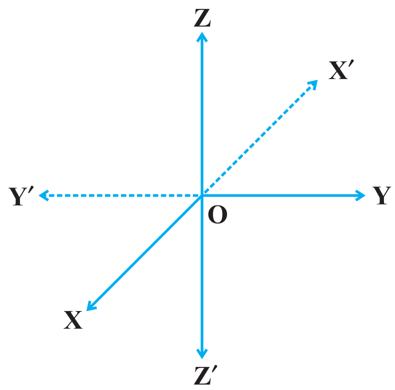
પ્રકરણ 12

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિનો પરિચય

12.1 વિહંગાવલોકન

12.1.1 યામાક્ષો અને યામ-સમતલો : ધારો કે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓ X′OX અને Y′OY કાગળના સમતલમાં હોય અને Z′OZ આ સમતલને લંબ હોય તેવી પરસ્પર લંબરેખાઓ X′OX, Y′OY અને Z′OZ છે. આ ત્રણ રેખાઓને લંબયામાક્ષો કહે છે (રેખાઓ X′OX, Y′OY અને Z′OZ ને અનુક્રમે x-અક્ષ y-અક્ષ અને z-અક્ષ કહે છે). આ યામપદ્ધતિને આપણે ત્રિપરિમાણીય અવકાશ અથવા સરળ ભાષામાં અવકાશ કહીએ છીએ.

આ ત્રણ અક્ષોને જોડીમાં લઈએ તો તેઓ XY- સમતલ, YZ-સમતલ, ZX- સમતલનું નિરૂપણ કરે છે. અર્થાત્ ત્રણ યામ સમતલ. પ્રત્યેક સમતલ અવકાશના બે ભાગ કરે છે અને ત્રણ યામ સમતલો અવકાશને આઠ ભાગમાં વિભાજિત કરે છે. તેમને અષ્ટાંશ કહે છે. તેઓ (i) OXYZ (ii) OX′YZ (iii) OXY′Z (iv) OXYZ′ (v) OXY′Z′ (vi) OX′YZ′ (vii) OX′Y′Z (viii) OX′Y′Z′. (આકૃતિ12.1)



આકૃતિ 12.1

ધારો કે કોઈ યામ-સમતલમાં ન હોય તેવા અવકાશના બિંદુ P માંથી YZ, ZX અને XY સમતલોને સમાંતર પસાર થતા સમતલો યામાક્ષોને અનુક્રમે A, B, C માં છેદે છે.

આ ત્રણ સમતલો

(i) ADPF || YZ - સમતલ (ii) BDPE || XZ - સમતલ અને

(iii) CFPE || XY - સમતલ છે.

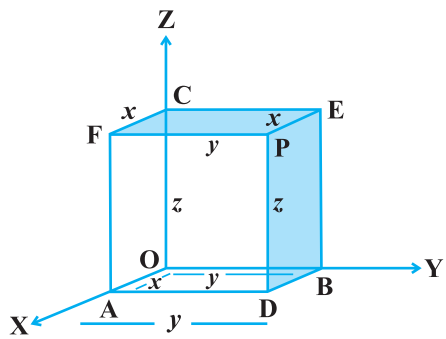
આ સમતલો લંબચોરસીય સમાંતર ફલક બનાવે છે. તેમની લંબચોરસીય બાજુઓ (સપાટી)ની ત્રણ જોડી (ADPF, OBEC), (BDPE, CFAO) અને (AOBD, FPEC) છે. (આકૃતિ 12.2)

12.1.2 અવકાશમાં બિંદુના યામ : ત્રિપરિમાણીય અવકાશમાં એક સ્વૈર બિંદુ P છે. તેના નિર્દિષ્ટ યામ (x_0, y_0, z_0) છે.

(1) P માંથી પસાર થતું YZ-સમતલને સમાંતર સમતલ x-અક્ષને $(x_0, 0, 0)$માં છેદે છે.

(2) P માંથી પસાર થતું XZ-સમતલને સમાંતર સમતલ y-અક્ષને $(0, y_0, 0)$માં છેદે છે.

(3) P માંથી પસાર થતું XY-સમતલને સમાંતર સમતલ z-અક્ષને $(0, 0, z_0)$માં છેદે છે.



આકૃતિ 12.2

P ના આ યામ (x_0, y_0, z_0) ને P ના કાર્તેઝિય યામ કહેવાય છે.

સમતલ ADPF એ x-અક્ષને લંબ છે (આકૃતિ 12.2) અથવા x-અક્ષ એ સમતલ ADPFને લંબ છે તેમ આપણે કહી શકીએ અને તેથી સમતલની પ્રત્યેક રેખાને (x-અક્ષ) લંબ છે. આથી, PA એ OX ને લંબ છે અને OX એ PAને લંબ છે. આમ P માંથી x-અક્ષ પરનો લંબપાદ A છે અને O થી લંબપાદ A નું આ સચિહ્ન અંતર એ P નો x-યામ છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુઓ B અને C એ બિંદુ P માંથી અનુક્રમે y અને z-અક્ષ પરના લંબપાદ છે તથા લંબપાદ B અને C ના O થી સચિહ્ન અંતર અનુક્રમે P ના y અને z યામ છે.

આથી બિંદુ, P ના x, y, z-યામ એ અનુક્રમે YZ, ZX અને XY યામ-સમતલથી બિંદુ P ના લંબઅંતર છે.

12.1.3 બિંદુના યામનું ચિહ્ન : OX, OY, OZ પર અથવા તેમને સમાંતર માપેલું અંતર ધન અને OX′, OY′, OZ′ પર અથવા તેમને સમાંતર માપના અંતરનું ચિહ્ન ઋણ લઈશું. પરસ્પર લંબ ત્રણ યામ-સમતલો અવકાશને આઠ ભાગમાં વિભાજિત કરે છે અને તે પ્રત્યેક ભાગ અષ્ટાંશથી ઓળખાય છે. કોઈ પણ બિંદુના યામના ચિહ્નનો આધાર તે બિંદુ કયા અષ્ટાંશમાં આવેલું છે તેના પર છે. પ્રથમ અષ્ટાંશમાં બધા જ યામ ધન છે, જ્યારે સાતમા અષ્ટાંશમાં બધા જ યામ ઋણ છે. ત્રીજા અષ્ટાંશમાં x અને y-યામ ઋણ છે, જ્યારે z-યામ ધન છે. પાંચમા અષ્ટાંશમાં x, y-યામ ધન છે અને z-યામ ઋણ છે. ચોથા અષ્ટાંશમાં x, z ધન અને y ઋણ છે. છઠ્ઠા અષ્ટાંશમાં x, z ઋણ અને y ધન છે. બીજા અષ્ટાંશમાં x ઋણ અને y, z ધન છે.

