं 1806 का म.स. = 42

***उदा. 2:*** वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जिससे 38, 45 एवं 52 में भाग देने पर शेष क्रमशः 2, 3 एवं 4 बचते हों?

***हल:*** अभीष्ट अधिकतम संख्या = $(38-2), (45-3)$ एवं, $(52-4)$ का महत्तम समापवर्तक

= 36, 42 एवं 48 का म. स. = 6.

**उदा. 3:** वह महत्तम संख्या कौन-सी है जिससे 410, 751 एवं 1030 में भाग देने पर शेष (हर स्थिति में) 7 बचता हो?

**हल:** अभीष्ट अधिकतम संख्या = (470 – 7), (751 – 7) एवं (1030 – 7) का म.स. = 31

**उदा. 4:** उस संख्या का अधिकतम मान बताएँ, जिससे 76, 151 एवं 226 में भाग देने पर शेष समान आते हों। वह सर्वनिष्ठ शेष भी बताएँ।

**हल:** मान लें कि सर्वनिष्ठ शेष = k है।

तब प्रश्नानुसार, (76 – k), (151 – k) एवं (226 – k) अभीष्ट संख्या से पूर्णतया विभाज्य होंगे। हमें पता है कि यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य हों तो उन दो संख्याओं का अंतर भी उस खास संख्या से विभाज्य होगा। इसलिए {(151 – k) – (76 – k)}, {(226 – k) – (151 – k)} एवं {(226 – k) – (76 – k)} अर्थात् 75, 75 एवं 150 अभीष्ट संख्या से विभाज्य होंगी।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 75, 75 एवं 150 का म.स. = 75

एवं शेष = 76 ÷ 75 = 1

**उदा. 5:** जब 11284 एवं 7655 को तीन अंकों की किसी संख्या से विभाजित करते हैं, तो समान शेष प्राप्त होता है। तीन अंकों वाली वह संख्या बताएँ।

**हल:** अभीष्ट संख्या निश्चित रूप से (11284 – 7655) या 3629 का एक गुणनखंड होना चाहिए।

$3629 = 19 \times 191$

$\therefore$ 191 ही अभीष्ट संख्या है।

**उदा. 6:** दो संख्याओं का गुणनफल 7168 है एवं उनका महत्तम समापवर्तक 16 है तो संख्याएँ क्या हैं?

**हल:** अभीष्ट संख्याएँ निश्चित रूप से महत्तम समापवर्तक का अपवर्त्य होना चाहिए। मान लिया कि संख्याएँ 16a एवं 16b हैं, जहाँ a एवं b आपस में रूढ़ दो संख्याएँ हैं।

$\therefore$ $16a \times 16b = 7168$ या $ab = 28$

वे जोड़े, जिनका गुणनफल 28 होता है: (28, 1); (14, 2); एवं (7, 4)

14 एवं 2 आपस में रूढ़ नहीं हैं, इसलिए इन्हें छोड़ दीजिए। इसलिए अभीष्ट संख्याएँ हैं:

$(28 \times 16, 1 \times 16); (7 \times 16, 4 \times 16) \Rightarrow (448, 16)$ एवं $(112, 64)$

**उदा. 7:** वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 276 तथा 716 में भाग देने के पश्चात् हरेक स्थिति में समान शेष बचे।

**हल:** दो संख्याओं को उनके अंतर से भाग देने पर हरेक स्थिति में समान शेष बचता है। परंतु यदि उन दो संख्याओं का अंतर किसी एक संख्या से छोटा हो तो, अंतर के सबसे बड़े भाजक को लेते हैं जो दोनों संख्याओं से छोटा हो।

716 – 276 = 440 (जो 276 से बड़ा है।)

अत: अभीष्ट संख्या 440 का सबसे बड़ा भाजक, जो 276 से छोटा हो, होगा।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 220

## 2. लघुत्तम समापवर्त्य

***समापवर्त्य* (Common Multiple):** दो या उससे अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह

संख्या है, जो उन सभी संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य हो। उदाहरण के लिए 30, 2,3,5,6,10 एवं 15 का समापवर्त्य है।

***लघुत्तम समापवर्त्य* (LCM *या* Least Common Multiple):** दो या उससे अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह न्यूनतम संख्या है, जो उन सभी संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य हो।

इस प्रकार 15 समापवर्त्य है 3 एवं 5 का।
30 समापवर्त्य है 3 एवं 5 का।
45 एक समापवर्त्य है 3 एवं 5 का।
पर 3 एवं 5 का लघुत्तम समापवर्त्य है 15।

## *दो या उससे अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य निकालना*

### *पहली विधि: रूढ़ गुणनखंड विधि*

***नियम:*** प्रदत्त संख्याओं को उनके रूढ़ गुणनखंडों में विभाजित कर लें। इसके बाद इन गुणनखंडों मे सर्वनिष्ठ रूप से मौजूद रूढ़ संख्याओं के महत्तम घात का गुणनफल निकाल लें। यही गुणनफल लघुत्तम समापवर्त्य (LCM ल.स.) है।

***उदा. 1:*** 8, 12, 15 एवं 21 का ल.स. निकालें।

***हल:*** $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$12 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$
$15 = 3 \times 5$
$21 = 3 \times 7$

यहाँ संख्याओं में मौजूद रूढ़ गुणनखंड 2, 3, 5 एवं 7 हैं और इनका महत्तम घातांक क्रमश: $2^3, 3, 5$ एवं 7 हैं।

$\therefore$ अभीष्ट ल.स. $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$

***उदा. 2:*** 18, 24, 60 एवं 150 का ल.स. निकालें।

***हल:*** $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$

यहाँ संख्याओं में मौजूद रूढ़ गुणनखंड 2, 3, 5 हैं, जिनके महत्तम घातांक क्रमश: $2^3, 3^2$ एवं $5^2$ हैं।

