அத்தியாயம் 2

இயற்கணிதம்

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்தபின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்

- பகுதி பின்னங்களின் வரையறை
- பகுதி பின்னங்களை பிரித்தலின் பல்வேறு உத்திகள்.
- வார்த்தைகள் அமைத்தல் போன்ற பல்வேறு வகையான வரிசை மாற்றங்கள்.
- குழுக்கள் அமைத்தல் போன்ற பல்வேறு வகையான சேர்வு
- வரிசைமாற்றங்கள் மற்றும் சேர்வுகள் ஆகியவற்றிற்கு இடையேயான வேறுபாடு
- கணிதத் தொகுத்தறிதலின் கொள்கை மற்றும் கருத்துருக்கள்.
- ஈருறுப்பு விரிவாக்கத்தின் உத்திகள்.

அல்–குவாரிஷ்மி

முன்னுரை

இயற்கணிதம் என்பது கணித கருத்துருக்களை ஒருங்கிணைப்பதற்கு பயன்படக் கூடிய முக்கியமான கணித கூற்றாகும். இயற்கணிதம் என்பது எண்களோடு தொடர்புடைய வடிவியல் மற்றும் தரவு பகுப்பாய்வோடு கூடிய செயல்கள் மீது உருவாக்கப்பட்டிருக்கிறது. “Algebra” என்பது “al-Jabr” என்ற அரேபிய வார்த்தையிலிருந்து தருவிக்கப்பட்டதாகும். "அல்–குவாரிஷ்மி " (Al-Khwarizm) என்ற அரபு கணிதவியலாளர் இயற்கணிதத்தின் தந்தை என்று பாரம்பரியமாக அறியப்படுகிறார். ஏதாவது ஒரு சமதள உருவத்தின் சுற்றளவு, பரப்பளவு மற்றும் திண்ம பொருள்களின் கனஅளவு, வளைதள பரப்பு ஆகியவற்றை கண்டுபிடிப்பதற்கு இயற்கணிதம் பயன்படுகிறது.

9Y2UVK

2.1 பகுதிப் பின்னங்கள் (Partial Fractions)

விகிதமுறு கோவை (Rational Expression)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}, [q(x)\neq 0]$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதப்படும் கோவை விகிதமுறு கோவை எனப்படும்.

ஒரு விகிதமுறு கோவையில் தொகுதியின் படியானது, பகுதியின் படியை விட குறைவாக இருந்தால், அது விகிதமுறு தகு பின்னக் கோவை என்று அழைக்கப்படும். தொகுதியின் படியானது பகுதியின் படிக்குச் சமமாகவோ அல்லது அதிகமாகவோ இருந்தால், அது விகிதமுறு தகாப் பின்னக் கோவை என்றழைக்கப்படும்.

ஒரு தகா பின்ன வடிவில் உள்ள விகிதமுறு கோவையை பல்லுருப்பு கோவை மற்றும் தகு பின்ன வடிவில் விகிதமுறு

கோவை ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஆக விவரிக்க முடியும்.

அதாவது, $\dfrac{p(x)}{q(x)} = f(x)+\dfrac{r(x)}{q(x)}$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = 1 - \frac{x}{x^2+2x+1}$$

பகுதிப்பின்னங்கள் – (Partial Fractions)

$\dfrac{3}{x-1}$ மற்றும் $\dfrac{2}{x-2}$ என்ற விகிதமுறு கோவைகளை கூடுதல் அல்லது கழித்தல் விகிதங்களின் மூலம் ஒரே ஒரு விகிதமுறு கோவையாக மாற்றி எழுதலாம்.

ஆகவே,

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2} = \frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}$$

ஆகவே,

$$\frac{5x-8}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}$$

ஒரு விகிதமுறு கோவையை இரண்டு அல்லது மூன்று எளிய விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் அமைப்பில் எழுதும் முறையே பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் எனப்படும்.

பொதுவாக $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ என்பன x –ல் அமைந்த இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில் $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ என்றவிகிதமுறுகோவையினை சில குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு எளிய விகிதமுறு கோவைகளின் கூடுதல் அல்லது கழித்தலாக மாற்றி எழுதும் முறைக்கு பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்தல் என்று பெயர்.

2.1.1 ஒரு படி காரணிகள் (ஒரே காரணி மீண்டும் வராமை)

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ என்ற விகிதமுறு கோவையின் பகுதி $q(x)$ ஆனது மீண்டும் வராத ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கு தொகையாக, $(ax+b)(cx+d)$ என்ற வடிவத்தில் இருந்தால் அவற்றினை $\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{cx+d}$ என்று பிரித்து எழுதலாம். இங்கு A மற்றும் B யின் மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

உதாரணமாக

$$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$$

என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$$\frac{1}{(x^2-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

என்பனவற்றில் A, B மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு

$\dfrac{1}{(x^2-1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$ என்க

இருபுறமும் $(x-1)(x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$1 = A(x+1)+B(x-1) \quad \ldots (1)$$

$x=1$ எனில், $1 = A(2)$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

$x=-1$ எனில், $1 = A(0)+B(-2)$

$$\therefore B = -\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.2

$\dfrac{7x-1}{x^2-5x+6}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)} \text{ என்க} \quad \ldots(1)$$

இருபுறமும் $(x-2)(x-3)$, ஆல் பெருக்க

$$7x-1 = A(x-3)+B(x-2) \quad \ldots (2)$$

$x = 3$ என சமன்பாடு (2) –ல் பிரதியிட

$$21 - 1 = B(1)$$

$$\Rightarrow \quad B = 20$$

$x = 2$ என சமன்பாடு (2) –ல் பிரதியிட

$$14 - 1 = A(-1)$$

$$\Rightarrow \quad A = -13$$

A மற்றும் B யின் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} = \frac{-13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)}$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$$\frac{7x-1}{x^2-5x+6} =$$

$$\frac{1}{(x-2)}\left[\frac{(7x-1)}{(x-3)}\right]_{x=2} + \frac{1}{(x-3)}\left[\frac{(7x-1)}{(x-2)}\right]_{x=3}$$

$$= \frac{-13}{(x-2)} + \frac{20}{(x-3)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.3

$\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

பகுதியை ஒரு படி காரணிகளின் பெருக்கங்களாக எழுதுக

$$(x^2-4)(x+1) = (x-2)(x+2)(x+1)$$

$$\therefore \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+1)} \text{ என்க } \quad ...(1)$$

இருபுறமும் $(x–2)(x+2)(x+1)$ ஆல் பெருக்க

$$x+4 = A(x+2)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)(x+2) \quad ...(2)$$

$x = –2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$-2+4 = A(0) + B(-4)(-1) + C(0)$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{2}$$

$x = 2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$2 + 4 = A(4)(3) + B(0) + C(0)$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}$$

$x = –1$ என (2) ல் பிரதியிட

$$-1+4 = A(0) + B(0) + C(-3)(1)$$

$$\therefore \quad C = -1$$

$$\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{x+1}$$

2.1.2 பகுதியில் ஒரு படிக் காரணிகள் (n–முறை திரும்பத் திரும்ப வருவது)

கொடுக்கப்பட்ட $\dfrac{p(x)}{q(x)}$,என்றபின்னத்தில் பகுதி $q(x)$–ல் $(ax+b)$ என்ற ஒருபடிக் காரணியானது n முறை திரும்பத் திரும்ப வருமாயின், $(ax+b)^n$ வடிவத்தில் இருந்தால் அதற்குரிய எளிய பின்னம் பின்வருமாறு

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

உதாரணமாக,

$$\frac{9x+7}{(x+4)(x+1)^2} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.4

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

எனில் A, B மற்றும் C ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \quad ...(1)$$

$x = 1$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$1 = A(1+1)^2 + B(0) + C(0)$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}$$

$x = –1$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$-1 = A(0) + B(0) + C(-1-1)$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

சமன்பாடு (1) –ல் மாறிலிகளின் கெழுக்களை சமன்படுத்த

$$A-B-C = 0$$
$$\Rightarrow B = A-C$$
$$\therefore B = -\frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x+3)} \quad \ldots(1)$$

$(x-2)^2(x+3)$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க

$$x+1 = A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2 \quad \ldots(2)$$

$x = 2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$2+1 = A(0)+B(5)+C(0)$$
$$\therefore B = \frac{3}{5}$$

$x = -3$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$-3+1 = A(0)+B(0)+C(-3-2)^2$$
$$\therefore C = \frac{-2}{25}$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) –ல் இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$0 = A+C$$
$$A = -C$$
$$\therefore A = \frac{2}{25}$$

A, B மற்றும் C –ன் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட,

$$\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{2}{25(x-2)}+\frac{3}{5(x-2)^2}-\frac{2}{25(x+3)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.6

$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$ –ஐ பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக.

தீர்வு

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2} \ldots(1)$$

$(x-1)(x+2)^2$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க

$$\therefore 9 = A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1) \quad \ldots(2)$$

$x = -2$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$9 = A(0)+B(0)+C(-2-1)$$
$$\therefore C = -3$$

$x = 1$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$9 = A(3)^2+B(0)+C(0)$$
$$\therefore A = 1$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) –ல் இருபுறமும் சமன்படுத்த

$$0 = A+B$$
$$B = -A$$
$$\therefore B = -1$$

A, B மற்றும் C –ன் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$$

2.1.3 ஒரு படி காரணிகளாக, காரணிப் படுத்தமுடியாத இரு படிக் காரணிகளை உள்ளடக்கிய பகுதி

$\frac{p(x)}{q(x)}$, என்கிற விகிதமுறு கோவையில், $q(x)$ இன் ஒரு பகுதியானது ax^2+bx+c என்ற இருபடிக் காரணி கோவையை ஒருபடிக் காரணிக்கோவைகளின் பெருக்கலாக

மாற்ற இயலாது எனில், $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ என்பதன் ஒரு பகுதிப்பிரிப்பாக $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ யை எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

$\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ என்பதனை பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க.