અષ્ટાંશ → યામ ↓	I OXYZ	II OX′YZ	III OX′Y′Z	IV OXY′Z	V OXYZ′	VI OX′YZ′	VII OX′Y′Z′	VIII OXY′Z′
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

12.1.4 અંતરસૂત્ર : બે બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) વચ્ચેનું અંતર

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2)માંથી પસાર થતા તથા યામ-સમતલોને સમાંતર સમતલો સમાંતર ફલકની રચના કરે છે તેની ધારોની લંબાઈ $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$ તથા વિકર્ણની લંબાઈ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ છે.

12.1.5 વિભાજન સૂત્ર : બિંદુઓ P(x_1, y_1, z_1) અને Q(x_2, y_2, z_2)ને જોડતા રેખાખંડનું $m : n$ ગુણોત્તરમાં અંત:વિભાજન અથવા બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુ Rના યામ અનુક્રમે

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right), \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \text{ છે.}$$

બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2)ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ છે.

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ છે.

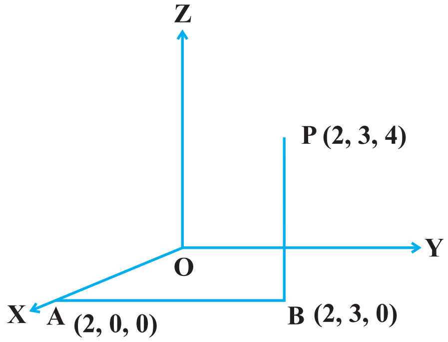
12.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : અવકાશમાં બિંદુઓ (i) (2, 3, 4) (ii) (–2, –2, 3) નું નિરૂપણ કરો.

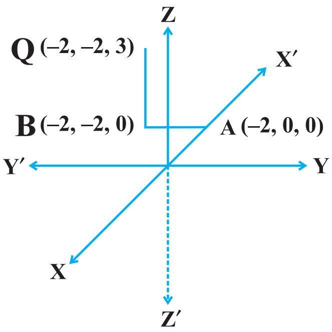
ઉકેલ :

(i) અવકાશમાં બિંદુ (2, 3, 4) દર્શાવવા આપણે O થી x-અક્ષની ધન દિશામાં 2 એકમ અંતર ખસીશું. ધારો કે આ બિંદુ A (2, 0, 0) છે. બિંદુ A થી y-અક્ષની ધન દિશાને સમાંતર 3 એકમ અંતર ખસીશું. ધારો કે આ પ્રાપ્ત બિંદુ B (2, 3, 0) છે. બિંદુ B થી z-અક્ષની ધન દિશામાં 4 એકમ અંતર ખસીશું. આ બિંદુ એ P (2, 3, 4) થશે (આકૃતિ 12.3).



આકૃતિ 12.3

(ii) ઊગમબિંદુથી x-અક્ષની ઋણ દિશામાં 2 એકમ ખસો. ધારો કે આ બિંદુ A (–2, 0, 0) છે. બિંદુ A થી y-અક્ષની ઋણ દિશાને સમાંતર 2 એકમ ખસો. તો આ પ્રાપ્ત બિંદુને B (–2, –2, 0) કહીએ. હવે બિંદુ B થી z -અક્ષની ધન દિશાને સમાંતર 3 એકમ ખસો. આ આપણું માગેલું બિંદુ Q (–2, –2, 3) છે (આકૃતિ 12.4).



આકૃતિ 12.4

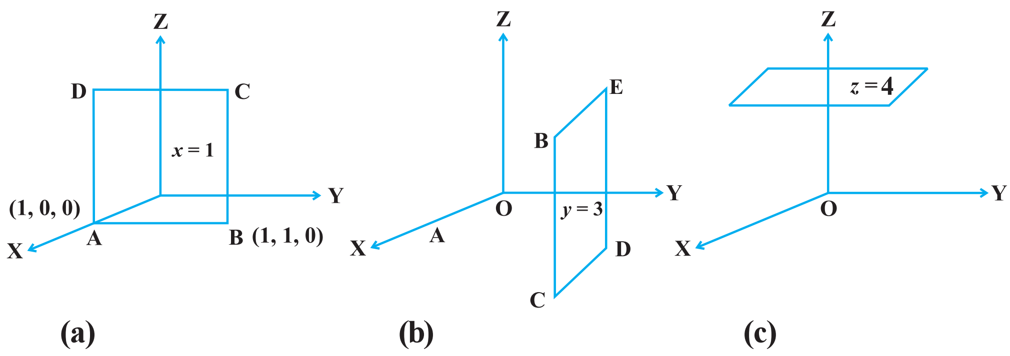
ઉદાહરણ 2 : સમતલ (i) $x = 1$ (ii) $y = 3$ (iii) $z = 4$ દોરો.

ઉકેલ :

(i) સમીકરણ $x = 0$ એ YZ-સમતલ દર્શાવે છે. સમીકરણ $x = 1$ એ YZ-સમતલને સમાંતર અને YZ-સમતલથી ઉપરના ભાગમાં 1 એકમ અંતરે આવેલું છે. હવે આપણે YZ-સમતલને સમાંતર અને YZ- સમતલથી ઉપરના ભાગમાં 1 એકમ ઉપર સમતલ દોરીએ (આકૃતિ 12.5(a)).

(ii) સમતલ સમીકરણ $y = 0$ એ XZ-સમતલનું નિરૂપણ કરે છે અને સમતલનું સમીકરણ $y = 3$ એ XZ-સમતલને સમાતર અને XZ-સમતલથી જમણી બાજુના ભાગમાં 3 એકમ અંતરે આવેલું સમતલ દર્શાવે છે. (આકૃતિ 12.5(b)).