$\therefore$ अभीष्ट ल.स. $= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$

***नोट:*** दो संख्याओं, जो परस्पर रूढ़ **(Prime)** हैं, का ल. स. उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

इस प्रकार 15 एवं 17 का ल. स. $= 15 \times 17 = 255$

***दूसरी विधि:*** बहुत सारी छोटी-छोटी संख्याओं का ल. स. निम्नलिखित विधि से प्राप्त किया जा सकता है :

प्रदत्त संख्याओं को कॉमा (,)के सहारे पृथक् करके एक पंक्ति में सजा दें। किसी भी ऐसी रूढ़ संख्या (2, 3, 5, 7 आदि) से इन्हें विभाजित करें, जिससे इनमें से कम-से-कम दो संख्याओं में भाग लग जाए। पहली पंक्ति के नीचे अविभाजित संख्या एवं विभाजित संख्याओं का भागफल लिख दें। यह प्रक्रिया तब तक दुहराते चलें, जब तक आपस में रूढ़ संख्याओं की पंक्ति न आ प्रकट हो। समस्त भाजकों एवं अंतिम पंक्ति में मौजूद संख्याओं का गुणनफल ही अभीष्ट ल.स. है।

***नोट:*** गणना में आसानी के ख्याल से किसी भी चरण में उस संख्याओं को छोड़ा जा सकता है, जो एक ही पंक्ति में मौजूद हों एवं एक दूसरे के गुणनखंड हों।

***उदा. 1:*** 12, 15, 90, 108, 135 एवं 150 का लघुत्तम समापवर्त्य निकालें।

***हल:***

| | | |
|---|---|---|
| 2 | ~~12~~, ~~15~~, 90, 108, 135, 150 | ....(1) |
| 3 | ~~45~~, 54, 135, 75 | ....(2) |
| 3 | 18, 45, 25 | ....(3) |
| 5 | 6, 15, 25 | ....(4) |
| | 6, ~~3~~, 5 | ....(5) |

∴ अभीष्ट ल.स. $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 6 \times 5 = 2700$

पहली पंक्ति में 12 एवं 15 को छोड़ दिया गया है क्योंकि ये क्रमशः 108 एवं 90 के गुणनखंड हैं।

दूसरी पंक्ति में 45 को छोड़ दिया गया है क्योंकि यह 135 का एक गुणनखंड है।

पाँचवीं पंक्ति में 3 को छोड़ दिया गया है क्योंकि यह 6 का एक गुणनखंड है।

***नोट: 1.*** दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण के लिए, 12 एवं 15 के ल.स. एवं म.स. क्रमशः 60 एवं 3 हैं।

$12 \times 15 = 180$

ल.स. × म.स. $= 60 \times 3 = 180$

इस प्रकार, संख्याओं का गुणनफल = ल.स. × म.स.

***2.*** दो संख्याओं का ल.स. प्राप्त करने के लिए, किसी एक संख्या में म.स. से भाग दें एवं भागफल में दूसरी संख्या से गुणा कर दें।

## *दशमलव वाले अंकों का ल.स.*

***नियम:*** सर्वप्रथम दशमलव के बाद अंकों की संख्या समान बना लें। फिर इन संख्याओं में से दशमलव हटा कर उन्हें पूर्णांक की तरह इस्तेमाल करें तथा इनका ल.स. निकाल लें। फिर ल. स. में यथास्थान दशमलव डाल दें।

**उदा.:** 0.6, 9.6 एवं 0.36 का ल.स. निकालें।

**हल:** प्रदत्त संख्याएँ 60, 960 एवं 36 के समतुल्य हैं।

60, 960 एवं 36 का ल.स. = 2880

$\therefore$ अभीष्ट ल.स. = 28.80

### *भिन्नों का ल.स.*

दो या उससे अधिक भिन्नों का ल.स. वह न्यूनतम भिन्न या पूर्णांक है, जो प्रदत्त सभी भिन्नों से विभाज्य हों।

***नियम:*** सर्वप्रथम प्रदत्त भिन्नों को उनके लघुत्तम रूप में लिखें।

$$\text{फिर, ल.स.} = \frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$$

**उदा. 1:** निम्नलिखित का ल.स. निकालें।

a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ b) $\frac{108}{375}, 1\frac{17}{25}, \frac{54}{55}$ c) $4\frac{1}{2}, 3, 10\frac{1}{2}$

**हल:** a) $\text{अभीष्ट ल.स.} = \frac{\text{1 एवं 5 का ल.स.}}{\text{2 एवं 8 का म.स.}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

b) $\frac{108}{375} = \frac{36}{125}, 1\frac{17}{25} = \frac{42}{25}$

इस प्रकार प्रदत्त भिन्न $\frac{36}{125}, \frac{42}{25}$ एवं $\frac{54}{55}$ हैं।

$$\text{अभीष्ट ल.स.} = \frac{\text{36, 42 एवं 54 का ल.स.}}{\text{125, 25 एवं 55 का म.स.}} = \frac{756}{5} = 151\frac{1}{5}$$

c) $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}, 10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$

इस प्रकार प्रदत्त भिन्न हैं: $\frac{9}{2}, \frac{3}{1}$ एवं $\frac{21}{2}$

$$\text{अभीष्ट ल.स.} = \frac{\text{9, 3 एवं 21 का ल.स.}}{\text{2, 1 एवं 2 का म.स.}} = \frac{63}{1} = 63$$

***नोट:*** उपर्युक्त उदाहरण 1(c) में हमने देखा कि ल.स. एक पूर्णांक है। इससे हम इस नतीजे पर पहुँचते हैं कि भिन्नों का ल.स. भिन्न भी हो सकता है एवं पूर्णांक भी।

**उदा. 2:** एक अक्ष पर तीन चक्के लगे हैं। पहला, दूसरा तथा तीसरा चक्का एक मिनट में 36, 48 तथा 54 चक्कर लगाते हैं। तीनों चक्कों पर शुरूआत में काला निशान लगा है। कितने समय के पश्चात् तीनों चक्कों के काले दाग पुन: एक साथ हो जाएँगे?