தீர்வு

இங்கு (x^2+1) யை ஒரு படி காரணிகளாக காரணி படுத்த முடியாது. எனவே

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+1} \text{ என்க ... (1)}$$

இருபுறமும் $(x-1)(x^2+1)$ ஆல் பெருக்குக

$$2x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) \text{ ... (2)}$$

$x=1$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$2+1 = A(1+1)+0$$

$$\therefore A = \frac{3}{2}$$

$x=0$ என (2) –ல் பிரதியிட

$$0+1 = A(0+1)+(0+C)(-1)$$

$$1 = A - C$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

x^2 இன் கெழுக்களை சமன்பாடு (2) இன் இருபுறமும் சமன்படுத்த,

$$A+B = 0$$

$$B = -A$$

$$\therefore B = \frac{-3}{2}$$

A, B மற்றும் C –ன் மதிப்புகளை (1) –ல் பிரதியிட

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{-3}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{3}{2(x-1)}-\frac{3x-1}{2(x^2+1)}$$

பயிற்சி 2.1

கீழ்காணும் பின்னங்களை பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக:

1. $\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$
2. $\dfrac{4x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$
4. $\dfrac{1}{x^2-1}$
5. $\dfrac{x-2}{(x+2)(x-1)^2}$
6. $\dfrac{2x^2-5x-7}{(x-2)^3}$
7. $\dfrac{x^2-6x+2}{x^2(x+2)}$
8. $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$
9. $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)^2}$
10. $\dfrac{1}{(x^2+4)(x+1)}$

2.2 வரிசை மாற்றங்கள்

2.2.1 காரணீயப் பெருக்கம்

ஏதேனும் இயல் எண் n ற்கு, n – ன் காரணீயப் பெருக்கல் என்பது, முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்குத்தொகை என வரையறுக்க படுகிறது. இது குறியீட்டில் $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

> n, என்கிற இயல் எண்ணிற்கு
> $n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\times2\times1$

எடுத்துக்காட்டாக,

$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

$4! = 4\times3\times2\times1=24$

$3! = 3\times2\times1=6$

$2! = 2\times1=2$

$1! = 1$

குறிப்பு

$0! = 1$

ஏதேனும் இயல் எண் n க்கு

$$n! = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\times2\times1$$

$$= n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)!$$

குறிப்பாக, $8! = 8\times(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)$

$= 8\times7!$

எடுத்துக்காட்டு 2.8

கீழ்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க:

(i) $\frac{7!}{6!}$ (ii) $\frac{8!}{5!}$ (iii) $\frac{9!}{6!3!}$

தீர்வு

(i) $\frac{7!}{6!} = \frac{7\times6!}{6!} = 7$

(ii) $\frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336$

(iii) $\frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

எடுத்துக்காட்டு 2.9

$7!$ –ஐ $5!$ –ன் காரணீயப் பெருக்கலாக மாற்றி எழுதுக.

தீர்வு

$7! = 7\times6!$

$= 7\times6\times5! = 42\times5!$

எடுத்துக்காட்டு 2.10

$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{n}{11!}$ எனில் n –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!} = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!}+\frac{1}{10\times9!} = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!}\left[1+\frac{1}{10}\right] = \frac{n}{11!}$$

$$\frac{1}{9!}\times\frac{11}{10} = \frac{n}{11!}$$

$$n = \frac{11!\times11}{9!\times10}$$

$$= \frac{11!\times11}{10!}$$

$$= \frac{11\times10!\times11}{10!}$$

$$n = 121$$

2.2.2 எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்

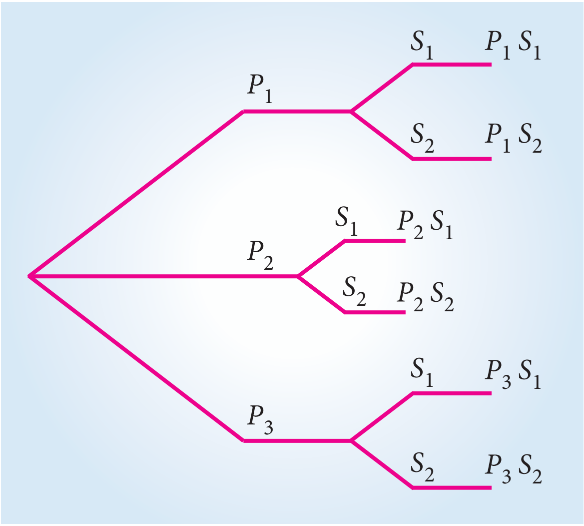
பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை:

மூன்று நுழைவாயில்களும், வெளியேறுவதற்கு இரண்டு வாயில்களும் உள்ள விழா மண்டபத்தை கருத்தில் கொள்வோம். வரும் ஒரு நபர் எத்தனை வழிகளில் விழா மண்டபத்திற்கு உள்ளே சென்று வெளியேறலாம் என்பதற்கான விடையைக் காண்பது நமது நோக்கமாகும்.

இந்த கணக்கில், மண்டபத்தின் மூன்று நுழைவாயில்களை முறையே P_1, P_2 மற்றும் P_3 எனக் கொள்வோம். விழா மண்டபத்தை விட்டு வெளியேறும் வழிகளை S_1 மற்றும் S_2 எனக் கொள்வோம்.

விழா மண்டபத்திற்கு வரும், ஒரு நபர் P_1 அல்லது P_2 அல்லது P_3 என்ற ஏதேனும் ஒரு நுழைவாயில் வழியாக, 3 வழிகளில் உள்ளே செல்லலாம். மண்டபத்திற்குள் சென்றவுடன், S_1 அல்லது S_2 என்ற ஏதேனும் ஒரு வாயில் வழியாக, (இரு வழிகளில்) வெளியேறலாம். விழா மண்டபத்திற்கு சென்று வெளியேறும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை $3 \times 2 = 6$ வழிகள்

மேற்காணும் சூழ்நிலைப் போன்று நடைமுறை வாழ்க்கையில் பல்வகை கணக்குகளின், தீர்வு காண, நாம் பயன்படுத்தும் கொள்கையே, பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையாகும்.



படம் 2.1

வரையறை 2.1

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளில் ஒன்றை m வழிகளிலும் மற்றொன்றை n வழிகளிலும் செய்யமுடியும் எனில், இரு பணிகளையும் ஒருங்கே, தொடர்ந்து $m \times n$ வழிகளில் செய்ய முடியும் என்பதே **பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கை** ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

'NOTE' என்ற ஆங்கிலச் சொல்லில் உள்ள நான்கு எழுத்துக்களைக் கொண்டு, எழுத்துக்கள் மீண்டும் வராதவாறு, அர்த்தமற்ற அல்லது அர்த்தம் உடைய வார்த்தைகள் எத்தனை உருவாக்கலாம்?

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட ஆங்கில வார்த்தை 'NOTE' –ல் உள்ள நான்கு எழுத்துக்களை, கீழ்கண்டவாறு நான்கு காலியிடங்களை கொண்டு குறிப்போம்

1	2	3	4

படம் 2.2

முதல் காலியிடத்தை, நான்கு எழுத்துக்களை கொண்டு, நான்கு வழிகளில் நிரப்பலாம். எழுத்துக்களை மீண்டும் ஒருமுறை பயன்படுத்த முடியாததால், இரண்டாம் காலியிடத்தை 3 முறைகளிலும் மூன்றாம் காலியிடத்தை இரண்டு வழிகளிலும், கடைசி இடத்தை ஒரு வழியிலும் நிரப்பலாம். பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி உருவாக்கப்படும் மொத்த வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ வார்த்தைகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.12

ஒவ்வொரு குறிக்கோள் வினாவும் நான்கு வாய்ப்புகளை பெற்றிருப்பின், நான்கு வினாக்களுக்கு, மொத்தம் எத்தனை வழிகளில் விடையளிக்கலாம்?

தீர்வு

ஒவ்வொரு வினாவிற்கும், 4 விடைகள் உண்டு, ஆதலால், ஒவ்வொரு வினாவையும் நான்கு வழிகளில் விடையளிக்கலாம். எனவே, நான்கு வினாக்களுக்கு $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ வழிகளில் விடையளிக்கலாம்

எடுத்துக்காட்டு 2.13

இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை மூன்று இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம் ?

தீர்வு

ஒரு மூன்று இலக்க எண்ணின் மூன்று இலக்கங்களை மூன்று காலியிடங்களைக் கொண்டு குறிப்போம்.

100வது இடம்	10வது இடம்	ஒன்றாவது இடம்
1	2	3

படம் 2.3

எந்த ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணையும் பூச்சியத்தில் தொடங்க இயலாது. ஆதலால், நூறாவது இலக்கத்தினை 1லிருந்து 9 வரை உள்ள இலக்கங்களை பயன்படுத்தி 9 வழிகளில் நிரப்பலாம்.இலக்கங்களை மீண்டும் பயன்படுத்த இயலாது.ஆதலால் 10 வது இலக்கத்தினை, 0 உட்பட மீதம் உள்ள இலக்கங்களை கொண்டு 9 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம். இவ்வாறே ஒன்றாவது இலக்கத்தினை 8 வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம்.

பெருக்கல் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி, மொத்த மூன்றிலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை $= 9 \times 9 \times 8 = 648$ எண்கள் ஆகும்.

2.2.3 கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை

இக்கொள்கையை விளக்குவதற்கு, மற்றுமொரு சூழ்நிலையைக் கருதுவோம். ஒரு வகுப்பில் 10 மாணவர்களும், 8 மாணவிகளும் உள்ளனர். மேற்கண்ட மாணவர்களின் வகுப்பாசிரியர், அந்த வகுப்பின் சார்பாக ஒரு மாணவன் அல்லது ஒரு மாணவியை ஒரு விழாவிற்கு அனுப்ப விரும்புகிறார்.எத்தனை வழிகளில் இருபாலரில் ஒருவரைத் தேர்வு செய்து அனுப்பலாம் என்பதற்கான தீர்வைக் காண்போம்.

கீழ்கண்ட இரு வழிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை வகுப்பாசிரியர் தேர்வு செய்யலாம்.

(i) 10 மாணவர்களில் இருந்து ஒருவரை பத்து வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் (அல்லது)

(ii) 8 மாணவிகளில் இருந்து ஒருவரை எட்டு வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்

10 மாணவர்களிலிருந்து ஒருவரை 10 வழிகளிலும், 8 மாணவிகளிலிருந்து ஒருவரை 8 வழிகளிலிருந்தும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். விழாவிற்கு ஒருவரை தேர்ந்தெடுக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை 10+8 = 18 வழிகள்.

இவ்வகை கணக்குகளை, தீர்ப்பதற்கான கொள்கை "கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை" எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக, சார்பற்ற முறையில், முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், இரண்டு பணிகளையும் $(m+n)$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும். இதுவே கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை எனப்படும்.

வரையறை 2.2

கொடுக்கப்பட்ட இரு பணிகளைத் தனித்தனியாக, சார்பற்ற முறையில், முறையே m, n வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியுமானால், இரண்டு பணிகளையும் $(m+n)$ வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும். இதுவே **கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கை** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14

புத்தக விற்பனை கடையில், 6 வணிகவியல் புத்தகமும், 5 கணக்குப்பதிவியல் புத்தகமும் உள்ளன. புத்தகம் வாங்க விரும்பும் ஒரு மாணவன் புத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை எத்தனை வழிகளில் வாங்கலாம்?