(iii) સમીકરણ $z = 0$ એ XY-સમતલ દર્શાવે છે અને સમીકરણ $z = 4$ એ XY-સમતલને સમાંતર તથા XZ-સમતલથી ઉપરના ભાગમાં 4 એકમ અંતરે આવેલું સમતલ દર્શાવે છે (આકૃતિ 12.5(c)).



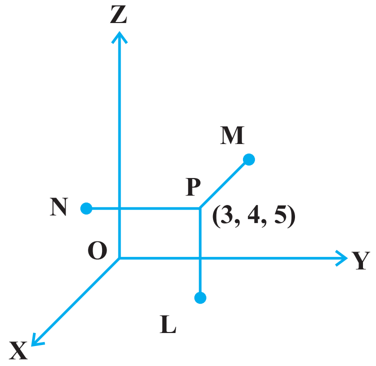
આકૃતિ 12.5

ઉદાહરણ 3 : બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી x-અક્ષ, y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર દોરેલા લંબપાદ અનુક્રમે L, M અને N છે. બિંદુઓ L, M અને N ના યામ શોધો.

ઉકેલ : બિંદુ L એ P માંથી x-અક્ષ પર દોરેલો લંબપાદ હોવાથી, તેના y અને z-યામ શૂન્ય છે. બિંદુ Lના યામ (3, 0, 0) થશે. તે જ પ્રમાણે M અને N ના યામ અનુક્રમે (0, 4, 0) અને (0, 0, 5) થશે.

ઉદાહરણ 4 : બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી સમતલો XY, YZ અને ZX પર દોરેલા લંબ રેખાખંડના પાદ અનુક્રમે L, M અને N છે. બિંદુઓ L, M અને Nના યામ ક્યા થશે ?

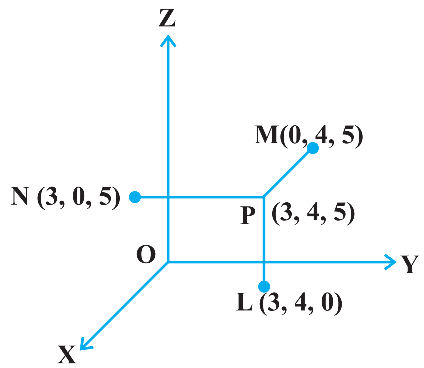
ઉકેલ : બિંદુ P માંથી XY-સમતલ પર દોરેલા લંબરેખાખંડનો પાદ બિંદુ L હોવાથી અને XY-સમતલમાં z-યામ શૂન્ય હોવાથી L ના યામ (3, 4, 0) થશે. તે જ પ્રમાણે બિંદુઓ M (0, 4, 5) અને N (3, 0, 5) મળે (આકૃતિ 12.6).



આકૃતિ 12.6

ઉદાહરણ 5 : બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી સમતલો XY, YZ અને ZX પર દોરેલા લંબના લંબપાદ અનુક્રમે L, M, N છે. બિંદુઓ L, M અને N ના બિંદુ P થી અંતર શોધો (આકૃતિ12.7.)

ઉકેલ : બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી XY-સમતલ પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ L છે. આથી, L ના યામ (3, 4, 0) થશે. બિંદુઓ (3, 4, 5) અને (3, 4, 0) વચ્ચેનું અંતર 5 છે. તે જ પ્રમાણે આપણે YZ અને ZX-સમતલ પરના લંબની લંબાઈ શોધી શકીએ. તે અનુક્રમે 3 અને 4 એકમ છે.



આકૃતિ 12.7

ઉદાહરણ 6 : અંતરસૂત્રની મદદથી બતાવો કે બિંદુઓ P (2, 4, 6), Q (– 2, – 2, – 2) અને R (6, 10, 14) સમરેખ છે.

ઉકેલ : જો કોઈ પણ બે અંતરનો સરવાળો ત્રીજા અંતરની બરાબર થાય, તો આપેલાં ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ છે.

$$PQ = \sqrt{(-2-2)^2+(-2-4)^2+(-2-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

$$QR = \sqrt{(6+2)^2+(10+2)^2+(14+2)^2} = \sqrt{64+144+256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$$

$$PR = \sqrt{(6-2)^2+(10-4)^2+(14-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

PQ = PR, QR = PQ + PR

P એ $\overline{QR}$ નું મધ્યબિંદુ છે. આથી P, Q, R સમરેખ છે.

ઉદાહરણ 7 : ચાર બિંદુઓ O (0, 0, 0), A (l, 0, 0), B (0, m, 0) અને C (0, 0, n) થી સમાન અંતરે આવેલા બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P (x, y, z) એ માંગેલુ બિંદુ છે. આથી OP = PA = PB = PC.

હવે $OP = PA \Rightarrow OP^2 = PA^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x - l)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$

તે જ પ્રમાણે $OP = PB \Rightarrow y = \frac{m}{2}$ અને $OP = PC \Rightarrow z = \frac{n}{2}$

આથી, માંગેલ બિંદુના યામ $\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ છે.

નોંધ : આ O, A, B, C માંથી પસાર થતા ગોલકનું કેન્દ્ર છે.

ઉદાહરણ 8 : A (3, 2, 2) અને B (5, 5, 4) થી સમાન અંતરે આવેલું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : x-અક્ષ પરનું બિંદુ P (x, 0, 0) સ્વરૂપનું હોય છે. બિંદુઓ A અને B એ બિંદુ P થી સમાન અંતરે હોવાથી, $PA^2 = PB^2$,

અર્થાત્ $(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-5)^2 + (0-5)^2 + (0-4)^2$

$\Rightarrow 4x = 25 + 25 + 16 - 17$ એટલે કે $x = \frac{49}{4}$.

આમ, x-અક્ષ પર અને A તથા B થી સમાન અંતરે આવેલું બિંદુ P $\left(\frac{49}{4}, 0, 0\right)$ છે.