**हल:** पहला, दूसरा तथा तीसरा चक्का को एक चक्कर पूरा करने में क्रमशः $\frac{60}{36}$ से., $\frac{60}{48}$ से.

तथा $\frac{60}{54}$ से. लगता है।

$$\therefore \text{ अभीष्ट समय } = \left(\frac{60}{36}, \frac{60}{48} \text{ तथा } \frac{60}{54} \text{ का लघुत्तम समापवर्त्य}\right)$$

$$= \frac{60}{6} = 10 \text{ सेकेंड}$$

## *ल.स. से संबद्ध विविध उदाहरण*

***उदा. 1:*** दो संख्याओं का ल.स. 2079 है एवं म.स. 27। यदि एक संख्या 189 है तो दूसरी संख्या बताएँ।

***हल:*** $\text{अभीष्ट संख्या} = \frac{\text{ल.स.} \times \text{म.स.}}{\text{पहली संख्या}} = \frac{2079 \times 27}{189} = 297$

***उदा. 2:*** वह न्यूनतम संख्या कौन-सी है जिसमें 18, 24, 30 एवं 42 से भाग देने पर हर स्थिति में शेष 1 ही बचता हो?

***हल:*** निश्चय ही अभीष्ट संख्या प्रदत्त संख्याओं के ल.स. से एक बड़ी होगी।

अब, $18 = 2 \times 3^2$

$24 = 2^3 \times 3$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore$ ल.स. $= 3^2 \times 2^3 \times 5 \times 7 = 2520$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 2520 + 1 = 2521$

***उदा. 3:*** वह सबसे छोटी संख्या बताएँ जिसमें 52, 78 एवं 117 से भाग देने पर क्रमशः 33, 59 एवं 98 शेष बचता हो।

***हल :*** चूँकि 52−33 = 19, 78 − 59 = 19, 117 − 98 = 19

$\therefore$ प्रत्येक स्थिति में शेष भाजक से 19 कम है। इसलिए यदि हम अभीष्ट संख्या में 19 जोड़ दें तो वह संख्या 52, 78 एवं 117 से पूर्णतया विभाज्य होगी।

इसलिए अभीष्ट संख्या 52, 78 एवं 117 के ल. स. से 19 कम होगी।

52, 78 एवं 117 का ल. स. = 468

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 468 − 19 = 449

***उदा. 4:*** 6 अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या बताएँ जिसमें 6, 7, 8, 9 एवं 10 से भाग देने पर शेष क्रमशः 4, 5, 6, 7 एवं 8 बचता हो।

***हल :*** 6, 7, 8, 9 एवं 10 का ल. स. = 2520

6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999999

999999 को 2520 से भाग देने पर शेष बचता है 2079

इसलिए 6 अंकों की संख्या जो कि 2520 से विभाज्य है = 999999 - 2079 = 997920

चूँकि $6 - 4 = 2, 7 - 5 = 2, 8 - 6 = 2, 9 - 7 = 2$ एवं $10 - 8 = 2$

$\therefore$ प्रत्येक स्थिति में शेष भाजक से 2 कम है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 997920-2 = 997918

***उदा. 5:*** 900 से कम वह सबसे बड़ी संख्या बताएँ जो 8, 12, एवं 28 से विभाज्य हो।

***हल :*** सबसे छोटी संख्या जो **8, 12** एवं **28** से विभाज्य हो = **8, 12** एवं **28** का ल. स. = **168**

स्पष्टत: 168 का अपवर्त्य भी **8, 12** एवं **28** से पूर्णतया विभाजित होगा।

चूँकि अभीष्ट संख्या **900** से ज्यादा नहीं हो सकती है, इसलिए संख्या है : $168 \times 5 = 840$

***उदा. 6:*** वह सबसे छोटी संख्या बताएँ जिसमें 2, 3 4, 5 एवं 6 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष 1 बचता हो, परन्तु उस संख्या में 7 से भाग देने पर शेष कुछ भी नहीं बचता हो।

***हल :*** 2,3,4,5 एवं 6 का ल. स. = 60

$\therefore$ अभीष्ट संख्या अवश्य ही 60k+1 होनी चाहिए ; जहाँ **k** एक धनात्मक पुर्णांक है।

$\Rightarrow \quad 60k + 1 = (7 \times 8 + 4)k + 1 = (7 \times 8k) + (4k + 1)$

प्रश्नानुसार, इस संख्या को 7 से विभाज्य होना है। **k** के किसी भी मान के लिए संख्या का $(7 \times 8k)$ भाग हमेशा 7 से विभाज्य होगा। यहाँ पर $(4k + 1)$ को 7 से विभाज्य होने के लिए **k** का सबसे छोटा मान चुनना होगा। अब हमलोग $k = 1, 2, 3, 4$ ---- का मान $(4k + 1)$ में रखकर 7 से विभाज्यता की जाँच करते हैं। यहाँ पर **k** का मान 5 है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 60k + 1 = 60 \times 5 + 1 = 301$

***नोट :*** उपर्युक्त उदाहरण को दूसरे शब्दों में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

" एक व्यक्ति के पास बच्चों में वितरित करने हेतु कुछ खिलौने हैं। सर्वप्रथम वह प्रत्येक बच्चे को 2 खिलौने देता है, फिर 3, फिर 4, फिर 5 एवं फिर 6, लेकिन प्रत्येक स्थिति में उसके पास 1 खिलौना बच जाता है। जब वह प्रत्येक बच्चे को 7 खिलौने देता है तो उसके पास कुछ भी नहीं बचता है। उस व्यक्ति के पास कम-से-कम कितना खिलौना हो सकता है?"