தீர்வு

6 வணிகவியல் புத்தகங்களில் ஒன்றை 6 வழிகளில் வாங்கலாம்.

5 கணக்குப் பதிவியல் புத்தகங்களில் ஒன்றை 5 வழிகளில் வாங்கலாம். கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி இவ்விரு பாடபுத்தகங்களில் ஏதேனும் ஒன்றை 5+6=11 வழிகளில் வாங்கலாம்.

பயிற்சி 2.2

1. $\dfrac{1}{6!}+\dfrac{1}{7!}=\dfrac{x}{8!}$ எனில் x– ன் மதிப்பைக் காண்க

2. $n = 5$ மற்றும் $r = 2$ எனும்பொழுது $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ – ன் மதிப்பைக் காண்க.

3. $(n+2)! = 60[(n-1)!]$, எனில் n – ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. 0 முதல் 9 வரை உள்ள இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி 67 என்ற எண்ணில் தொடங்குமாறு எந்த இலக்கமும் ஒரு தடவைக்கு மேல் திரும்ப தோன்றாமல், எத்தனை 5 இலக்க தொலைபேசி எண்களை உருவாக்க முடியும்?

5. 5, 6, 7, 8 மற்றும் 9 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு. இலக்கங்கள் திரும்ப வராதவாறு, 1000க்கும் குறைவான எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம்?

2.2.4 வரிசை மாற்றங்களின் வரையறை (Permutations)

ஓர் உதாரணத்திற்கு, “ஆப்பிள், திராட்சை, மற்றும் வாழைப்பழங்கள்” ஆகிய கனிகளால் உருவாக்கப்பட்ட “கனித்துண்டுகளின் கலவை” (Fruit salad) எடுத்துக்கொள்வோம். கனித்துண்டுகளின் கலவையில் பழத்துண்டுகள் எந்த வரிசையில் சேர்க்கப்படுகின்றன என்பது முக்கியமல்ல. எந்த வரிசையில் இப்பழத்துண்டுகள் சேர்க்கப்பட்டாலும் நாம் ஒரே மாதிரி சுவையுள்ள கனித்துண்டுகளின் கலவையையே பெறுவோம்.

ஆனால், எண்குறியீடு 395 உள்ள ஒரு எண் பூட்டை (number lock) எடுத்துக் கொள்வோம். எண்குறியீட்டை மூன்று முறைக்கு மேல் தவறாக முயற்சித்தால்,

பூட்டானது நிரந்தரமாக பூட்டிக்கொள்ளும். இச்சூழ்நிலையில், 395 என்ற எண்குறியீட்டின் வரிசை மிகவும் முக்கியமானது.

395 என்ற குறியீட்டிற்கு பதிலாக, 3 – 5 – 9 அல்லது 9-5-3 என்று இலக்கங்களின் வரிசையை மாற்றி உள்ளீடு செய்தால் பூட்டைத் திறக்க முடியாது. எண்குறியீட்டை மிகச் சரியாக 3 - 9 - 5 என உள்ளீடு செய்தால் மட்டுமே, எண் பூட்டை திறக்க முடியும்.

நடைமுறை வாழ்க்கையில், மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளை போன்ற சூழ்நிலைகளை எதிர்கொள்ள வரிசைமாற்றங்கள் (permutations) பற்றி அறிந்துகொள்வோம்.

வரையறை 2.3

n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் விதங்களின் எண்ணிக்கையை n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 1, 2, 3 என்ற மூன்று இலக்கங்களைக்கொண்டு உருவாக்கப்படும் மூன்று இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். அவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட மூன்றிலக்க எண்கள் பின்வருமாறு

123, 132, 231, 213, 312, 321

குறியீடு: $n \geq 1$, $0 \leq r \leq n$, எனுமாறு உள்ள n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $P(n,r)$ (அல்லது) nP_r என குறிக்கப்படுகிறது.

நிரூபணமின்றி கீழ்கண்ட தேற்றத்தை நாம் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் : $np_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

எடுத்துக்காட்டு 2.15

$5P_3$ மற்றும் $P(8, 5)$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

$$5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

$$\begin{aligned} P(8,5) &= 8P_5 \\ &= \frac{8!}{(8-5)!} \\ &= \frac{8!}{3!} \\ &= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!} = 6720 \end{aligned}$$

முடிவுகள்

(i) $0! = 1$

(ii) $np_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

(iii) $np_1 = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

(iv) $np_n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

(v) $np_r = n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,[n-(r-1)]$

எடுத்துக்காட்டு 2.16

மதிப்பு காண்க : (i) $8P_3$ (ii) $5P_4$

தீர்வு

(i) $8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$

(ii) $5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

சுவற்றின் மீதுள்ள 5 ஆணிகளில் 7 படங்களை எத்தனை வழிகளில் பொருத்தலாம்?

தீர்வு

சுவற்றின் மீதுள்ள 5 ஆணிகளில் 7 படங்களை பொருத்துவது என்பது, ஏழு படங்களில் ஒரே நேரத்தில் ஐந்து படங்களை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 7P_5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$ வழிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.18

“LOGARITHMS” என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி, (எழுத்துக்களை மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு

அர்த்தம் உள்ள அல்லது அர்த்தமற்ற) 4 எழுத்து வார்த்தைகள் எத்தனை அமைக்கலாம் ?

தீர்வு

LOGARITHMS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை 10

எனவே $n = 10$

4 எழுத்து வார்த்தைகளை நாம் காணவேண்டி உள்ளதால், $r = 4$

எனவே தேவையான வார்த்தைகள்

$$np_r = 10\,p_4$$
$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7$$
$$= 5040$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$nP_r = 360$, எனில் n, r–ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$$nP_r = 360 = 36 \times 10$$
$$= 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2$$
$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 6P_4$$

எனவே $n = 6$ மற்றும் $r = 4$

மீண்டும், மீண்டும் வருகின்ற பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள்:

n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களினை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பொருட்களை மீண்டும் இடம்பெற அனுமதிக்கும்பொழுது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.20

1, 2, 3, … , 9 வரையுள்ள ஒன்பது இலக்கங்களைக் கொண்டு, இலக்கங்கள் திரும்ப இடம்பெறுமாறு எத்தனை மூன்றிலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?

தீர்வு

இங்கு இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 9

எனவே $n = 9$ மற்றும் $r = 3$

தேவைப்படும் மூன்றிலக்க எண்கள் $= n^r$

$= 9^3 = 729$ எண்கள்

பலமுறை வரும் வெவ்வேறு பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்கள்:

n பொருட்களில் p பொருட்கள் ஒருவகையாகவும், q பொருட்கள் மற்றொரு வகையாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம். இங்கு$p + q = n$ எனில் n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்தையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{p!\,q!}$

பொதுவாக n பொருட்களில் p_1 பொருட்கள் முதல் வகையாகவும், p_2 பொருள்கள் இரண்டாம் வகையாகவும், p_3 பொருள்கள் மூன்றாம் வகையாகவும், … p_k பொருள்கள் k ஆவது வகையாகவும் இருப்பதாக கொள்வோம். மேலும் $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$. எனில், அனைத்து பொருள்களையும் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலம் உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை = $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.21

(i) MISSISSIPPI (ii) MATHEMATICS என்ற வார்த்தைகளில் உள்ள அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி, எத்தனை வார்த்தைகள் அமைக்கலாம் ?

தீர்வு

(i) MISSISSIPPI என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை = 11

இந்த வார்த்தையில்

M என்ற எழுத்து ஒருமுறையும்

I என்ற எழுத்து 4 முறையும்

S என்ற எழுத்து 4 முறையும்

P என்ற எழுத்து 2 முறையும்

இடம்பெறுகிறது.

அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

$$n = \frac{11!}{4!\,4!\,2!}$$

(ii) MATHEMATICS என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை = 11

M என்ற எழுத்து 2 முறையும்

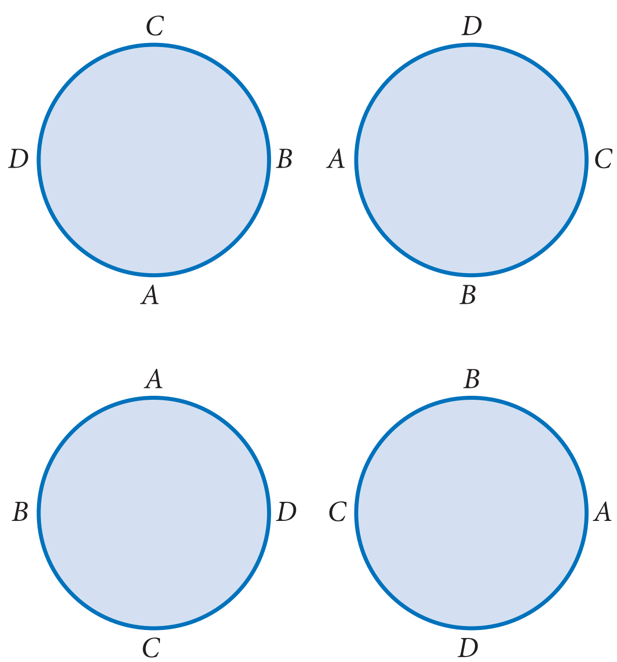
T என்ற எழுத்து 2 முறையும்

A என்ற எழுத்து 2 முறையும் மீதமுள்ள எழுத்துக்கள் தலா ஒரு முறையும் இடம்பொறுகிறது.

எனவே அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{11!}{2!\,2!\,2!}$

2.2.5 வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் (Circular permutation)

சென்ற பிரிவில், நேர்கோட்டின் மீதான n பொருள்களின் வரிசை மாற்றங்களை பற்றிய விவரங்களை பயின்றோம். அவைகள் நேரிய வரிசை மாற்றங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றது. தற்பொழுது n பொருட்களின், வட்டத்தின் மீதான வரிசை மாற்றங்களைக் காண்போம். இவை வட்ட வரிசை மாற்றம் எனப்படுகிறது.