ઉદાહરણ 9 : બિંદુ (1, 2, 3) થી $\sqrt{10}$ અંતરે આવેલું y-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે y-અક્ષ પરનું માંગેલ બિંદુ P (0, y, 0) છે.

બિંદુ (1, 2, 3) એ (0, y, 0) થી $\sqrt{10}$ અંતરે આવેલું છે.

તેથી, $\sqrt{(1-0)^2+(2-y)^2+(3-0)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$

આથી, માંગેલુ બિંદુ (0, 2, 0) છે.

ઉદાહરણ 10 : જો બિંદુઓ (2, 3, 5) અને (5, 9, 7) માંથી યામ-સમતલોને સમાંતર દોરેલા સમતલો સમાંતર ફલક બનાવતા હોય, તો સમાંતર ફલકની ધારો અને વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતર ફલકની ધારોની લંબાઈ 5 – 2, 9 – 3, 7 – 5 અર્થાત્ 3, 6, 2 છે.

વિકર્ણની લંબાઈ $\sqrt{3^2+6^2+2^2} = 7$ એકમ

ઉદાહરણ 11 : સાબિત કરો કે બિંદુઓ (0, 7, 10), (–1, 6, 6) અને (– 4, 9, 6) સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ રચે છે.

ઉકેલ : ધારો કે, P (0, 7, 10), Q (–1, 6, 6) અને R (– 4, 9, 6) આપેલાં બિંદુઓ છે.

અહીં $PQ = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$

$QR = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$

$PR = \sqrt{16+4+16} = 6$

હવે $PQ^2 + QR^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = (PR)^2$

આથી, Δ PQR માં Q કાટખૂણો હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ છે. વળી PQ = QR હોવાથી Δ PQR સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 12 : દર્શાવો કે બિંદુઓ (5, –1, 1), (7, – 4, 7), (1 – 6, 10) અને (–1, – 3, 4) સમભુજ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

ઉકેલ : ધારો કે A (5, – 1, 1), B (7, – 4, 7), C(1, – 6, 10) અને D (– 1, – 3, 4) ચતુષ્કોણનાં ચાર શિરોબિંદુઓ છે.

અહીં $AB = \sqrt{4+9+36} = 7$, $BC = \sqrt{36+4+9} = 7$, $CD = \sqrt{4+9+36} = 7$

અને $DA = \sqrt{36+4+9} = 7$

આમ AB = BC = CD = DA. આથી, ABCD સમભુજ ચતુષ્કોણ છે.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ (2, 4, 5) અને (3, 5, – 4) ને જોડતા રેખાખંડનું XZ-સમતલ જે ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે, તે ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે P (2, 4, 5) અને Q (3, 5, – 4) ને જોડતા રેખાખંડનું XZ-સમતલ R(x, y, z) બિંદુએ k:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

માટે,
$$x = \frac{3k+2}{k+1},\ y = \frac{5k+4}{k+1},\ z = \frac{-4k+5}{k+1}$$

બિંદુ R (x, y, z) એ XZ-સમતલમાં છે તેથી y-યામ શૂન્ય થશે.

એટલે કે,
$$\frac{5k+4}{k+1} = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{5}$$

આથી, માંગેલો ગુણોત્તર – 4 : 5 છે, અર્થાત્, બહિર્વિભાજનનો ગુણોત્તર 4 : 5.

ઉદાહરણ 14 : A (– 2, 0, 6) થી B (10, – 6, – 12) તરફ જવાના રસ્તા પર Aથી $\frac{5}{6}$ અંતરે બિંદુ P આવેલું હોય, તો P ના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે માગેલું બિંદુ P છે, અર્થાત્ બિંદુ P એ AB નું 5 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

આથી, $$P(x, y, z) = \left(\frac{5\times10+1\times-2}{5+1}, \frac{5\times-6+1\times0}{5+1}, \frac{5\times-12+1\times6}{5+1}\right) = (8, -5, -9)$$

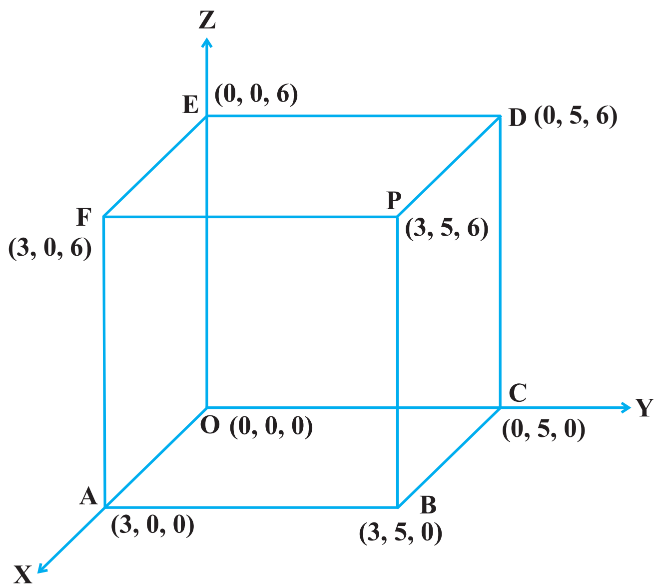
ઉદાહરણ 15 : પ્રથમ અષ્ટાંશમાં આવેલા એક લંબચોરસીય સમાંતર ફલકનું એક શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ તથા પ્રથમ અષ્ટાંશમાં આવેલું બીજું શિરોબિંદુ (3, 5, 6) છે. તેની ધારો x, y અને z-અક્ષ પર આવેલી છે. આ સમાંતર ફલકના શિરોબિંદુઓ અને ધારો મેળવો.

ઉકેલ : સમાંતર ફલકના છ સમતલો નીચે પ્રમાણે છે :

XY-સમતલમાં OABC સમતલ આવેલું છે. આ સમતલમાં આવેલાં બધાં જ બિંદુઓનો z-યામ શૂન્ય છે. XY-સમતલનું સમીકરણ $z = 0$ છે. સમતલ PDEF એ XY-સમતલને સમાંતર છે અને તે 6 એકમ અંતરે ઉપરના ભાગમાં આવેલું છે. આ સમતલનું સમીકરણ $z = 6$ છે. સમતલ ABPF એ સમતલ $x = 3$ દર્શાવે છે. સમતલ OCDE એ YZ-સમતલ છે. તેનું સમીકરણ $x = 0$ છે. સમતલ AOEF એ ZX-સમતલ છે. આ સમતલના પ્રત્યેક બિંદુનો y-યામ શૂન્ય છે. આથી, તેનું સમીકરણ $y = 0$ છે.