इसको निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

"एक माली कुछ पौधे पंक्तियों में लगाना चाहता है। यदि वह 2 पौधे प्रत्येक पंक्ति में लगाए तो 1 पौधा बचा रहता है। इसी प्रकार 3, 4, 5, 6 पौधे प्रति पंक्ति में लगाने पर प्रत्येक दशा में 1 पौधा बचा रहता है। परंतु 7 पौधे प्रति पंक्ति में लगाने से उसके पास एक भी पौधा नहीं बचता। बताओ उसके पास पौधों की छोटी-से-छोटी संख्या क्या होगी?"

***उदा. 7:*** 1936 में कौन-सी छोटी-से-छोटी संख्या घटायी जाए कि शेष को 9, 10 एवं 15 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष बचे?

***हल :*** 9, 10 एवं 15 का ल. स. = 90

1936 को 90 से भाग देने पर 46 शेष बचता है। लेकिन 7 भी शेष 46 का एक भाग है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 46 - 7 = 39$

**उदा. 8:** 10,000 में कौन-सी बड़ी-से-बड़ी संख्या घटाई जाए कि शेष 32, 36, 48 एवं 54 से पूर्णतया विभाज्य हो?

**हल :** 32, 36, 48 एवं 54 का ल. स. = 864

$\therefore$ अभीष्ट बड़ी-से-बड़ी संख्या = 10000 − 864 = 9136

**उदा. 9:** 7 का वह सबसे छोटा अपवर्त्य बताएँ जिसमें 2, 3, 4, 5 एवं 6 से भाग देने पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, एवं 5 शेष बचता है।

**हल :** 2, 3, 4, 5 एवं 6 का ल. स. = 60

और दूसरी संख्याएँ जो कि, 2, 3, 4, 5 एवं 6 से पूर्णतया विभाज्य हों = 60k ; k एक धनात्मक पूर्णांक है।

चूँकि $2-1=3, 3-2=1, 4-3=1, 5-4=1$ एवं $6-5=1$ इसलिए प्रत्येक दशा में शेष भाजक से 1 कम है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = $60k-1 = (7\times 8k)+(4k-1)$

प्रश्नानुसार, इस संख्या को 7 से विभाज्य होना है। k के किसी भी मान के लिए $(7\times 8k)$, 7 से विभाज्य है। यहाँ पर हमें k का वह मान चुनना है जो $(4k-1)$ को 7 से विभाज्य बनाता है। अब हम k = 1, 2, 3, ...... का मान $(4k-1)$ में रखकर 7 से इसकी विभाज्यता की जाँच करते हैं। यहाँ पर k का मान 2 है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = $60k-1 = 60\times 2-1 = 119$

**प्रमेय:** ***किसी दो संख्याओं का जोड़ तथा ल.स. का म.स., उन संख्याओं के म. स. के बराबर होता है।***

**प्रमाण:** माना कि दो संख्याएँ x तथा y हैं तथा उसका म.स. H है।

अतः $x = Ha$

तथा $y = Hb$

जहाँ a तथा b परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं।

$x, y$ का ल.स. = Hab

और, $x+y = H(a+b)$

अगर 'a' तथा 'b' परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं तो $(a+b)$ तथा ab भी परस्पर अभाज्य होंगी। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $H(a+b)$ तथा Hab का म.स. 'H' ही होगा जो x तथा y का भी म.स. है।

**उदा. 10:** दो संख्याओं का जोड़ 584 है तथा ल.स. 1095 है। दोनों संख्याओं का म.स. तथा दोनों संख्याएँ अलग-अलग ज्ञात करें।

**हल:** $584 = 2\times 2\times 2\times 73$

$1095 = 3\times 5\times 73$

अभीष्ट म.स. = 584 तथा 1095 का म.स. = 73

तथा, $584 = 73 \times 8$

$1095 = 73 \times 15$

अत: ab= 15 तथा a + b = 8

$\Rightarrow a = 3$ तथा $b = 5$

अभीष्ट संख्याएँ $= 73 \times 3 = 219$ तथा $73 \times 5 = 365$

**प्रमेय:** ***किसी समुच्चय में 'n' संख्याएँ हैं। किसी भी दो संख्या का म.स. 'H' तथा सभी 'n' संख्याओं का ल.स. 'L' है। सभी संख्याओं का गुणनफल*** $\left[(H)^{n-1} \times L\right]$ ***होगा।***

***उदा. 11:*** चार संख्याओं में किसी भी दो संख्याओं का म.स. 7 है तथा सभी चार संख्याओं का ल. स. 2310 है। चारों संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें।

***हल:*** उपरोक्त सूत्र से,

चारों संख्याओं का गुणनफल $= (7)^{4-1} \times 2310 = 343 \times 2310 = 792330$

## *अभ्यास प्रश्न*

1. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 2930 एवं 3250 में भाग देने पर शेष क्रमश: 7 एवं 11 बचता हो।
2. 715 का अपवर्त्य प्राप्त करने के लिए 825 में कौन-सी छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा करना पड़ेगा ?
3. किसी दो संख्याओं का ल.स. 2310 है एवं उनका म.स. 30 है। यदि एक संख्या 7 × 30 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ।
4. तीन घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ करती हैं और वे क्रमश: 0.25, 0.1 और 0.125 सेकेंड के बाद बजती हैं। तो कितने समय के बाद वे तीनों फिर एक साथ बजेंगी?
5. वह न्यूनतम राशि, जो 2.50 रु., 20 रु., 1.20 रु. एवं 7.50 रु. में सम्मिलित हों, का मान ज्ञात करें।
6. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताएँ जिससे 410, 751 एवं 1030 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष बचता हो।
7. $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, एवं $\frac{7}{15}$ का म. स. एवं ल. स. निकालें।
8. तीन व्यक्ति एक 11 कि. मी. लंबी वृत्ताकार पथ पर एक साथ एक ही दिशा में चलना प्रारंभ करते हैं। उनकी गति क्रमश: 4, 5.5 एवं 8 कि. मी. प्रति घंटा है। वे तीनों एक साथ कितने समय बाद प्रारंभिक बिन्दु पर मिलेंगे?