படம் 2.4

A, B, C, D என்ற நான்கு எழுத்துக்களை கருதுவோம். இந்த நான்கு எழுத்துக்களின் நேர் கோட்டின் மீதான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 4! ஆகும். இந்த 4! வரிசைமாற்றங்களில் கீழ்கண்ட நேர்கோட்டின் மீதான நான்கு வரிசைப்படுத்துதலைக் கருதுக, ABCD, BCDA, CDAB, DABC என்பனவற்றை வட்டத்தின் மீது வரிசைப்படுத்தினால் இவை அனைத்தும் ஒரே வரிசைப் படுத்துதலை குறிக்கும் என்பதை கீழ்கண்ட படத்தின்மூலம் காணலாம்.

எனவே, '4' பொருள்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{4!}{4} = 3!$

பொதுவாக, n வெவ்வேறு பொருள்களின் அனைத்து பொருள்களையும் ஒரே நேரத்தில் எடுத்துக்கொண்டால், அமைக்கப்படும் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= (n-1)!$ ஆகும்

குறிப்பு

வட்ட வரிசை மாற்றங்கள் வலச்சுற்று, இடச்சுற்று வேறுபாடின்றி இருப்பின் பொருள்களின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{(n-1)!}{2}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

8 மாணவர்களை எத்தனை வழிகளில்

(i) நேர்க்கோட்டின் மீது வரிசைப்படுத்தலாம்

(ii) வட்டவடிவில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

தீர்வு

(i) 8 மாணவர்களின் நேர்கோட்டின் மீதான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 8P_8 = 8!$ வழிகள்

(ii) மாணவர்கள், வட்டத்தின் மீதான வரிசை படுத்தும்போது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(8-1)! = 7!$ (இங்கு வலச்சுற்றுக்கும், இடச்சுற்றுக்கும் வேறுபாடு காண இயலும்)

எடுத்துக்காட்டு 2.23

ஒரே மாதிரியான 10 சாவிகளை, ஒரு வளையத்தில் எத்தனை வகைகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்?

02_11th_BM-STAT_Ch-2-TM.indd 36 20-04-2020 05:06:58 PM

தீர்வு

சாவிகள் அனைத்தும் ஒரே மாதிரியானது. ஆதலால் வளையத்தில் வரிசைப்படுத்தும் பொழுது, வலச்சுற்றுக்கும் இடச்சுற்றிற்கும் வேறுபாடுகளை காண இயலாது. எனவே, சாவிகளின் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{(10-1)!}{2} = \frac{9!}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

ஆங்கில அகராதியில் உள்ள 'RANK' என்ற வார்த்தையின் தரம் காண்க.

தீர்வு

'RANK' என்ற ஆங்கில வார்த்தையைக் கொண்டு உருவாக்கப்படும், வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 4!

இந்த வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களை அகர வரிசையில் A, K, N, R என வரிசைப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

அகராதியில் உள்ள வார்த்தையின் தரம்

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஆங்கில வார்த்தையின், தரம் காண்பதற்கு, ஆங்கில வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களை அகர வரிசையில் வரிசைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். தரம் காணும்பொழுது உருவாக்கப்படும் வார்த்தைகள் அர்த்தம் உள்ளதாகவோ, அர்த்தமற்றதாகவோ இருக்கலாம்

A-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$

K-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$

N-ஐக் கொண்டு தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$

RAKஎனத் தொடங்கும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை $= 1! = 1$

RANK என்ற வார்த்தை $= 0! = 1$

$\therefore$ கூட்டலின் அடிப்படைக் கொள்கைப்படி RANK என்ற வார்த்தையின் தரம்

$$6 + 6 + 6 + 1+1 = 20$$

பயிற்சி 2.3

1. $nP_4 = 12(nP_2)$, எனில், n–ன் மதிப்பு காண்க,
2. இரண்டு சிறுமிகள் சேர்ந்து அமராதவாறு, 5 சிறுவர்கள் மற்றும் 3 சிறுமிகளை ஒரு வரிசையில் எத்தனை வழிகளில் அமரவைக்கலாம் ?
3. 0 முதல் 9 வரை உள்ள 10 இலக்கங்களைக் கொண்டு, 35 என்ற எண்ணில் தொடங்கும், 6 இலக்க தொலைபேசி எண்களில், இலக்கங்கள் மீண்டும் இடம்பெறாதவாறு, எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?
4. "ASSASSINATION" என்ற வார்த்தையில் உள்ள அனைத்து எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி எத்தனை வார்த்தைகளை உருவாக்கலாம் ?
5. (a) ஒரே வகையான 8 மணிகளை எத்தனை வழிகளில், ஆபரண மாலையில் கோர்க்கலாம்?

   (b) 8 சிறுவர்களைக் கொண்டு எத்தனை வளையங்களை உருவாக்கலாம்?
6. ஆங்கில அகராதியில் 'CHAT' என்ற வார்த்தையின் தரத்தைக் காண்க

2.3 சேர்வுகள் (Combinations)

சேர்வுகள் என்பது தேர்ந்தெடுக்கும் வரிசையை கணக்கில் கொள்ளாமல் பொருட்களை ஒரு தொகுப்பிலிருந்து தேர்ந்தெடுப்பதாகும். அதாவது பொருட்களின் வரிசையை பொருட்படுத்தாமல் பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும் செயலாகும். நான்கு நபர்கள் A, B, C மற்றும் D என்க. இவர்களில் A மற்றும் B யைத் தேர்ந்தெடுப்பதும், B மற்றும் A யைத் தேர்ந்தெடுப்பதும் இரு வேறு தேர்வாக கருத முடியாது. தேர்வு செய்யப்படும் நபர்களின் வரிசை முக்கியமல்ல. கொடுக்கப்பட்ட நான்கு

02_11th_BM-STAT_Ch-2-TM.indd 37 20-04-2020 05:06:58 PM

நபர்களில் 2 அலுவலக ஊழியர்களை 6 வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம். அவை AB, AC, AD, BC, BD, CD என்பனவாகும். மேற்கண்டவாறு செயல்படுத்தப்படும் பல்வேறு தேர்வுகளில் செயல்முடிவுகள் சேர்வுகள் எனப்படும். அதாவது, $4C_2 = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$

திரும்பத் திரும்ப வராத பல்வேறு தேர்வுகளின் முறை என்பது சேர்வுகள் என வழங்கப்படும்

வரையறை 2.4

சேர்வுகள் என்பது n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை ஒரே நேரத்தில் திரும்பத் திரும்ப வராமல் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையாகும்.

n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை nC_r வழிகளில் தேர்ந்து எடுக்கலாம். இங்கு $n \neq 0$ ஆனால் $r = 0$ ஆக இருக்கலாம்.

nC_r –ன் மதிப்பு

$$nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \ n \geq 1, 0 \leq r \leq n$$

உதாரணத்திற்கு 5 பந்துகளில் இருந்து 3 பந்துகளை $5C_3$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$$5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \left(\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}\right)$$

$= 10$ வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$8C_2$ –ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

$$8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

வரிசை மாற்றங்கள் என்பது பட்டியல் படுத்துவது (வரிசை அவசியம்)

சேர்வுகள் என்பது குழுவிற்கானது (வரிசை அவசியம் அற்றது))

பண்புகள்

(i) $nC_0 = nc_n = 1$

(ii) $nC_1 = n$

(iii) $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$

(iv) $nC_x = nC_y$, எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n$

(v) $nC_r = nC_{n-r}$

(vi) $nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r$

(vii) $nC_r = \frac{np_r}{r!}$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$nC_4 = nC_6$ எனில் $12C_n$ –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$nC_x = nC_y$, எனில் $x + y = n$ என்ற பண்பின்படி

$nC_4 = nC_6$ எனில்,

$$n = 4 + 6 = 10$$

$$12C_n = 12C_{10}$$

$$= 12C_2$$

$$= \frac{12\times11}{1\times2} = 66$$

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$nP_r = 720$ மற்றும் $nC_r = 120$ எனில் r –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$nC_r = \frac{nP_r}{r!}$ என்ற தொடர்பின்படி

$$120 = \frac{720}{r!}$$

$$r! = \frac{720}{120} = 6 = 3!$$

$$\Longrightarrow r = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 2.28

$15C_{3r} = 15C_{r+3}$ எனில் r –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$$15C_{3r} = 15C_{r+3}$$

$$nC_x = nC_y \implies x + y = n,$$

என்ற பண்பிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$3r + r + 3 = 15$$

$$\implies \quad r = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

32 மாணவர்களை கொண்ட ஒரு வகுப்பிலிருந்து நான்கு மாணவர்கள், ஒரு போட்டித் தேர்வில் பங்கேற்க தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார்கள். இவர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

தீர்வு

32 மாணவர்களிலிருந்து 4 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 32C_4$$

$$= \frac{32!}{4!\,(32-4)!}$$

$$= \frac{32!}{4!\,(28)!}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

ஒரு வினாத்தாளில் பிரிவு (அ), பிரிவு (ஆ) என்ற இரு பிரிவுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் 10 வினாக்கள் உள்ளன. வினாத்தாளுக்கு விடையளிக்கும் ஒரு மாணவன், பகுதி (அ) –விலிருந்து 8 வினாக்களுக்கும், பகுதி (ஆ) –விலிருந்து 5 வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும் எனில், எத்தனை வழிகளில், அம்மாணவர், வினாக்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

தீர்வு

வினாத்தாளில் பகுதி (அ) –விலிருந்து 8 வினாக்களை $10C_8$ வழிகளிலும். பகுதி (ஆ)–வில் உள்ள 10 வினாக்களிலிருந்து 5 வினாக்களை $10C_5$ வழிகளிலும் தேர்ந்தெடுக்கலாம். எனவே பெருக்கல் கொள்கை விதிப்படி மொத்த தேர்வுகளின் எண்ணிக்கை

$$10C_8 \times 10C_5 = 10C_2 \times 10C_5$$

$$= \frac{10\times 9}{2\times 1} \times \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}$$

$= 11340$ வழிகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.31

4 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர்கள் (wicket keeper) உள்ளடக்கிய 16 கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர்கள் குழுவிலிருந்து குறைந்தது 11 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் அணி உருவாக்கப்படுகிறது. குறைந்தது 3 பந்து வீச்சாளர்கள் மற்றும் குறைந்தது ஒரு இலக்கு நிலை காப்பாளர் கொண்ட 11 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

தீர்வு

11 விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய கிரிக்கெட் குழுவை கீழ்க்கண்ட வழிகளில் அமைக்கலாம்.