સમતલ AOEF ને સમાંતર અને $y = 5$ અંતરે આવેલું સમતલ BCDP છે.

x-અક્ષ પર ધાર OA આવેલી છે. x-અક્ષનું સમીકરણ $y = 0$ અને $z = 0$ છે.



આકૃતિ 12.8

y-અક્ષ અને z-અક્ષ પર અનુક્રમે ધાર OC અને OE આવેલી છે. y-અક્ષનું સમીકરણ $z = 0$ અને $x = 0$ છે. z-અક્ષનું સમીકરણ $x = 0$ અને $y = 0$ છે. બિંદુ P (3, 5, 6)નું x-અક્ષથી અંતર $\sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$ છે. બિંદુ P (3, 5, 6) નું y-અક્ષ અને z-અક્ષથી અંતર અનુક્રમે $\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$ અને $\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ છે. બિંદુ P (3, 5, 6) થી યામાક્ષો પરના લંબપાદ

A, C અને E છે. બિંદુ P માંથી યામ-સમતલો XY, YZ અને ZX પરના લંબપાદ અનુક્રમે (3, 5, 0), (0, 5, 6) અને (3, 0, 6) છે. વળી, બિંદુ P થી યામ-સમતલો XY, YZ અને ZX ના લંબઅંતર અનુક્રમે 6, 3 અને 5 છે. (જુઓ આકૃતિ 12.8)

ઉદાહરણ 16 : એક ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ A (3, 2, 0), B (5, 3, 2) અને C (– 9, 6, – 3) છે. ∠ BACનો કોણદ્વિભાજક AD એ BC ને D માં છેદે છે. D ના યામ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $AB=\sqrt{(5-3)^2+(3-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+1+4}=3$

અને $AC=\sqrt{(-9-3)^2+(6-2)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{144+16+9}=13$

∠ BACનો કોણ દ્વિભાજક AD હોવાથી, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{13}$ થાય.

અર્થાત્ બિંદુ D, BC નું 3:13 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. આથી, D ના યામ

$$\left(\frac{3(-9)+13(5)}{3+13},\frac{3(6)+13(3)}{3+13},\frac{3(-3)+13(2)}{3+13}\right)=\left(\frac{19}{8},\frac{57}{16},\frac{17}{16}\right)$$

ઉદાહરણ 17 : A (2, 0 3) B (0, 3, 2) અને C (0, 0, 1) થી સમાન અંતરે સમતલ YZ પર આવેલું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : સમતલ YZ માં આવેલા પ્રત્યેક બિંદુનો x-યામ શૂન્ય હોવાથી, ધારો કે સમતલ YZ માં આવેલું બિંદુ P $(0, y, z)$ છે. હવે, PA = PB = PC.

હવે, PA = PB $\Rightarrow (0-2)^2+(y-0)^2+(z-3)^2=(0-0)^2+(y-3)^2+(z-2)^2$ એટલે કે, $z-3y=0$

અને PB = PC

બંને સમીકરણનો ઉકેલ કરતાં, $y=1$, $z=3$ મળે.

આથી બિંદુ P ના યામ (0, 1, 3).

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 18 થી 23 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 18 : બિંદુ P (3, 4, 5)માંથી y-અક્ષ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ .... છે.

(A) 10 (B) $\sqrt{34}$ (C) $\sqrt{113}$ (D) $5\sqrt{2}$

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P માંથી y-અક્ષ પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ L છે. તેના x અને z-યામ શૂન્ય થશે, અર્થાત્ L(0, 4, 0) થાય. આથી, બિંદુઓ (0, 4, 0) અને (3, 4, 5) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{9+25}$ એટલે કે $\sqrt{34}$ થાય.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 19 : બિંદુ P (6, 7, 8) નું સમતલ XY થી લંબઅંતર .... થાય.

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P (6, 7, 8) માંથી સમતલ XY પરનો લંબપાદ L છે અને તેથી બિંદુ Lનું P થી અંતર એ Pનો z-યામ થશે. અર્થાત્ 8 એકમ.

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 20 : જો બિંદુ P (6, 7, 8) માંથી XY-સમતલ પરનો લંબપાદ L હોય, તો બિંદુ Lના યામ .... છે.

(A) (6, 0, 0) (B) (6, 7, 0) (C) (6, 0, 8) (D) આ પૈકી એક પણ નહિ

ઉકેલ : બિંદુ P માંથી XY-સમતલ પરનો લંબાપાદ L હોવાથી અને XY-સમતલમાં z-યામ શૂન્ય હોવાથી, L ના યામ (6, 7, 0) થશે.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 21 : બિંદુ P(6, 7, 8) થી x-અક્ષ પરનો લંબપાદ L હોય, તો Lના યામ .... છે.

(A) (6, 0, 0) (B) (0, 7, 0) (C) (0, 0, 8) (D) આમાંથી એક પણ નહિ

ઉકેલ : બિંદુ Pમાંથી x-અક્ષ પરનો લંબપાદ L હોવાથી, y અને z-યામ શૂન્ય થશે. આથી, બિંદુ Lના યામ (6, 0, 0).

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 22 : સમતલો $y = 0$ અને $z = 0$ હોય, તો છેદબિંદુનો બિંદુગણ .... છે.

(A) x-અક્ષનું સમીકરણ (B) y-અક્ષનું સમીકરણ

(C) z-અક્ષનું સમીકરણ (D) આમાંથી એક પણ નહિ

ઉકેલ : $y = 0$ અને $z = 0$ માટેના છેદબિંદુનો બિંદુગણ x-અક્ષ થશે કારણ કે x-અક્ષ પરના બિંદુ માટે $y = 0$ અને $z = 0$.