9. वह छोटी-से-छोटी पूर्ण संख्या का मान बताएँ जो $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}$ एवं $4\frac{1}{5}$ से पूर्णतया विभाज्य हो।
10. 48, 36, 72, एवं 24 का म.स. उन संख्याओं के ल.स. में कितनी बार सम्मिलित है?
11. वह छोटी-से-छोटी संख्या बताएँ जो 4, 5, 6, 15 एवं 18 से पूरी तरह विभाज्य हो।
12. वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 8, 12, एवं 16 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 3 शेष बचे किन्तु 7 से भाग देने पर कुछ भी शेष न बचे।
13. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 55, 127 एवं 175 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे।
14. 11 का न्यूनतम अपवर्त्य ज्ञात कीजिए जिसमें 8, 12 एवं 16 से भाग देन पर 3 शेष बचे।
15. 3500 में कौन-सी न्यूनतम संख्या जोड़ी जाए ताकि वह संख्या 42, 49, 56 एवं 63 से पूर्णतया विभाज्य हो?
16. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 72, 80 एवं 88 से भाग देने पर क्रमश: 52, 60, एवं 68 शेष बचे।
17. चार अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 2, 3, 4, 5, 6 एवं 7 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 1 शेष बचे।
18. वह बड़ी-से-बड़ी संभव लंबाई का मान ज्ञात कीजिए जिससे 7 मी., 3मी. 85 से. मी. एवं 12 मी. 95 से. मी. लंबाइयों को पूर्णतया मापा जा सके।
19. 15 मी. 17 सेमी लंबा तथा 9 मी. 2 सेमी. चौड़ा एक कमरे की छत पर कम-से-कम कितनी बराबर वर्गाकार टाइलें लगेंगी?
20. बह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 77, 147 एवं 252 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे।
21. तीन विभिन्न चौराहे (road-crossings) पर ट्रैफिक लाइट्स क्रमश: 48 सेकेंड, 72 सेकेंड एवं 108 सेकेंड बाद बदलता है। यदि वे तीनों लाइट्स 8 बजकर 20 मिनट पर एक साथ बदलते हों तो पुन: वे कितने बजे एक साथ बदलेंगे ?
22. दो संख्याओं का म. स. एवं ल.स. क्रमश: 44 एवं 264 है। यदि पहली संख्या में 2 से भाग दिया जाता है तो भागफल 44 प्राप्त होता है। दूसरी संख्या क्या है ?
23. दो संख्याओं का गुणनफल 2160 है एवं उनका म.स. 12 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।
24. चार अंकों की बड़ी-से-बड़ी तथा पाँच अंकों की छोटी-से-छोटी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका म.स. 144 हो।
25. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात करें जिसमें से प्रत्येक 12, 18, 32 या 40 को बराबर बार घटाया जा सके।
26. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें यदि 8 जोड़ दिया जाए तो वह 32, 36 एवं 40 से पूर्णतया विभाज्य हो जाए।

27. दो संख्याओं का योग 528 है और उनका म.स. 33 है। इस तरह की कितनी संख्याएँ बन सकती हैं?

28. एक पाठशाला के 391 छात्रों और 323 छात्राओं को बड़ी-से-बड़ी बराबर वर्गों में विभाजित किया गया है ताकि प्रत्येक वर्ग के छात्रों की संख्या, प्रत्येक वर्ग के छात्राओं की संख्या के बराबर हो। कुल कितने वर्ग हैं?

29. क्या 1000 को ऐसे दो भागों में विभक्त किया जा सकता है जिनका म.स. 15 हो ?

30. सिद्ध करें कि संख्याएँ 2205 एवं 4862 परस्पर अभाज्य **(prime)** हैं।

31. 1294 में से कौन-सी छोटी-से-छोटी संख्या घटाई जाए कि 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 6 शेष बचे?

32. 300 एवं 400 के बीच वैसी संख्याओं का योग बताएँ जिसमें 6, 9 एवं 12 से भाग देने पर **(a)** कुछ भी शेष न बचे ; एवं **(b)** प्रत्येक दशा में 4 शेष बचे।

33. भाग विधि द्वारा दो संख्याओं का म.स. निकालने में अंतिम भाजक 18 तथा भागफल 2, 7 एवं 3 आते हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजीए।

34. एक फल विक्रेता ने कुछ सेब 107.50 रु. में खरीदे और उनमें से कुछ सेब 68.80 रु. में बिना लाभा या हानि के बेच दिए। सिद्ध कीजिए कि उसके पास अब भी कम-से-कम 9 सेब शेष हैं।

35. तीन संख्याओं का ल. स. 360 है और म. स. 6 है। यदि दो संख्याएँ 24 एवं 36 हों तो तीसरी छोटी-से-छोटी संख्या क्या होगी?

36. दो संख्याओं का योग 56 है और उनका ल. स. 105 है। उनका म. स. ज्ञात कीजिए। वे संख्याएँ भी ज्ञात कीजिए।

37. तीन संख्याओं का ल. स. 210 और म. स. 7 है तथा संख्याओं का योग 70 है वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

38. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका ल. स. 1188 एवं म. स. 9 हो।

39. चार घंटियाँ 6, 8, 12, तथा 18 सेकेंड के अंतर पर बजती हैं। यदि वे 12 बजे एक साथ बजना आरंभ करें तो बताइए कि फिर कब एक साथ बजेंगी और 6 मिनट के अन्दर वे कितनी बार एक साथ बजेंगी?