(i) 3 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 7 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_3 \times 2C_1 \times 10C_7$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

$$4C_3 \times 2C_1 \times 10C_7 = 4C_1 \times 2C_1 \times 10C_3$$

$= 960$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(ii) 3 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர்கள் மற்றும் 6 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_1 \times 2C_2 \times 10C_6$

$$4C_1 \times 2C_2 \times 10C_6 = 4C_1 \times 2C_2 \times 10C_4$$

$= 840$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(iii) 4 பந்து வீச்சாளர்கள், 1 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 6 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு $4C_4 \times 2C_1 \times 10C_6$

$$4C_4 \times 2C_1 \times 10C_4$$

$= 420$ வழிகளில் அமைக்கலாம்

(iv) 4 பந்து வீச்சாளர்கள், 2 இலக்கு நிலை காப்பாளர் மற்றும் 5 ஏனைய விளையாட்டு வீரர்கள் அடங்கிய குழு

$4C_4 \times 2C_2 \times 10C_5$

$4C_4 \times 2C_2 \times 10C_5$

= 252 வழிகளில் அமைக்கலாம்.

கூட்டலின் எண்ணுதல் கொள்கைப்படி, கிரிக்கெட் குழுவை அமைக்கும் மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை

= 960+840+420+ 252

= 2472 வழிகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.32

$4(nC_2) = (n+2)C_3$, எனில் n–ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned} 4(nC_2) &= (n+2)C_3 \\ 4\frac{n(n-1)}{1\times 2} &= \frac{(n+2)(n+1)(n)}{1\times 2\times 3} \\ 12(n-1) &= (n+2)\ (n+1) \\ 12(n-1) &= (n^2+3n+2) \\ n^2-9n+14 &= 0 \\ (n-2)(n-7) &= 0 \Rightarrow n=2, n=7 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33

$(n+2)C_n = 45$ எனில் n – ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned} (n+2)C_n &= 45 \\ (n+2)C_{n+2-n} &= 45 \\ (n+2)C_2 &= 45 \\ \frac{(n+2)(n+1)}{2} &= 45 \\ n^2+3n-88 &= 0 \\ (n+11)(n-8) &= 0 \\ n &= -11, 8 \end{aligned}$$

n, குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$$\therefore n = 8$$

பயிற்சி 2.4

1. $nP_r = 1680$, $nC_r = 70$ எனில் n மற்றும் r –ன் மதிப்பைக் காண்க.
2. $8C_4 + 8C_3 = 9C_4$ என்பதை சரிபார்.
3. வட்டத்தின் மீதுள்ள 21 புள்ளிகள் வழியாக எத்தனை நாண்கள் வரையலாம்?
4. ஓர் அறுகோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளை இணைத்து எத்தனை முக்கோணங்கள் வரையலாம்?
5. 7 ஆங்கில மெய்யெழுத்துகள் மற்றும் 4 ஆங்கில உயிரெழுத்துகளிலிருந்து, 3 மெய்யெழுத்துகள் மற்றும் இரண்டு உயிரெழுத்துகளை தேர்ந்தெடுத்து, எத்தனை வார்த்தைகள் உருவாக்கலாம்?
6. 4 பகடைகள் உருட்டப்படுகிறது எனில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பகடையாவது 2 என்ற எண் தோன்றுமாறு கிடைக்கபெறும் அனைத்துவிதமான சாத்தியக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை யாது?
7. ஒரு விருந்தில் 18 விருந்தினர்கள் கலந்து கொள்கிறார்கள். ஒரு நீண்ட மேசையில் இருபுறமும், பக்கத்திற்கு 9 பேர் வீதம் அமரவைக்கப்படுகிறார்கள், அவர்களில் குறிப்பிட்ட 3 பேர் ஒரு குறிப்பிட்ட பக்கத்திலும், மேலும் இரண்டு பேர் மேசையின் மற்றொரு பக்கத்திலும் அமர விரும்புகிறார்கள் எனில் எத்தனை வழிகளில் விருந்தினர்களை அமர வைக்கலாம்?
8. ஒரு பலகோணம் 44 மூலை விட்டங்களைப் பெற்றிருப்பின் அப்பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை கண்டுபிடி?
9. 15 பேர் அடங்கிய கிரிக்கெட் விளையாட்டு வீரர்கள் குழுவில் இருந்து 11 பேர் அடங்கிய குழுவை கீழ்க்கண்டவாறு எத்தனை வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்?

   (i) வீரர்களை தேர்வு செய்வதில் எந்த வித நிபந்தனைகளும் இல்லை.

(ii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் எப்பொழுதும் குழுவில் இடம் பெறுவார்.

(iii) ஒரு குறிப்பிட்ட வீரர் எப்பொழுதும் குழுவில் இடம் பெறமாட்டார்.

10. 6 ஆண்கள் மற்றும் 4 பெண்களிலிருந்து 5 பேர் அடங்கிய குழு, கீழ்க்கண்டவாறு

(i) குழுவில் குறைந்தது இரண்டு பெண்கள் இடம் பெறுமாறும்

(ii) குழுவில் அதிகபட்சம் இரண்டு பெண்கள் இடம் பெறுமாறும்

எத்தனை வகைகளில் அமைக்கலாம்.

2.4 கணிதத் தொகுத்தறிதல் (Mathematical induction)

n என்ற மிகை முழுக்கள் எண்களைக் கொண்டு அமைக்கும் பல்வேறு கணிதக் கூற்றினை நிரூபிக்கப் பயன்படும் ஒரு உத்தியே கணிதத் தொகுத்தறிதல் எனப்படும்.

இயற்கணிதம், வடிவியல், மற்றும் பகுப்பாய்வு ஆகியவற்றின் கூட்டுதலின் உண்மை தன்மையை நிறுவ, கணித்தொகுத்தறிதல் முறை பயன்படுகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் முதன்மைக் கொள்கை:

ஒவ்வொரு இயல் எண் n – க்கும் தகுந்த ஒரு கூற்றினை $P(n)$ என்க.

(i) **ஆரம்பநிலை:** $n = 1$ எனும்பொழுது $P(1)$ என்பது உண்மையாகும். (ஏதேனும் நிலையான இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும்) மற்றும்

(ii) **தொகுத்தறிதல் நிலை:** $n = k$ எனும்பொழுது கூற்று உண்மையெனில் (இங்கு k என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட, ஆனால் தன்னிச்சையான இயல் எண்) $n = k + 1$ என்பதற்கும் இக்கூற்று உண்மையாகும். அதாவது, கூற்று $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ –ம் உண்மையாக இருக்கும். ஆகவே $P(n)$ என்பது அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் உண்மையாகும் என்பது கணிதத் தொகுத்தறிதலின் முதன்மைக் கொள்கையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.34

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையில்

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, (அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்ற கூற்று கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

$$n \in N \text{ க்கு } P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ என்க.}$$

படி 1: $n = 1$ என பிரதியிடவும்

$P(1)$ –ன் LHS $= 1$

$P(1)$ –ன் RHS $= \frac{1(1+1)}{2} = 1$

LHS = RHS

$\therefore$ $P(1)$ என்பது உண்மையாகும்.

படி 2: $n = k$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

i.e., $P(k)$ என்பது உண்மையாகும்.

$P(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ என்பது உண்மையாகும்.

படி 3: $P(k+1)$ என்பது உண்மையென நிரூபிக்க

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) \\ &= P(k) + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ $P(k+1)$ என்பது உண்மையாகும்.

இவ்வாறாக $P(k)$ என்பது உண்மையெனில் $P(k+1)$ என்பது உண்மையாகும்.

$\therefore$ $P(n)$ என்பது அனைத்து $n \in N$ க்கும் உண்மையாகும்.

ஆகவே $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$ என்ற கூற்று உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.35

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$(அனைத்து $n \in N$) என நிரூபி.

தீர்வு

$P(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ என்க.

$n = 1$ எனும் பொழுது

$P(1)$ –ன் LHS = 1

$P(1)$ –ன் RHS = 1^2

= 1

LHS = RHS

$\therefore$ $P(1)$ உண்மையாகும்.

$P(k)$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

$P(k) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$

எனவே $P(k+1)$ என்பது உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$P(k+1)$ –ன்

$$\text{LHS} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1)$$
$$= P(k) + (2k+1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k+1)^2 = \text{RHS}$$

$P(k)$ உண்மையெனில் $P(k + 1)$ உண்மையாகும்.

$\therefore$ தொகுத்தறிதலின் விதிப்படி n –ன் எல்லா இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.36

கணிதத் தொகுத்தறிதலின் படி

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்பது குறிக்கும் கூற்று :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

என்க

$n = 1$ என பிரதியிட

$P(1)$–ன் LHS $= 1^2$

$= 1$

$P(1)$–ன் RHS $= \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$

$= 1$

LHS = RHS

$\therefore$ $P(1)$ உண்மையாகும்.

$P(k)$ என்பதை உண்மை என எடுத்துக்கொள்க

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$P(k+1)$ –ன்

$$\text{LHS} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$
$$= p(k) + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \text{RHS}$$

$\therefore$ $P(k)$ உண்மையென்றால் $P(k+1)$ உண்மையாகும்.

$\therefore$ அனைத்து இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.37

$2^{3n}-1$ என்பது "7 ஆல் வகுபடும்" (அனைத்து $n \in N$) என நிரூபி.

தீர்வு

$P(n) = 2^{3n}-1$ என்க

படி 1: $n = 1$ என பிரதியிட

$\therefore$ $P(1) = 2^3-1$

= 7 (7 ஆல் வகுபடும் எண்)

$P(1)$ உண்மை ஆகும்.

படி 2: $n = k$ என்பதற்கு மேற்கண்டகூற்று உண்மை என்க.

$P(k) = 2^{3k}-1$,7 ஆல் வகுபடும் எண் என்க.

ஏதேனும் ஒரு $m \in N$ க்கு

$2^{3k}-1 = 7m$ என்க. ... (1)

படி 3: $P(k + 1)$ உண்மை என நிரூபிக்க வேண்டும்

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^{3(k+1)}-1 \\ &= 2^{(3k+3)}-1 \\ &= 2^{3k}\cdot 2^3-1 \\ &= 2^{3k}\cdot 8-1 \\ &= 2^{3k}\cdot(7+1)-1 \\ &= 2^{3k}\cdot 7+(2^{3k}-1) \\ &= 2^{3k}\cdot 7+7m=7(2^{3k}+m) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 7 ஆல் வகுபடும் எண்

எனவே, $P(k+1)$ –ம் உண்மை ஆகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதல் விதிப்படி $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k+1)$ –ம் உண்மை ஆகிறது.

$\therefore$ n–ன் அனைத்து இயல் மதிப்புகளுக்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.38

கணிதத் தொகுத்தறிதல் விதிப்படி $n^2 + n$ ஒரு "இரட்டைப்படைஎண்" (அனைத்து $n \in N$) என நிறுவுக.