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 23 : બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી XZ-સમતલ પરનો લંબપાદ L છે. બિંદુ L ના યામ ....

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 5) (C) (3, 0, 5) (D) (3, 4, 0)

ઉકેલ : બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી XZ-સમતલ પરનો લંબપાદ L હોવાથી અને સમતલ XZ નાં બધાં જ બિંદુઓનો y-યામ શૂન્ય હોવાથી, લંબપાદના યામ (3, 0, 5) થશે.

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 24 થી 28 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગા પૂરો :

ઉદાહરણ 24 : XY-સમતલને સમાંતર રેખાનાં બધાં જ બિંદુઓનો .... યામ સમાન છે.

ઉકેલ : જો રેખા પરનાં બધાં જ બિંદુઓનો z-યામ સમાન હોય, તો રેખા XY-સમતલને સમાંતર હોય.

ઉદાહરણ 25 : સમીકરણ $x = b$ એ .... સમતલને સમાંતર સમતલની રજૂઆત કરે છે.

ઉકેલ : YZ-સમતલનું સમીકરણ $x = 0$ હોવાથી, સમીકરણ $x = b$ એ ઊગમબિંદુથી $| b |$ એકમ અંતરે આવેલા YZ-સમતલને સમાંતર સમતલની રજૂઆત કરે છે.

ઉદાહરણ 26 : y-અક્ષથી બિંદુ P (3, 5, 6) નું લંબઅંતર .... છે.

ઉકેલ : જો બિંદુ P માંથી y-અક્ષ પરનો લંબપાદ M હોય, તો M ના x અને z-યામ શૂન્ય થશે. Mના યામ (0, 5, 0) થશે. આથી, y-અક્ષ થી P નું લંબઅંતર $\sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45}$.

ઉદાહરણ 27 : જો બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી ZX-સમતલ પરનો લંબપાદ L હોય, તો L ના યામ .... છે.

ઉકેલ : ZX-સમતલના પ્રત્યેક બિંદુનો y-યામ શૂન્ય હોય છે. L એ બિંદુ Pમાંથી ZX-સમતલ પરનો લંબપાદ હોવાથી, Lના યામ (3, 0, 5) થશે.

ઉદાહરણ 28 : બિંદુ P (a, b, c)માંથી z-અક્ષ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ .... છે.

ઉકેલ : બિંદુ P (a, b, c) માંથી z-અક્ષ પરના લંબપાદના યામ (0, 0,c) છે. બિંદુ P (a, b, c) અને $(0, 0, c)$ વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{a^2+b^2}$ થશે.

નીચેના પ્રશ્ન ક્રમાંક 29 થી 36 માં આપેલ વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો :

ઉદાહરણ 29 : y-અક્ષ અને z-અક્ષ ભેગાં મળીને YZ-સમતલનું નિરૂપણ કરે છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 30 : બિંદુ (4, 5, – 6) અષ્ટાંશ VI માં આવેલું છે.

ઉકેલ : અસત્ય, બિંદુ (4, 5, – 6) અષ્ટાંશ V માં આવેલું છે.

ઉદાહરણ 31 : XY-સમતલ અને XZ-સમતલનો છેદ x-અક્ષ છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 32 : પરસ્પર લંબ હોય તેવા ત્રણ સમતલો અવકાશને 8 અષ્ટાંશમાં વિભાજન કરે છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 33 : સમીકરણ $z = 6$ જેનો z-અંતઃખંડ 6 હોય તેવા XY-સમતલને સમાંતર સમતલ દર્શાવે છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 34 : સમીકરણ $x = 0$ એ YZ-સમતલ દર્શાવે છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 35 : x-યામ x_0 હોય તેવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ $(x_0, 0, 0)$ છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 36 : સમીકરણ $x = x_0$ એ YZ-સમતલને સમાંતર સમતલનું નિરૂપણ કરે છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 37 : વિભાગ I ની અભિવ્યક્તિને વિભાગ II ની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી વિધાન સત્ય બને.

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) એક ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓ (3, – 5, 7) અને (–1, 7, – 6) છે. જો ઊગમબિંદુ મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો ત્રીજું શિરોબિંદુ	(i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ રચે છે.
(b) જો ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ (1, 2, – 3), (3, 0, 1) અને (–1, 1, – 4) હોય, તો આ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર	(ii) (–2, –2, –1)
(c) (3, – 1, – 1), (5, – 4, 0), (2, 3, – 2) અને (0, 6, – 3) શિરોબિંદુઓ .... ની રચના કરે છે.	(iii) સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ રચે છે.
(d) બિંદુઓ A(1, –1, 3), B (2, – 4, 5) અને C (5, – 13, 11)	(iv) (1, 1, – 2)
(e) A (2, 4, 3), B (4, 1, 9) અને C (10, – 1, 6) .... નાં શિરોબિંદુઓ છે.	(v) સમરેખ

ઉકેલ : (a) ધારો કે, (0, 0, 0) મધ્યકેન્દ્રવાળા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ A (3, – 5, 7), B (– 1, 7, – 6) અને C (x, y, z) છે.

આથી, (0, 0, 0) = $\left(\frac{3-1+x}{3}, \frac{-5+7+y}{3}, \frac{7-6+z}{3}\right)$. તે પરથી, $\frac{x+2}{3}=0$, $\frac{y+2}{3}=0$, $\frac{z+1}{3}=0$.

તેથી $x = -2$, $y = -2$ અને $z = -1$. માટે (a) ↔ (ii)

(b) ધારો કે આપેલો ત્રિકોણ ABC છે અને D, E, F, અનુક્રમે બાજુઓ BC, CA, AB નાં મધ્યબિંદુઓ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, Δ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર = Δ DEF નું મધ્યકેન્દ્ર. આથી $\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+0+1}{3}, \frac{-3+1-4}{3}\right) = (1, 1, -2)$

માટે, (b) ↔ (iv)

(c) વિકર્ણ AC નું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

અને વિકર્ણ BD નું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{5+0}{2}, \frac{-4+6}{2}, \frac{0-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

તેથી બિંદુઓ A, B, C, D સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની રચના કરે છે.