40. दो दाँतेदार पहिए आपस में सटकर चलते हैं। एक में 32 दाँत व दूसरे में 36 दाँत हैं। यदि बड़ा पहिया प्रति सेकेंड 64 चक्कर लगाता है तो ज्ञात कीजिए कि 10 घंटे की अवधि में दो विशेष दाँत कितनी बार एक दूसरे के संपर्क में आएँगे?

## *हल (संकेत)*

1. (2930 – 7) और (3250 – 11) का म. स. ही इस प्रकार की सबसे बड़ी संख्या होगी।

   2923 एवं 3239 का म. स. = 79

2. $825 = 3 \times 5 \times 5 \times 11$ ; $715 = 5 \times 11 \times 13$

स्पष्टतः 5, 11 एवं 13, 715 के किसी भी अपवर्त्य के गुणनखण्ड होंगे।

∴ 825 को 715 के ऐसे गुणनखण्ड या गुणनखंडों से गुणा करना चाहिए जो 825 में नहीं हों।

∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 13

3. अभीष्ट संख्या $= \dfrac{2310 \times 30}{7 \times 30} = 330$

4. तीनों घड़ियाँ एक साथ 0.25 सेकेंड, 0.1 सेकेंड एवं 0.125 सेकेंड के ल.स. के बराबर के समयांतराल के बाद बजेंगी।

0.25, 0.1 एवं 0.125 का ल. स. = (250, 100 और 125 का ल. स.) × 0.001

= 500 × 0.001 = 0.5 सेकेंड

5. 2.5, 20, 1.2 एवं 7.5 का ल. स. = (25, 200, 12 एवं 75 का ल. स.) × 0.1

= 600 × 0.1 = 60 रु.

6. अभीष्ट संख्या = (410 − 7), (751 − 7) एवं (1030 − 7) का म. स.

= 31

7. म. स. $= \dfrac{\text{अंश का म.स.}}{\text{हर का ल.स.}} = \dfrac{1}{30}$

ल. स. $= \dfrac{\text{अंश का ल.स.}}{\text{हर का म.स.}} = \dfrac{140}{1} = 1$

8. एक चक्कर काटने में उनके द्वारा लिया गया समय क्रमशः

$= \dfrac{11}{4}, \dfrac{11}{5.5}$ एवं $\dfrac{11}{8}$ घंटे

$= \dfrac{11}{4}, \dfrac{2}{1}$ एवं $\dfrac{11}{8}$ घंटे

$\dfrac{11}{4}, \dfrac{2}{1}$ एवं $\dfrac{11}{8}$ का ल. स. $= \dfrac{\text{11, 2, 11 का ल.स.}}{\text{4, 1, 8 का म. स.}} = \dfrac{22}{1} = 22$ घंटे

∴ 22 घंटे के बाद वे मिलेंगे।

9. अभीष्ट न्यूनतम संख्या = दिए हुए संख्याओं का ल. स.

10. 48, 36, 72, 24 का म. स. = 12

48, 36, 72, 24 का ल. स. = 144

∴ ल. स. = 12 × म. स.

11. 4, 5, 6, 15, 18 का ल. स. = 180; यह दी हुई संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य है।

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

इस प्रकार, 180 को यदि 5 से गुणा (180 × 5 = 900) कर दिया जाए तो वह संख्या एक पूर्ण वर्ग होगा तथा साथ ही 4, 5, 6, 15 एवं 18 से विभाज्य होगा।

12. न्यूनतम संख्या जिसमें 8, 12, एवं 16 से भाग देने पर 3 शेष बचता हो

= 8, 12, 16 का ल. स. + 3

= 48 + 3 = 51

दूसरी ऐसी संख्याएँ = 48 × 2 + 3 = 99,

= 48 × 3 + 3 = 147, .......

∴ अभीष्ट संख्या जो 7 से विभाज्य है = 147.

***नोट:*** यह एक जाँच-एवं-भूल (Trial-and-error) विधि है।

13. माना कि x शेष बचता है, तो संख्याएँ (55 – x), (127 – x ) एवं (175 – x) अभीष्ट संख्या से पूर्णतया विभाज्य होंगी।

अब, हम जानते हैं कि यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य हो तो उन संख्याओं का अंतर भी उस खास संख्या से विभाज्य होंगी।

इसलिए, संख्याएँ (127 – x) – (55 – x), (175 – x) – (127 – x) एवं (175 – x) – (55x – x) या 72, 48 एवं 120 अभीष्ट संख्या से विभाज्य होगी।

∴ अभीष्ट संख्या = 48, 72 एवं 120 का म. स. = 24

***नोट:*** संख्याओं के धनात्मक अंतर का म. स. निकालें, इससे आपका काम काफी आसानी से हो जाएगा।

14. 8, 12 एवं 16 का ल. स. = 48

इस प्रकार की संख्याएँ = (48 × 1 + 3) = 51,

= (48 × 2 + 3) = 99, जो कि 11 से विभाज्य है।

∴ अभीष्ट संख्या = 99

***नोट:*** यह एक जाँच-एवं-भूल (Trial-and-error) विधि है। विस्तार-विधि से इसे हल करने की कोशिश करें।

16. 72 – 52 = 20, 80 – 60 = 20, 88 – 68 = 20.

हमलोग देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में शेष, भाजक से 20 कम है। इस प्रकार यदि हम अभीष्ट संख्या में 20 जोड़ दें तो वह संख्या 72, 80, एवं 88 से पूर्णतया विभाज्य होगी।

72, 80 एवं 88 का ल. स. = 7920

∴ अभीष्ट संख्या = 7920 – 20 = 7900

17. 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999

2, 2, 4, 5, 6, 7, का ल. स. = 420

9999 में 420 से भाग देने पर 339 शेष बचता है।

∴ 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या जो 2, 3, 4, 5, 6 एवं 7 से पूर्णतया विभाज्य हो

$= 9999 - 339 = 9660$

∴ अभीष्ट संख्या = $9660 + 1 = 9661$

18. अभीष्ट लंबाई = 7 मी., 3.85 मी. एवं 12.95 मी. का म. स.