தீர்வு

$P(n)$ என்பது n^2+n என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$n = 1$ என பிதியிடவும்

$P(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$
ஒரு இரட்டைப்படை எண்.

$P(k)$ என்பது உண்மை என்க.

$P(k) = k^2 + k$ ஒர் "இரட்டை படை எண்" என்பது உண்மையாகும்

$\therefore P(k) = k^2 + k = 2m, m \in N$ ...(1)

$P(k + 1)$ உண்மை என நிரூபிக்க

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)^2+(k+1) \\ &= k^2+2k+1+k+1 \\ &= k^2+k+2k+2 \\ &= 2m+2(k+1) \text{ by } (1) \\ &= 2(m+k+1) \text{ (ஒர் இரட்டை படை எண்)} \end{aligned}$$

$\therefore$ $(k + 1)^2 + (k + 1)$ ஒர் இரட்டைப் படை எண்

$\therefore$ $P(k)$ உண்மை எனில் $P(k + 1)$ உண்மை ஆகிறது.

$\therefore$ n –ன் எல்லா இயல் மதிப்பிற்கும் $P(n)$ உண்மை ஆகிறது.

பயிற்சி 2.5

கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் அனைத்து $n \in N$ க்கும் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3. $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n+1)$.
4. $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.
5. $3^{2n}-1$ என்பது 8ஆல் வகுபடும்.
6. $a^n - b^n$ என்பது $a - b$ ஆல் வகுபடும்.
7. $5^{2n}-1$ என்பது 24 ஆல் வகுபடும்.
8. $n(n+1)(n+2)$என்பது 6 ஆல் வகுபடும்.
9. அனைத்து இயல் எண்களுக்கும் $2^n > n$.

2.5 ஈருறுப்புத் தேற்றம் (Binomial theorem)

கூடுதல் அல்லது கழித்தல் என்ற செயலிகளால் இணைக்கப்பட்ட இரண்டு உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக்

கோவையானது ஒரு ஈருறுப்புக்கோவை (Binomial) என அழைக்கப்படுகிறது.

$(x+y), (5a-2b), \left(x+\frac{1}{y}\right), \left(p+\frac{5}{p}\right),$ $\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{y^2}\right)$ என்பன ஈருறுப்புக் கோவைக்கான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும்.

ஈருறுப்பு அடுக்குகளை விரிவாக்குதல் என்பது ஈருறுப்புத் தேற்றம் அல்லது ஈருறுப்பு கோவை எனப்படும்.

$(x + y)^n$ என்பதனை ax^by^c என்ற அமைப்பில் உள்ள உறுப்புகளின் கூடுதலாக விரிவாக்கம் செய்ய முடியும். இங்கு b மற்றும் c என்ற அடுக்குகள் $b + c = n$ எனுமாறு உள்ள மிகைமுழுக்களாகும். ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள a என்ற மிகை முழுக்கெழு என்பது ஈருறுப்புக் கெழு என வழங்கப்படும்.

கிரேக்ககணிதமேதையூக்ளிட்என்பரால் பொ.ஆ.மு. 4 ஆம் நூற்றாண்டில் $(x + a)^2$ –ன் விரிவு வழங்கப்பட்டுள்ளது. பொ.ஆ.மு. 6 ஆம் நூற்றாண்டில் $(x+a)^3$ –ன் விரிவு இந்தியாவில் அறியப்பட்டதற்கான ஆதாரம் உள்ளது. 1544–ஆம் ஆண்டு 'மைக்கேல் ஸ்டிபெல்' (Michael Stifle) என்பவரால் 'ஈருறுப்புக் கெழு' என்ற பதம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

பிளேஸ் பாஸ்கல் (Blaise Pascal) (19 ஜூன் 1623 – 19 ஆகஸ்ட் 1662) என்பவர் பிரான்ஸ் நாட்டு கணித மேதை, இயற்பியலாளர், எழுத்தாளர் மற்றும் கத்தோலிக்க இறையியலாளர். இவர் 1652 ஆம் ஆண்டு வெளியிடப்பட்ட "எண்கணித முக்கோணம்" என்ற பதிவில் ஈருறுப்புக் கெழுக்களை முக்கோண வடிவில் வடிவமைத்துள்ளார். இதுவே தற்பொழுது பாஸ்கலின் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் $(x + a)^n$ –ன் விரிவை, அனைத்து விகிதமுறு எண் 'n' க்கும் உகந்ததாக மாற்றி பொதுவாக அமைத்தவர் சர் ஐசக் நியூட்டன் அவர்கள்.

தேற்றம் (நிரூபணமின்றி)

$(x+a)^n$ $n \in N$ ற்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை இங்கு நாம் காண்போம் (நிரூபணமின்றி)

x, 'a' என்பன இரு மெய்யெண்கள் எனில், அனைத்து $n \in N$ க்கும் $(x+a)^n$ –ன் விரிவு

$$(x+a)^n = nC_0x^na^0 + nC_1x^{n-1}a^1$$
$$nC_2x^{n-2}a^2 + \ldots + nC_rx^{n-r}a^r + \ldots$$
$$+nC_{n-1}x^1a^{n-1} + nC_nx^0a^n = \sum_{r=0}^{n} nC_rx^{n-r}a^r$$

குறிப்பு

$n = 0$ எனில் $(x+a)^0 = 1$

$n = 1$ எனில்

$$(x+a) = 1C_0x + 1C_1a = x+a$$

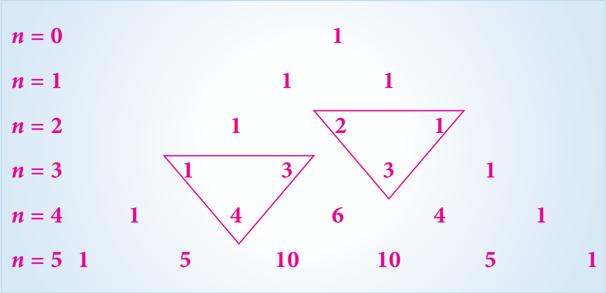
$n = 2$ எனில்

$$(x+a)^2 = 2C_0x^2 + 2C_1x^a + 2C_2a^2$$
$$= x^2 + 2xa + a^2$$

$n = 3$ எனில்

$$(x+a)^3 = 3C_0x^3 + 3C_1x^2a + 3C_2xa^2 + 3C_3a^3$$
$$= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 \quad \ldots$$

$(x+a)^n$ –ன் விரிவில் உள்ள ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் முக்கோண வடிவில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. இதுவே பாஸ்கலின் முக்கோணம் எனப்படுகிறது.



படம் 2.5

குறிப்பு

(i) $(x + a)^n$ என்பதன் விரிவில் $n+1$ உறுப்புகள் உள்ளன.

(ii) $(x + a)^n$ –ன் விரிவில், ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள x மற்றும் a –ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் n ஆகும்

(iii) $nC_0, nC_1, nC_2, nC_3, \ldots nC_r, \ldots nC_n$ என்பன ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும். இவைகள் $C_0, C_1, C_2,$ $C_3, \ldots, C_r, \ldots, C_n,$ எனவும் குறிக்கப்படும்.

(iv) $(x+a)^n$ –ன் விரிவில் உள்ள பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$

(v) $nC_r = nC_{n-r}, \; r = 0, 1, 2, \ldots, n$ ஆகிவற்றிற்கான பண்பின்படி $(x + a)^n$–ன் விரிவில் இருபுறத்திலிருந்தும் சம தூரத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்கும்.

(vi) ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^n$

(vii) $(1+x)^n$, என்பதன் விரிவாக்கத்தில் ஒற்றைப்படை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டைப்படை உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^{n-1}$

$(x + a)^n$ ன் நடு உறுப்பு காணுதல்

வகை (i) $(x+a)^n$ –ன் விரிவில் n – இரட்டைப்படை எனில் ($n+1$ ஒற்றைப்படை ஆகும்) இந்த விரிவில் உள்ள ஒரே நடு உறுப்பு $t_{\frac{n}{2}+1}$ ஆகும்.

வகை (ii) $(x+a)^n$–ல் n ஒற்றைப்படை எனில் ($n+1$ இரட்டைப்படை ஆகும்) இதன் விரிவில் இரண்டு நடு உறுப்புகள் இருக்கும். அவை $t_{\frac{n+1}{2}}$ மற்றும் $t_{\frac{n+3}{2}}$ ஆகும்.

சில வேளைகளில் $(x + a)^n$ – ன் விரிவாக்கத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு தேவைப்படுகிறது. இதற்கு நாம் முதலில் t_{r+1} என்ற பொது உறுப்பை எழுத வேண்டும். t_{r+1} என்கிற தேவையான உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு r –ன் மதிப்பை காண முடியும். x –ன் தனி உறுப்பை காண்பதற்கு t_{r+1} என்ற பொது உறுப்பின் x –ன் அடுக்கை பூச்சியத்துடன் சமன்செய்து கிடைக்கும் r –ன் மதிப்பை t_{r+1} பிரதியிட x –ன் தனிமதிப்பை நாம் பெறமுடியும்.

குறிப்பு

$$(x+a)^n = nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + a^n \ldots (1)$$

(i) $(x-a)^n$ –ல், a க்கு பதில் $-a$ யை பிரதியிட

$$\begin{aligned}(x-a)^n &= nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1}(-a) \\ &\quad + nC_2 x^{n-2}(-a)^2 + \ldots \\ &\quad + nC_r x^{n-r}(-a)^r + \ldots + (-a)^n \\ &= nC_0 x^n a^0 - nC_1 x^{n-1}(a) + nC_2 x^{n-2}(a)^2 + \ldots \\ &\quad + (-1)^r nC_r x^{n-r}(a)^r + \ldots + (-1)^n (a)^n \quad \ldots(2)\end{aligned}$$

மேற்கண்ட விரிவாக்கத்திலுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் குறிகள் மிகை அல்லது குறையாக மாறி மாறி இருக்கும்.