માટે, (c) ↔ (i)

(d) $AB = \sqrt{(2-1)^2+(-4+1)^2+(5-3)^2} = \sqrt{14}$

$BC = \sqrt{(5-2)^2+(-13+4)^2+(11-5)^2} = 3\sqrt{14}$

$AC = \sqrt{(5-1)^2+(-13+1)^2+(11-3)^2} = 4\sqrt{14}$

હવે, AB + BC = AC. આથી, બિંદુઓ A, B, C સમરેખ છે. માટે, (d) ↔ (v)

(e) $AB = \sqrt{4+9+36} = 7$

$BC = \sqrt{36+4+9} = 7$

$CA = \sqrt{64+25+9} = 7\sqrt{2}$

હવે $AB^2 + BC^2 = AC^2$. આથી ત્રિકોણ ABC એ સમદ્વિભુજ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

માટે (e) ↔ (iii)

સ્વાધ્યાય 12.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. નીચેનાં બિંદુઓનું આલેખન કરો :

(i) (1, – 1, 3) (ii) (– 1, 2, 4) (iii) (– 2, – 4, –7) (iv) (– 4, 2, – 5)

2. નીચેનાં બિંદુઓ જે અષ્ટાંશમાં આવેલા હોય તે જણાવો.

(i) (1, 2, 3) (ii) (4, – 2, 3) (iii) (4, –2, –5) (iv) (4, 2, –5)

(v) (– 4, 2, 5) (vi) (–3, –1, 6) (vii) (2, – 4, – 7) (viii) (– 4, 2, – 5)

3. ધારો કે બિંદુ P માંથી x-અક્ષ, y-અક્ષ, z-અક્ષ પરના લંબપાદ અનુક્રમે A, B, C છે. બિંદુ P ના યામ નીચે આપ્યા છે. તે પરથી A, B, અને C ના યામ શોધો :

(i) (3, 4, 2) (ii) (–5, 3, 7) (iii) (4, – 3, – 5)

4. ધારો કે બિંદુ P થી XY-સમતલ, YZ-સમતલ અને ZX-સમતલ પરના લંબપાદ અનુક્રમે A, B અને C છે. બિંદુ P ના યામ નીચે પ્રમાણે હોય, તો A, B, C ના યામ શોધો :

(i) (3, 4, 5) (ii) (–5, 3, 7) (iii) (4, – 3, – 5)

5. બિંદુઓ (2, 0, 0) અને (–3, 0, 0) એકબીજાથી કેટલાં દૂર છે ?

6. ઊગમબિંદુથી બિંદુ (6, 6, 7) નું અંતર શોધો.

7. સાબિત કરો કે, જો $x^2 + y^2 = 1$ હોય, તો બિંદુ $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ ઊગમબિંદુથી 1 એકમ અંતરે આવેલું છે.

8. સાબિત કરો કે બિંદુઓ A (1, – 1, 3), B (2, – 4, 5) અને C (5, – 13, 11) સમરેખ છે.

9. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં ત્રણ ક્રમિક શિરોબિંદુઓ A (6, – 2, 4), B (2, 4, – 8), C (–2, 2, 4) હોય, તો ચોથા શિરોબિંદુના યામ શોધો.

[**સૂચન :** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોનાં મધ્યબિંદુ સમાન છે.]

10. સાબિત કરો કે A (0, 4, 1), B (2, 3, – 1) અને C (4, 5, 0) શિરોબિંદુવાળો ત્રિકોણ ABC કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

11. ઊગમબિંદુ મધ્યકેન્દ્ર હોય તેવા ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓ (2, 4, 6) અને (0, –2, –5) હોય, તો ત્રીજું શિરોબિંદુ શોધો.

12. એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ D (1, 2, – 3), E (3, 0, 1) અને F (– 1, 1, – 4) છે. આ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર શોધો.

13. એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ (5, 7, 11), (0, 8, 5) અને (2, 3, – 1) છે. આ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ શોધો.

14. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A (1, 2, 3), B (– 1, – 2, – 1) અને C (2, 3, 2) હોય, તો ચોથું શિરોબિંદુ D શોધો.

15. A (2, 1, – 3) અને B (5, – 8, 3) ને જોડતા રેખાખંડનું ત્રિભાજન કરતા બિંદુઓ શોધો.

16. ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A (a, 1, 3), B (– 2, b, – 5) અને C (4, 7, c) છે. જો ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય, તો a, b, c શોધો.

17. ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A (2, 2, – 3), B (5, 6, 9) અને C (2, 7, 9) છે. ખૂણા A નો અંતઃદુભાજક BC ને બિંદુ D માં મળે છે. D ના યામ શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

18. સાબિત કરો કે ત્રણ બિંદુઓ A (2, 3, 4), B (–1, 2, – 3) અને C (– 4, 1, – 10) સમરેખ છે. બિંદુ C એ AB નું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ?

19. એક ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ (1, 5, – 1), (0, 4, – 2) અને (2, 3, 4) છે. આ ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર શોધો તથા તેનાં શિરોબિંદુઓ પણ શોધો.

20. સાબિત કરો કે બિંદુઓ (0, – 1, – 7), (2, 1, – 9) અને (6, 5, – 13) સમરેખ છે. પ્રથમ બિંદુ બાકીનાં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું જે ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તે શોધો.

21. એક સમઘનની ધારોની લંબાઈ 2 એકમ છે. તેનું એક શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુએ છે અને ત્રણ ધારો ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે તથા તેઓ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અક્ષોની ધનદિશામાં છે. આ સમઘનનાં શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 22 થી 34 વાળા વિધાનોમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

22. બિંદુ P (3, 4, 5) નું YZ-સમતલથી અંતર ....

(A) 3 એકમ (B) 4 એકમ (C) 5 એકમ (D) 550 એકમ

23. બિંદુ P (3, 4, 5) માંથી y-અક્ષ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ ....

(A) $\sqrt{41}$ (B) $\sqrt{34}$ (C) 5 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

24. ઊગમબિંદુ (0, 0, 0) થી બિંદુ (3, 4, 5) નું અંતર ....