= (700, 385 एवं 1295 का म. स.) × 0.01 मी.

= 35 × 0.01 मी, = 0.35 मी. = 35 सेमी

19. प्रत्येक टाइल की भुजा = 1517 और 902 का म. स.

= 41 से. मी.

प्रत्येक टाइल का क्षेत्रफल = 41 × 41 सेमी$^2$

∴ टाइलों की अभीष्ट संख्या = $\frac{1517 \times 902}{41 \times 41} = 814$

20. प्रश्न संख्या 13 की तरह हल करें।

अभीष्ट संख्या = (147 – 77), (252 – 147) एवं (252 –77) का म. स.

= 70, 105, 175 का म. स. = 35

21. 48, 72, एवं 108 का ल. स. = 432

432 सेकेंड के बाद ट्रैफिक लाइट्स एक साथ बदलेगा = 7 मिनट 12 सेकेंड

∴ वे एक साथ 8 बजकर 27 मिनट एवं 12 सेकेंड पर बदलेंगे।

22. पहली संख्या = $2 \times 44 = 88$

∴ दूसरी संख्या = $\frac{\text{ल. स.} \times \text{म. स.}}{88} = \frac{44 \times 264}{88} = 132$

23. म. स. = 12

माना कि संख्याएँ $12x$ एवं $12y$ हैं।

अब, $12x \times 12y = 2160$

∴ $xy = 15$

x एवं y के संभावित मान = (1, 15); (3, 5); (5, 3); (15, 1)

∴ संख्याओं के संभावित जोड़े = (12 , 180) एवं (36, 60)

24. अभीष्ट संख्या को 144 का अपवर्त्य होना चाहिए।

4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999

9999 में 144 से भाग देने पर 63 शेष बचता है।

∴ 4 अंकों की अभीष्ट सबसे बड़ी संख्या = 9999 − 63 = 9936

पुनः पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या = 10000

10000 में 144 से भाग देने पर 64 शेष बचता है।

∴ 5 अंकों की अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 10000 + (144 − 64) = 10080

25. अभीष्ट संख्या = 12, 18, 32 एवं 40 का ल. स. = 1440

26. 32, 36 एवं 40 का ल. स. = 1440

∴ अभीष्ट संख्या = 1440 − 8 = 1432

27. माना कि संख्याएँ 33a एवं 33b हैं।

अब, 33a + 33b = 528

या, 33 (a + b) = 528

∴ a + b = 16

a एवं b के संभावित मान = (1, 15); (2, 14); (3,. 13); (4, 12); (5, 11); (6, 10); (7, 9); एवं (8, 8)

इनमें से वैसी संख्याओं के जोड़े जो परस्पर अभाज्य (prime) हैं:

(1, 15); (3, 13), (5, 11) एवं (7, 9)

∴ संख्याओं के संभावित जोड़े: (33, 495); (99, 429); (165, 363); (231, 297)

28. वर्गों की संख्या = 391 एवं 323 का म. स. = 17

29. यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य हों तो उन संख्याओं का योग भी उस खास संख्या से विभाज्य होगी।

उपर्युक्त नियम से : यदि 1000 के दोनों भागों का म. स. 15 हो तो 1000 अवश्य ही 15 से विभाज्य होगी। लेकिन ऐसा नहीं है। इसलिए 1000 के दो ऐसे भाग नहीं हो सकते जिनका म. स. 15 हो।

30. यदि संख्याएँ परस्पर अभाज्य हों तो उनका म. स. 1 होता है। दूसरे शब्दों में, यदि दो संख्याओं का म. स. 1 हो तो वे संख्याएँ परस्पर अभाज्य होंगी। इस स्थिति में यहाँ पर म. स. 1 है। अतः संख्याएँ परस्पर अभाज्य हैं।

31. 9, 11 एवं 13 का ल. स. = 1287

∴ वह संख्या जिसमें 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष 6 बचे = 1287 + 6 = 1293

∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 1294 − 1293 = 1

32. 6, 9 एवं 12 का ल. स. = 36

(a) 36 का अपवर्त्य जो 300 एवं 400 के बीच में पड़ता हो = 324, 360 एवं 396

∴ अभीष्ट योग = 324 + 360 + 396 = 1080

(b) यहाँ प्रत्येक दशा में शेष 4 बचता है।

∴ संख्याएँ = (324 + 4) = 328 एवं (360 + 4) = 364

संख्या (396 + 4) = 400, 300 एवं 400 के बीच नहीं पड़ता है इसलिए यह स्वीकार्य नहीं है।

∴ अभीष्ट योग = 328 + 364 = 692

33.

a) b (2
2a
c) a (7
7c
18) c (3
c
×

∴ अंतिम भाजक = 18 और भागफल = 3

∴ भाज्य c = 18 × 3 = 54

∴ अब भाजक = 54, भागफल = 7, शेष = 18

∴ भाज्य a = 7 × 54 + 18 = 396

अब भाजक = 396, भागफल = 2, अब शेष = 54

∴ भाज्य b = 2 × 396 + 54 = 846

∴ संख्याएँ 396 तथा 846 हैं।

34. चूँकि 1 सेब का अधिक-से-अधिक मूल्य

= 107.50 रु. एवं 68.80 रु. का म. स.

= 10750 पै. एवं 6880 पै. का म. स. = 430 पै. = 4.30 रु.