(ii) $a = 1$ என்று (1) –ல் பிரதியிட

$$(1+x)^n = 1 + nC_1 x + nC_2 x^2 + \ldots + nC_r x^r + \ldots + nC_n x^n \quad \ldots(3)$$

(iii) $x = -x$ என்று (3) –ல் பிரதியிட

$$(1-x)^n = 1 - nC_1 x + nC_2 x^2 + \ldots + nC_r (-1)^r x^r + \ldots + nC_n (-1)^n x^n$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(2x + 3y)^5$ –ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= nC_0 x^n a^0 + nC_1 x^{n-1} a^1 \\ &\quad + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r \\ &\quad + \ldots + nC_{n-1} x^1 a^{n-1} + nC_n x^0 a^n\end{aligned}$$

$$(2x+3y)^5 = 5C_0(2x)^5 + 5C_1(2x)^4(3y) + 5C_2(2x)^3(3y)^2 + 5C_3(2x)^2(3y)^3 + 5C_4(2x)(3y)^4 + 5C_5(3y)^5$$

$$= 32x^5 + 5(16)x^4(3y) + \frac{5\times4}{2\times1}(8x^3)(9y^2) + 5(2x)81y^4 + 243y^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.40

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$ –ன் விரிவுக் காண்க.

தீர்வு

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4 = (x^2)^4 + 4C_1(x^2)^3\frac{1}{x^2} + 4C_2(x^2)^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 4C_3(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + 4C_4\left(\frac{1}{x^2}\right)^4$$

$$= x^8 + 4x^4 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.41

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(101)^5$ –ன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

$$(101)^5 = (100+1)^5$$

$$= (100)^5 + 5C_1(100)^4 + 5C_2(100)^3 + 5C_3(100)^2 + 5C_4(100) + 5C_5$$

$$= 10000000000 + 5(100000000) + 10(1000000) + 10(10000) + 5(100) + 1$$

$$= 10000000000 + 500000000 + 10000000 + 100000 + 500 + 1$$

$$= 10510100501$$

எடுத்துக்காட்டு 2.42

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$ ஆகும். ... (1)

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$ –ன் 5வது உறுப்பைக் காண சமன்பாடு (1) –ல் n க்கு 10 –யும் r க்கு 4 –யும் பிரதியிட

$$t_{4+1} = t_5 = 10C_4(x)^6\left(-\frac{3}{x^2}\right)^4$$

(இங்கு $n = 10$, $x = x$, $a = -\frac{3}{x^2}$)

$$= 10C_4(x)^6\frac{3^4}{x^8}$$

$$= \frac{17010}{x^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.43

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ –ன் விரிவில் நடு உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$ ஆகும். ... (1)

நடு உறுப்பைக் காண

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{10}$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிட

$n = 10$, $x = x^2$, $a = -\frac{2}{x}$ மற்றும்

$r = 5$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$t_{5+1} = t_6 = 10C_5(x^2)^5\left(\frac{-2}{x}\right)^5$$

$$= 10C_5 x^{10}\frac{(-2)^5}{x^5}$$

$$= -8064x^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^9$ –ன் விரிவில் நடுஉறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$\left(\frac{x}{3}+9y\right)^9$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக. $n = 9$ எனில் பத்து உறுப்புகளை (இரட்டை படை) நாம் பெறுகிறோம்.

$\therefore$ இதன் விரிவில் உள்ள இரண்டு நடு உறுப்புகள் முறையே

$\therefore\ t_{\frac{n+1}{2}},\ t_{\frac{n+3}{2}}$ அதாவது $t_{\frac{9+1}{2}},\ t_{\frac{9+3}{2}}$ ஆகும்.

ஆகவே, t_5 மற்றும் t_6 என்பன நடு உறுப்புகளாகும்.

$(x+a)^n$ –ன் விரிவில் பொது உறுப்பு

$$t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r \qquad (1)$$

$r = 4$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$t_{4+1} = t_5 = 9C_4\left(\frac{x}{3}\right)^5\cdot(9y)^4$$
$$= 9C_4\frac{x^5}{3^5}\cdot 9^4y^4$$
$$= \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\cdot\frac{x^5}{3^5}\cdot 9^4y^4$$
$$= 3402\,x^5y^4$$

$r = 5$ என (1) –ல் பிரதியிட

$$t_{5+1} = t_6 = 9C_5\left(\frac{x}{3}\right)^4\cdot(9y)^5$$
$$= 9C_5\frac{x^4}{3^4}\cdot 9^5y^5$$
$$= 91854\,x^4y^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45

$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ –ன் விரிவில் x^{10}–ன் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$– ன் விரிவில் பொது உறுப்பு

$$t_{r+1} = nC_r x^{n-r}a^r \qquad \ldots (1)$$

$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^{11}$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக

$$t_{r+1} = 11C_r(2x^2)^{11-r}\left(\frac{-3}{x}\right)^r$$
$$= 11C_r2^{11-r}x^{2(11-r)}(-3)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$= 11C_r2^{11-r}(-1)^r\cdot3^rx^{22-3r}$$

x^{10}–ன் கெழுவைக்காண $22-3r = 10$ என்க.

$$\Rightarrow r = 4$$

$r = 4$ என (1) –ல் பிரதியிட,

$$t_5 = 11C_4 2^{11-4}3^4x^{10} = 11C_4\cdot2^73^4x^{10}$$

$\therefore\ x^{10}$ – ன் கெழு $11C_4 2^7 3^4$.

எடுத்துக்காட்டு 2.46

$\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ – ன் விரிவில் x யைச் சாராத உறுப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

$(x+a)^n$ – ன் விரிவில் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_rx^{n-r}a^r$

$\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ என்பதனை $(x+a)^n$ உடன் ஒப்பிடுக.

$$\therefore\ t_{r+1} = 9C_r(2x)^{9-r}\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r$$
$$= 9C_r2^{9-r}x^{9-r}\frac{1}{3^r}x^{-2r}$$
$$t_{r+1} = 9C_r\frac{2^{9-r}}{3^r}\cdot x^{9-3r} \qquad \ldots (1)$$

x – யை சாராத உறுப்பைக் காண x –ன் அடுக்கை ‘0’ விற்கு சமன்படுத்த

$$9-3r = 0$$
$$\therefore\ r = 3$$

$r = 3$ –ஐ (1) –ல் பிரதியிட

$$t_{3+1} = 9C_3\frac{2^{9-3}}{3^5}\cdot x^0$$
$$= 9C_3\frac{2^6}{3^5} = 1792$$

பயிற்சி 2.6

1. ஈருறுப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரிவுபடுத்துக.

(i) $(2a-3b)^4$ (ii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^7$

(iii) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$

2. ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க:

(i) $(101)^4$ (ii) $(999)^5$

3. $(x-2y)^{13}$ என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பைக் காண்க.

9YBQX8

4. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவில் நடு உறுப்பைக் காண்க.

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{11}$ (ii) $\left(3x+\frac{x^2}{2}\right)^{8}$

(iii) $\left(2x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{10}$

5. கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவில் x–ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க

(i) $\left(x^2-\frac{2}{3x}\right)^{9}$ (ii) $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$

(iii) $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ –ன் விரிவில் x – ஐச் சாராத உறுப்பு $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)2^n}{n!}$ என நிறுவுக.

7. $(1+x)^{2n}$ – ன் விரிவில் நடு உறுப்பு $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)2^n x^n}{n!}$ எனக் காண்பி.

பயிற்சி 2.7

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக.

1. $nC_3 = nC_2$ எனில் nc_4 –ன் மதிப்பு

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2. $np_2 = 20$ எனும் பொழுது n – ன் மதிப்பு

(a) 3 (b) 6 (c) 5 (d) 4

3. 5 விளையாட்டு வீரர்களிலிருந்து நான்கு 4 பேரை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

(a) 4! (b) 20 (c) 25 (d) 5

4. $nP_r = 720(nC_r)$, எனில் r–ன் மதிப்பு

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

5. ஒரு நாணயம், ஐந்துமுறை சுண்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் அனைத்து சாத்திய கூறுகளின் எண்ணிக்கை

(a) 2^5 (b) 5^2 (c) 10 (d) $\frac{5}{2}$

6. n – பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணத்தின் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை

(a) nC_2 (b) nC_2-2

(c) nC_2-n (d) nC_2-1

7. அனைத்து $n\in N$ க்கு $n(n+1)(n+2)(n+3)$– ஐ வகுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய மிகை முழு எண் ஆனது

(a) 2 (b) 6 (c) 20 (d) 24

8. n என்ற மிகைமுழுவிற்கு $(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(a) n (b) $n+1$

(c) $n-1$ (d) $2n$

9. n என்ற மிகைமுழுவிற்கு $nC_1+nC_2+nC_3+\ldots+nC_n$ –ன் மதிப்பு

(a) 2^n (b) 2^n-1

(c) n^2 (d) n^2-1

10. $(x-2y)^7$ என்பதன் விரிவில், x^3 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?

(a) 3வது (b) 4வது

(c) 5வது (d) 6வது

11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ என்பதன் விரிவின் நடு உறுப்பு ஆனது

(a) $10C_4\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $10C_5$

(c) $10C_6$ (d) $10C_7x^4$

12. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$ –ன் விரிவின் மாறிலி உறுப்பு

(a) 156 (b) 165

(c) 162 (d) 160

13. $(3+\sqrt{2})^8$ என்பதன் விரிவின் கடைசி உறுப்பு

(a) 81 (b) 16

(c) $8\sqrt{2}$ (d) $27\sqrt{3}$

14. $\frac{kx}{(x+4)(2x-1)} = \frac{4}{x+4} + \frac{1}{2x-1}$ எனில் k –ன் மதிப்பு

(a) 9 (b) 11 (c) 5 (d) 7

15. எழுத்துக்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில் NUMBER என்ற வார்த்தையிலிருந்து அமைக்கப்படும் மூன்று எழுத்து வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 206 (b) 133

(c) 216 (d) 300

16. நான்கு இணை கோடுகள், மற்றொரு மூன்று இணை கோடுகளோடு வெட்டிக் கொள்ளும் தொகுப்பிலிருந்து உருவாக்கப்படும் இணைகரங்களின் எண்ணிக்கை

(a) 18 (b) 12 (c) 9 (d) 6

17. ஒரு தேர்வின் வினாத்தாளின் சரியா அல்லது தவறா என்ற வகையில் 10 வினாக்கள் உள்ளன. அவை விடையளிக்கப்படும் வழிகள்

(a) 240 (b) 120

(c) 1024 (d) 100

18. $(5C_0+5C_1)+(5C_1+5C_2)+(5C_2+5C_3)+(5C_3+5C_4)+(5C_4+5C_5)$ –ன் மதிப்பு

(a) 2^6-2 (b) 2^5-1

(c) 2^8 (d) 2^7

19. வெவ்வேறு இலக்கங்களை உடைய 9 இலக்க எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

(a) 10! (b) 9!