(A) $\sqrt{50}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5

25. જો બિંદુઓ (a, 0, 1) અને (0, 1, 2) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{27}$ હોય, તો a નું મૂલ્ય ....

(A) 5 (B) ± 5 (C) – 5 (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

26. .... બે સમતલોનો છેદ x-અક્ષ છે.

(A) XY-સમતલ અને XZ-સમતલ (B) YZ-સમતલ અને ZX-સમતલ

(C) XY-સમતલ અને YZ-સમતલ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

27. y-અક્ષનું સમીકરણ ....

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $y = 0, z = 0$ (C) $z = 0, x = 0$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

28. બિંદુ (–2, –3, –4) .... માં આવેલું છે.

(A) પ્રથમ અષ્ટાંશ (B) સાતમા અષ્ટાંશ (C) બીજા અષ્ટાંશ (D) આઠમા અષ્ટાંશ

29. YZ-સમતલને સમાંતર સમતલ એ .... ને લંબ છે.

(A) x-અક્ષ (B) y-અક્ષ (C) z-અક્ષ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

30. જે બિંદુ માટે $y = 0$, $z = 0$ હોય, તે બિંદુનો બિંદુગણ ....

(A) x-અક્ષ છે (B) y-અક્ષ છે

(C) z-અક્ષ છે (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

31. જે બિંદુ માટે $x = 0$ હોય, તે બિંદુનો બિંદુપથ .... છે.

(A) XY-સમતલ (B) YZ-સમતલ (C) ZX-સમતલ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

32. જો યામ-સમતલોને સમાંતર અને (5, 8, 10) તથા (3, 6, 8)માંથી સમાંતર ફલક પસાર થતું હોય, તો સમાંતર ફલકના વિકર્ણની લંબાઈ ....

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

33. બિંદુ P (3, 4, 5)માંથી XY-સમતલ પરનો લંબપાદ L હોય, તો બિંદુ L ના યામ ....

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 5) (C) (3, 0, 5) (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

34. બિંદુ (3, 4, 5) માંથી x-અક્ષ પરના લંબપાદ L ના યામ ....

(A) (3, 0, 0) (B) (0, 4, 0) (C) (0, 0, 5) (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

નીચેના ક્રમાંક 35 થી 49 વાળાં વિધાનો સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

35. ત્રણ અક્ષો OX, OY, OZ .... નું નિર્માણ કરે છે.

36. ત્રણ સમતલો એક લંબચોરસીય સમાંતર ફલકનું નિર્માણ કરે છે. આ સમાંતર ફલકને .... લંબચોરસીય પૃષ્ઠ છે.

37. બિંદુના યામ એ .... થી અનુરૂપ અક્ષોનાં લંબઅંતર છે.

38. ત્રણ યામ-સમતલો અવકાશનું .... વિભાગમાં વિભાજન કરે છે.

39. જો બિંદુ P એ YZ-સમતલમાં આવેલું હોય, તો YZ-સમતલ પરના બિંદુના યામ .... સ્વરૂપમાં હોય.

40. YZ-સમતલનું સમીકરણ .... છે.

41. જો બિંદુ P એ z-અક્ષ પર આવેલું હોય, તો P ના યામ .... સ્વરૂપમાં હોય છે.

42. z-અક્ષનું સમીકરણ .... છે.

43. જો રેખા પરના દરેક બિંદુ માટે .... સમાન હોય, તો તે રેખા XY-સમતલને સમાંતર છે.

44. જો રેખા પરનાં બધાં જ બિંદુઓ માટે .... સમાન હોય, તો તે રેખા x-અક્ષને સમાંતર છે.

45. $x = a$ એ .... સમતલને સમાંતર છે.

46. YZ-સમતલને સમાંતર સમતલ એ .... ને લંબ છે.

47. લંબચોરસ ઓરડાનાં પરિમાણ 10, 13 અને 8 એકમ છે. આ ઓરડામાં બાંધેલી મહત્તમ લંબાઈની દોરીની લંબાઈ .... એકમ છે.

48. જો બિંદુઓ $(a, 2, 1)$ અને $(1, -1, 1)$ વચ્ચેનું અંતર 5 હોય, તો $a =$ ....

49. જો ત્રિકોણની બાજુઓ AB; BC; CA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D $(1, 2, -3)$, E $(3, 0, 1)$ અને F $(-1, 1, -4)$ હોય, તો ત્રિકોણ ABCનું મધ્યકેન્દ્ર .... છે.

50. વિભાગ I ની અભિવ્યક્તિને વિભાગ II ની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી વિધાન સત્ય બને.

વિભાગ I	વિભાગ II
(a) XY-સમતલમાં	(i) પ્રથમ અષ્ટાંશ
(b) બિંદુ (2, 3,4) .... માં આવેલું છે.	(ii) YZ-સમતલ
(c) જેનો x-યામ શૂન્ય હોય તેવા બિંદુનો બિંદુગણ	(iii) z-યામ શૂન્ય છે.
(d) રેખા x-અક્ષને સમાંતર હોય તો અને તો જ	(iv) z-અક્ષ
(e) જો $x = 0, y = 0$ સાથે લઈએ તો તેઓ ....નું નિરૂપણ કરે.	(v) XY-સમતલને સમાંતર સમતલ
(f) $z = c$ એ .... સમતલ દર્શાવે છે.	(vi) રેખા પરનાં બધાં જ બિંદુઓના y અને z-યામ સમાન છે.
(g) સમતલો $x = a, y = b$ એ .... રેખા દર્શાવે છે.	(vii) સંબંધિત ભૌમિતિક રાશિ પરના બિંદુ પરથી
(h) બિંદુના યામ એ ઊગમબિંદુથી લંબપાદ વચ્ચેનું અંતર છે.	(viii) z-અક્ષને સમાંતર
(i) દડો એ અવકાશમાં ઘન પદાર્થ છે તે .... દ્વારા આચ્છાદિત છે.	(ix) તાસક
(j) વર્તુળમાં ઘેરાયેલા સમતલનું ક્ષેત્ર .... થી જાણીતું છે.	(x) ગોલક