∴ कम-से-कम खरीदे गए सेब = $\frac{107.50}{4.30} = 25$

तथा कम-से-कम बचे गए सेब = $\frac{68.80}{4.30} = 16$

∴ कम-से-कम शेष सेब = 25 − 16 = 9

35. माना कि तीसरी संख्या x है।

चूँकि संख्याओं का म. स. = 6

∴ संख्याओं को निम्नप्रकार से लिखा जा सकता है।

$24 = 6 \times 2 \times 2$

$36 = 6 \times 2 \times 3$

$x = 6 \times y$

∴ संख्याओं का ल. स. = $6 \times 2 \times 2 \times 3 \times y = 72y$

∴ $72y = 360$ या $y = 5$

∴ तीसरी छोटी-से-छोटी संख्या $= 6 \times 5 = 30$

**नोट:** तीसरी संख्या को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$x = 6 \times 2 \times 2 \times 3 \times y$

किन्तु x में $6 \times y$ होना आवश्यक है इसलिए अन्य संख्याओं में $2 \times 2 \times 3$ में से कोई भी गुणनखण्ड चुना जा सकता है। अर्थात् संख्या $(6 \times 5) \times 2, (6 \times 5) \times 3, (6 \times 5) \times 2 \times 3, (6 \times 5) \times 2 \times 2 \times 3,$

अर्थात् 60, 90, 150, 360 भी ली जा सकती है। किन्तु इन सब संख्याओं में 30 सबसे छोटी संख्या है।

36. संख्याओं का म. स. = उनके योग एवं ल. स. का म. स.

∴ अभीष्ट म. स. = 56 एवं 105 का म. स. = 7

∴ संख्याओं का म. स. 7 है।

∴ संख्याएँ = 7a एवं 7b; जहाँ a, b, परस्पर अभाज्य हैं।

अब, इनका योग $= 7a + 7b = 56$ या $= a + b = 8$ .......(i)

और इनका ल. स. $7ab = 105$ या $a + b = 15$ .......(ii)

(i) के अनुसार निम्नलिखित जोड़े प्राप्त होंगे

(1, 7), (2, 6) (3, 5) (4, 4)

जिनमें अभाज्य जोड़े केवल (1, 7) एवं (3, 5) हैं।

(ii) के अनुसार इनका गुणनफल 15 होना चाहिए

∴ संख्याएँ $= 7 \times 3$ एवं $7 \times 5 = 21$ एवं 35

**नोट:** दो संख्याओं के योग एवं उनके ल. स. का म. स. संख्याओं के म.स. के बराबर होता है।

***व्याख्या :***

यदि संख्याएँ x एवं y हों और म. स. m तथा ल. स. $l$ हो तो

$x = ma,\ y = mb$ ; जहाँ कि a, b आपस में अभाज्य हैं।

∴ $l = m\,ab$

$x + y = m(a + b)$

स्पष्ट है कि $(x + y)$ एवं $l$ का म. स. m होगा।

37. संख्याओं का म. स. = 7

∴ संख्याएँ = 7a, 7b एंव 7c; जहाँ a, b एवं c परस्पर अभाज्य हैं।

∴ उनका योग $= 7a + 7b + 7c = 70$ ∴ $a + b + c = 10$

पुन: उनका ल. स. $= 7k = 210$

∴ $k = 30$; जहाँ k = a, b एवं c का ल. स.

चूँकि $k = 1 \times 2 \times 3 \times 5$

∴ वे संख्याएँ जिनका ल. स. 30 है, निम्नलिखित होंगी।

(1, 2, 15); (1, 3, 10); (1, 5, 6); (2, 3, 5); (1, 1, 30); (2, 5, 6); (3, 3, 10) (5, 5, 6); (2, 2, 15) आदि।

इनमें से केवल (2, 3, 5) ऐसी संख्याएँ हैं जिनका योग 10 है।

∴ a, b, c का उपयुक्त मान = 2, 3, 5

∴ अभीष्ट संख्याएँ = $7a, 7b, 7c = 7 \times 2, 7 \times 3, 7 \times 5 = 14, 21, 35$

38. माना कि संख्याएँ x, y हैं। चूँकि उनका म. स. 9 है, अत: संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$x = 9a,\ \ y = 9b;$ जहाँ a, b परस्पर अभाज्य हैं।

इन संख्याओं का ल. स. = 9ab

∴ $9ab = 1188$ या, $ab = 132$

अब वह जोड़े जिनका गुणनफल 132 है, निम्नलिखित हैं:

(1, 132), (2, 66), (3, 44), (4, 33) (6, 22), (11, 12)

इनमें से दो जोड़े (2, 66) एवं (6, 22) परस्पर अभाज्य नहीं हैं।

∴ सही जोड़े (1, 132), (3, 44), (4, 33), एवं (11, 12)

अर्थात् $a = 11,\ b = 132$ ; $a = 3, b = 44$; $a = 4, b = 33$ एवं $a = 11, b = 12$

∴ अभीष्ट संख्याएँ = $x, y = 9a, 9b$

$= 9 \times 1, 9 \times 132; 9 \times 3, 9 \times 44; 9 \times 4, 9 \times 33$ एवं $9 \times 11, 9 \times 12$

= 9, 1188; 27,396; 36,297 एवं 99,108

39. 6, 8, 12 एवं 18 का ल. स. = 72

∴ घंटियाँ 72 सेकेंड के बाद अर्थात् 1 बजकर 12 मिनट पर पुन: एक साथ बजेंगी।

6 मिनट के अंदर, $\dfrac{6 \times 60}{70}$ = 5 बार एक साथ बजेंगी

40. 32 एवं 36 का ल. स. = 288

अर्थात् 288 दाँतों बाद दो विशेष दाँत फिर संपर्क में आयेंगे। जिसमें छोटे पहिए के (288 ÷ 32) = 9 चक्कर एवं बड़े पहिए के (288 ÷ 36=) 8 चक्कर लगा चुके होंगे।

चूँकि बड़ा पहिया 1 सेकेंड में 64 चक्कर लगाता है।

इसलिए 1 सेकेंड में दो विशेष दाँत (64 ÷ 8=) 8 बार सम्पर्क में आयेंगे।

∴ 10 घंटे मे सम्पर्क = $10 \times 60 \times 60 \times 8 = 288000$ बार