(c) $9 \times 9!$ (d) $10 \times 10!$

20. “CHEESE” என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துக்களை கொண்டு அமைக்கப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 120 (b) 240 (c) 720 (d) 6

21. 13 விருந்தினர்கள் ஓர் இரவு விருந்தில் கலந்து கொள்கிறார்கள், அவ்விருந்தில் நடைபெறும் கைக்குலுக்குதலின் எண்ணிக்கை

(a) 715 (b) 78

(c) 286 (d) 13

22. எழுத்துக்கள் திரும்ப வராத நிலையில் “ EQUATION ” , என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி உருவாக்கப்படும், பொருள்படும் (அல்லது) பொருள்படா வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

(a) 7! (b) 3! (c) 8! (d) 5!

23. ஒரு குறிப்பிட்ட விரிவாக்கத்தின் ஈருறுப்பு கெழுக்களின் கூடுதல் 256 எனில், அவ்விரிவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(a) 8 (b) 7 (c) 6 (d) 9

24. பொருட்களை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம் என்ற வகையில், வெவ்வேறான n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை ஒரே நேரத்தில் தேர்ந்தெடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

(a) r^n (b) n^r

(c) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (d) $\frac{n!}{(n+r)!}$

25. ஈருறுப்பு கெழுக்களின் கூடுதல்

(a) 2^n (b) n^2

(c) $2n$ (d) $n+17$

இதர கணக்குகள்

1. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}$

2. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\frac{x-4}{x^2-3x+2}$

3. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\dfrac{6x^2-14x-27}{(x+2)(x-3)^2}$

4. பகுதி பின்னங்களாக மாற்றுக : $\dfrac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$

5. பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை காண்க

(i) $\dfrac{3!\times 0!+0!}{2!}$ (ii) $\dfrac{3!+1!}{(2^2)!}$

(iii) $\dfrac{(3!)!\times 2!}{5!}$

6. A,B,C,D,E,F என்ற 6 எழுத்துகளிலிருந்து 5 எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வகை குறியீடுகளை அமைக்க முடியும்? a) திரும்பி வராமை b) திரும்பி வரக்கூடியவை c) திரும்பி வராமை ஆனால் E என்ற எழுத்திலிருந்து ஆரம்பிக்க வேண்டும் d) திரும்பி வராமை ஆனால் $C\ A\ B$ –ல் முடிவடைய வேண்டும்.

7. 20 பரிசு சீட்டுகள் கொண்ட தொப்பியிலிருந்து, 4 சீட்டுகள் வரிசையாக தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. முதல் சீட்டை எடுப்பவர் காரைப் பரிசாகப் பெறுகிறார். இரண்டாவது சீட்டுக்கு இரு சக்கர வாகனமும், மூன்றாவது சீட்டுக்கு மிதிவண்டியும் மற்றும் நான்காவது சீட்டுக்கு இரு சக்கரங்களை கொண்ட உந்து வண்டி பரிசாக கிடைக்கிறது. இந்த பரிசுகள் எத்தனை வழிகளில் வழங்கப்படுகிறது?

8. 9 கணிதம், 8 பொருளாதாரம் மற்றும் 7 வரலாற்று புத்தகங்களின் தொகுப்பில் இருந்து எத்தனை வழிகளில் 2 கணிதம், 2 பொருளாதாரம் மற்றும் 2 வரலாற்று புத்தகங்களைத் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?

9. 3 சிவப்பு, 2 மஞ்சள் மற்றும் 2 பச்சை நிற சமிக்ஞை (signal) கொடிகள் உள்ளன. செங்குத்தான கொடிக்கம்பத்தில் கொடிகளைப் பயன்படுத்தி நாம் விரும்பும் எத்தனை வகையான பல்வேறு சமிக்ஞைகளை பெற முடியும்?

10. $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^{17}$ என்ற விரிவாக்கத்தில் x^{11} –ன் கெழுவைக் காண்க.

தொகுப்புரை

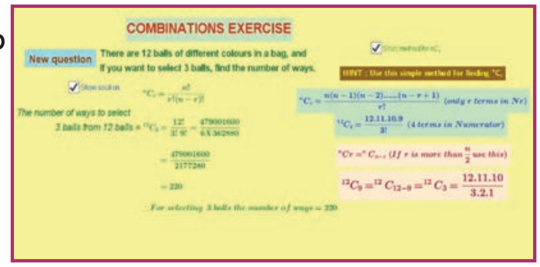
- ஏதேனும் இயல் எண் n ற்கு, n – ன் காரணீயப் பெருக்கம் என்பது, முதல் n இயல் எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகும். இது குறியீட்டில் $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ என குறிக்கப்படுகிறது.
- n என்ற இயல் எண்ணுக்கு $n! = n(n-1)\ (n-2)\ldots 3\times 2\times 1$
- $0!=1$
- இரண்டு பணிகளில் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனி m மற்றும் n வழிகளில் செயல்படுத்தப்படுகிறது எனில் இரண்டு பணிகளும் $(m+n)$ வழிகளில் செயல்படுத்த முடியும்.
- n பொருள்களின் r என்ற பொருள்களை ஒரே நேரத்தில் எடுத்து வரிசைப்படுத்தும் வழிகளின் எண்ணிக்கை என்பது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையாகும்.
- $np_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
- $np_o=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$

- $np_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$
- $np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$
- $np_r = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$
- n வெவ்வேறு பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை தேர்ந்தெடுக்கும்போது பொருட்களை மீண்டும் இடம்பெற அனுமதிக்கும் பொழுது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை n^r ஆகும்
- $\frac{n!}{p!\,q!}$ என்பது n பொருட்களில் p பொருட்கள் ஒருவகையாகவும், q பொருட்கள் மற்றொரு வகையாகவும் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.இங்கு $p+q=n$ எனில் n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் அனைத்தையும் தேர்ந்தெடுக்கும்போது உருவாகும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை.
- வட்ட வரிசை மாற்றத்தில் வலச்சுற்று (clock wise) இடச்சுற்று (anti-clockwise) ஆகியவற்றிற்கான வேறுபாடு காணமுடிந்தால், பொருள்களிள் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n\text{-}1)!$ ஆகும்
- வட்ட வரிசைமாற்றங்கள் வலச்சுற்று, இடச்சுற்று வேறுபாடின்றி இருப்பின் பொருள்களில் வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{(n-1)!}{2}$ ஆகும்.
- n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை தேர்வு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை சேர்வுகள் ஆகும்.
- n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை தேர்ந்தெடுக்கும் வழிகள் nc_r ஆகும்.
- $nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ n \geq 1, 0 \leq r \leq n$
- $nC_n = 1 = nC_0$
- $nC_1 = n$
- $nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$
- $nC_x = nC_y$, எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n$.
- $nC_r = nC_{n-r}$
- $nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r$
- $(x+a)^n = nC_o x^n a^o + nC_1 x^{n-1} a^1 + nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + nC_{n-1} x^1 a^{n-1}$ $+ nC_n x^0 a^n = \sum_{r=0}^{n} nC_r x^{n-r} a^r$
- $(x+a)^n$ என்ற விரிவில் $n+1$ என்ற உறுப்புகள் இருக்கும்.
- இந்த விரிவாக்கத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்புகளில் உள்ள x மற்றும் a –ன் அடுக்குகளின் கூடுதல் n ஆகும்.

- $nC_0, nC_1, nC_2, nC_3 \ldots\ldots nC_r \ldots nC_n$ ஆகியவைகள் $C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_r \ldots C_n$ எனவும் குறிக்கப்படும். அவைகள் ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் எனப்படும்.
- $r = 0,\ 1,\ 2, \ldots n$ ஆகியவற்றிற்கு $nC_r = nC_{n-r}$, எனவே $(x+a)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் இரு முனைகளிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள ஈருறுப்புக் கெழுக்கள் சமமானவையாகும். மேலும் , $nC_0 = nC_n, nC_1 = nC_{n-1}, nC_2 = nC_{n-2}$
- ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் 2^n ஆகும்.
- ஒற்றைப்படை ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் = இரட்டை படை ஈருறுப்புக் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 2^{n-1}$
- $(x+a)^n$ என்ற விரிவாக்கத்தின் பொது உறுப்பு $t_{r+1} = nC_r x^{n-r} a^r$.

கலைச் சொற்கள் (GLOSSARY)	
ஈருறுப்பு	Binomial
எண்ணுதலின் கொள்கை	Principle of counting
எண்ணுதலின் பெருக்கல் கொள்கை	Multiplication Principle of counting
ஒரு படிக்காரணி	Linear factor
கணிதத் தொகுத்தறிதல்	Mathematical Induction
காரணீயப் பெருக்கம்	Factorial
கெழு	Coefficient
சாரா உறுப்பு	Independent term
சேர்வு	Combination
பகுதிப் பின்னங்கள்	Partial fractions
பாஸ்கலின் முக்கோணம்	Pascal's Triangle
மைய உறுப்பு	Middle term
வட்ட வரிசை மாற்றம்	Circular Permutation
வரிசை மாற்றங்கள்	Permutations
விகிதமுறு கோவை	Rational Expression

இணையச் செயல்பாடு



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Combination Exercise"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

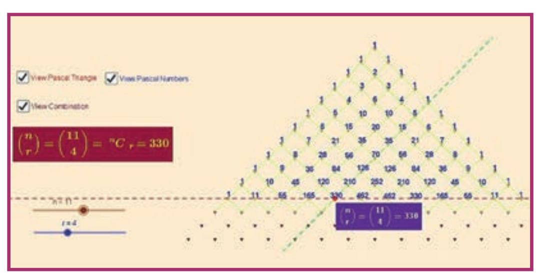
நீங்களாக தீர்வைக் கண்டு பிடித்து "Show solution" பெட்டியைச் சொடுக்கி கீழே காணும் தீர்வைச் சரி பார்க்கவும். மேலும் "Short method" பெட்டியைச் சொடுக்கி எளிய முறையினைக் காண்க.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM

இணையச் செயல்பாடு



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலி / விரைவுக்குறியீடைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்திற்குச் செல்க..

"11th BUSINESS MATHEMATICS and STATISTICS" எனும் **GeoGebra** பணிப் புத்தகத்தில் **"Pascal's Triangle"** க்கான பணித்தாளை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

படி - 2

"Pascal's Triangle" க்கான பணித்தாளில், "View Pascal Triangle" மற்றும் "View Pascal's Numbers" பெட்டிகளைச் சொடுக்கி பாஸ்கல் எண்களைக் கவனிக்கவும், இப்பொழுது "view Combination" பெட்டியைச் சொடுக்கினால் nCr–இன் மதிப்பு தோன்றும். கணக்கீடு செய்து ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒப்பீடு செய்க.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

https://ggbm.at/qKj9gSTG (or) scan the QR Code

B147_11_BMAT_TM